УДК 512.554.32

Т. С. БУСЕЛ, И. Д. СУПРУНЕНКО

БЛОЧНАЯ СТРУКТУРА ОБРАЗОВ РЕГУЛЯРНЫХ УНИПОТЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ ПОДСИСТЕМНЫХ ПОДГРУПП ТИПА C_2 В НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ГРУПП ТИПА C_n С ЛОКАЛЬНО МАЛЫМИ СТАРШИМИ ВЕСАМИ

(Представлено академиком В. И. Янчевским)

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
tbusel@gmail.com; suprunenko@im.bas-net.by

При $p \geq 11$ описана блочная структура образов регулярных унипотентных элементов из подсистемных подгрупп типа C_2 в неприводимых представлениях групп типа C_n в характеристике p с локально малыми старшими весами. Эти результаты могут быть использованы для изучения поведения унипотентных элементов в модулярных представлениях простых алгебраических групп и распознавания представлений и линейных групп.

Ключевые слова: унипотентные элементы, размерности блоков Жордана, представления симплектических групп.

T. S. BUSEL, I. D. SUPRUNENKO

THE JORDAN BLOCK STRUCTURE OF IMAGES OF REGULAR UNIPOTENT ELEMENTS FROM SUBSYSTEM SUBGROUPS OF TYPE C_2 IN IRREDUCIBLE REPRESENTATIONS OF GROUPS OF TYPE C_n WITH LOCALLY SMALL HIGHEST WEIGHTS

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
tbusel@gmail.com; suprunenko@im.bas-net.by

The Jordan block structure of images of regular unipotent elements from subsystem subgroups of type C_2 in irreducible representations of groups of type C_n in characteristic $p \geq 11$ with locally small highest weights is determined. These results can be applied for investigating the behaviour of unipotent elements in modular representations of simple algebraic groups and recognizing representations and linear groups.

Keywords: unipotent elements, Jordan block sizes, representations of symplectic groups.

Введение. При $p \geq 11$ описана блочная структура образов регулярных унипотентных элементов из подсистемных подгрупп типа C_2 в неприводимых представлениях групп типа C_n в характеристике p с локально малыми старшими весами.

Далее K – алгебраически замкнутое поле характеристики $p \geq 11$, $G = C_n(K)$, $n > 2$, $\omega(\varphi)$ – старший вес представления φ, $J\varphi(x)$ – множество размерностей блоков Жордана элемента $\varphi(x)$ без учета их кратностей, $\mathbf{N}_a$ – совокупность целых чисел i с $1 \leq i \leq a$, ω_i – фундаментальные веса группы G.

Т е о р е м а 1. *Пусть $p \geq 11$, $G = C_n(K)$, $n > 2$, φ – p-ограниченное представление группы G, $\omega(\varphi) = \omega = a_1\omega_1 + ... + a_n\omega_n$, $x \in G$ – регулярный унипотентный элемент из подсистемной подгруппы типа C_2. Предположим, что $3a_{n-1} + 4a_n < p$. Положим $S = 3a_1 + 4(a_2 + ... + a_n)$.*

1) Пусть $S < p$. Тогда $J_\varphi(x) = \mathbf{N}_{S+1}$ или справедливо одно из следующих утверждений:

(i) $\omega = \omega_i$, $2 \leq i \leq n$, $J_\varphi(x) = \{1, 4, 5\}$;

(ii) $\omega = a_1\omega_1$, $a_1 > 1$, $J_\varphi(x) = \mathbf{N}_{S+1} \setminus \{2, 3a_1 - 4, 3a_1 - 1, 3a_1\}$;

(iii) $\omega = \omega_1$, $J_\varphi(x) = \{1, 4\}$;

(iv) $n = 3$ и ω – вес из пункта а)–г)

(a) $\omega = \omega_3$, $J_\varphi(x) = \{4, 5\}$;

(б) $\omega \in \{\omega_2 + \omega_3, 2\omega_1 + \omega_3, \omega_1 + \omega_3, \omega_1 + 2\omega_3, 5\omega_3, \omega_1 + \omega_2 + \omega_3\}$, $J_\varphi(x) = \mathbf{N}_{S+1} \setminus \{1\}$;

(в) $\omega = 3\omega_3$, $J_\varphi(x) = \mathbf{N}_{13} \setminus \{2\}$;

(г) $\omega = 2\omega_3$, $J_\varphi(x) = \mathbf{N}_9 \setminus \{1, 4\}$.

2) Пусть $S \geq p$. *Тогда* $J_\varphi(x) = \mathbf{N}_p$ *или верно одно из следующих утверждений:*

(i) $\omega = \dfrac{p-4}{3}\omega_1 + \omega_j$, $2 \leq j \leq n$, $J_\varphi(x) = \mathbf{N}_p \setminus \{p-1\}$;

(ii) $\omega = a_1\omega_1$, $a_1 > \dfrac{p}{3}$, $J_\varphi(x) = \mathbf{N}_p \setminus \{2, p-2\}$;

(iii) $\omega = \sum\limits_{j=1}^{i} a_j\omega_j$, $a_i \geq p-6$, $i < n-1$, $\mathbf{N}_p \setminus \{2, p-2\} \subset J_\varphi(x) \subset \mathbf{N}_p$;

(iv) $\omega = a_{i-1}\omega_{i-1} + a_i\omega_i$, $a_{i-1} + a_i = p-1$, $i < n-1$, $\mathbf{N}_p \setminus \{2, p-2\} \subset J_\varphi(x) \subset \mathbf{N}_p$.

Таким образом, $|J_\varphi(x)| \geq p-2$ *при* $S \geq p$.

Для образов регулярных унипотентных элементов из подсистемных подгрупп типа A_3 в p-ограниченных представлениях группы $A_n(K)$ с $n > 3$ и локально малыми старшими весами аналогичная задача решена в [1].

Детальная информация о редких и типичных свойствах индивидуальных элементов в представлениях алгебраических групп может быть использована для решения задач распознавания представлений и линейных групп по наличию матриц со специальной блочной структурой.

Основная часть. В работе используются следующие обозначения: $\mathbb{N}$ и $\mathbb{C}$ – множество натуральных чисел и поле комплексных чисел, α_i – простые корни группы G, ε_i $(1 \leq i \leq n)$ – веса стандартного G-модуля, определенные в [2, § 13], $\dim M_\mu$ – размерность весового подпространства веса μ в модуле M, $\langle \mu, \alpha \rangle$ – значение веса μ на корне α (в смысле [3, § 1]).

Нумерация весов ω_i и ε_i и корней α_i соответствует [2, § 13]. Символы ω_i, ε_i и α_i используются не только для группы G, но и для других простых алгебраических групп, из контекста всегда ясно, о какой группе идет речь.

Если Γ – простая алгебраическая группа над $\mathbb{C}$ или K, то $\mathcal{X}_\beta$ – корневая подгруппа, ассоциированная с корнем β, $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_{\alpha_i}$, $X_{\pm i,t}$ – элемент гипералгебры группы Γ, ассоциированный с корнем $\pm\alpha_i$ и числом t. Обозначим символом $\Gamma(\beta_1, ..., \beta_k)$ подгруппу в Γ, порожденную корневыми подгруппами $\mathcal{X}_{\pm\beta_1}, ..., \mathcal{X}_{\pm\beta_k}$, и положим $\Gamma(i_1, ..., i_j) = \Gamma(\alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_j})$. Подгруппу, порожденную всеми корневыми подгруппами, ассоциированными с корнями из некоторой подсистемы системы корней группы Γ, будем называть подсистемной подгруппой.

Если ω – доминантный вес группы Γ, то $M(\omega)$, $V(\omega)$ и $T(\omega)$ – неприводимый модуль, модуль Вейля и тилтинг-модуль группы Γ со старшим весом ω; $\omega(\varphi)$ $(\omega(M))$ – старший вес представления φ (модуля M); $\omega(m)$ – вес весового вектора $m \in M$, $X(\varphi)$ $(X(M))$ – множество весов представления φ (модуля M), $\boldsymbol{X}^+(M)$ – множество доминантных весов модуля M. Если H – подгруппа в Γ, то $M|H$ – ограничение Γ-модуля M на H. Предполагается, что веса и корни группы Γ рассматриваются относительно фиксированного максимального тора T. Если $T \cap H$ – максимальный тор подгруппы H, то $\omega|H$ – ограничение веса ω на $T \cap H$. В этом случае для весового вектора m из некоторого Γ-модуля полагаем $\omega_H(m) = \omega(m)|H$. Заметим, что $T \cap H$ – максимальный тор в H для подсистемных подгрупп H. Если M – неприводимый Γ-модуль, то $v \in M$ – ненулевой вектор старшего веса. Напомним, что модуль для полупростой алгебраической группы называется тилтинг-модулем, если он имеет и фильтрацию модулями Вейля, и фильтрацию комодулями Вейля.

Символом $d_\varphi(x)$ обозначим степень минимального многочлена образа элемента $x \in \Gamma$ в представлении φ. Веса группы $A_1(K)$ отождествляются с целыми числами: $a\omega_1 \to a$.

Рассматриваются только конечномерные представления и модули.

В доказательстве теоремы 1 существенно используются следующие факты.

Т е о р е м а 2 [4]. *Пусть* Γ *– полупростая алгебраическая группа,* $S = \Gamma(i_1, ..., i_k) \subseteq \Gamma$, M *– неприводимый* Γ*-модуль со старшим весом* ω *и* $v \in M$ *– ненулевой вектор старшего веса. Тогда подпространство* $KSv \subseteq M$ *является неприводимым* S*-модулем со старшим весом* $\omega|S$ *и прямым слагаемым* S*-модуля* M.

Л е м м а 1 [5, лемма 2.46]. *Пусть* M *– неразложимый* G*-модуль со старшим весом* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\omega_i$ *и* $v \in M$ *– ненулевой вектор старшего веса. Пусть* $1 \leq s, t \leq n$. *Предположим, что* $0 < a_t < p$. *Для целого* d *с* $0 \leq d \leq a_t$ *определим вектор* $v(s, t, d)$ *следующим образом. Пусть* $d_t = d$.

Если $s > t$, положим $d_k = a_k + d_{k-1}$ при $s \geq k > t$.

Если $s < t$, положим $d_k = a_k + d_{k+1}$ при $s \leq k < t$ и $k \neq n-1$ и $d_{n-1} = a_{n-1} + 2d_n$ при $t = n$. Теперь запишем

$$v(s,t,d) = X_{-s,\,d_s} \dots X_{-k,\,d_k} \dots X_{-t,\,d} v.$$

При $s = t$ положим $v(s, t, d) = X_{-s,\,d}v$. Тогда $v(s, t, d) \neq 0$ и $X_{m,b}v(s, t, d) = 0$ для положительного $m \neq s$ и $b > 0$. Следовательно, группа $\mathcal{X}_m$ фиксирует $v(s, t, d)$.

Обозначение $v(s, t, d)$ многократно используется ниже.

Т е о р е м а 3. *Пусть $\Gamma = C_r(K)$, $r \geq 2$, $x \in \Gamma$ – регулярный унипотентный элемент из подсистемной подгруппы типа C_2. Тогда существует замкнутая в топологии Зарисского подгруппа $A \subset \Gamma$ такая, что $A \cong A_1(K)$, A содержит элементы, сопряженные с x, $T_A = A \cap T$ – максимальный тор в A, $\varepsilon_1|T_A = 3$, $\varepsilon_2|T_A = 1$, $\varepsilon_i|T_A = 0$, $3 \leq i \leq r$. Пусть φ – неприводимое p-ограниченное представление группы Γ со старшим весом $\sum_{i=1}^{r} a_i\omega_i$. Тогда*

$$\max_{\mu \in X(\varphi)} \mu \,|\, T_A = 3a_1 + 4(a_2 + \dots + a_r) \text{ и } d_\varphi(x) = \min\{p, 1 + 3a_1 + 4(a_2 + \dots + a_r)\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\Gamma_{\mathbb{C}} = C_r(\mathbb{C})$. Пусть $x_{\mathbb{C}} \in \Gamma_{\mathbb{C}}$ – элемент с той же нормальной формой Жордана в естественном модуле, что и x, а $\varphi_{\mathbb{C}}$ – неприводимое представление группы $\Gamma_{\mathbb{C}}$ со старшим весом $\omega(\varphi)$.

Нетрудно установить, что $x_{\mathbb{C}}$ (и x) в естественном модуле имеет один блок Жордана размерности 4 и блоки размерности 1. Положим $N(x) = (3, 1, 0, \dots, 0, -1, -3)$ (в $N(x)$ $2r$ чисел).

В силу [6, предложение 2.12] существует замкнутая в топологии Зарисского подгруппа A типа A_1 такая, что A содержит элемент, сопряженный с x, $T \cap A = T_A$ – максимальный тор в A, $\alpha_i|T_A \in \{0, 1, 2\}$ и набор $\{ \pm\varepsilon_i|T_A \mid 1 \leq i \leq r \}$ совпадает с набором $N(x)$ с учетом кратностей. Так как $\alpha_i|T_A \geq 0$, отсюда следуют формулы для $\varepsilon_i|T_A$ и ясно, что $\max_{\mu \in X(\varphi)} \mu \,|\, T_A = \omega(\varphi) \,|\, T_A$. Поскольку $\omega_i = \sum_{j=1}^{i} \varepsilon_j$, получаем, что $\omega(\varphi)|T_A = 3a_1 + 4(a_2 + \dots + a_r)$. В силу [5, теорема 1.7] $d_\varphi(x) = \min\{p, 1 + d_{\varphi C}(x_C)\}$.

Пусть ρ_j – неприводимое представление группы $\Gamma_{\mathbb{C}}$ со старшим весом ω_j, $1 \leq j \leq n$, $m_j = d_{\rho_j}(x_C) - 1$. В силу [6, алгоритм 1.4] число m_j равно сумме j максимальных чисел из набора $N(x)$. Поэтому $m_1 = 3$, $m_2 = \dots = m_r = 4$. Ввиду [5, предложение 1.5]

$$d_{\varphi C}(x_C) = 1 + \sum_{i=1}^{r} a_i m_i = 1 + 3a_1 + 4(a_2 + \dots + a_r).$$

Это завершает доказательство.

Положим $Q_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n,\ a_i \in \mathbb{N}\}$. Если $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in Q_n$ и $b = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1}) \in Q_{n-1}$, то $b < a$ означает, что $a_1 \geq b_1 \geq a_2 \geq \dots \geq b_{n-1} \geq a_n$.

В следующей теореме V_a – неприводимый $C_n(\mathbb{C})$-модуль со старшим весом $a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n$.

Т е о р е м а 4 [7, теорема 11]. *Пусть $H \subset C_n(\mathbb{C})$ – подсистемная подгруппа типа C_{n-1}. Тогда $V_a|H \cong \oplus_{b < (a,0)} \oplus_{c < b} V_c$, где $a, b \in Q_n$, $c \in Q_{n-1}$.*

Л е м м а 2 [8, лемма 7]. *Пусть U – $A_1(K)$-модуль и $|a| < p$ для всех весов модуля U. Тогда модуль U вполне приводим.*

Л е м м а 3. *Модуль Вейля группы $C_2(K)$ со старшим весом $a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ неприводим при $a_1 + 2a_2 + 3 \leq p$.*

Л е м м а 4. *Пусть $N = C_2(K)$ – модуль, веса всех композиционных факторов которого имеют вид $a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ с $a_1 + 2a_2 + 3 \leq p$. Тогда N вполне приводим.*

Л е м м а 5. *Пусть $\Gamma = C_r(K)$, $r \geq 2$, $x \in \Gamma$ – регулярный унипотентный элемент из подсистемной подгруппы типа C_2, M – неприводимый Γ-модуль со старшим весом $\omega = a_1\omega_1 + \dots + a_r\omega_r$. Предположим, что модуль Вейля $V(\omega)$ неприводим и $3a_1 + 4(a_2 + \dots + a_r) < p$. Тогда размерности блоков Жордана элемента x в модуле M такие же, как у аналогичного элемента группы $C_r(\mathbb{C})$ в неприводимом модуле со старшим весом ω.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Gamma_{\mathbb{C}} = C_r(\mathbb{C})$, $x_{\mathbb{C}} \in \Gamma_{\mathbb{C}}$ – регулярный унипотентный элемент из подсистемной подгруппы типа C_2, $M_{\mathbb{C}}$ – неприводимый Γ-модуль со старшим весом ω. Легко видеть, что нормальные формы Жордана элементов x и $x_{\mathbb{C}}$ в естественных модулях групп Γ и $\Gamma_{\mathbb{C}}$ совпадают. В силу [6, предложение 2.12] существует замкнутая в топологии Зарисского подгруппа $A_{\mathbb{C}} \cong A_1(\mathbb{C})$, такая, что $x_{\mathbb{C}} \in A_{\mathbb{C}}$, $T_{\mathbb{C}} \cap A_{\mathbb{C}}$ – максимальный тор в $A_{\mathbb{C}}$ для некоторого максимального тора $T_{\mathbb{C}} \subset \Gamma_{\mathbb{C}}$ и ограничение весов с $T_{\mathbb{C}}$ на $T_{\mathbb{C}} \cap A_{\mathbb{C}}$ задает тот же гомоморфизм $\boldsymbol{X}(\Gamma) \to \mathbb{Z}$, что и ограничение с T на $T \cap A$.

Так как модуль $M \cong V(\omega)$, из сказанного выше следует, что кратности весов модулей $M_{\mathbb{C}}|A_{\mathbb{C}}$ и $M|A$ совпадают. Ввиду теоремы 3 $|\,\mu|T \cap A| < p$ для любого веса $\mu \in \boldsymbol{X}(M)$. Тогда в силу леммы 2 $M|A$ – прямая сумма p-ограниченных неприводимых модулей. Таким образом, размерности блоков Жордана элементов $x_{\mathbb{C}}$ и x в модулях $M_{\mathbb{C}}$ и M соответственно однозначно определяются кратностями весов модулей $M_{\mathbb{C}}|A_{\mathbb{C}}$ и $M|A$ и поэтому совпадают.

Т е о р е м а 5 [9, часть теоремы 6, таблица 2]. *Пусть V – неприводимое представление группы $C_2(\mathbb{C})$ со старшим весом $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$. Тогда образ регулярного унипотентного элемента в представлении φ имеет блоки всех размерностей* $i \equiv 3m_1 + 4m_2 + 1 \pmod 2)$*, где* $1 \le i \le 3m_1 + 4m_2 + 1$*, за исключением пар* (m_1, m_2) *и блоков Жордана, указанных ниже. В частности, при* $m_1 > 10$ *и* $m_2 > 4$ *имеются блоки всех априори возможных размерностей.*

m_1	m_2	Размерность отсутствующего блока
1 (mod 2) > 1	0	$3m_1 + 4m_2 - 1$, 2
1	0, 2 (mod 3)	2
1	1 (mod 3)	4
3	3 (mod 6)	2
2	0	$3\ m_1 + 4m_2 - 1 = 5$, 1
2 (mod 4) > 2	0	$3m_1 + 4m_2 - 1$, 5, 1
0 (mod 4)	0	$3m_1 + 4m_2 - 1$, 3
0	1	$3m_1 + 4m_2 - 1 = 3$, 1
0	2	$3m_1 + 4m_2 - 1 = 7$, 3, 1
0	3	$3m_1 + 4m_2 - 1 = 11$, 5, 3
0	0 (mod 3) > 3	$3m_1 + 4m_2 - 1$, 11, 5, 3
0	1, 2 (mod 3) > 2	$3m_1 + 4m_2 - 1$, 7, 3, 1
2	>0	1
0 (mod 2) > 2	1	1
2 (mod 4) > 2	2	1
6	1, 2, 4, 5 (mod 6) > 2	1
4,10	1, 4 (mod 6) > 1	1
2, 6, 10 (mod 12) > 6	4	1

Л е м м а 6 [10]. *Пусть λ – доминантный вес полупростой алгебраической группы Γ и модуль Вейля $V(\lambda)$ неприводим. Предположим, что λ – максимальный вес Γ-модуля U и весовое подпространство этого веса одномерно в U. Тогда $U = V \oplus N$, где $N \cong M(\lambda)$.*

Л е м м а 7. *Пусть $\Gamma = C_2(K)$, $x \in \Gamma$ – регулярный унипотентный элемент, A – подгруппа типа A_1 из теоремы 3, содержащая x, $\lambda = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ – вес группы* Γ. *Если $a_1 + 2a_2 + 3 \le p$, то $M(\lambda)|A$ – тилтинг-модуль.*

В доказательстве леммы 7 применяется индукция по $a_1 + a_2$, существенно используются лемма 6 и свойства тензорных произведений и прямых слагаемых тилтинг-модулей.

Л е м м а 8. *Пусть Γ – полупростая алгебраическая группа над K, $H \subset \Gamma$, $z \in H$. Предположим, что N – прямое слагаемое ограничения* Γ*-модуля U на H. Тогда $J_N(z) \subset J_U(z)$. В частности, если ограничение $U|H$ вполне приводимо, то $J_M(z) \subset J_U(z)$ для любого композиционного фактора M H-модуля U.*

Последнее утверждение леммы 8 вытекает из [11, следствие 8].

Л е м м а 9 [12, леммы 1.2, 1.3]. *При $0 \le c < p$ модуль $T(c) \cong V$(c) $\cong M(c)$.*

Пусть $p \le c < 2p - 1$. Положим $c = r + p$. Тогда максимальный подмодуль M модуля $V(c)$ изоморфен $M(p - r - 2)$. В модуле $T(c)$ имеется фильтрация

$T(c) = M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset M_4 = 0$ *с* $M_1/M_2 \cong M_3 \cong \mathrm{M}(p - r - 2)$ *и* $M_2/M_3 \cong \mathrm{M}(r + p)$;
$\dim T(c) = 2p$. *В этом случае модуль* $T(c)$ *проективен для групп* $A_1(p)$.

Общая схема доказательства теоремы 1. Доказательство теоремы 1 основано на построении набора прямых слагаемых с определенными свойствами в ограничениях рассматриваемого модуля на подсистемные подгруппы типа C_2 и подгруппы типа A_1, содержащие рассматриваемые унипотентные элементы. Эти слагаемые оказываются тилтинг-модулями с не слишком большими относительно характеристики старшими весами. Существенно используются результаты А. А. Осиновской [9] (см. теорему 5) о блочной структуре образов регулярных унипотентных элементов в неприводимых представлениях группы $C_2(\mathbb{C})$ и информация о строении тилтинг-модулей группы типа A_1 с весами, не превосходящими $2p - 2$ (лемма 9).

Далее φ – неприводимое представление со старшим весом $\omega(\varphi) = a_1\omega_1 + \ldots + a_n\omega_n$, удовлетворяющим условиям теоремы 1; M – неприводимый G-модуль, где реализуется представление φ; $G_1 = G(n - 1, n)$; x – регулярный унипотентный элемент подгруппы G_1. Известно, что регулярные унипотентные элементы произвольных подсистемных подгрупп типа C_2 сопряжены с x. При доказательстве теоремы 1 мы фактически показываем, что $\varphi(y)$ имеет блок определенного размера для такого элемента y.

В доказательстве отдельно рассматриваются случаи, когда $S = 3a_1 + 4a_2 + \ldots + 4a_n < p$ и $S \geq p$.

1. Пусть $S < p$, A – подгруппа из теоремы 3, содержащая x. Тогда в силу теоремы 3 и леммы 2 $M|A$ – вполне приводимый модуль с p-ограниченными неприводимыми компонентами. При доказательстве будем использовать лемму 8 без дополнительных пояснений. В силу теоремы 3 $J_M(x) \subset \mathbf{N}_{S+1}$. Предположим, что $\omega \neq a_1\omega_1 + a_n\omega_n$.

Положим $\mu_1 = a_1\omega_1 + (a_2 + \ldots + a_n)\omega_2$, $\mu_2 = (a_1 + 1)\omega_1 + (a_2 + \ldots + a_n - 1)\omega_2$. Покажем, что $M|G_1$ имеет композиционные факторы $M_1 = M(\mu_1)$ и $M_2 = M(\mu_2)$.

Положим $H_1 = G(\alpha_1, 2\varepsilon_2)$. Выберем минимальный индекс $j > 1$ с $a_j \neq 0$. В силу нашего предположения $j < n$. Положим $\alpha = \alpha_2 + \ldots + \alpha_j$, $\beta = 2\varepsilon_{j+1}$, $H_2 = G(\alpha, \beta)$. Ясно, что $\omega_{H_1}(v) = \mu_1$. Пусть $m = v(1, j, a_j - 1)$. В силу леммы 1 подгруппы $\mathcal{X}_i$ с $2 \leq i \leq n$ сохраняют m. Тогда из известных формул коммутации в группе G следует, что $\mathcal{X}_\alpha$ тоже сохраняет m. Ясно, что и подгруппа $\mathcal{X}_\beta$ сохраняет m. Заметим, что $\omega_{H_2}(m) = \mu_2$. Легко видеть, что v и m порождают H_1- и H_2-модули со старшими весами $\omega_{H_1}(v)$ и $\omega_{H_2}(m)$ соответственно. Отсюда следует, что $M|H_i$ имеет композиционный фактор, изоморфный M_i, $i = 1, 2$.

Так как подгруппы H_1 и H_2 сопряжены с G_1, то ограничение $M|G_1$ тоже имеет такие факторы. Ввиду леммы 8 $J_{M_i}(x) \subset J_M(x)$.

Из леммы 3 следует неприводимость модулей $V(\mu_i)$, $i = 1, 2$. Поэтому в силу леммы 5 множества $J_{M_i}(x)$ такие же, как для аналогичных элемента и модулей в нулевой характеристике. Они описываются теоремой 5.

Если μ_1 и μ_2 не являются исключительными весами из таблицы теоремы 5, то $J_{M_1}(x) = \{a \mid a \equiv a_1 + 1 (\mathrm{mod}\, 2), a \leq S + 1\}$, $J_{M_2}(x) = \{a \mid a \equiv a_1 (\mathrm{mod}\, 2), a \leq S\}$. Поэтому $J_M(x) = \mathbf{N}_{S+1}$.

Затем рассматриваются случаи, когда μ_1 или μ_2 – исключительный вес из таблицы или $\omega = a_1\omega_1 + a_n\omega_n$, они требуют специального анализа.

2. Пусть $S \geq p$. Выберем минимальное i такое, что $3a_i + 4a_{i+1} + \ldots + 4a_n < p$. Ясно, что $i > 1$. Положим $\Gamma = G(i, i + 1, \ldots, n)$. Пусть $A \subseteq G_1$ – подгруппа из теоремы 3, содержащая x, N – Γ-модуль, порожденный ненулевым вектором старшего веса. Ясно, что $\omega(N) = \omega|\Gamma = a_i\omega_1 + a_{i+1}\omega_2 + \ldots + a_n\omega_{n-i+1}$. В силу теоремы 2 N – неприводимый Γ-модуль, являющийся прямым слагаемым модуля $M|\Gamma$.

Ввиду леммы 8 $J_N(x) \subset J_M(x)$. При $i < n - 1$ определяем множество $J_N(x)$, рассуждая, как в случае 1. При $i = n - 1$ воспользуемся леммой 5. Для поиска других чисел из множества $J_M(x)$ используются следующие соображения. В Γ-модуле M построим несколько прямых слагаемых N_j таких, что все композиционные факторы ограничений $N_j|G_1$ удовлетворяют условиям леммы 3, а старшие веса композиционных факторов ограничений $N_j|A$ не больше $2p - 2$. В силу леммы 4 N_j – вполне приводимый G_1-модуль. Теперь из леммы 8 следует, что $J_F(x) \subset J_M(x)$ для любого композиционного фактора F G_1-модуля N_j. Ввиду леммы 7 $F|A$ – тилтинг-модуль. Заметим, что это сумма неразложимых тилтинг-модулей $T(\lambda)$ с $\lambda \leq 2p - 2$. Из леммы 3 следует, что все размерности весовых подпространств модуля F такие же, как у неприводимого модуля в характеристике 0 с тем же старшим весом, и могут быть вычислены по известным формулам. Поэтому, используя лемму 9, удается доказать существование в модулях $F|A$ прямых слагаемых, изоморфных p-ограниченным неприводимым A-модулям с определенными старшими весами. Из наличия такого A-модуля со старшим весом m следует, что $m + 1 \in J_F(x) \subset J_M(x)$.

При анализе представлений из пунктов 2i и 2ii теоремы 1 приходится доказывать отсутствие некоторых прямых слагаемых в ограничениях неприводимых G_1-модулей вида $M(a\omega_1)$ на подгруппу A при произвольных $a < p$. При этом рассматриваются тилтинг-модули $T(\lambda)$ для группы A с $\lambda \leq 3p - 3$.

Заметим, что при $p < 5$ порядок регулярного унипотентного элемента из подсистемной подгруппы типа C_2 больше p. Случай, когда $p = 5$ или 7, требует специального анализа. В этой ситуации у группы $C_2(K)$ мало неприводимых модулей, ограничения которых на A – прямые суммы p-ограниченных модулей. Этот случай будет исследован позже.

Заключение. Как правило, образы регулярных унипотентных элементов из подсистемных подгрупп типа C_2 в рассматриваемых в сообщении представлениях имеют блоки Жордана всех априори возможных размерностей.

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция» (2011–2015) и частично поддержана Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (проект Ф14-043).

Список использованной литературы

1. *Осиновская, А. А.* Унипотентные элементы из подсистемных подгрупп типа A_3 в представлениях специальной линейной группы / А. А. Осиновская, И. Д. Супруненко // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 36–42.

2. *Бурбаки, Н.* Группы и алгебры Ли. гл. VII–VIII / Н. Бурбаки. – М.: Мир, 1978. – 342 с.

3. *Стейнберг, Р.* Лекции о группах Шевалле / Р. Стейнберг. – М.: Мир, 1975. – 262 с.

4. *Smith, S.* Irreducible modules and parabolic subgroups / S. Smith // J. Algebra. – 1982. – Vol. 75. – P. 286–289.

5. *Suprunenko, I. D.* The minimal polynomials of unipotent elements in irreducible representations of the classical groups in odd characteristic / I. D. Suprunenko // Memoirs Amer. Math. Soc. – 2009. – Vol. 200, N 939. – 154 p.

6. *Супруненко, И. Д.* Минимальные полиномы элементов порядка p в неприводимых представлениях групп Шевалле над полями характеристики p / И. Д. Супруненко // Вопр. алгебры и логики. Тр. Ин-та математики СО РАН. – Новосибирск, 1996. – Т. 30. – С. 126–163.

7. *Желобенко, Д. П.* Классические группы. Спектральный анализ конечномерных представлений / Д. П. Желобенко // Успехи матем. наук. – 1962. – Т. 17, № 1. – С. 27–120.

8. *Супруненко, И. Д.* О блочной структуре регулярных унипотентных элементов из подсистемных подгрупп типа $A_1 \times A_2$ в представлениях специальной линейной группы / И. Д. Супруненко // Зап. науч. семин. ПОМИ. – 2011. – Т. 388. – С. 247–269.

9. *Osinovskaya, A. A.* Nilpotent elements in irreducible representations of simple Lie algebras of small rank / A. A. Osinovskaya. – Minsk, 1999. – 31 p. – (Preprint: National Academy of Sciences of Belarus. Institute of Mathematics. – Vol. 554, N 5).

10. *Velichko, M. V.* On the behaviour of the root elements in irreducible representations of simple algebraic groups / M. V. Velichko // Тр. Ин-та математики. – 2005. – Т. 13, № 2. – С. 116–121.

11. *Величко, М. В.* Малые квадратичные элементы в представлениях специальной линейной группы с большими старшими весами / М. В. Величко, И. Д. Супруненко // Зап. науч. семин. ПОМИ. – 2007. – Т. 343. – С. 84–120.

12. *Seitz, G. M.* Unipotent elements, tilting modules, and saturation / G. M. Seitz // Invent. Math. – 2000. – Vol. 141, N 3. – P. 467–502.

Поступило в редакцию 12.08.2015