ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

ФИЗИКА

PHYSICS

УДК 530.12, 535
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-1-14-21

Поступило в редакцию 29.12.2018
Received 29.12.2018

Е. А. Толкачев

Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ АКСИОНА: РЕЛЯТИВИЗМ И ДУАЛЬНОСТЬ

(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)

Аннотация. На основе сравнительного анализа релятивистских уравнений связи Бокутя–Сердюкова–Федорова (БСФ) и Тамма показано, что дуальная инвариантность последних требует обратимости материального тензора Тамма, в то время как уравнения БСФ явно дуально инвариантны. Связь упомянутых подходов продемонстрирована на примере уравнений аксионной электродинамики, впервые сформулированных в формализме БСФ.

Ключевые слова: уравнения макроскопической электродинамики, дуальные преобразования, релятивистская инвариантность, аксион

Для цитирования. Толкачев, Е. А. Материальные уравнения теории аксиона: релятивизм и дуальность / Е. А. Толкачев // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 1. – С. 14–21. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-1-14-21

Evgeny A. Tolkachev

B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

CONSTITUTIVE EQUATIONS OF THE AXION THEORY: RELATIVISM AND DUALITY

(Communicated by Corresponding Member Lev M. Tomilchik)

Abstract. Based on a comparative analysis of relativistic constitutive equations of the Bokut–Serdyukov–Fedorov (BSF) and Tamm, it was shown that the dual invariance of the latter requires the reversibility of the Tamm material tensor, while the BSF equations are properly dual-invariant. The connection of the mentioned approaches is demonstrated by the example of the equations of axion electrodynamics which were first formulated in the BSF formalism.

Keywords: equations of macroscopic electrodynamics, dual transformations, relativistic invariance, axion

For citation: Tolkachev E. A. Constitutive equations of the axion theory: relativism and duality. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 1, pp. 14–21 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-1-14-21

Введение. Как известно, первые релятивистские материальные уравнения для анизотропных сред были предложены И. Е. Таммом [1, с. 19–61] почти век назад. Их геометрическая интерпретация в духе симметричного принципа двойственности [2], предложенная А. З. Петровым [3], рассматривала тензоры индукций и напряженностей как элементы взаимно-дуальных линейных пространств бивекторов. Это, в частности, указывало на возможность использования в материальных уравнениях максимум четырех тензоров второго ранга вместо ограниченного дополнительными условиями тензора 4-ранга [1, с. 19–61]. Впервые вопрос о редукции материального 4-тензора рассматривался И. Е. Таммом и Л. И. Мандельштамом [1, с. 62–67]. Важно подчеркнуть, что И. Тамм, говоря о необязательности явного использования четырехмерной скорости в материальных уравнениях, практически во всех частных случаях показывал возможность релятивистского описания отклика среды в подходе Минковского.

Последовательная релятивистская формулировка уравнений связи на основе материальных тензоров второго ранга с явной зависимостью от четырехмерной скорости среды была предложена Г. Марксом для анизотропных сред [4], а затем обобщена в [5] на частный случай бианизотропной среды. Бонусом при этом стала явная $SO(2)$ дуальная инвариантность полученных уравнений связи, замеченная, однако, далеко не сразу. Так, в фундаментальной монографии Ф. И. Федорова [7] упоминаются только дискретные дуальные преобразования материальных уравнений (§ 18). Поскольку во всех задачах, связанных с распространением электромагнитных волн, необходимо знать корни дисперсионного уравнения, определяющие положение полюсов соответствующей функции Грина, то приходится использовать нековариантные уравнения связи, зависящие в общем случае от четырех 3 × 3-матриц. Именно такой подход реализован в [6] для покоящихся гиротропных сред. Реальную техническую возможность найти формулы перевода полученных в ней результатов на язык произвольной инерциальной системы отсчета предоставила дуально и лоренц-ковариантная формулировка материальных уравнений для произвольных линейных сред в терминах бикватернионов [7]. Это позволило найти в явном виде формулы преобразования при произвольных бустах четырех материальных 3-тензоров, связывающих в системе покоя дуальные пары из напряженностей и индукций – $(\underline{D}, \underline{B})$ и $(\underline{E}, \underline{H})$ [8; 9].

На этом фоне довольно странным и требующим анализа выглядит утверждение нынешних адептов преметрического подхода, идущих по стопам Тамма, которое, во избежание двусмысленности, приведем в оригинале [10]: «Landau–Lifshitz [34], for example, like most of the engineers, see Sihvola and Lindell [59], take the bastard pair $(\underline{E}, \underline{H})$ for their considerations. From a dimensional as well as from a relativistic point of view, there is no legitimacy to give birth to such a hybrid. All dimensions in relations get mixed up by such an unholy pair».

В настоящей работе на основе сравнительного анализа релятивистских уравнений связи Бокутя–Сердюкова–Федорова (БСФ) [5] и Тамма будут выяснены ограничения на материальный тензор Тамма, следующие из требования дуальной инвариантности замкнутой системы уравнений макроскопической электродинамики в терминах полей и индукций. Связь упомянутых подходов продемонстрирована на примере уравнений аксионной электродинамики, впервые сформулированных в формализме БСФ.

Основная часть. Очевидно, что стандартные уравнения Максвелла в отсутствие источников

$$\begin{aligned} &[\underline{\nabla}\underline{E}] + \partial_{ct}\underline{B} = 0, \quad (\underline{\nabla}\underline{B}) = 0, \\ &[\underline{\nabla}\underline{H}] - \partial_{ct}\underline{D} = 0, \quad (\underline{\nabla}\underline{D}) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

наряду с хрестоматийной релятивистской формулировкой в терминах тензоров $F_{\mu\nu}(\underline{B}, \underline{E})$ и $G_{\mu\nu}(\underline{H}, \underline{D})$, переписываются в виде двух матричных уравнений относительно тех самых «bastard» и «unholy» пар

$$\left[\underline{\nabla}\begin{pmatrix}\underline{E}\\ \underline{H}\end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\partial_{ct}\begin{pmatrix}\underline{D}\\ \underline{B}\end{pmatrix} \equiv \left[\underline{\nabla}\begin{pmatrix}\underline{E}\\ \underline{H}\end{pmatrix}\right] + j_{-}\partial_{ct}\begin{pmatrix}\underline{D}\\ \underline{B}\end{pmatrix} = 0, \quad \left(\underline{\nabla}\begin{pmatrix}\underline{D}\\ \underline{B}\end{pmatrix}\right) = 0, \tag{2}$$

где $j_{-}^{2} = -1$. В силу тождественности (1) и (2) разговоры о предпочтительности каких-то пар не имеют никакого положительного содержания, тем более что в отсутствие уравнений связи, (1) и (2) представляют собой недоопределенные системы из восьми уравнений относительно двенадцати переменных. Общеизвестно [11], что их группа симметрии не сводится только к преобразованиям группы Лоренца, сохраняющим вид (1), и дуальным поворотам, задаваемым умножением (2) слева на матрицу

$$O(\vartheta) = \cos\vartheta + j_{-}\sin\vartheta. \tag{3}$$

В частности, преметрическим уравнениям электродинамики, связывающим между собой все те же «bastard» и «unholy» пары,

$$d\left[j_-\begin{pmatrix}H\\E\end{pmatrix}\wedge dt+\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0\\ \mathrm{J}\end{pmatrix}$$

внутренне присущи три типа дуальности, которые можно представить в унифицированном виде [12]. Так, в терминах вектора Римана–Зильберштейна ($\underline{B}-j_{\mp,0}\underline{E}$) дуальные преобразования сводятся к его умножению на $\exp(j_{\mp,0}\vartheta)$, где $j_+=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $j_+^2=1$, а дуальную единицу j_0, $j_0^2=0$ можно выбрать двумя способами $j_0^m=\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}$, $j_0^e=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, соответствующими двум типам галилей-инвариантных уравнений электродинамики. Тип дуальности зависит от размерности пространства n и знака детерминанта метрики g_{ij} и задается введением комплексной структуры с помощью операции звездочка (*), двойное применение которой к кососимметричным тензорам T типа $\begin{pmatrix}0\\k\end{pmatrix}$ дает $*(*T)=(-1)^{k(n-k)}\,\mathrm{sgn}[\det(g_{ij})]T$. Таким образом, в любых 4-мерных псевдоримановых пространствах имеет место $U(1)\approx SO(2)$-дуальная симметрия уравнений электродинамики (3) [12]. Дуальные преобразования преметрических уравнений смешивают между собой обычную и твистированную 2-формы, что на языке напряженностей и индукций в пространстве Минковского соответствует смешиванию полярных и аксиальных 3-векторов [12; 13].

Очевидно, не все симметрии уравнений (1), (2) выживают при добавлении к ним шести уравнений связи между полями и индукциями, что приводит, вообще говоря, к переопределенной системе, которая для своего согласования требует введения потенциала. Сохранение дуальной инвариантности при этом влечет использование двухпотенциального подхода с обязательным доказательством разрешимости так называемых уравнений нулевого поля. В этом контексте была продемонстрирована [14] частная эквивалентность «преобразований Сердюкова–Федорова» обобщенным калибровочным сдвигам Каббибо–Феррари.

Известно, что в случае статических сред линейные уравнения связи между релятивистскими ($\underline{E}$, $\underline{B}$), ($\underline{D}$, $\underline{H}$) [1, с. 19–61] и дуальными ($\underline{D}$, $\underline{B}$) и ($\underline{E}$, $\underline{H}$) парами [6, с. 277] приводят к идентичным результатам, поскольку статические материальные уравнения легко преобразуются друг в друга при не обременяющих предположениях. Также очевидна релятивистская и дуальная инвариантность полевых уравнений, записанных в матрично-тензорной форме

$$\partial_\nu\begin{pmatrix}G_{\mu\nu}(\underline{H},\underline{D})\\ \tilde F_{\mu\nu}(\underline{E},\underline{B})\end{pmatrix}\equiv\partial_\nu\begin{pmatrix}G_{\mu\nu}\\ \tilde F_{\mu\nu}\end{pmatrix}=0,$$

здесь и далее для сокращения формул не делается различия между контра- и ковариантными тензорами, что допустимо в пространстве Минковского. Отсюда почти автоматически следует релятивистски и дуально инвариантная запись произвольных линейных уравнений связи в подходе [4; 5]

$$\begin{pmatrix}G_{\mu\rho}\\ \tilde F_{\mu\rho}\end{pmatrix}u_\rho=\begin{pmatrix}\varepsilon_{\mu\nu}&\alpha_{\mu\nu}\\ \beta_{\mu\nu}&\mu_{\mu\nu}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_{\nu\sigma}\\ \tilde G_{\nu\sigma}\end{pmatrix}u_\sigma\equiv M_{\mu\nu}\begin{pmatrix}F_{\nu\sigma}\\ \tilde G_{\nu\sigma}\end{pmatrix}u_\sigma. \tag{4}$$

Столбцы в левой и правой части (4) связаны соотношением

$$\begin{pmatrix}G_{\mu\rho}\\ \tilde F_{\mu\rho}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\rho\nu\sigma}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_{\nu\sigma}\\ \tilde G_{\nu\sigma}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\rho\nu\sigma}j_-^*\begin{pmatrix}F_{\nu\sigma}\\ \tilde G_{\nu\sigma}\end{pmatrix},$$

из которого следует, что при дуальных поворотах они преобразуются одинаково, поскольку $O(\vartheta)j_-^*=j_-^*O(\vartheta)$. Тогда из требования дуальной инвариантности (4) получаем правило трансформации матрицы материальных параметров $M_{\mu\nu}$

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_{\mu\nu}&\alpha_{\mu\nu}\\ \beta_{\mu\nu}&\mu_{\mu\nu}\end{pmatrix}\to O(\vartheta)\begin{pmatrix}\varepsilon_{\mu\nu}&\alpha_{\mu\nu}\\ \beta_{\mu\nu}&\mu_{\mu\nu}\end{pmatrix}O^{-1}(\vartheta),$$

сохраняющее, как и все преобразования подобия, ее определитель и след, но также и разность недиагональных компонент в силу разложения

$$M_{\mu\nu} = \frac{\varepsilon_{\mu\nu} + \mu_{\mu\nu}}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \frac{\varepsilon_{\mu\nu} - \mu_{\mu\nu}}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \frac{\alpha_{\mu\nu} + \beta_{\mu\nu}}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} - \frac{\alpha_{\mu\nu} - \beta_{\mu\nu}}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Антисимметрия полевых тензоров накладывает на все тензорные компоненты $M_{\mu\nu}$ лоренц-ковариантное условие вида $\varepsilon_{\mu\nu}u_{\mu} = 0$, которому легко удовлетворить, если, следуя [4; 5], предположить, что все материальные 4-тензоры второго ранга в системе покоя имеют одинаковую структуру типа $\varepsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix}\varepsilon_{00} = 0, & \varepsilon_{0n} = 0\\ \varepsilon_{m0} = 0, & \varepsilon_{mn}\end{pmatrix}$. В то же время очевидно, что когда какой-то из материальных 4-тензоров пропорционален $\delta_{\mu\nu}$, в условии $\varepsilon_{\mu\nu}u_{\mu} = 0$ нет необходимости. Частный случай такой зависимости для диагональных компонент $M_{\mu\nu}$ доставляет формула (8.4) из [6] для релятивистского выражения 3-мерных формул Минковского, описывающих движущуюся изотропную среду. Ниже будет показано, что аналогичная ситуация возникает и при описании аксиона в подходе БСФ.

Однако прежде рассмотрим проблему дуальной инвариантности явно релятивистски ковариантных материальных уравнений, впервые предложенных Таммом [1, с. 19–61],

$$F_{\mu\nu}(\underline{B}, \underline{E}) = s_{\mu\nu\rho\sigma}G_{\rho\sigma}(\underline{H}, \underline{D}), \tag{5}$$

где материальный тензор меняет знак при перестановке индексов μ и ν, либо ρ и σ. Попытка воспользоваться той же стратегией, что привела к уравнениям (4), требует обратимости (5), то есть существования 4 тензора $s^{"-1"}_{\mu\nu\rho\sigma}$, такого что

$$s^{"-1"}_{\alpha\beta\mu\nu}s_{\mu\nu\rho\sigma} = 2^{-1}(\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\sigma} - \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\rho}). \tag{6}$$

Тогда легко находится уравнение, связывающее столбцы $\begin{pmatrix}G\\ \tilde{F}\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}F\\ \tilde{G}\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}G\\ \tilde{F}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s^{"-1"} & 0\\ 0 & -\frac{1}{4}\varepsilon s\varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F\\ \tilde{G}\end{pmatrix}, \tag{7}$$

где ε – абсолютно антисимметричный 4-тензор и для сокращения записи опущены тензорные индексы. То, что подобное обращение уравнений связи возможно, по крайней мере, при описании анизотропной среды следует из [1, формулы (3), (3а) и (4)].

Общим свойством релятивистски и дуально инвариантных материальных уравнений (4) и (7) является их неявный характер – поля и индукции присутствуют в левых и правых частях. При этом нахождение из (7) трансформационных свойств физических параметров среды при дуальных преобразованиях представляет собой весьма нетривиальную задачу. Особенно с учетом того, что для анизотропной среды ненулевые компоненты тензора $s_{\mu\nu\rho\sigma}$ определяются квадратной матрицей, сопровождаемой следующим комментарием Тамма: «Значений членов главной диагонали мне определить не удалось …. Члены эти выпадают из всех тех уравнений, которыми нам придется пользоваться в дальнейшем» [1, с. 35–36]. Это разительно контрастирует с уравнениями (4), в которых все материальные параметры имеют ясную физическую интерпретацию и очевидный статический предел, что делает их гораздо более удобными для прикладных расчетов. С этой точки зрения единственным преимуществом подхода Тамма является элегантное описание вклада аксионного поля в материальные уравнения, который пропорционален абсолютно антисимметричному тензору $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$.

С учетом того, что аксионная электродинамика имеет массу реальных и гипотетических приложений – от описания киральных эффектов в кварк-глюонной плазме и топологических изоляторов до моделирования темной материи, найдем формулы преобразования ее параметров при дуальных поворотах. Ограничимся в данной работе усеченным вариантом, не предполагающим введение кинетического члена для аксионного поля. Тогда из лагранжиана $L_{MCS} = -(1/4)F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (\kappa/4)P_{\mu}J_{\mu CS}$, $L_{MCS} = -(1/4)F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (\kappa/4)P_{\mu}J_{\mu CS}$, где $F_{\mu\nu}$ – тензор напряженностей, $J_{\mu CS} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A_{\nu}F_{\rho\sigma}$ $J_{\mu CS} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A_{\nu}F_{\rho\sigma}$ – топологический ток Черна–Саймона, A_{μ} – потенциал, $P_{\mu} = \partial_{\mu}\theta = (i\partial_t\theta, \underline{\nabla}\theta) = (i\partial_t\theta, \underline{P})$ $P_{\mu} = \partial_{\mu}\theta = (i\partial_t\theta, \underline{\nabla}\theta) = (i\partial_t\theta, \underline{P})$ – четырехмерный градиент от псевдоскалярного аксионного поля θ, κ – действительная константа, $\tilde{F}_{\mu\nu} = (1/2)\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$, следуют уравнения $\partial_{\nu}F_{\mu\nu} = \kappa P_{\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$, $\partial_{\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = 0$, эквивалентные системе уравнений макроскопической электродинамики [15]

$$\partial_{\nu}G_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_{\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = 0, \quad G_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} - \kappa\theta\tilde{F}_{\mu\nu}. \tag{8}$$

Уравнения связи из (8) легко переписываются в виде обратном (5)

$$G_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} - \kappa\theta\tilde{F}_{\mu\nu} = (1/2)[(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}) - \kappa\theta\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}]F_{\rho\sigma} \equiv s^{"-1"}_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}. \tag{9}$$

Отсюда и из (6) имеем материальный тензор аксионной электродинамики

$$s_{\rho\sigma\alpha\beta} = \{2[1 + (\kappa\theta)^2]\}^{-1}[(\delta_{\rho\alpha}\delta_{\sigma\beta} - \delta_{\rho\beta}\delta_{\sigma\alpha}) + \kappa\theta\varepsilon_{\rho\sigma\alpha\beta}]. \tag{10}$$

Подстановка материальных тензоров (9), (10) в (7) с последующим дуальным поворотом в принципе позволяет найти трансформационные свойства материальных параметров, один из которых аксионное поле, а второй – дилатонное поле, значение которого в выделенной системе отсчета выбрано равным единице – «невидимом» коэффициенте при $F_{\mu\nu}$ в уравнениях связи в (8). Чтобы убедиться в этом, визуализируем этот коэффициент, заменив (8) на материальные уравнения дилатон-аксионной среды

$$\begin{gathered} G_{\mu\nu} = aF_{\mu\nu} - b\tilde{F}_{\mu\nu} \to \tilde{G}_{\mu\nu} = a\tilde{F}_{\mu\nu} + bF_{\mu\nu} \to \\ \tilde{F}_{\mu\nu} = (a^2 + b^2)^{-1}(a\tilde{G}_{\mu\nu} - bG_{\mu\nu}) \to F_{\mu\nu} = (a^2 + b^2)^{-1}(aG_{\mu\nu} + b\tilde{G}_{\mu\nu}), \end{gathered} \tag{11}$$

где a и b – некоторые скалярные функции. Заметим, что дуальная инвариантность такой среды хорошо известна [16]. Нашей задачей является нахождение явного вида конечных дуальных преобразований. Представим (8) и (11) в виде матричных уравнений

$$\begin{gathered} \partial_{\nu}\begin{pmatrix} G_{\mu\nu} \\ \tilde{F}_{\mu\nu} \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} G_{\mu\nu} \\ \tilde{F}_{\mu\nu} \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (a^2+b^2)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{\mu\nu} \\ \tilde{G}_{\mu\nu} \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (a^2+b^2)^{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_{\mu\nu} \\ \tilde{F}_{\mu\nu} \end{pmatrix} \equiv \\ \equiv a\hat{M}_1\begin{pmatrix} F_{\mu\nu} \\ \tilde{G}_{\mu\nu} \end{pmatrix} - b\hat{M}_2\begin{pmatrix} G_{\mu\nu} \\ \tilde{F}_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{12}$$

тогда при дуальных преобразованиях (3) имеем $\hat{M}'_{1,2} = O(\vartheta)\hat{M}_{1,2}O^{-1}(\vartheta)$. Разбивая матрицы $\hat{M}_{1,2}$ на коммутирующие и антикоммутирующие с «мнимой единицей» из (3) части

$$\begin{gathered} \hat{M}_1 = \frac{1 + (a^2+b^2)^{-1}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1 - (a^2+b^2)^{-1}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + A_-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \hat{M}_2 = \frac{1 + (a^2+b^2)^{-1}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1 - (a^2+b^2)^{-1}}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - A_-\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{gathered}$$

находим вид этих матриц после дуального поворота

$$\hat{M}'_1 = A_+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + A_-\begin{pmatrix} \cos 2\vartheta & \sin 2\vartheta \\ \sin 2\vartheta & -\cos 2\vartheta \end{pmatrix}, \quad \hat{M}'_2 = A_-\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - A_+\begin{pmatrix} -\sin 2\vartheta & \cos 2\vartheta \\ \cos 2\vartheta & \sin 2\vartheta \end{pmatrix}.$$

Отсюда следуют законы преобразования различных форм матричных уравнений дилатон-аксионной среды.

$$\begin{aligned}
G'_{\mu\nu} &= aNF'_{\mu\nu} - bN\tilde{F}'_{\mu\nu} + (aA_-\tilde{G}'_{\mu\nu} + bA_+G'_{\mu\nu})\sin 2\vartheta,\\
\tilde{G}'_{\mu\nu} &= aN\tilde{F}'_{\mu\nu} + bF'N_{\mu\nu} - (aA_-G'_{\mu\nu} - bA_+\tilde{G}'_{\mu\nu})\sin 2\vartheta,\\
\tilde{F}'_{\mu\nu} &= aK_1\tilde{G}'_{\mu\nu} + bK_2G'_{\mu\nu} + (aA_-F'_{\mu\nu} - bA_+\tilde{F}'_{\mu\nu})\sin 2\vartheta,\\
F'_{\mu\nu} &= aK_1G'_{\mu\nu} - bK_2\tilde{G}'_{\mu\nu} - (aA_-\tilde{F}'_{\mu\nu} + bA_+F'_{\mu\nu})\sin 2\vartheta,
\end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
N &= A_+ + A_-\cos 2\vartheta = \cos^2\vartheta + (a^2+b^2)^{-1}\sin^2\vartheta,\\
K_1 &= (A_+ - A_-\cos 2\vartheta) = \sin^2\vartheta + (a^2+b^2)^{-1}\cos^2\vartheta,\\
K_2 &= (A_- - A_+\cos 2\vartheta) = \sin^2\vartheta - (a^2+b^2)^{-1}\cos^2\vartheta.
\end{aligned}$$

Комбинируя два последних уравнения из (13)

$$aK_1F'_{\mu\nu} + bK_2\tilde{F}'_{\mu\nu} =$$
$$= [(aK_1)^2 + (bK_2)^2]G'_{\mu\nu} - (a^2K_1A_- + b^2K_2A_+)\tilde{F}'_{\mu\nu}\sin 2\vartheta - ab(K_1A_+ - K_2A_-)F'_{\mu\nu}\sin 2\vartheta,$$

получаем в явном виде искомые преобразования коэффициентов материальных уравнений Тамма

$$\begin{aligned}
&G'_{\mu\nu} = a'F'_{\mu\nu} - b'\tilde{F}'_{\mu\nu} =\\
&= \frac{aK_1 + ab(K_1A_+ - K_2A_-)\sin 2\vartheta}{(aK_1)^2 + (bK_2)^2}F'_{\mu\nu} + \frac{bK_2 + (a^2K_1A_- + b^2K_2A_+)\sin 2\vartheta}{(aK_1)^2 + (bK_2)^2}\tilde{F}'_{\mu\nu} =\\
&= a\frac{\cos^2\vartheta + (a^2+b^2)\sin^2\vartheta + b\sin 2\vartheta}{\cos^4\vartheta + (a^2+b^2)^2\sin^4\vartheta + 2^{-1}\sin^2 2\vartheta}F'_{\mu\nu} -\\
&-\left\{b\frac{\cos^2\vartheta - (a^2+b^2)\sin^2\vartheta}{[(a^2+b^2)^2\sin^4\vartheta + \cos^4\vartheta + 2^{-1}(a^2-b^2)\sin^2 2\vartheta]} -\right.\\
&\left.-\frac{[(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)]\sin^2\vartheta + (a^2-b^2-1)\cos^2\vartheta}{2[(a^2+b^2)^2\sin^4\vartheta + \cos^4\vartheta + 2^{-1}(a^2-b^2)\sin^2 2\vartheta]}\sin 2\vartheta\right\}\tilde{F}'_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Очевидно, что при $\vartheta = 0$ и $a = 1$ из (14) следует (8). Важным свойством является то, что выбор начальных значений $a_0 = 1,\ b_0 = 0$ является дуально инвариантным. Однако при исходном значении $a_0 = 1,\ b_0 = \kappa\theta(\vec{x}, t)$ после дуального поворота этот коэффициент становится функцией пространственно-временных координат, выражающейся через значение аксионного поля.

Установим, в заключение, частную связь между материальными уравнениями Тамма (11) и Федорова (4) для дилатон-аксионной среды. Для этого представим второе уравнение из (12) в виде

$$\begin{pmatrix} G_{\mu\nu} \\ \tilde{F}_{\mu\nu} \end{pmatrix} = a^{-1}\begin{pmatrix} a^2+b^2 & -b \\ -b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{\mu\nu} \\ \tilde{G}_{\mu\nu} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

В силу скалярности материальных параметров во всех инерциальных системах отсчета будут справедливы следующие из (11) и (15) соотношения между лоренцевыми и дуальными парами

$$\begin{pmatrix} \underline{D} \\ \underline{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{B} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \underline{D} \\ \underline{B} \end{pmatrix} = a^{-1}\begin{pmatrix} a^2+b^2 & -b \\ -b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{H} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Сворачивая уравнение (15) с четырехмерной скоростью, приводим его к виду (4)

$$\begin{pmatrix} G_{\mu\nu} \\ \tilde{F}_{\mu\nu} \end{pmatrix}u_\nu = a^{-1}\begin{pmatrix} a^2+b^2 & -b \\ -b & 1 \end{pmatrix}\delta_{\mu\rho}\begin{pmatrix} F_{\rho\nu} \\ \tilde{G}_{\rho\nu} \end{pmatrix}u_\nu \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon^A_{\mu\rho} & \alpha^A_{\mu\rho} \\ \alpha^A_{\mu\rho} & \mu^A_{\mu\rho} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{\rho\nu} \\ \tilde{G}_{\rho\nu} \end{pmatrix}u_\nu,$$

откуда в системе покоя следует второе из уравнений (16), а значит и первое.

Заключение. Представляет интерес развитие полученных результатов с учетом возможной динамики аксионного поля [15] и установлением их связи с двухпотенциальными моделями дуально заряженных черных дыр, использующими, как правило, два типа потенциалов [17].

Благодарности. Выражаю благодарность Л. М. Томильчику и Ю. А. Курочкину за полезные комментарии. Работа выполнена при частичной поддержке БФФИ (грант № Ф16Д-003).

Acknowledgements. The author is thankful to L. M. Tomilchik and Yu. A. Kurochkin for valuable comments. The work is partially sponsored by BFFR (grant No. Ф16Д-003).

Список использованных источников

1. Тамм, И. Е. Собрание научных трудов / И. Е. Тамм. – Москва, 1975. – Т. 1. – С. 19–67.

2. Левашов, А. Е. Движение и двойственность в релятивистской электродинамике / А. Е. Левашов. – Минск, 1979. – 320 с.

3. Петров, А. З. Новые методы в общей теории относительности / А. З. Петров. – Москва, 1966. – 495 с.

4. Marx, G. Das Elektromagnetische Feld in Bewegten Anisotropen Medien / G. Marx // Acta Phys. Acad. Sci. Hung. – 1953. – Vol. 3, N 2. – P. 75–94. https://doi.org/10.1007/bf03155909

5. Бокуть, Б. В. К электродинамике оптически активных сред / Б. В. Бокуть, А. М. Сердюков, Ф. И. Федоров. – Минск, 1970. – 36 с.

6. Федоров, Ф. И. Теория гиротропии / Ф. И. Федоров. – Минск, 1976. – 456 с.

7. Березин, А. В. Дуальноинвариантные уравнения связи для покоящихся гиротропных сред / А. В. Березин, Е. А. Толкачев, Ф. И. Федоров // Докл. Акад. наук БССР. – 1985. – Т. 29, № 7. – С. 595–597.

8. Кватернионные уравнения связи для движущихся гиротропных сред / А. В. Березин [и др.] // Журн. прикладной спектроскопии. – 1987. – Т. 47, № 1. – С. 113–118.

9. Трегубович, А. Я. Алгебраические методы в электродинамике истинных и индуцированных монополей: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук / А. Я. Трегубович. – Минск, 1992. – 13 с.

10. Magnetoelectric Cr_2O_3 and relativity theory / F. Hehl [et al.] // Eur. Phys. J. B. – 2009. – Vol. 71, N 3. – P. 321–329. https://doi.org/10.1140/epjb/e2009-00203-7

11. Фущич, В. И. Симметрия уравнений Максвелла / В. И. Фущич, А. Г. Никитин. – Киев, 1983. – 200 с.

12. Дудко, И. Г. Три типа дуальности преметрических уравнений электродинамики: геометрический аспект / И. Г. Дудко, Е. А. Толкачев // Pr. 9th Int. Conf. «Boyai–Gauss–Lobachevsky Methods of Non-Euclidian Geometry in Modern Physics». – Минск, 2015. – P. 449–454.

13. On the theory of the skewon field: From electrodynamics to gravity / F. W. Hehl [et al.] // arXiv: gr-qc. 2005. – 0506042 v1. – P. 1–15.

14. Толкачев, Е. А. Калибровочная свобода уравнений макроскопической электродинамики: двухпотенциальный подход / Е. А. Толкачев // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 6. – С. 47–51.

15. Nikitin, A. G. Symmetries of field equations of axion electrodynamics / A. G. Nikitin, O. Kuriksha // arXiv: hep-th. 2012. – 1201.4935v1. – P. 1–24.

16. Gaillard, M. K. Self-Duality in Nonlinear Electromagnetism / M. K. Gaillard, B. Zumino // arXiv: hep-th. 1997. – 9705226 v1. – P. 1–12.

17. Frolov, V. P. Duality and μ-separability of Maxwell equations in Kerr-NUT-(A)dS spacetime / V. P. Frolov, P. Krtous // arXiv: hep-th. 2018. – 1812.08697v1. – P. 1–7.

References

1. Tamm I. E. *Collection of scientific papers.* Moscow, 1975, vol. 1, pp. 19–67 (in Russian).

2. Levashov A. E. *Motion and duality in relativistic electrodynamics.* Minsk, 1979. 320 p. (in Russian).

3. Petrov A. Z. *New methods in general theory of relativity.* Moscow, 1966. 495 p. (in Russian).

4. Marx G. Das Elektromagnetische Feld in Bewegten Anisotropen Medien. *Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 1953, vol. 3, no. 2, pp. 75–94. https://doi.org/10.1007/bf03155909

5. Bokut B. V., Serduykov A. M., Fedorov F. I. *To electrodynamics of optically active media.* Minsk, 1970. 36 p. (in Russian).

6. Fedorov F. I. *Theory of gyrotropy.* Minsk, 1976. 456 p. (in Russian).

7. Berezin A. V., Tolkachev E. A., Fedorov F. I. Dual-invariation of constrain equations for motionless gyrotropic media. *Doklady Akademii nauk BSSR = Doklady of the Academy of Sciences of the BSSR*, 1985, vol. 29, no. 7, pp. 595–597 (in Russian).

8. Berezin A. V., Tregubovich A. Ya., Tolkachev E. A., Fedorov F. I. Quaternion coupling equations for moving gyrotropic media. *Journal of Applied Spectroscopy,* 1987, vol. 47, no. 1, pp. 747–751. https://doi.org/10.1007/bf00657146

9. Tregubovich A. Ya. *Algebraic methods in electrodynamics of true and induced monopoles.* Minsk, 1992. 13 p. (in Russian).

10. Hehl F., Obukhov Y., Rivera J. P., Schmid H. Magnetoelectric Cr_2O_3 and relativity theory. *European Physical Journal B*, 2009, vol. 71, no. 3, pp. 321–329. https://doi.org/10.1140/epjb/e2009-00203-7

11. Fuschich V. I., Nikitin A. G. *Symmetry of the Maxwell equations.* Kiev, 1983. 200 p. (in Russian).

12. Dudko I. G., Tolkachev E. A. Three types of duality of premetric equations of electrodynamics: geometric aspect. *Proceedings 9th International Conference "Boyai–Gauss–Lobachevsky Methods of Non-Euclidian Geometry in Modern Physics".* Minsk, 2015, pp. 449–454 (in Russian).

13. Hehl F. W., Obukhov Yu. N., Rubilar G. F., Blagojevic M. *On the theory of the skewon field: From electrodynamics to gravity.* arXiv: gr-qc. 2005, 0506042 v1, pp. 1–15.

14. Tolkachev E. A. Gauge freedom of the macroscopic electrodynamics equations: the two-potential approach. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2015, vol. 59, no. 6, pp. 47–51 (in Russian).

15. Nikitin A. G., Kuriksha O. *Symmetries of field equations of axion electrodynamics.* arXiv: hep-th. 2012, 1201.4935v1, pp. 1–24.

16. Gaillard M. K., Zumino B. *Self-Duality in Nonlinear Electromagnetism*. arXiv: hep-th. 1997, 9705226 v1, pp. 1–12.

17. Frolov V. P., Krtous P. *Duality and μ-separability of Maxwell equations in Kerr-NUT-(A)dS spacetime.* arXiv: hep-th. 2018, 1812.08697v1, pp. 1–7.

Информация об авторе

Толкачев Евгений Аркадьевич – д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: tea@dragon.bas-net.by.

Information about the author

Tolkachev Evgeny Arkadievich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief researcher. B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Science of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tea@dragon.bas-net.by.