ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 411.42 Поступило в редакцию 29.10.2018
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-2-135-141 Received 29.10.2018

В. И. Берник[1], Н. В. Бударина[2], Х. О'Доннелл[3]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Технологический институт, Дандолк, Ирландия
[3]Технологический институт Дублина, Дублин, Ирландия

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ХИНЧИНА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Аннотация. В 1998 г. Д. Клейнбок и Г. Маргулис доказали гипотезу В. Г. Спринджука: неравенство $|a_n f_n(x) + ... + a_1 f_1(x) + a_0| < H^{-n-\varepsilon}$, $a_j \in \mathbb{Z}, 0 \le j \le n, H = \max_{0 \le j \le n} |a_j|$, при любом $\varepsilon > 0$ имеет для почти всех x (в смысле меры Лебега) из интервала $I \subset \mathbb{R}$ лишь конечное число решений в целых числах a_j и невырожденных функциях $f_j(x)$. Они же вместе с В. Бересневичем и В. Берником заменили правую часть неравенства на $H^{-n-1}\psi(H)$ и для монотонно убывающей функции $\psi(H)$ со сходящимся рядом $\sum_{H=1}^{\infty} \psi(H)$ доказали аналог классической теоремы Хинчина о приближении действительных чисел рациональными. В данной работе мы обобщаем последний результат на аналитические функции $f_j(z), z \in \mathbb{C}$.

Ключевые слова: аналитическая функция, диофантовы приближения, теорема Хинчина

Для цитирования. Берник, В. И. Обобщение теоремы Хинчина для линейной комбинации аналитических линейно независимых функций / В. И. Берник, Н. В. Бударина, Х. О'Доннелл // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 2. – С. 135–141. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-2-135-141

Vasili I. Bernik[1], Nataliya V. Budarina[2], Hugh O'Donnell[3]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]Dundalk Institute of Technology, Dundalk, Ireland
[3]Dublin Institute of Technology, Dublin, Ireland

GENERALIZING KHINCHIN'S THEOREM TO A LINEAR COMBINATION OF ANALYTICAL LINEARLY INDEPENDENT FUNCTIONS

(Communicated by Corresponding Member Valentine V. Gorokhovik)

Abstract. Let $f_j(z), 1 \le j \le n$, be the analytic functions of a complex variable, together with 1 linearly independent over a field $\mathbb{R}$, and $\psi(x)$ be a monotonically decreasing function. Then the inequality $|a_n f_n(z) + ... + a_1 f_1(z) + a_0| < H^{-\frac{n-2}{2}} \psi_{3}^{\frac{1}{2}}(H)$, $a_j \in \mathbb{Z}, 0 \le j \le n, H = \max_{0 \le j \le n} |a_j|$, for convergence of the series $\sum_{H=1}^{\infty} \psi(H)$ has an infinite number of solutions in the vectors $(a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0)$ only for the set of Lebesgue measure zero. This improves the theorems of V. G. Sprindzhuk, D. Kleinbock, and G. Margulis.

Keywords: analytic function, diophantine approximation, Khinchin's theorem

For citation: Bernik V. I., Budarina N. V., O'Donnell H. Generalizing Khinchin's theorem to a linear combination of analytical linearly independent functions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus,* 2019, vol. 63, no. 2, pp. 135–141 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-2-135-141

В 1924 г. А. Я. Хинчин [1] доказал метрическую теорему о значениях модуля разности $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|$ для действительного числа $\alpha\in\mathbb{R}$ и $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$.

Теорема Хинчина. *Пусть* $\psi(x)$ *– положительная монотонно убывающая функция,* $I\subset\mathbb{R}$ *– интервал на действительной прямой, – мера Лебега измеримого множества* $A\subset\mathbb{R}$. *Обозначим через* $\mathcal{L}_1(\psi)$ *множество* $\alpha\in I$, *для которых неравенства*

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{\psi(q)}{q}$$

или

$$|q\alpha-p|<\psi(q) \tag{1}$$

имеют бесконечное число решений в $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$. *Тогда*

$$\mu\mathcal{L}_1(\psi)=\begin{cases}0, & \sum\limits_{q=1}^{\infty}\psi(q)<\infty,\\ \mu I, & \sum\limits_{q=1}^{\infty}\psi(q)=\infty.\end{cases}$$

Заметим, что частный случай теоремы Хинчина при $\psi(q)=q^{-2}$ доказал Э. Борель, а в случае сходимости ряда требование монотонности функции $\psi(x)$ можно опустить. Левую часть неравенства (1) можно рассматривать как значение модуля линейной функции в точке α. Хинчин обобщил неравенство (1) на многочлены произвольной степени [2], доказав, что при любом $\varepsilon>0$ неравенство

$$|P(x)|=\left|a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\right|<\varepsilon H^{-n} \tag{2}$$

имеет для почти всех x бесконечное число решений в многочленах $P(x)$ степени $\deg P=n$ и высоты $H=\max\limits_{0\le j\le j}|a_j|$. Систематическое исследование неравенства (2) началось после введения К. Малером [3] классификации действительных чисел и комплексных чисел.

Одной из центральных проблем классификации Малера стала метрическая проблема о мере множества S-чисел.

Обозначим через $\mathcal{L}_n(\psi)$ множество $x\in\mathbb{R}$, для которых неравенство

$$|P(x)|<\psi(H)$$

имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x)$ вида (2). Малер предположил, что при $\psi(H)=H^{-w}$, $w>n$, множество $\mathcal{L}_n(\psi)$ имеет нулевую меру Лебега. Сам он доказал такое утверждение при $w>4n$. В серии работ [4; 5] И. Кубилюс, Левек, В. Шмидт, Ф. Фолькман решили частные случаи проблемы Малера и довели неравенство для w до вида $w>\frac{4}{3}n$. Наконец, В. Г. Спринджук [6; 7] доказал гипотезу Малера, а также ее аналоги в полях комплексных и p-адических чисел. В [8; 9] было доказано, что

$$\mu\mathcal{L}_n(\psi)=\begin{cases}0, & \sum\limits_{H=1}^{\infty}\psi(q)<\infty,\\ \mu I, & \sum\limits_{H=1}^{\infty}\psi(q)=\infty.\end{cases} \tag{3}$$

Утверждение (3) было обобщено в работах [10–12] с многочленов на линейные комбинации функций, а при $\psi(H)=H^{-w}$ и $w>n$ была найдена размерность Хаусдорфа $\dim\mu\mathcal{L}_n(\psi)=\frac{n+1}{w+1}$ [13; 14].

Обобщение неравенства в поле комплексных чисел было получено в [6; 7], а для аналитических функций Д. Клейнбок получил аналог гипотезы Спринджука [15].

Т е о р е м а 1. *Пусть* $f_j(z), 1 \le j \le n,$ *– аналитические функции и* $1, f_1(z), ..., f_n(z)$ *линейно-независимы над* $\mathbb{R}$. *Тогда неравенство*

$$\left|F_n(z)\right| = \left|a_n f_n(z) + ... + a_1 f_1(z) + a_0\right| < H^{-\frac{n-1}{2}-\varepsilon} \quad (4)$$

имеет для почти всех $z \in \mathbb{C}$ *лишь конечное число решений в векторах* $\overline{a} = (a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0) \in \mathbb{Z}^{n+1}$.

Приведем рассуждение, которое позволяет в правой части неравенства (4) поставить функцию $H^{-\frac{n-2}{2}} \psi_1^{\frac{1}{2}}(H)$, где функция $\psi_1(H)$ монотонно убывает и ряд $\sum\limits_{H=1}^{\infty} \psi_1(H)$ сходится. Сделаем замену переменной $f_1(z) = u,\ f_j(z) = f_j(f_1^{-1}(u)), 2 \le j \le n$. Чтобы не менять обозначения будем считать, что первоначальные заданные функции имеют вид $z, f_2(z), ..., f_n(z)$ и вместе с 1 линейно-независимы над $\mathbb{R}$. Докажем следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. *Обозначим через* $M_n(\psi_1)$ *множество* $z \in \mathbb{C}$, *для которых система неравенств*

$$\left|F_n(z)\right| < H^{-\frac{n-2}{2}} \psi_1^{\frac{1}{2}}(z), \quad H^{\frac{5}{8}} < \left|F_n'(z)\right| < c_1 H \quad (5)$$

имеет бесконечное число решений в векторах $\overline{a}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что теорема будет доказана, если мы установим ее для любого круга в $\mathbb{C}$. Возьмем единичный круг $K = K(0,1)$ с центром в нуле единичного радиуса. Для функции $F_n(z)$ возьмем такую точку $\alpha_1 \in K(0,1)$, чтобы в ней выполнялись неравенства (5) и такую, чтобы на всем множестве B_1 решений (5) выполнялось равенство $\min\limits_{\alpha_1 \in B_1} \left|F_n(z)\right| = F(\alpha_1)$.

Построим два круга $\sigma(F)$ и $\sigma_1(F)$, радиусы которых равны правым частям следующих неравенств:

$$\sigma(F) = \left\{ z = K : \left|z - \alpha_1\right| < c_2 H^{-\frac{n-2}{2}} \left|F'(\alpha_1)\right|^{-1} \right\},$$

$$\sigma_1(F) = \left\{ z = K : \left|z - \alpha_1\right| < c_3 \left|F'(\alpha_1)\right|^{-1} \right\}. \quad (6)$$

Очевидно, что

$$\mu\sigma(F) < (c_2 c_3^{-1})^2 H^{-(n-2)} \mu\sigma_1(F).$$

Согласно лемме из [7; 9] круг $\sigma(F)$ содержит все решения (5), для которых α_1 ближайшая к z точка. Покажем, что круги $\sigma_1(F_1)$, $\sigma_1(F_2)$ при подходящем выборе c_3 не пересекаются для различных функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$ высоты $\max\{H(F_1), H(F_2)\} \le Q$, у которых совпадают коэффициенты $a_n, ..., a_2$.

Разложим каждую из функций $F_j(z)$, $j = 1, 2$, в точке α_{1j} в ряд Тейлора в круге (6). Получим

$$F_j(z) = F_j(\alpha_{1j}) + F_j'(\alpha_j)(z - \alpha_{1j}) + \sum_{k=2}^{\infty} (k!)^{-1} F^{(k)}(\alpha_{1j})(z - \alpha_{1j})^k. \quad (7)$$

Так как

$$\left|z - \alpha_{1j}\right| < c_3 \left|F'(\alpha_{1j})\right|^{-1} < c_3 H^{\frac{5}{8}},$$

и при достаточно большом H

$$\left|\sum_{k=2}^{\infty}(k!)^{-1}F^{(k)}(\alpha_{1j})(z-\alpha_{1j})^k\right| \le c_3 H^{-\frac{1}{4}},$$

то из (7) получаем

$$\left|F_j(z)\right| < 2c_3.$$

Зафиксируем вектор $\overline{b}=(a_n, ..., a_2).$ Одна из этих координат равна H, а остальные $n-2$ координаты заключены в интервале $-H \le a_j \le H$ и принимают $(2H+1)^{n-2}$ значений. Если z_0 есть точка пересечения двух кругов $\sigma_1(F_1)$ и $\sigma_1(F_2)$ с одним и тем же вектором $\overline{b},$ то выполняются оба неравенства (5). Рассмотрим функцию

$$R(z)=F_2(z)-F_1(z)=(a_{12}-a_{11})z+a_{02}-a_{01}=d_1z+d_0, \left|d_j\right| \le 2H, d_j \in \mathbb{Z}.$$

Мнимая или действительная часть этой функции в точке z_0 по модулю не меньше единицы. Это означает $\left|R(z)\right| \ge 1,$ что при $c_3 < 0,5$ противоречиво.

Если круги $\sigma_1(F_1)$ и $\sigma_1(F_2)$ не пересекаются, то

$$\sum_{F\in\mathcal{F}(\overline{b})} \mu\sigma_1(F_1) \le \mu C(0,1)=\pi.$$

Поэтому

$$\sum_{\overline{b}}\sum_{F\in\mathcal{F}(\overline{b})} \mu\sigma_1(F_1) < c_4 H^{n-2}H^{-n+2}\psi_1(H)=c_4\psi_1(H). \tag{8}$$

Ряд, составленный из правых частей неравенства (8), по условию теоремы 2 сходится и поэтому по известной лемме Бореля–Кантелли заключаем, что множество $M_n(\psi_1)$ имеет нулевую меру. При условии $\left|F_n'(z)\right| \le H^{\frac{5}{8}}$ в (5) используется метод Спринджука [7].

Случай расходимости. Все теоремы, являющиеся аналогами теоремы Хинчина о расходимости на многообразиях, используют понятие регулярной системы счетного множества точек. Это понятие было введено в 1970 г. Бейкером и Шмидтом [13].

Счетное множество точек $\Gamma=(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t, ...)$ вместе с заданной на Г функцией $f(\beta_j)$ называется регулярной системой, если для любого интервала I найдется такое число $T_0 = T_0(I),$ что для всех $T > T_0$ можно выбрать t чисел $\beta_j, 1 \le j \le t,$ из $G_1 = \Gamma \bigcap I,$ удовлетворяющих следующим условиям:

$$1.\ N(\beta_j) < T, 1 \le j \le t;$$

$$2. \left|\beta_i - \beta_j\right| \ge T^{-1}, 1 \le i < j \le t;$$

$$3.\ t > dT\mu I, \text{ для некоторого } 0 \le d < 1.$$

Бейкер и Шмидт доказали, что действительные алгебраические числа вместе с функцией $N(\alpha_j)=(H(\alpha_j))^{n+1}\log^{-\gamma} H, \gamma=3n(n+1)$ образуют регулярную систему.

Этот результат был использован при получении оценки снизу размерности Хаусдорфа множества действительных чисел x, для которых неравенство

$$\left|x-\alpha\right| < (H(\alpha))^{-w}, w > n,$$

имеет бесконечное число решений в алгебраических числах α степени n. Оценка снизу была получена для любых регулярных систем и действительных чисел, удовлетворяющих неравенству вида (5) с β_j из регулярной системы.

Однако для доказательства аналога теоремы Хинчина в случае расходимости свойства регулярности недостаточно. Необходимо доказать регулярность при $\gamma = 0.$ Для алгебраических чисел такой результат был получен в [8], а в работе [11] регулярность нулей линейных комбинаций невырожденных функций была доказана с $\gamma = 0,$ что позволило в общем случае получить аналог теоремы Хинчина в случае расходимости. Вместе с результатами [11; 12] и [10] приходим к следующему утверждению.

Пусть невырожденные функции $f_1(x), ..., f_n(x)$ дифференцируемы $n+1$ раз и

$$F_n(x) = a_n f_n(x) + ... + a_1 f_1(x) + a_0.$$

Обозначим через $K(\psi_2)$ множество x из интервала J, для которых неравенство

$$\left|F_n(x)\right| < H^{-n+1}\psi_2(H)$$

имеет бесконечное число решений в функциях $F_n(x).$

Т е о р е м а 3. *Справедливо равенство*

$$\mu K(\psi_2) = \begin{cases} 0, & \sum\limits_{H=1}^{\infty} \psi_2(H) < \infty \\ \mu J, & \sum\limits_{H=1}^{\infty} \psi_2(H) = \infty. \end{cases}$$

В настоящей работе мы получаем обобщение теоремы 3 на комплексно-значные аналитические функции в $\mathbb{C}$.

Пусть $f_1(z), ..., f_n(z)$ аналитические функции и $1, f_1(z), ..., f_n(x)$ линейно независимы над $\mathbb{R}$. Обозначим через $K(\psi_3)$ для монотонно убывающей функции $\psi_3(x), x > 0,$ множество z из круга $C(z_0, r),$ для которых неравенство

$$\left|F_n(z)\right| = \left|a_n f_n(z) + ... + a_1 f_1(z) + a_0\right| < H^{-\frac{n-2}{2}} \psi_3^{\frac{1}{2}}(H) \tag{9}$$

имеет бесконечное число решений в векторах $\overline{a}.$

Т е о р е м а 4. *Имеет место равенство*

$$\mu K(\psi_3) = \begin{cases} 0, & \sum\limits_{H=1}^{\infty} \psi_3(H) < \infty & (10) \\ \mu C(z_0, r), & \sum\limits_{H=1}^{\infty} \psi_3(H) = \infty. & (11) \end{cases}$$

Доказательство утверждения (10) разбивается на два этапа. На первом этапе к неравенству (9) добавляется неравенство

$$H^{\frac{5}{8}} < \left|F'(z)\right| < c_5 H$$

и доказательство аналогично теореме 2. На втором этапе – $\left|F'(z)\right| < H^{\frac{5}{8}}.$ В силу монотонности функции $\psi_3(x)$ можно ослабить неравенство (9) до неравенства

$$\left|F_n(z)\right| < c_6 H^{-\frac{n-1}{2}} \tag{12}$$

и воспользоваться теоремой Клейнбока, поскольку сумма показателей аппроксимации $|F_n(z)|$ и $|F_n'(z)|$ равна $-\frac{n-1}{2}+\frac{5}{8}=-\frac{4n-9}{8}$. Это позволяет с запасом оценить меру в системе неравенств $|F'(z)|<H^{\frac{5}{8}}$ и (12).

Аналогично теореме 4 можно установить следующий факт.

Пусть функция $F_n(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 4. Обозначим через $B_1(\delta_0)$ множество $z\in\mathbb{C}(z_0,r)$, для которых система неравенств

$$|F_n(z)|<Q^{-\frac{n-1}{2}},\quad |F'(z)|<\delta_0 Q$$

имеет хотя бы одно решение в функциях $F_n(z), H(F_n)\le Q$.

Т е о р е м а 5. *Существует* $\delta_0=\delta_0(n)$, *при котором*

$$\mu B_1(\delta_0)<\frac{1}{4}\mu C(z_0,r).$$

Из теоремы 5 следует, что на множестве $B_2=C(z_0,r)\setminus B_1(\delta_0)$ система неравенств

$$|F_n(z)|<Q^{-\frac{n-1}{2}},\quad |F'(z)|\ge\delta_0 Q \tag{13}$$

выполняется и

$$\mu B_3\ge\frac{3}{4}\mu C(z_0,r). \tag{14}$$

Из (14) и леммы Клейнбока [15] следует, что существует корень β_1 в круге $C_1\subset C(z_0,r)$ с мерой $\mu C_1<c_7Q^{-n-1}$ и $|z-\beta_1|<c_7Q^{-n-1}$. Исключим этот круг из B_2 и на множестве $B_2\setminus C_1$ найдем точку z_2, в которой выполняется система (13). Затем в круге C_2 с площадью $\mu C_2<c_8Q^{-n-1}$ найдем новый корень β_2 функции $F_n(z)$. Эту процедуру можно продолжать до тех пор, пока кругами C_j не покроем $\frac{3}{4}$ меры круга $C(z_0,r)$. Для этого понадобится не менее $t>\frac{3}{4}Q^{n+1}\mu C(z_0,r)$ шагов. Из построенных нулей выберем максимальную систему нулей, как в [13], находящихся друг от друга на расстоянии $c_9Q^{-\frac{n-1}{2}}$. Это множество нулей образует регулярную систему, что позволяет доказать (11), как в [8; 11].

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект Ф17-101).

Acknowledgements. This research was supported by BRFFR (project Ф17-101).

Список использованных источников

1. Khintchine, A. Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen / A. Khintchine // Mathematische Annalen. – 1924. – Vol. 92, N 1–2. – P. 115–125. https://doi.org/10.1007/bf01448437

2. Khintchine, A. Über eine Klasse linear diophantischer Approximationen. Rendiconti / A. Khinchine // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. – 1926. – Vol. 50, N 2. – P. 170–195. https://doi.org/10.1007/bf03014726

3. Mahler, K. Űber das Maß der Menge aller S-Zahlen / K. Mahler // Mathematische Annalen. – 1932. – Vol. 106, N 1. – P. 131–139. https://doi.org/10.1007/bf01455882

4. Кубилюс, И. О применении метода И. М. Виноградова к решению одной задачи метрической теории чисел // Докл. Акад. наук СССР. – 1949. – Т. 67, № 5. – С. 783–786.

5. Volkmann, B. The real cubic case of Mahler's conjecture / B. Volkmann // Mathematika. – 1961. – Vol. 8, N 1. – P. 55–57. https://doi.org/10.1112/s0025579300002126

6. Спринджук, В. Г. Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел // Изв. Академии наук СССР. Сер. математическая. – 1965. – Т. 29, № 2. – С. 379–436.

7. Спринджук, В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск, 1967. – 184 с.

8. The Khintchine–Groshev Theorem for Planar Curves / V. Beresnevich [et al.] // Proc. Royal Society of London. Ser. A: Math., Phys. and Engin. Sci. – 1999. – Vol. 455, N 1988. – P. 3053–3063. https://doi.org/10.1098/rspa.1999.0439

9. Берник, В. И. О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов / В. И. Берник // Acta Arithmetica. – 1989. – Т. 53, № 1. – С. 17–28.

10. Beresnevich, V. A Baker's conjecture and Hausdorff dimension / V. Beresnevich, V. Bernik // Publicationes Mathematicae Debrecen. – 2000. – Vol. 54, N 3–4. – P. 263–269.

11. Metric Diophantine approximation: The Kleinbok–Grosher theorem for nondegenerate manifolds / V. Beresnevich [et al.] // Moscow Mathematical Journal. – 2002. – Vol. 2, N 2. – P. 203–225. https://doi.org/10.17323/1609-4514-2002-2-2-203-225

12. Bernik, V. Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions / V. Bernik, D. Kleinbock, G. Margulis // International Mathematics Research Notices. – 2001. – Vol. 2001, N 9. – P. 453–486. https://doi.org/10.1155/s1073792801000241

13. Baker, A. Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker, W. Schmidt // Proceedings of the London Mathematical Society. – 1970. – Vol. s3-21, N 1. – P. 1–11. https://doi.org/10.1112/plms/s3-21.1.1

14. Берник, В. И. Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник // Acta Arithmetica. – 1983. – Т. 42, № 3. – С. 219–253.

15. Kleinbock, D. Sprindžuk conjectures for complex analytic manifolds. Algebraic groups / D. Kleinbock, A. Baker // Tata Institute of Fundamental Research. – Mambai, 2004. – P. 539–553.

References

1. Khintchine A. Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen. *Mathematische Annalen*, 1924, vol. 92, no. 1–2, pp. 115–125 (in German). https://doi.org/10.1007/bf01448437

2. Khintchine A. Über eine Klasse linear diophantischer Approximationen. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1926, vol. 50, no. 2, pp. 170–195 (in German). https://doi.org/10.1007/bf03014726

3. Mahler K. Űber das Maß der Menge aller S-Zahlen. *Mathematische Annalen*, 1932, Vol. 106, no. 1, pp. 131–139 (in German). https://doi.org/10.1007/bf01455882

4. Kubilius J. On an application of I. M. Vinogradov's method to the solution of a problem of the metrical theory of numbers. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1949, vol. 67, no. 5, pp. 783–786 (in Russian).

5. Volkmann B. The real cubic case of Mahler's conjecture. *Mathematika*, 1961, vol. 8, no. 1, pp. 55–57. https://doi.org/10.1112/s0025579300002126

6. Sprindžuk V. A proof of Mahler's conjecture on measure of the set of S-numbers. *Izvestiya Akademii nauk, seriya matematicheskaya*, 1965, vol. 29, pp. 379–436.

7. Sprindzhuk V. G. *The problem of Mahler in metric number theory*. Minsk, 1967. 184 p. (in Russian).

8. Beresnevich V., Bernik V., Dickinson H., Dodson M. The Khintchine–Groshev Theorem for Planar Curves. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1999, vol. 455, no. 1988, pp. 3053–3063. https://doi.org/10.1098/rspa.1999.0439

9. Bernik V. I. On the exact order of approximation to zero with values of integral polynomials. *Acta Arithmetica*, 1989, vol. 53, no. 1, pp. 17–28 (in Russian).

10. Beresnevich V., Bernik V. A Baker's conjecture and Hausdorff dimension. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 2000, vol. 54, no. 3–4, pp. 263–269.

11. Beresnevich V., Bernik V., Kleinbock D., Margulis G. Metric Diophantine approximation: The Kleinbock–Groshev theorem for nondegenerate manifolds. *Moscow Mathematical Journal*, 2002, vol. 2, no. 2, pp. 203–225. https://doi.org/10.17323/1609-4514-2002-2-2-203-225

12. Bernik V., Kleinbock D., Margulis G. Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions. *International Mathematics Research Notices*, 2001, vol. 2001, no. 9, pp. 453–486. https://doi.org/10.1155/s1073792801000241

13. Baker A., Schmidt W. Diophantine approximation and Hausdorff dimension. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1970, vol. s3-21, no 1, pp. 1–11. https://doi.org/10.1112/plms/s3-21.1.1

14. Bernik V. I. Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations. *Acta Arithmetica*, 1983, vol. 42, no. 3, pp. 219–253 (in Russian).

15. Kleinbock D., Backer A. Sprindžuk conjectures for complex analytic manifolds. Algebraic groups. *Tata Institute of Fundamental Research*, Mambai, 2004, pp. 539–553.

Информация об авторах

Берник Василий Иванович – д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: bernik@im.bas-net.by.

Бударина Наталья Викторовна – д-р физ.-мат. наук. Технологический институт (A91 K584, Дублин Роуд, Дандолк, Ирландия). E-mail: Natalia.Budarina@maths.nuim.ie.

О'Доннелл Хьюг – канд. физ.-мат. наук, Технологический институт Дублина (D02 HW71, ул. Ангер, Дублин, Ирландия). E-mail: hugh.odonnell@nuim.ie.

Information about the authors

Bernik Vasiliy Ivanovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: bernik@im.bas-net.by.

Budarina Nataliya Viktorovna – D. Sc. (Physics and Mathematics). Dundalk Institute of Technology (A91 K584, Dublin Road, Dundalk, Ireland). E-mail: Natalia.Budarina@maths.nuim.ie.

O'Donnell Hugh – Ph. D. (Physics and Mathematics). Dublin Institute of Technology (D02 HW71, Aungier Str., Dublin, Ireland). E-mail: hugh.odonnell@nuim.ie.