ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 519.63 Поступило в редакцию 17.12.2018
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-3-263-269 Received 17.12.2018

Член-корреспондент П. П. Матус[1,2], Ле Минь Хиеу[3], Д. Пылак[2]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Католический университет Люблина, Люблин, Польша
[3]Университет экономики, Университет Дананга, Дананг, Вьетнам

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СМЕШАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Аннотация. Настоящая работа посвящена построению монотонных разностных схем второго порядка точности для двумерного квазилинейного параболического уравнения со смешанными производными. Получены двусторонние оценки решения конкретных разностных схем для исходной задачи, которые полностью согласованные с аналогичными оценками решения дифференциальной задачи, а также доказана важная априорная оценка в равномерной норме C. Полученные оценки применяются для доказательства сходимости разностных схем в сеточной норме L_2.

Ключевые слова: уравнение со смешанными производными, принцип максимума, равномерная сетка, монотонная разностная схема, двусторонние оценки

Для цитирования. Матус, П. П. Разностные схемы для квазилинейных параболических уравнений со смешанными производными / П. П. Матус, Ле Минь Хиеу, Д. Пылак // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 3. – С. 263–269. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-3-263-269

Corresponding Member Piotr P. Matus[1,2], Le Minh Hieu[3], Dorota Pylak[2]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]Institute of Mathematics and Computer Science The John Paul II Catholic University of Lublin, Lublin, Poland
[2]University of Economics, University of Danang, Danang, Vietnam

DIFFERENCE SCHEMES FOR QUASI-LINEAR PARABOLIC EQUATIONS WITH MIXED DERIVATIVES

Abstract. The present paper is devoted to constructing second-order monotone difference schemes for two-dimensional quasi-linear parabolic equation with mixed derivatives. Two-sided estimates of the solution of specific difference schemes for the original problem are obtained, which are fully consistent with similar estimates of the solution of the differential problem, and the *a priori* estimate in the uniform norm of C is proved. The estimates obtained are used to prove the convergence of difference schemes in the grid norm of L_2.

Keywords: equation with mixed derivatives, maximum principle, uniform grid, monotone difference scheme, two-sided estimates

For citation: Matus P. P., Le Minh Hieu, Pylak D. Difference schemes for quasilinear parabolic equations with mixed derivatives. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 3, pp. 263–269 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-3-263-269

Введение. В теории разностных схем [1; 2] принцип максимума применяется для исследования устойчивости и сходимости разностного решения в равномерной норме. Вычислительные методы, удовлетворяющие принципу максимума, принято называть монотонными [1; 2]. Монотонные схемы играют важную роль в вычислительной практике. Они позволяют получать численное решение без осцилляций даже в случае негладких решений [3].

Проблемы разработки разностных схем для уравнений со смешанными производными были изучены в [4–6]. В [7] для эллиптических уравнений со смешанными производными используются новые монотонные и консервативные разностные схемы как для знакопостоянного, так и для знакопеременного коэффициентов. В [8] для нелинейной задачи со смешанными производными в недивергентном виде построены и исследованы разностные схемы и реализующий ее итерационный процесс. Установлены согласованные с гладкостью искомого решения оценки скорости сходимости разностных схем в сеточной норме $W_{2,0}^{2}(\omega)$.

В настоящей работе рассмотрена начально-краевая задача для квазилинейного параболического уравнения с неограниченной нелинейностью [9]. На основе комбинации двух разностных схем второго порядка аппроксимации [10] построены и исследованы схемы, удовлетворяющие принципу максимума при произвольных знакопеременных коэффициентах смешанных производных. Для канонической формы разностной схемы общего вида доказаны двусторонние оценки сеточного решения через входные данные задачи без предположения об их знакоопределенности [11]. При помощи этих результатов получены двусторонние оценки решения конкретных разностных схем для исходной задачи, которые полностью согласованы с аналогичными оценками решения дифференциальной задачи, а также доказана важная априорная оценка в равномерной норме C. Полученные оценки применяются для доказательства сходимости разностных схем в сеточной норме L_2. Все теоретические результаты получены только в предположении на входные данные дифференциальной задачи.

Вспомогательные результаты. Пусть Ω_h – конечное множество узлов (сетка) в некоторой ограниченной области n-мерного евклидова пространства, $x \in \Omega_h$ – точка сетки Ω_h. Рассмотрим уравнение

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in \mathcal{M}'(x)} B(x,\xi)y(\xi) + F(x), \quad x \in \Omega_h, \tag{1}$$

называемое канонической формой записи разностной схемы. Здесь $\mathcal{M}'(x) = \mathcal{M}(x) \setminus x$, $\mathcal{M}(x)$ – шаблон схемы. Будем предполагать выполнение обычных условий положительности коэффициентов

$$A(x) > 0, \quad B(x,\xi) > 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{M}'(x), \tag{2}$$

$$D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in \mathcal{M}'(x)} B(x,\xi) > 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{M}'(x). \tag{3}$$

Для получения двусторонней оценки решения разностной схемы более удобной является следующая:

Л е м м а [11]. *Пусть выполнены условия положительности коэффициентов (2), (3). Тогда максимальное и минимальное значения решения разностной схемы (1) принадлежат интервалу изменения входных данных*

$$\min_{x \in \Omega_h} \frac{F(x)}{D(x)} \le y(x) \le \max_{x \in \Omega_h} \frac{F(x)}{D(x)}, \quad x \in \Omega_h.$$

С л е д с т в и е [1]. *Пусть выполнены условия леммы. Тогда для решения разностной задачи (1) имеет место оценка в сеточном аналоге нормы C*

$$\|y\|_C = \max_{x \in \Omega_h} |y(x)| \le \left\| \frac{F}{D} \right\|_C.$$

Постановка задачи и двусторонние оценки точного решения. Пусть $\bar{G} = \{0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \ \alpha = 1, 2\}$ – прямоугольник с границей Γ, $x = (x_1, x_2)$. Требуется найти непрерывную функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую в $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0,T]$ начально-краевой задаче для квазилинейного параболического уравнения со смешанными производными

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad x \in G, \quad t \in (0,T], \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u\big|_\Gamma = \mu(x,t), \tag{4}$$

$$Lu = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} L_{\alpha\beta}u, \quad L_{\alpha\beta}u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(u)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right). \tag{5}$$

Предполагаются выполненными следующие условия эллиптичности:

$$c_1\sum_{\alpha=1}^{2}\xi_\alpha^2 \le \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} k_{\alpha\beta}(u)\xi_\alpha\xi_\beta \le c_2\sum_{\alpha=1}^{2}\xi_\alpha^2, \quad \forall u \in \bar{D}_u, \tag{6}$$

$$\bar{D}_u = \{u(x,t): \ m_1 \le u(x,t) \le m_2, \ (x,t)\in \bar{Q}_T, \ m_1, m_2 - \text{const}\},$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ – постоянные, а $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ – любой вектор. Из (6) в частности следует, что

$$0 < c_1 \le k_{\alpha\alpha}(u) \le c_2, \quad \forall u \in [m_1, m_2], \quad \alpha = 1, 2.$$

Далее предполагаем, что решение задачи (4)–(6) существует единственно, а все входящие в уравнение (4) коэффициенты и искомая функция обладают непрерывными ограниченными производными необходимого по ходу изложения порядка.

Пусть $Q_{t_1} = \{(x,t)\in Q_T : t \le t_1\}$. Тогда имеет место следующий результат.

Т е о р е м а 1 [12]. *Для решения $u(x,t)$ задачи (4)–(6) в любой точке $(x,t_1)\in\bar{Q}_T$ имеет место двусторонняя оценка*

$$u(x,t_1) \ge m_1 = \sup_{\lambda>0}\min\left\{0, \min_{Q_{t_1}}\{\mu(x,t), u_0(x)\}e^{\lambda(t_1-t)}, \frac{1}{\lambda}\min_{Q_{t_1}}(f(x,t)e^{\lambda(t_1-t)})\right\}, \tag{7}$$

$$u(x,t_1) \le m_2 = \inf_{\lambda>0}\max\left\{0, \max_{Q_{t_1}}\{\mu(x,t), u_0(x)\}e^{\lambda(t_1-t)}, \frac{1}{\lambda}\max_{Q_{t_1}}(f(x,t)e^{\lambda(t_1-t)})\right\}. \tag{8}$$

Разностная схема. На отрезке [0, T] введем в рассмотрение равномерную с шагом τ сетку по времени $\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, \ n = 0,1,\dots,N_0, \ \tau N_0 = T\} = \omega_\tau \cup T$, а в прямоугольнике $\bar{G}$ введем равномерную по каждому направлению x_α сетку $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$, γ_h – множество граничных узлов,

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}), \ x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, \ i_\alpha = 0,1,\dots,N_\alpha, \ h_\alpha N_\alpha = l_\alpha, \ \alpha = 1,2\}.$$

Для простоты будем использовать безындексные обозначения для независимых переменных $x = x_i$, $x_\alpha = x_\alpha^{i_\alpha}$, $t = t_n$, $\hat{t} = t_{n+1}$, и для сеточных функций

$$g = g(x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, t_n) = g(x,t), \quad g^{\pm 1_1} = g_{i_1\pm1, i_2}, \quad g^{\pm 1_2} = g_{i_1, i_2\pm1},$$

$$\hat{g} = g^{n+1} = g(x, t_{n+1}), \quad g_{\bar{x}_\alpha} = \frac{g - g^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha}, \quad g_{x_\alpha} = \frac{g^{(+1_\alpha)} - g}{h_\alpha}.$$

На равномерной сетке $\omega = \omega_h \times \omega_\tau$ дифференциальную задачу (4) аппроксимируем чисто неявной разностной схемой

$$y_t = \sum_{\alpha=1}^{2}\Lambda_{\alpha\alpha}\hat{y} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\ne\beta}}^{2}\Lambda_{\alpha\beta}\hat{y} + \varphi, \tag{9}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \omega_h, \quad \hat{y}\big|_{\gamma_h} = \mu(x,t), \quad x \in \gamma_h, \tag{10}$$

где

$$\Lambda_{\alpha\alpha}\hat{y} = (a_{\alpha\alpha}(y)\hat{y}_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} = \frac{a_{\alpha\alpha}^{(+1_\alpha)}(y)(\hat{y}^{(+1_\alpha)} - y) - a_{\alpha\alpha}(y)(y - \hat{y}^{(-1_\alpha)})}{h_\alpha^2},$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}\hat{y} = 0{,}5[(k_{\alpha\beta}^-(y)\hat{y}_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta}^-(y)\hat{y}_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha} + (k_{\alpha\beta}^+(y)\hat{y}_{x_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta}^+(y)\hat{y}_{\bar{x}_\beta})_{\bar{x}_\alpha}], \ \alpha \ne \beta,$$

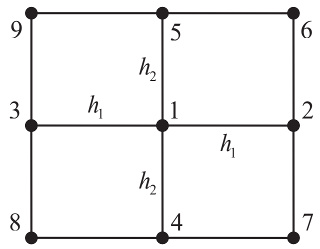
$$a_{\alpha\alpha}^{(+1\alpha)}(y)=\frac{k_{\alpha\alpha}(y^{(+1\alpha)})+k_{\alpha\alpha}(y)}{2},\quad a_{\alpha\alpha}(y)=\frac{k_{\alpha\alpha}(y^{(-1\alpha)})+k_{\alpha\alpha}(y)}{2},$$

$$k_{\alpha\beta}^{+}=0,5(k_{\alpha\beta}+|k_{\alpha\beta}|)\ge 0,\quad k_{\alpha\beta}^{-}=0,5(k_{\alpha\beta}-|k_{\alpha\beta}|)\le 0,\quad \alpha\ne\beta,$$

$$k_{\alpha\beta}^{+}+k_{\alpha\beta}^{-}=k_{\alpha\beta},\quad k_{\alpha\beta}^{+}-k_{\alpha\beta}^{-}=|k_{\alpha\beta}|,\quad \varphi=\hat{f},\quad y_t=(y^{n+1}-y^n)/\tau.$$

Нетрудно показать, что разностная схема (9), (10) имеет второй порядок аппроксимации по пространственным переменным и первый – по временной.

Монотонность, двусторонние и априорные оценки. Для применения принципа максимума схему (9) приведем к каноническому виду (1) и проверим достаточные условия на коэффициенты (2), (3).



В случае знакопеременных коэффициентов $k_{\alpha\beta}(u)$ шаблон схемы 9-точечный и состоит из узлов, изображенных на рисунке. Узлы шаблона пронумеруем согласно рисунку. Тогда для схемы (9) получим

$$\sum_{\xi\in\mathcal{M}'(x)} B^n(x,\xi)=\sum_{j=2}^{9} B_j^n.$$

Для того чтобы выписать коэффициенты A^n, B^n, F^n, необходимо записать схему (9) в индексной форме. После элементарных преобразований находим

$$B_2^n=\tau\left(\frac{k_{11}(y_1^n)+k_{11}(y_2^n)}{2h_1^2}-\frac{|k_{12}(y_2^n)|+|k_{21}(y_1^n)|}{2h_1h_2}\right),$$

$$B_3^n=\tau\left(\frac{k_{11}(y_1^n)+k_{11}(y_3^n)}{2h_1^2}-\frac{|k_{12}(y_3^n)|+|k_{21}(y_1^n)|}{2h_1h_2}\right),$$

$$B_4^n=\tau\left(\frac{k_{22}(y_1^n)+k_{22}(y_4^n)}{2h_2^2}-\frac{|k_{12}(y_1^n)|+|k_{21}(y_4^n)|}{2h_1h_2}\right),$$

$$B_5^n=\tau\left(\frac{k_{22}(y_1^n)+k_{22}(y_5^n)}{2h_2^2}-\frac{|k_{12}(y_1^n)|+|k_{21}(y_5^n)|}{2h_1h_2}\right),$$

$$B_8^n=\tau\frac{k_{12}^{+}(y_3^n)+k_{21}^{+}(y_4^n)}{2h_1h_2}\ge 0,\quad B_9^n=-\tau\frac{k_{12}^{-}(y_3^n)+k_{21}^{-}(y_5^n)}{2h_1h_2}\ge 0,$$

$$A^n=1+\tau\left(k^n+\frac{k_{11}(y_1^n)}{h_1^2}-\frac{|k_{12}(y_1^n)|+|k_{21}(y_1^n)|}{h_1h_2}+\frac{k_{22}(y_1^n)}{h_2^2}\right)=1+\sum_{j=2}^{9} B_j^n,$$

$$k^n=\frac{k_{11}(y_2^n)+k_{11}(y_3^n)}{2h_1^2}+\frac{k_{22}(y_4^n)+k_{22}(y_5^n)}{2h_2^2},\quad D^n=A^n-\sum_{j=2}^{9} B_j^n=1,\quad F^n=y_1^n+\tau\varphi.$$

Пусть для шагов сетки h_1 и h_2 выполнены следующие условия через входные данные задачи:

$$\frac{c_3+c_4}{2c_1}\le\frac{h_1}{h_2}\le\frac{2c_1}{c_3+c_4},\ c_3=\max_{u\in\bar{D}_u}|k_{21}(u)|,\ c_4=\max_{u\in\bar{D}_u}|k_{12}(u)|. \tag{11}$$

Неравенства (11) гарантируют выполнение условия монотонности (2), (3) (т. е. $A^n>0$, $B_j^n\ge 0$, $j=2,3,4,5$). При помощи леммы доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия (11). Тогда разностная схема (9), (10) безусловно монотонна (без ограничений на* τ *и* h_α, $\alpha=1,2$*) и для ее решения в любой точке* $(x,t_n)\in\omega$ *имеют место двусторонние оценки вида*

$$y(x,t_n)\ge m_1^n=\sup_{\lambda>0}\min\left\{0,\min_{\omega_{t_n}} e^{\lambda(t_n-t)}\{\mu(x,t),u_0(x)\},\frac{\tau}{e^{\lambda\tau}-1}\min_{\omega_{t_n}} f(x,t)e^{\lambda(t_n-t)}\right\}, \qquad (12)$$

$$y(x,t_n)\le m_2^n=\inf_{\lambda>0}\max\left\{0,\max_{\omega_{t_n}} e^{\lambda(t_n-t)}\{\mu(x,t),u_0(x)\},\frac{\tau}{e^{\lambda\tau}-1}\max_{\omega_{t_n}} f(x,t)e^{\lambda(t_n-t)}\right\}. \qquad (13)$$

З а м е ч а н и е 1. *Верхняя и нижняя границы двусторонних оценок (12), (13) не зависят от величины коэффициентов диффузии* $k_{\alpha\beta}(u)$, $\alpha,\beta=1,2$.

З а м е ч а н и е 2. *Если матрица коэффициентов уравнения (4) имеет диагональное преобладание по строкам и столбцам:* $k_{\alpha\alpha}(u)\ge\left|k_{\alpha\beta}(u)\right|$, $\forall u\in[m_1,m_2]$, $\alpha,\beta=1,2$, $\alpha\ne\beta$, *то можно, например, положить* $h_1=h_2=h$ *и условие (11) в этом случае всегда выполнено.*

На основании принципа максимума обычным образом устанавливается и следующая важная априорная оценка в сильной норме C.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены условия (11). Тогда для решения разностной схемы (9), (10) при любом* $t_n\in\omega_\tau$ *верна априорная оценка*

$$\left\|y(t_{n+1})\right\|_{\bar C}\le\max\left\{\left\|u_0\right\|_{\bar C},\max_{1\le k\le n+1}\left\|\mu(t_k)\right\|_{C_\gamma}\right\}+t_{n+1}\max_{1\le k\le n+1}\left\|f(t_k)\right\|_C. \qquad (14)$$

З а м е ч а н и е 3. *Полученные выше результаты естественным образом обобщаются на p-мерные (*$p\ge 2$ *– любое число) параболические уравнения со смешанными производными.*

З а м е ч а н и е 4. *Так как*

$$\frac{\tau}{e^{\lambda\tau}-1}\le\frac{1}{\lambda},\quad \forall\lambda,\tau>0,$$

то из (7), (8), (12), (13) имеем $m_1\le m_1^n$, $m_2^n\le m_2$, *и в этом смысле говорят, что разностные оценки наследуют свойства дифференциальной задачи.*

Сходимость разностной схемы в сеточной норме L_2. Когда удается получить двусторонние оценки решения разностных схем, то исследование сходимости приводит для линеаризованных вычислительных алгоритмов к линейной задаче для погрешности метода $z=y-u$.

Для простоты рассмотрим случай $k_{\alpha\beta}(u)\le 0$, $u\in\bar D_u$, $\alpha\ne\beta$. Тогда разностная схема (9), (10) имеет следующий вид:

$$y_t=\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\Lambda_{\alpha\beta}\hat y+\varphi,\ y(x,0)=u_0(x),\ x\in\omega_h,\ \hat y\big|_{\gamma_h}=\mu(x,t),\ x\in\gamma_h, \qquad (15)$$

где

$$\Lambda_{\alpha\beta}\hat y=0,5[(k_{\alpha\beta}(y)\hat y_{\bar x_\beta})_{x_\alpha}+(k_{\alpha\beta}(y)\hat y_{x_\beta})_{\bar x_\alpha}].$$

Определим следующее скалярное произведение и соответствующую норму:

$$(u,v)=\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}h_1h_2u_{i_1i_2}v_{i_1i_2},\ \left\|u\right\|=\sqrt{(u,u)}.$$

Имеет место следующее утверждение:

Т е о р е м а 4. *Пусть выполнены условия (11). Тогда решение разностной схемы (15) сходится к точному решению дифференциальной задачи (4) и имеет место оценка точности метода*

$$\left\|\hat z\right\|\le C(h_1^2+h_2^2+\tau),\ C=\text{const}>0. \qquad (16)$$

З а м е ч а н и е 5. *Если отсутствуют смешанные производные оценки (12), (13), то (14), (16) уже выполнены без ограничений (11) на соотношения между* h_1 *и* h_2.

Список использованных источников

1. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М., 1989. – 616 с.

2. Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. А. Гулин. – М., 1989. – 432 с.

3. Матус, П. П. Монотонные разностные схемы для линейного параболического уравнения с граничными условиями смешанного типа / П. П. Матус, Во Тхи Ким Туен, Ф. Гаспар // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 5. – С. 18–22.

4. Arbogast, T. Mixed finite elements for elliptic problems with tensor coefficients as cell-centered finite differences / T. Arbogast, M. F. Wheeler, I. Yotov // SIAM J. Numer. Anal. – 1997. – Vol. 34, N 2. – P. 828–852. https://doi.org/10.1137/s0036142994262585

5. Crumpton, P. Discretization and multigrid solution of elliptic equations with mixed derivative terms and strongly discontinuous coefficients / P. Crumpton, G. Shaw, A. Ware // J. Comput. Phys. – 1995. – Vol. 116, N 2. – P. 343–358. https://doi.org/10.1006/jcph.1995.1032

6. Voigt, W. Finite-difference schemes for parabolic problems with first and mixed second derivatives / W. Voigt // Z. angew. Math. und Mech. – 1988. – Vol. 68, N 7. – P. 281–288. https://doi.org/10.1002/zamm.19880680703

7. Matus, P. Difference schemes for elliptic equations with mixed derivatives / P. Matus, I. Rybak // Comput. Meth. Appl. Math. – 2004. – Vol. 4, N 4. – P. 494–505. https://doi.org/10.2478/cmam-2004-0027

8. Лубышев, Ф. В. Согласованные оценки скорости сходимости в сеточной норме $W_{2,0}^2(\omega)$ разностных схем для нелинейных эллиптических уравнений со смешанными производными и решениями из $W_{2,0}^m(\Omega)$, $3 < m \le 4$ / Ф. В. Лубышев, М. Э. Файрузов // ЖВМ и МФ. – 2017. – Т. 57, № 9. – С. 1444–1470.

9. Matus, P. On convergence of difference schemes for IBVP for quasilinear parabolic equations with generalized solutions / P. Matus // Comput. Meth. Appl. Math. – 2014. – Vol. 14, N 3. – P. 361–371. https://doi.org/10.1515/cmam-2014-0008

10. Shishkin, G. Grid approximation of the singular perturbance boundary-value problem for quasilinear parabolic equations in the case of the full degeneration on time variables / G. Shishkin // Kuznetsov Yu. A., ed. Numerical methods and mathematical modeling. – Moscow, 1992. – P. 103–128.

11. Матус, П. П. Принцип максимума для разностных схем с непостоянными входными данными / П. П. Матус, Л. М. Хиеу, Л. Г. Волков // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 5. – С. 13–17.

12. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. – М., 1967. – 736 с.

References

1. Samarskii A. A. *Theory of difference schemes.* Moscow, 1989. 616 p. (in Russian).

2. Samarskii A. A., Gulin A. A. *Numerical methods*. Moscow, 1989. 432 p. (in Russian).

3. Matus P. P., Vo Thi Kim Tuyen, Gaspar F. Monotone difference schemes for linear parabolic equations with mixed boundary conditions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2014, vol. 58, no. 5, pp. 18–22 (in Russian).

4. Arbogast T., Wheeler M. F., Yotov I. Mixed finite elements for elliptic problems with tensor coefficients as cell-centered finite differences. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1997, vol. 34, no. 2, pp. 828–852. https://doi.org/10.1137/s0036142994262585

5. Crumpton P., Shaw G., Ware A. Discretization and multigrid solution of elliptic equations with mixed derivative terms and strongly discontinuous coefficients. *Journal of Computational Physics*, 1995, vol. 116, no. 2, pp. 343–358. https://doi.org/10.1006/jcph.1995.1032

6. Voigt W. Finite-difference schemes for parabolic problems with first and mixed second derivatives. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1988, vol. 68, no. 7, pp. 281–288. https://doi.org/10.1002/zamm.19880680703

7. Matus P., Rybak I. Difference schemes for elliptic equations with mixed derivatives. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2004, vol. 4, no. 4, pp. 494–505. https://doi.org/10.2478/cmam-2004-0027

8. Lubyshev F. V., Fairuzov M. E. Consistent convergence rate estimates in the grid $W_{2,0}^2(\omega)$ norm for difference schemes approximating nonlinear elliptic equations with mixed derivatives and solutions from $W_{2,0}^m(\Omega)$, $3 < m \le 4$. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 9, pp. 1427–1452. doi.org/10.7868/S0044466917090083

9. Matus P. On convergence of difference schemes for IBVP for quasilinear parabolic equations with generalized solutions. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2014, vol. 14, no. 3, pp. 361–371. https://doi.org/10.1515/cmam-2014-0008

10. Shishkin G. Grid approximation of the singular perturbance boundary-value problem for quasilinear parabolic equations in the case of the full degeneration on time variables. Yu. A. Kuznetsov, ed. *Numerical methods and mathematical modeling*. Moscow, 1992, pp. 103–128.

11. Matus P. P., Hieu L. M., Vulkov L. G. Maximum principle for finite-difference schemes with non sigh-constant input data. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2015, vol. 59, no. 5, pp. 13–17 (in Russian).

12. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N. *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. Moscow, 1967. 736 p. (in Russian).

Информация об авторах

Матус Петр Павлович – член-корреспондент, д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: matus@im.bas-net.by.

Ле Минь Хиеу – канд. физ.-мат. наук. Университет экономики, Университет Дананга (ул. Нгу Хань Шон, 71, 550000, Дананг, Вьетнам). E-mail: hieulm@due.edu.vn.

Пылак Дорота – канд. физ.-мат. наук. Католический университет Люблина (ул. Raclawickie, 14, 20-950, Люблин, Польша). E-mail: dorotab@kul.pl.

Information about the authors

Matus Petr Pavlovich – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: matus@im.bas-net.by.

Le Minh Hieu – Ph. D. (Physics and Mathematics). University of Economics, University of Danang (71, Ngu Han Sean Str., 550000, Danang, Vietnam). E-mail: hieulm@due.edu.vn.

Pylak Dorota – Ph. D. (Physics and Mathematics). Institute of Mathematics and Computer Science the John Paul II Catholic University of Lublin (14, Raclawickie Str., 20-950, Lublin, Poland). E-mail: dorotab@kul.pl.