ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)
УДК 517.925 Поступило в редакцию 13.03.2019
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-2-150-156 Received 13.03.2019

Биньбинь Чжан, Ян Чэнь, И. П. Мартынов

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Республика Беларусь

О РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ЛИНИЕЙ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Аннотация. Работа посвящена аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Объектом исследования являются нелинейные автономные дифференциальные уравнения третьего порядка с подвижной особой линией. Известны двухпараметрические рациональные решения этих уравнений. Цель исследования – выяснить вопрос, как из общих решений уравнений с подвижной особой линией получить двухпараметрические рациональные решения. В аналитической теории дифференциальных уравнений, как правило, нелинейные дифференциальные уравнения имеют отрицательные резонансы. Среди этих резонансов обязательно содержится резонанс, равный –1 (тривиальный случай). При этом в работах некоторых авторов утверждается, что природа нетривиальных отрицательных резонансов до настоящего времени не понята. Представляют интерес уравнения, решения которых имеют только нетривиальные отрицательные резонансы. Оказывается, что по отрицательным резонансам можно строить рациональные решения рассматриваемых уравнений. В данной работе указано необходимое и достаточное условие, при котором двухпараметрическое рациональное решение уравнения с подвижной особой линией можно получить из его общего решения.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, подвижная особая линия, общее решение, рациональное решение, ряд Лорана, абсолютная сходимость, резонансы

Для цитирования. Биньбинь, Чжан. О рациональных решениях двух дифференциальных уравнений с подвижной особой линией / Биньбинь Чжан, Ян Чэнь, И. П. Мартынов // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 2. – С. 150–156. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-2-150-156

Bin-Bin Zhang, Yang Chen, Ivan P. Martynov

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Republic of Belarus

ON RATIONAL SOLUTIONS OF TWO DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A MOVING SINGULAR LINE

(Communicated by Academician Nilolai A. Izobov)

Abstract. The study is devoted to the analytical theory of ordinary differential equations. In the introduction, it is said that the object of investigation is nonlinear third-order autonomous differential equations with a moving singular line, and whose two-parameter rational solutions are known. The study aims to clarify how to obtain two-parameter rational solutions from the general solutions of these equations. In the analytical theory of differential equations, as a rule, nonlinear differential equations have negative resonances. Among these resonances is the resonance equal to –1 (trivial case). However, it is asserted in some of the researchers' papers that the nature of these negative resonances has not been found until now. The equations only with non-trivial negative resonance arose the interest of researchers. And it appears that the rational solutions of the equations can be constructed by their negative resonances. In this paper, a necessary and sufficient condition is indicated, at which the two-parameter rational solution of the equation with a moving singular line can be obtained from its general solution.

Keywords: differential equation, moving singular line, general solution, rational solution, Laurent series, absolute convergence, resonances

For citation: Bin-Bin Zhang, Yang Chen, Martynov I. P. On rational solutions of two differential equations with a moving singular line. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus,* 2019, vol. 63, no. 2, pp. 150–156 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-2-150-156

Введение. Если автономное дифференциальное уравнение

$$P(y^{(n)}, \ldots, y', y) = 0,$$

где P – полином по $y^{(n)}, \dots, y,$ имеет решение, представимое рядом Лорана

$$y = h_0(z - z_0)^{-s} + \dots + h(z - z_0)^{r-s} + \dots, s \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

то решению (1) будем сопоставлять набор

$$(s, h_0; r_1, r_2, \dots, r_n). \tag{2}$$

Числа $r_1, r_2, \dots, r_n$ называют резонансами [1]. Для однозначности решения (1) в области его определения согласно [1–4] необходимо, чтобы резонансы $r_k, k = 1, 2, \dots, n,$ были целыми и различными, причем один из них равен –1 [2].

Следуя [4], отрицательные резонансы, отличные от –1, будем называть нетривиальными. Представляют интерес уравнения, решениям которых отвечают наборы вида (2) с нетривиальными отрицательными резонансами [4–7].

Рассмотрим два дифференциальных уравнения с подвижной особой линией из [8] и [9] соответственно

$$y''' = 12yy'' - 18(y')^2, \tag{3}$$

$$x''' = \frac{(x'' - 2xx')^2}{x' - x^2} + 4xx'' - 2(x')^2. \tag{4}$$

Решению уравнения (3) отвечает набор вида (2) $(1, -1; -1, -2, -3)$.

В [8] приведено двухпараметрическое рациональное решение уравнения (3)

$$y = -\frac{1}{z - z_1} - \frac{b}{(z - z_1)^2}, \ \forall z_1, b \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Легко проверить, что (4) также имеет двухпараметрическое рациональное решение

$$x = -\frac{1}{z - z_1} - \frac{a}{(z - z_1)^2}, \ \forall z_1, a \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

В [10] получено преобразование Бэклунда между уравнениями (3) и (4)

$$6y = \frac{x'' - 2x^3}{x' - x^2}, \ \ x^3 - 3x^2y + 3xy' - \frac{1}{2}y'' = 0. \tag{7}$$

Формулы (7) показывают, что между рациональными решениями (5) и (6) уравнений (3) и (4) имеет место соответствие, если

$$a = 3b. \tag{8}$$

Общие решения уравнений (3) и (4) в проколотой окрестности бесконечно удаленной точки $\overset{\circ}{V}(\infty)$ можно представить рядами Лорана так:

$$y = -\frac{1}{z - z_0} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^{k+2}}, \ \forall b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{C}, \tag{9}$$

$$x = -\frac{1}{z - z_0} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(z - z_0)^{k+2}}, \ \forall a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

В данной работе решим задачу: найти условия, при которых из общих решений (9) и (10) дифференциальных уравнений (3) и (4), имеющих *подвижную особую линию*, получаются двухпараметрические рациональные решения (5) и (6) соответственно.

Основные результаты. Подставляя ряд (9) в (3), для коэффициентов b_k получим рекуррентную формулу

$$b_{k+1}=\frac{6}{k(k^2-1)}\sum_{m=0}^{k}(m+2)(5m-3k)b_m b_{k-m},\ k=2,3,\ldots, \tag{11}$$

где b_0, b_1, b_2 – произвольные комплексные постоянные.

Пусть $|b_0|\le\frac{p}{q},\ |b_1|\le\frac{p^2}{q},\ p,q\in\mathbb{R},\ p>0,\ q>0.$

Л е м м а 1. *Существуют такие положительные действительные числа p и q, что если* $|b_m|\le\frac{p^{m+1}}{q},\ 0\le m\le k$, *то* $|b_{k+1}|\le\frac{p^{k+2}}{q}$.

В самом деле, из (11) получим

$$|b_{k+1}|\le\frac{6}{k(k^2-1)}\sum_{m=0}^{k}(m+2)(5m+3k)|b_m b_{k-m}|\le$$

$$\le\frac{6p^{k+2}}{k(k^2-1)q^2}\sum_{m=0}^{k}(m+2)(5m+3k)=\frac{p^{k+2}}{q}\frac{19k+71}{(k-1)q}\le\frac{p^{k+2}}{q},$$

если $\frac{19k+71}{(k-1)q}\le 1$, т. е. $(q-19)k\ge q+71,\ k=2,3,\ldots$.

Можно взять $q\ge 120$, тогда это неравенство выполнено.

Вывод: существуют положительные действительные числа p, q такие, что

$$|b_n|\le\frac{p^{n+1}}{q}\ \text{для}\ \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{12}$$

С л е д с т в и е. *Ряд (9) сходится абсолютно, если* $\frac{p}{|z-z_0|}<1$, *т. е. если* $|z-z_0|>p,\ \ p>0.$

В самом деле, ряд

$$w=-\frac{1}{z-z_0}-\frac{1}{pq}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{p}{z-z_0}\right)^{k+2}$$

с учетом условия (12) будет мажорантным для (9).

Пусть в разложении (9) будет

$$b_1=(1-\delta^2)b_0{}^2,\ b_2=(1-\delta)^2(2\delta+1)b_0{}^3,\ \delta\in\mathbb{C}.$$

Л е м м а 2. *Если в разложении (9) будет*

$$b_m=(1-\delta)^m(m\delta+1)b_0{}^{m+1},\ 0\le m\le k,$$

то

$$b_{k+1}=(1-\delta)^{k+1}((k+1)\delta+1)b_0{}^{k+2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (11) будем иметь

$$b_{k+1}=\frac{6}{k(k^2-1)}\sum_{m=0}^{k}(m+2)(5m-3k)(1-\delta)^k b_0{}^{k+2}(m\delta+1)((k-m)\delta+1)=$$

$$=\frac{6(1-\delta)^k b_0{}^{k+2}}{k(k^2-1)}\sum_{m=0}^{k}(m(k-m)(5m^2+(10-3k)m-6k)\delta^2+(k\delta+1)(5m^2+(10-3k)m-6k))=$$

$$=\frac{(1-\delta)^k b_0{}^{k+2}}{k-1}((1-k^2)\delta^2+(k-1)\delta+1)=(1-\delta)^{k+1}((k+1)\delta+1)b_0{}^{k+2}.$$

Вывод: согласно методу математической индукции заключаем, что

$$b_n = (1-\delta)^n (n\delta+1) b_0^{\,n+1}, \ \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \qquad (13)$$

Имеет место

Т е о р е м а 1. *Чтобы получить рациональное решение (5) из общего решения (9) уравнения (3), необходимо и достаточно коэффициенты b_0, b_1, b_2 подчинить условию*

$$(b_2 - 3b_0 b_1 + 2b_0^{\,3})^2 = 4(b_0^{\,2} - b_1)^3. \qquad (14)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $b_0 \neq 0$. Коэффициенты b_0 и b_1 свяжем условием

$$b_1 = (1-\delta^2) b_0^{\,2}, \ \ \delta \in \mathbb{C}.$$

Тогда из (14) получим $b_2 = (1-\delta)^2 (2\delta+1) b_0^{\,3}$. В этом случае по лемме 2 будем иметь (13).

Положим $b_0 = b + c, \ \ \delta = \dfrac{b}{b+c}$. Тогда из (13) найдем

$$b_k = (k+1) b c^k + c^{k+1}, \ \ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \qquad (15)$$

Подставляя (15) в разложении (9) и считая $|z - z_0| > |c|$, получим

$$y = -\frac{1}{z-z_0} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)bc^k + c^{k+1}}{(z-z_0)^{k+2}} = -\frac{1}{z-z_0} - \frac{c}{(z-z_0)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c}{z-z_0}\right)^k + b \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c^k}{(z-z_0)^{k+1}}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{z-z_0} - \frac{c}{(z-z_0)^2} \frac{1}{1 - \dfrac{c}{z-z_0}} + b\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{(z-z_0)^{k+1}}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{z-z_0} - \frac{c}{(z-z_0)(z-z_0-c)} + b\left(\frac{1}{z-z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c}{z-z_0}\right)^k\right)' = -\frac{1}{z-z_0-c} + b\left(\frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1 - \dfrac{c}{z-z_0}}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{z-z_0-c} + \left(\frac{b}{z-z_0-c}\right)' = -\frac{1}{z-z_0-c} - \frac{b}{(z-z_0-c)^2} = -\frac{1}{z-z_1} - \frac{b}{(z-z_1)^2},$$

где $z_1 = z_0 + c$.

Если $b_0 = 0$, то полагая $b_1 = -c^2$, из (14) получим $b_2 = -2c^3$. Используя (11), найдем $b_k = -kc^{k+1}$. Тогда

$$y = -\frac{1}{z-z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kc^{k+1}}{(z-z_0)^{k+2}} = -\frac{1}{z-z_0} + \frac{c}{z-z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kc^k}{(z-z_0)^{k+1}} =$$

$$= -\frac{1}{z-z_0} - \frac{c}{z-z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c^k}{(z-z_0)^k}\right)' = -\frac{1}{z-z_0} - \frac{c}{z-z_0} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c}{z-z_0}\right)^k\right)' =$$

$$= -\frac{1}{z-z_0} - \frac{c}{z-z_0} \left(\frac{1}{1 - \dfrac{c}{z-z_0}}\right)' = -\frac{1}{z-z_0} - \frac{c}{z-z_0} \left(\frac{z-z_0}{z-z_0-c}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{z-z_0} + \frac{c^2}{(z-z_0)(z-z_0-c)^2} = -\frac{(z-z_0-c)-c}{(z-z_0-c)^2} = -\frac{1}{z-z_0-c} + \frac{c}{(z-z_0-c)^2},$$

т. е.

$$y = -\frac{1}{z - c_1} + \frac{c}{(z - z_1)^2}, \ c = -b, \ z_1 = z_0 + c.$$

С другой стороны, полагая $z_1 = z_0 + c$, из (5) получим

$$y = -\frac{1}{z - z_0 - c} - \frac{b}{(z - z_0 - c)^2} = -\frac{1}{(z - z_0)\left(1 - \frac{c}{z - z_0}\right)} - \frac{b}{(z - z_0)^2\left(1 - \frac{c}{z - z_0}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{z - z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{c}{z - z_0}\right)^k - \frac{b}{(z - z_0)^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{c}{z - z_0}\right)^k\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{z - z_0} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^k}{(z - z_0)^{k+1}} - \frac{b}{(z - z_0)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)c^k}{(z - z_0)^k} =$$

$$= -\frac{1}{z - z_0} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^{k+1} + (k+1)bc^k}{(z - z_0)^{k+2}} = -\frac{1}{z - z_0} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{(z - z_0)^{k+2}},$$

$$b_k = (k+1)bc^k + c^{k+1}, \ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Значит, $b_0 = b + c, \ b_1 = 2bc + c^2, \ b_2 = 3bc^2 + c^3$. Исключая b и c из этих соотношений, получим (14).

Теорема 1 доказана.

Л е м м а 3. *Решения y и x уравнений (3) и (4) связаны соотношением*

$$x' + 3y' = 6xy - 2x^2. \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя первое соотношение из (7), с учетом (4) найдем

$$6y' = \left(\frac{x'' - 2xx'}{x' - x^2} + 2x\right)' = 2x' + \frac{2xx'' - 4(x')^2}{x' - x^2} =$$

$$= 2x' + 2x\frac{x'' - 2x^3}{x' - x^2} - 4(x' + x^2) = -2x' + 12xy - 4x^2,$$

откуда следует (16).

Подставляя (9) и (10) в равенство (16), получим связь между коэффициентами a_k и b_k:

$$a_{k+1} + 3b_{k+1} = \frac{2}{k+1}\sum_{m=0}^{k}(3b_m - a_m)\,a_{k-m}, \tag{17}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots,$ причем $\forall a_0, b_0$.

Пусть $a_0 = a + c$. Учитывая (8) и (15), из (17) получим $a_1 = 6bc + c^2$.

Л е м м а 4. *Если в (10) считать*

$$a_m = 3(m+1)bc^m + c^{m+1}, \ m = \overline{0, k},$$

то

$$a_{k+1} = 3(k+2)bc^{k+1} + c^{k+2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$3b_m - a_m = 3((m+1)bc^m + c^{m+1}) - (3(m+1)bc^m + c^{m+1}) = 2c^{m+1},$$

то

$$a_{k+1} = -3b_{k+1} + \frac{4}{k+1}\sum_{m=0}^{k}(3(k-m+1)bc^{k+1} + c^{k+2}) =$$

$$= -3(k+2)bc^{k+1} - 3c^{k+2} + \frac{12bc^{k+1}}{k+1}\sum_{m=0}^{k}(k-m+1) + 4c^{k+2} =$$

$$= c^{k+2} - 3(k+2)bc^{k+1} + 12bc^{k+1}\frac{k+2}{2} = 3(k+2)bc^{k+1} + c^{k+2} = (k+2)ac^{k+1} + c^{k+2}.$$

Вывод: согласно методу математической индукции заключаем, что

$$a_n = (n+1)ac^n + c^{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{18}$$

Т е о р е м а 2. *Чтобы получить рациональное решение (6) уравнения (4) из общего решения (10), необходимо и достаточно коэффициенты* a_0, a_1, a_2 *подчинить условию*

$$(a_2 - 3a_0a_1 + 2a_0{}^3)^2 = 4(a_0{}^2 - a_1)^3. \tag{19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1, если учесть вид формул (15) и (18), а также (14) и (19).

З а м е ч а н и е. *При доказательстве лемм 2 и 4 были использованы формулы*

$$\sum_{m=1}^{k} m = \frac{k(k+1)}{2}, \ \sum_{m=1}^{k} m^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1),$$

$$\sum_{m=1}^{k} m^3 = \frac{1}{4}k^2(k+1)^2, \ \sum_{m=1}^{k} m^4 = \frac{1}{30}k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1).$$

Заключение. В работе для дифференциальных уравнений с *подвижной особой линией* (3) и (4) найдены необходимые и достаточные условия, при которых из общих решений, представленных абсолютно сходящимися в проколотой окрестности бесконечно удаленной точки рядами (9) и (10), получены рациональные решения соответственно (5) и (6). Эти условия даны теоремами 1 и 2.

Список использованных источников

1. Ablowitz, M. J. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equation of P-type. I / M. J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur // J. Math. Phys. – 1980. – Vol. 21, N 4. – P. 715–721. https://doi.org/10.1063/1.524491

2. Мартынов, И. П. О дифференциальных уравнениях с подвижными критическими особыми точками / И. П. Мартынов // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9, № 10. – С. 1780–1791.

3. Андреева, Т. К. О нулевых резонансах обыкновенных дифференциальных уравнений / Т. К. Андреева, И. П. Мартынов, В. А. Пронько // Весн. Гродзенскага дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2010. – Т. 102, № 3. – С. 29–36.

4. Соболевский, С. Л. Существование рациональных решений дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве и отрицательными резонансными числами / С. Л. Соболевский // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 3. – С. 5–9.

5. Clarkson, P. A. Symmetry and Chazy equation / P. A. Clarkson, P. J. Olver // Journal of Differential Equation. – 1996. – Vol. 124, N 1. – P. 225–246. https://doi.org/10.1006/jdeq.1996.0008

6. Здунек, А. Г. О рациональных решениях дифференциальных уравнений / А. Г. Здунек, И. П. Мартынов, В. А. Пронько // Весн. Гродзенскага дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2000. – Т. 3, № 1. – С. 33–39.

7. Jrad, F. Non-polynomial fourth order equations which pass the Painleve test / F. Jrad, U. Muğan // Zeitschrift für Naturforschung A. – 2005. – Vol. 60a, N 6. – P. 387–400. https://doi.org/10.1515/zna-2005-0601

8. Chazy, J. Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes / J. Chazy // Acta Math. – 1911. – Vol. 4. – P. 317–385. https://doi.org/10.1007/bf02393131

9. Мартынов, И. П. Аналитические свойства решений одного дифференциального уравнения третьего порядка / И. П. Мартынов // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 5. – С. 764–771.

10. Чэнь Ян. Аналитические свойства решений системы Дарбу третьего порядка / Ян Чэнь // Весн. Гродзенскага дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2018. – Т. 8, № 2. – С. 26–31.

References

1. Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equation of P-type. I. *Journal of Mathematical Physics*, 1980, vol. 21, no. 4, pp. 715–721. https://doi.org/10.1063/1.524491

2. Martynov I. P. On differential equations with movable critical singular points. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*, 1973, vol. 9, no. 10, pp. 1780–1791 (in Russian).

3. Andreeva T. K., Martynov I. P., Pronko V. A. On the zero resonances of ordinary differential equations. *Vesnik Grodzenskaga dzyarzhaŭnaga ŭniversiteta imya Yanki Kupaly. Seryya 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naya tekhnika i kiravanne = Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics, Physics, Informatics, Computer Technology and its Control*, 2010, vol. 102, no. 3, pp. 29–36 (in Russian).

4. Sobolevsky S. L. Existence of rational solutions of differential equations with the Painlevé properties and negative resonance numbers. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2012, vol. 56, no. 3, pp. 5–9 (in Russian).

5. Clarkson P. A., Olver P. J. Symmetry and Chazy equation. *Journal of Differential Equation*, 1996, vol. 124, no. 1, pp. 225–246. https://doi.org/10.1006/jdeq.1996.0008

6. Zdunek A. G., Martynov I. P., Pronko V. A. On rational solutions of differential equations. *Vesnik Grodzenskaga dzyarzhaŭnaga ŭniversiteta imya Yanki Kupaly. Seryya 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naya tekhnika i kiravanne = Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics, Physics, Informatics, Computer Technology and its Control*, 2000, vol. 3, no. 1, pp. 33–39 (in Russian).

7. Jrad F., Mugan U. Non-polynomial fourth order equations which pass the Painleve test. *Zeitschrift für Naturforschung A.*, 2005, vol. 60a, no. 6, pp. 387–400. https://doi.org/10.1515/zna-2005-0601

8. Chazy J. Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes. *Acta Math.*, 1911, vol. 34, pp. 317–385 (in French). https://doi.org/10.1007/bf02393131

9. Martynov I. P. Analytic properties of solutions of a third order differential equation. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*, 1985, vol. 21, no. 5, pp. 764–771 (in Russian).

10. Chen Y. Analytical properties of solutions of the third order Darboux system of the third order. *Vesnik Grodzenskaga dzyarzhaŭnaga ŭniversiteta imya Yanki Kupaly. Seryya 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naya tekhnika i kiravanne = Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics, Physics, Informatics, Computer Technology and its Control*, 2018, vol. 8, no. 2. pp. 26–31 (in Russian).

Информация об авторах

Чжан Биньбинь – аспирант. Гродненский государственный университет им. Янки Купалы (ул. Ожешко, 22, 230020, Гродно, Республика Беларусь). E-mail: binbinzhanghkj@163.com.

Чэнь Ян – аспирант. Гродненский государственный университет им. Янки Купалы (ул. Ожешко, 22, 230020, Гродно, Республика Беларусь). E-mail: 578211973@g.g.com.

Мартынов Иван Платонович – д-р физ.-мат. наук, профессор. Гродненский государственный университет им. Янки Купалы (ул. Ожешко, 22, 230020, Гродно, Республика Беларусь). E-mail: i.martynov@grsu.by.

Information about the authors

Zhang Bin-bin – Postgraduate student. Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230020, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: binbinzhanghkj@163.com.

Chen Yang – Postgraduate student. Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230020, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: 578211973@g.g.com.

Martynov Ivan Platonovich – D. Sc. (Physical and Mathematics), Professor. Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230020, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: i.martynov@grsu.by.