ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 517.926.4
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-3-270-277

Поступило в редакцию 30.01.2019
Received 30.01.2019

А. В. Липницкий

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ МИЛЛИОНЩИКОВА, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВЕЩЕСТВЕННОГО ПАРАМЕТРА

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Аннотация. Рассматриваются однопараметрические семейства линейных дифференциальных систем второго порядка, матрица коэффициентов которых зависит от вещественного параметра и представляет собой на каждом нечетном отрезке времени единичной длины диагональную матрицу, а за каждый четный отрезок времени матрица Коши системы осуществляет поворот на некоторый угол, аффинно зависящий от параметра. Ранее автором установлена положительность старшего показателя Ляпунова такой системы, рассматриваемого как функция параметра, на множестве положительной меры Лебега в случае, когда диагональная часть матрицы коэффициентов не зависит от параметра и отделена от нуля. В доказательстве этого результата существенно используются комплексные матрицы специального вида. В настоящей работе приводится другой способ доказательства данной теоремы, основанный на применении равенства Парсеваля для тригонометрических сумм. Помимо этого, рассмотрен частный случай описанных выше систем, характеризующийся тем, что диагональная часть матрицы коэффициентов не зависит от времени и достаточно велика, а углы поворота определяются максимальной степенью двойки, которая делит номер соответствующего отрезка времени. Для таких систем в случае непрерывной зависимости коэффициентов от параметра доказано существование такого его значения, при котором соответствующая система неустойчива.

Ключевые слова: линейная дифференциальная система, старший показатель Ляпунова, вещественный параметр, равенство Парсеваля

Для цитирования. Липницкий, А. В. О неустойчивости линейных дифференциальных систем Миллионщикова, зависящих от вещественного параметра / А. В. Липницкий // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 3. – С. 270–277. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-3-270-277

Andrei V. Lipnitskii

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

ON THE INSTABILITY OF THE MILLIONSHCHIKOV LINEAR SYSTEMS DEPENDING ON A REAL PARAMETER

(Communicated by Academician Nikolai A. Izobov)

Abstract. The present article considers one-parameter families of second-order linear differential systems with a coefficient matrix depending on the real parameter, which is a diagonal matrix at each odd time interval of unit length. The Cauchy matrix is the rotation matrix at each odd time interval, whereas the angle is the sum of a parameter value and some real number. Earlier, it has been has proved that the upper Lyapunov exponent of each such a system, which is considered to be the function of parameter, is positive on the set of the positive Lebesque measure if the diagonal part of the coefficient matrix is independent on a parameter and separated from zero. The proof of this result essentially uses a complex matrix of special type. In recent article, the author has given another way to prove this theorem based on implementing the Parseval equality for trygonometric sums. Besides, the author considers the special case of the above systems. Now the diagonal part of the coefficient matrix is time-independent and is sufficiently big, whereas the rotation angle is defined by a maximum degree of two that divides the number of the corresponding time interval. For such a system, in the case of a continious coefficient dependence on a parameter it is proved that such a value exists, at which the corresponding system is unstable.

Keywords: linear differential system, upper Lyapunov exponent, real parameter, Parseval equality

For citation: Lipnitskii A. V. On the instability of the Millionshchikov linear systems depending on a real parameter. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 3, pp. 270–277 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-3-270-277

Рассмотрим однопараметрическое семейство линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A_\mu(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0, \tag{1_μ}$$

с матрицами $A_\mu(t) := \begin{cases} d_k(\mu)\mathrm{diag}[1,-1], & 2k-2 \leq t < 2k-1, \\ (\mu + b_k)J, & 2k-1 \leq t < 2k, \end{cases}$ где $k \in \mathbb{N}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, и вещественным параметром μ; условия, которым удовлетворяют числа $b_k \in \mathbb{R}$ и функции $d_k(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, будут указаны ниже.

В [1] доказано, что старший показатель Ляпунова системы (1_μ), рассматриваемый как функция параметра μ, положителен на множестве положительной меры Лебега в случае, когда $d_k(\cdot)$ не зависят от μ и выполнено условие $d_k(\mu) \equiv d_k \geq d > 0$, $k \in \mathbb{N}$. В доказательстве этого результата существенно используются комплексные матрицы специального вида. В настоящей работе приводится другой способ доказательства теоремы из [1], основанный на применении равенства Парсеваля для тригонометрических сумм.

Пусть $\alpha_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, – произвольные числа. Положим

$$d_k(\mu) \equiv d(\mu) > 2^{20}, \quad b_{2^{n-1}(2k-1)} := \alpha_n, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Обозначим через $X_{A_\mu}(t,s)$, $t, s \geq 0$, матрицу Коши системы (1_μ). Для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ матрицу поворота на угол φ по часовой стрелке обозначим через $U(\varphi) \equiv \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Можно показать, что в случае, когда матрица $A_\mu(\cdot)$ определяется условиями (2), для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $X_{A_\mu}(2^{k+1}, 0) = U(\alpha_{k+1} - \alpha_k)X^2_{A_\mu}(2^k, 0)$.

Системы с коэффициентами, выбранными согласно (2), обладают рядом свойств, позволяющих строить однопараметрические семейства с различными асимптотическими характеристиками. В частности, если последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то матрица $A_\mu(\cdot)$ есть равномерный по $t \geq 0$ предел последовательности периодических матриц. В. М. Миллионщиков использовал такие системы в [2; 3] (см. также [4]) для доказательства существования неправильных по Ляпунову линейных дифференциальных систем с предельно периодическими и квазипериодическими коэффициентами.

Предложенные в этих работах методы требуют получения оценок собственных значений и векторов матрицы Коши системы (1_μ). Критерий Е. А. Барабанова [5] правильности линейной системы, состоящий в точности ее сингулярных показателей, инициировал другой подход, состоящий в применении сингулярного представления матрицы Коши (см. (5_n) ниже).

В настоящей работе при выполнении условий (2) и в случае непрерывной функции $d(\cdot)$ доказано существование такого значения параметра $\mu \in \mathbb{R}$, при котором соответствующая система (1_μ) неустойчива.

Положим $\eta_1(\mu) = e^{d(\mu)}$, $\psi_1(\mu) := 0$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ определим рекуррентно вещественные числа $\eta_k \geq 1$ и ψ_k следующим образом. Обозначим $\xi_k := 2\psi_k + \alpha_k + \mu$. Поскольку $\eta_k \geq 1$ и, следовательно $\mathrm{sh}(2\ln\eta_k) \geq 0$, найдутся единственные $1 \leq \eta_{k+1} \in \mathbb{R}$ и $\varphi_k \in [-2^{-1}\pi, 2^{-1}\pi)$, такие что выполнены равенства

$$\mathrm{sh}\ln\eta_{k+1} = (\mathrm{sh}(2\ln\eta_k))\,|\cos\xi_k|, \tag{3}$$

$$\mathrm{ctg}\varphi_k = \begin{cases} (\mathrm{ch}(2\ln\eta_k))\mathrm{ctg}\xi_k, & \sin\xi_k \neq 0, \\ 0, & \sin\xi_k = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Наконец, полагаем $\psi_{k+1} = \psi_k + \dfrac{\varphi_k}{2} + \dfrac{\pi}{4}(1 - \mathrm{sgn}\cos\xi_k)$.

Л е м м а 1. *Для любых $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}$ при выполнении условий (2) имеет место представление*

$$Y_n := X_{A_\mu}(2^n - 1, 0) = U(\psi_n)\mathrm{diag}[\eta_k, \eta_k^{-1}]\,U(\psi_n). \tag{5_n}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}$.

Из (3) и (4) вытекают равенства

$$\left(\frac{\operatorname{ch}(2\ln\eta_k)}{\cos\varphi_k}\right)^2=(\operatorname{ch}^2(2\ln\eta_k))(1+\operatorname{tg}^2\varphi_k)\overset{(4)}{=}(\operatorname{tg}^2\xi_k)+\operatorname{ch}^2(2\ln\eta_k)=$$

$$=(1+\operatorname{tg}^2\xi_k)+\operatorname{sh}^2(2\ln\eta_k)\overset{(3)}{=}\frac{1}{\cos^2\xi_k}+\left(\frac{\operatorname{sh}\ln\eta_{k+1}}{\cos\xi_k}\right)^2=\left(\frac{\operatorname{ch}\ln\eta_{k+1}}{\cos\xi_k}\right)^2.$$

Поэтому, ввиду следующей из включения $\varphi_k\in[-2^{-1}\pi,2^{-1}\pi)$ оценки

$$\cos\varphi_k\geq 0, \tag{6}$$

выполняется соотношение

$$\operatorname{ch}(\ln\eta_{k+1})\cos\varphi_k=(\operatorname{ch}(2\ln\eta_k))\,|\cos\xi_k\,|. \tag{7}$$

В силу (4) и (6) справедливы равенства

$$\operatorname{sgn}\sin\varphi_k=(\operatorname{sgn}\cos\varphi_k)\operatorname{sgn}\operatorname{tg}\varphi_k\overset{(4),(6)}{=}\operatorname{sgn}\operatorname{tg}\xi_k=(\operatorname{sgn}\cos\xi_k)\operatorname{sgn}\sin\xi_k. \tag{8}$$

Вследствие (3) и (7) верны соотношения

$$(\operatorname{ch}(\ln\eta_{k+1})\sin\varphi_k)^2=(\operatorname{ch}^2\ln\eta_{k+1})(1-\cos^2\varphi_k)\overset{(7)}{=}1+(\operatorname{ch}^2\ln\eta_{k+1})-(\operatorname{ch}^2(2\ln\eta_k))\cos^2\xi_k\overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=}1+(\cos^2\xi_k)(\operatorname{ch}^2(2\ln\eta_k)-\operatorname{ch}^2(2\ln\eta_k))=\sin^2\xi_k.$$

Отсюда и из (8) вытекает равенство

$$(\operatorname{ch}\ln\eta_{k+1})\sin\varphi_k=(\operatorname{sgn}\cos\xi_k)\sin\xi_k,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{9}$$

Для любого $t\in[0,2^k-1)$ его целую часть $[t]$ можно единственным образом представить в виде $[t]=2^{p(t)}l(t)-1$, где $0\leq p(t),l(t)\in\mathbb{Z}$ и $l(t)$ не делится на 2. Если $p=0$, то $A_\mu(t)=\operatorname{diag}[1,-1]=A_\mu(t+2^k)$.

Так как $t<2^k-1$, то $p(t)<k$. Поэтому $2^{k-p(t)}$ делится на 2, и, следовательно, число $l(t)+2^{k-p(t)}$ нечетно. Тогда, поскольку $[t+2^k]=[t]+2^k=2^{p(t)}(l(t)+2^{k-p(t)})-1$, выполняются равенства $p(t+2^k)=p(t)$, $l(t+2^k)=l(t)+2^{k-p(t)}$. Отсюда в случае когда $p>0$, ввиду (2), следуют соотношения $A_\mu(t)\overset{(2)}{=}(\mu+\alpha_{p(t)})J=(\mu+\alpha_{p(t+2^k)})J=A_\mu(t+2^k)$.

В силу справедливого, таким образом, для любого $t\in[0,2^k-1)$ равенства $A_\mu(t+2^k)=A_\mu(t)$ верно соотношение

$$X_{A_\mu}(2^{k+1}-1,2^k)=X_{A_\mu}(2^k-1,0)=Y_k. \tag{10}$$

Отсюда, с учетом (2), следуют равенства

$$Y_{k+1}=X_{A_\mu}(2^{k+1}-1,0)=X_{A_\mu}(2^{k+1}-1,2^k)X_{A_\mu}(2^k,2^k-1)X_{A_\mu}(2^k,0)\overset{(2),(10)}{=}Y_kU(\mu+\alpha_k)Y_k. \tag{11}$$

Для любого $\delta\in\{-1,1\}$, вследствие (3) и (7), выполняются соотношения

$$\eta\quad\left|\cos\xi_k\right|=\left|\cos\xi_k\right|(\operatorname{ch}(2\ln\eta_k)+\delta\operatorname{sh}(2\ln\eta_k))\overset{(3),(7)}{}(\cos\varphi_k)\operatorname{ch}(\ln\eta_{k+1})+\delta\operatorname{sh}\ln\eta_{k+1}=$$

$$=(\cos^2(\varphi_k/2))(\operatorname{ch}(\ln\eta_{k+1})+\delta\operatorname{sh}\ln\eta_{k+1})+(\sin^2(\varphi_k/2))(\delta\operatorname{sh}(\ln\eta_{k+1})-\operatorname{ch}\ln\eta_{k+1})= \tag{12}$$

$$=\eta_{k+1}^{\delta}\cos^2(\varphi_k/2)-\eta_{k+1}^{-\delta}\sin^2(\varphi_k/2).$$

Справедливы равенства $Y_1=X_{A_\mu}(1,0)=\operatorname{diag}[e^{d_0(\mu)},e^{-d_0(\mu)}]=\operatorname{diag}[\eta_1,\eta_1^{-1}]$, влекущие за собой верность (5_1).

Предположим, что соотношение (5_n) справедливо для некоторого $n=k\in\mathbb{N}$. Тогда, в силу (11), выполняются равенства

$$Y_{k+1}\overset{(11)}{=}Y_kU(\zeta_k)Y_k\overset{(5_k)}{=}U(\psi_k)\operatorname{diag}[\eta_k,\eta_k^{-1}]U(2\psi_k+\mu+\alpha_k)\operatorname{diag}[\eta_k,\eta_k^{-1}]U(\psi_k). \qquad (13)$$

Отсюда, ввиду (9) и (12), вытекают соотношения

$$U(-\psi_k)Y_{k+1}U(-\psi_k)\overset{(13)}{=}\begin{pmatrix}\eta_k & 0\\ 0 & \eta_k^{-1}\end{pmatrix}U(\xi_k)\begin{pmatrix}\eta_k & 0\\ 0 & \eta_k^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_k^2\cos\xi_k & -\sin\xi_k\\ \sin\xi_k & \eta_k^{-2}\cos\xi_k\end{pmatrix}\overset{(9),(12)}{=}$$

$$\overset{(9),(12)}{=}(\operatorname{sgn}\cos\xi_k)\begin{pmatrix}\eta_{k+1}\cos^2(\varphi_k/2)-\eta_{k+1}^{-1}\sin^2(\varphi_k/2) & -2^{-1}(\eta_{k+1}+\eta_{k+1}^{-1})\sin\varphi_k\\ 2^{-1}(\eta_{k+1}+\eta_{k+1}^{-1})\sin\varphi_k & \eta_{k+1}^{-1}\cos^2(\varphi_k/2)-\eta_{k+1}\sin^2(\varphi_k/2)\end{pmatrix}=$$

$$=U\left(\frac{\pi}{2}(1-\operatorname{sgn}\cos\xi_k)\right)U\left(\frac{\varphi}{2}\right)\begin{pmatrix}\eta_{k+1} & 0\\ 0 & \eta_{k+1}^{-1}\end{pmatrix}U\left(\frac{\varphi}{2}\right)=U(\psi_{k+1}-\psi_k)\begin{pmatrix}\eta_{k+1} & 0\\ 0 & \eta_{k+1}^{-1}\end{pmatrix}U(\psi_{k+1}-\psi_k).$$

Таким образом, имеет место соотношение (5_{k+1}). Отсюда, по индукции, следует справедливость равенства (5_n) для любого $n\in\mathbb{N}$. Лемма доказана.

Л е м м а 2. *Для любой непрерывной функции* $f(\cdot):[a,b]\to\mathbb{R}$, $a,b\in\mathbb{R}$, *такой, что* $f(a)\le c<d\le f(b)$, *найдется отрезок* $[p,q]\subset[a,b]$ *такой, что выполняется равенство* $f([p,q])=[c,d]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $K_1:=\{s\in[a,b]:f(\mu)\le c\}$.

Поскольку $a\in K_1$, существует $p:=\sup K_1$. В силу непрерывности функции $f(\cdot)$ верно равенство

$$f(p)=c. \qquad (14)$$

Положим $K_2:=\{s\in[p,b]:f(s)\ge d\}$. Поскольку, по условию леммы, $b\in K_2$, найдется $q:=\inf K_2$. В силу непрерывности $f(\cdot)$ справедливо равенство

$$f(q)=d. \qquad (15)$$

Обозначим $S:=[p,q]$. Очевидно, имеет место включение

$$f(S)\subset[c,d]. \qquad (16)$$

Из равенств (14) и (15), с учетом непрерывности функции $f(\cdot)$, по теореме о промежуточном значении имеем включение $f(S)\supset[c,d]$. Отсюда и из (16) следует равенство $f(S)=[c,d]$. Лемма доказана.

Т е о р е м а 1. *Для любых* $\alpha_n\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ *и любой непрерывной функции* $d(\cdot)$ *при выполнении условий (2) найдется* $\mu\in\mathbb{R}$ *такое, что старший характеристический показатель системы* (1_μ) *положителен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых $\gamma\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ обозначим

$$V_\varepsilon(\gamma):=\{\kappa\in[-2^{-1}\pi,2^{-1}\pi]:|\sin(\kappa-\gamma)|<\sin\varepsilon\}.$$

Зафиксируем произвольное $0\le k\in\mathbb{Z}$.

Определим множество W_{k+1} равенствами

$$W_1:=[-2^{-1}\pi,2^{-1}\pi],\quad W_{k+1}:=[-2^{-1}\pi,2^{-1}\pi]\setminus\Big(\bigcup_{j=1}^{k}V_{2^{-j}-2^{-k-1}}(\alpha_j-2^{-1}\pi)\Big),\quad k\ge 1.$$

Для любых $j\in\{1,\ldots,k\}$, $\delta\in\{0,1\}$ обозначим $\tilde{\beta}_{2j-\delta}:=\alpha_j-2^{-1}\pi+(1-2\delta)(2^{-j}-2^{-k-1})$.

Для каждого $j\in\{1,\ldots,2k\}$ найдется единственное $\beta_j(k)\in(-2^{-1}\pi,2^{-1}\pi]$, такое что $|\sin\beta_j(k)|=|\sin\tilde{\beta}_j(k)|$.

Положим $\beta_0(k) := -2^{-1}\pi, \beta_{2k+1}(k) := 2^{-1}\pi$.

Найдется перестановка σ множества $\{0,\ldots,2k+1\}$, для которой последовательность $\{\beta_{\tilde{\sigma}(j)}(k)\}_{j=0}^{2k+1} \subset (-2^{-1}\pi, 2^{-1}\pi]$ не убывает.

Граница ∂W_{k+1} множества W_{k+1} удовлетворяет включениям

$$\partial W_{k+1} \subset \{-2^{-1}\pi, 2^{-1}\pi\} \bigcup (\bigcup_{j=1}^{k} \partial V_{2^{-j}-2^{-k-1}}(\zeta_j - 2^{-1}\pi)) \subset \{\beta_j(k)\}_{j=0}^{2k+1}. \tag{17}$$

Для $j = \overline{0,2k}$ обозначим

$$b_{j,k} := 2^{-1}(\beta_{\sigma(j)}(k) + \beta_{\sigma(j+1)}(k)), \quad c_{j,k} := 2^{-1}(\beta_{\sigma(j+1)}(k) - \beta_{\sigma(j)}(k)),$$

$$L_{j,k+1} := \{\zeta \in [-2^{-1}\pi, 2^{-1}\pi] : |\sin(\zeta - b_{j,k})| \le \sin c_{j,k}\}, \quad I_k := \{j \in \{0,\ldots,2k\} : b_{j,k} \in W_{k+1}\}.$$

Справедливы равенства $L_{j,k+1} = [\beta_{\sigma(j)}, \beta_{\sigma(j+1)}]$, $j = \overline{0,2k}$, влекущие в силу (17) за собой соотношение $W_k = \bigcup_{i \in I_k} L_{i,k+1}$.

Обозначим $s_k := \sum_{j=1}^{k-1} 2^{-j} j$, $s_1 := 0$.

Предположим, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \le k$, существует множество $M_k \subset \mathbb{R}$, представимое в виде объединения отрезков $M_{j,k} = [\mu_{2j-1}, \mu_{2j}] \subset \mathbb{R}$, $j \in I_{k-1}$, и удовлетворяющее соотношениям

$$\operatorname{sh} \ln \eta_k(\mu) \ge 2^{(9-s_k)2^k}, \quad \mu \in M_k, \tag{18_k}$$

$$\{\sin \psi_k(\mu) \mid \mu \in M_{j,k}\} = \{\sin \zeta \mid \zeta \in L_{j,k}\}, \quad j \in I_{k-1}, \tag{19_k}$$

и, в случае $k > 1$, включению

$$M_k := \bigcup_{j \in I_{k-1}} M_{j,k} \subset M_{k-1}. \tag{20_k}$$

В силу (19_k) для любого $\mu \in M_k$ имеет место включение $\xi_k(\mu) \in \mathbb{R} \setminus V_{2^{-k-1}}(\alpha_k - 2^{-1}\pi))$, влекущее за собой неравенства

$$\left|\cos \xi_k(\mu)\right| \ge \sin 2^{-k-1} \ge 2^{-k-2}. \tag{21}$$

Для любого $\mu \in M_k$ из (3), (18_k) и (21) вытекают оценки

$$\operatorname{sh} \ln \eta_{k+1}(\mu) \overset{(3)}{=} \operatorname{sh}(2 \ln \eta_k(\mu)) |\cos \xi_k(\mu)| \overset{(21)}{\ge} 2^{-k-2} \operatorname{sh}(2 \ln \eta_k(\mu)) \overset{(18_k)}{\ge} 2^{(9-s_k)2^{k+1}-2k} \ge 2^{(9-s_{k+1})2^{k+1}},$$

т. е., выполняется (18_{k+1}).

Положим $S_k(\alpha) := \sum_{j=1}^{k} \alpha^j j$. Для любого $\alpha \in (-1,1)$ имеем равенства $S_{+\infty}(\alpha) = (\sum_{j=1}^{\infty} \alpha^j)'_\alpha =$ $= ((1-\alpha)^{-1})'_\alpha = 2(1-\alpha)^{-2}$. Отсюда следуют соотношения $s_k \le s_{+\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} j = S_{+\infty}(2^{-1}) = 8$. Из них, учитывая ($18_k$), получаем оценку

$$\operatorname{sh} \ln \eta_k(\mu) \ge 2^{2^k}. \tag{22_k}$$

Для любого $i \in I_k$ верно включение $V_{2^{-k-1}}(L_{i,k+1}) \subset W_k$. Тогда, поскольку $L_{i,k+1}$ – отрезок, найдется $j_i \in I_{k-1}$ такое, что выполняется соотношение

$$V_{2^{-k-1}}(L_{i,k+1}) \subset L_{j_i,k}. \tag{23}$$

Из (4), (21) и (22_k) следуют оценки

$$\left|\varphi_k(\mu)\right| \le 2|\sin \varphi_k(\mu)| \le 2|\operatorname{tg}\varphi_k(\mu)| \overset{(4)}{=} \frac{2|\operatorname{tg}\xi_k(\mu)|}{\operatorname{ch} 2 \ln \eta_k(\mu)} \le \frac{4}{\eta_k(\mu)|\cos \xi_k(\mu)|} \overset{(21),(22_k)}{\le} \frac{1}{2^{k+1}}. \tag{24}$$

Отсюда вытекает включение

$$\psi_{k+1}(\mu_{2j-\delta,k}) \overset{(23)}{\in} V_{2^{-k-1}}(\psi_k(\mu_{2j-\delta,k})), \quad \delta = \overline{0,1}. \tag{25}$$

В силу (23) имеем соотношения

$$b_{j_i,k-1}-c_{j_i,k-1}\overset{(22')}{\le} b_{i,k}-c_{i,k}-2^{-k-1}<b_{i,k}+c_{i,k}+2^{-k-1}\overset{(23)}{\le} b_{j_i,k-1}+c_{j_i,k-1},$$

Отсюда получаем оценку

$$|b_{i,k}-b_{j_i,k-1}|\le c_{j_i,k-1}-c_{i,k}-2^{-k-1}. \tag{26}$$

Из (19_k) следует соотношение

$$|\psi_k(\mu_{2j-\delta,k})-b_{j_i,k-1}|=c_{j_i,k-1}. \tag{27}$$

Тогда вследствие (25)–(27) справедливы неравенства

$$\left|\psi_{k+1}(\mu_{2j-\delta,k})-b_{i,k}\right|\ge$$

$$\ge\left|\psi_k(\mu_{2j-\delta,k})-b_{j_i,k-1}\right|-\left|\psi_{k+1}(\mu_{2j-\delta,k})-\psi_k(\mu_{2j-\delta,k})\right|-\left|b_{i,k+1}-b_{j_i,k}\right|\overset{(25)-(27)}{\ge} c_{i,k}. \tag{28}$$

Определим функцию $f(\cdot):\mathbb{R}\to[-1,1]$ равенством $f(\mu):=\sin(\psi_{k+1}(\mu)-b_{i,k})$. Обозначим $g(\mu):=f(\mu)\mathrm{sgn}(f(\mu_{2j,k})-f(\mu_{2j-1,k}))$. Из (28) следуют оценки

$$g(\mu_{2j-1,k})\le-\kappa<0<\kappa\le g(\mu_{2j,k}). \tag{29}$$

Так как функция $\eta_1(\cdot)$ непрерывна, то также непрерывна и $\varphi_{k+1}(\cdot)$, а следовательно, и функция $g(\cdot)$. Поэтому и в силу (29) функция $g(\cdot)$ удовлетворяет условиям леммы 2, в которой поло-жено $[a,b]:=[\mu_{2j-1,k},\mu_{2j,k}]$, $[c,d]:=[-\kappa,\kappa]$. Тогда, вследствие этой леммы, найдутся $\mu_{2i-1,k+1},\mu_{2i,k+1}\in M_{j_i,k}$, $\mu_{2i-1,k+1}<\mu_{2i,k+1}$, такие что отрезок $M_{i,k+1}=[\mu_{2i-1,k+1},\mu_{2i,k+1}]$ удовлетворяет соотношениям $g(M_{i,k+1})=[-\kappa,\kappa]=\{\sin(\zeta-b_{i,k})\,|\,\zeta\in L_{i,k+1}\}$, т. е. выполняется равенство (19_{k+1}). При этом включение $M_{i,k+1}\subset M_{j_i,k}$ влечет за собой соотношение (20_{k+1}).

Заметим, что в случае $k=1$ справедливы равенства $I_0=1$, $L_{0,1}=[-2^{-1}\pi,2^{-1}\pi]$, откуда, полагая $M_1:=M_{1,1}=[\mu_{1,1},\mu_{1,2}]:=[-2^{-1}\pi,2^{-1}\pi]$, получаем равенства $\sin\xi_1(M_{1,1})=\sin([-\pi+a_1,\pi+a_1])=$ $=[-1,1]=\sin L_1$, т. е. верно соотношение (19_1). В силу (2) выполняются оценки $\mathrm{sh}\ln\eta_1(\mu)=$ $=2^{-1}(\eta_1(\mu)-\eta_1^{-1}(\mu))\overset{(2)}{\ge}2^{-1}(2^{20}-2^{-20})\ge2^{18}=2^{(9-s_1)2^1}$, означающие справедливость оценки (18_1).

По индукции, получаем справедливость соотношений (18_n), (19_n) и (20_n) для любого $1<n\in\mathbb{N}$.

Из положительности меры Лебега множества W_k в силу (19_k) имеем соотношение $M_k\ne\varnothing$. Отсюда, с учетом включения (20_n), $n\in\mathbb{N}$, вытекает существование $\mu_{+\infty}\in M_{+\infty}:=\lim_{k\to+\infty}M_k$.

Вследствие (5_n) и (22_n), с учетом формулы Ляпунова [6, с. 41] для старшего характеристического показателя системы (1_μ), верны оценки

$$\lambda_{\max}(A_{\mu_{+\infty}})=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\,t^{-1}\ln\|X_{A_{\mu_{+\infty}}}(t,0)\|\ge\overline{\lim_{t\to+\infty}}\,2^{-n}\ln\|X_{A_{\mu_{+\infty}}}(2^n,0)\|\overset{(5_k),(22_k)}{\ge}1.$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 2 [1]. *Система (1_μ) имеет при любых* $d_k\ge d>0$, $k\ge1$, *положительный старший характеристический показатель* $\lambda_2(A_\mu)$ *для всех* μ *из некоторого множества* J *положительной меры Лебега.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $I:=\mathrm{diag}[1,-1]$. Для любого $\varphi\in\mathbb{R}$ согласно (14) из [7] справедливо равенство

$$IU(\varphi)=U(-\varphi)I. \tag{30}$$

Для всех $k\in\mathbb{N}_0$ выполняются соотношения (E обозначает единичную матрицу)

$$X_A(2k-1,2k-2)=\mathrm{diag}[e^{d_k},e^{-d_k}]=\mathrm{ch}(d_k)E+\mathrm{sh}(d_k)I, \tag{31_k}$$

$$X_A(2k,2k-1)=U(\mu+b_k), \tag{32_k}$$

Обозначим через H класс матриц B, представимых в виде $B=\sum_{j=1}^n\beta_jU(\gamma_j)$, $\beta_j,\gamma_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,n}$, $n=n(B)\in\mathbb{N}$. Обозначим также $\kappa_k:=\prod_{j=1}^k\mathrm{ch}d_j$, $k\in\mathbb{N}$, $\kappa_0:=1$, $\tilde{b}_k:=\sum_{j=1}^k b_j$.

Предположим, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$ найдутся матрицы $B_{k,j}, C_{k,j} \in H$, $j = \overline{1-k, k-2}$, такие что имеет место равенство

$$X_A(2k-1,0) = (\kappa_k E + \kappa_{k-1}\mathrm{sh}(d_k)I)U(\mu(k-1)+\tilde{b}_{k-1}) + \sum_{j=1-k}^{k-2}(U(j\mu)B_{k,j} + IU(j\mu)C_{k,j}). \quad (33_k)$$

В силу (30) для любого $j = \overline{1-k, k-1}$ справедливы соотношения

$$U((\mu+b_k))IU(j\mu) \overset{(30)}{=} IU(-\mu-b_k)U(j\mu) = IU(\mu(j-1))U(-b_k). \quad (34)$$

Отсюда, поскольку $I^2 = E$, следует равенство

$$(\mathrm{ch}(d_{k+1})E + \mathrm{sh}(d_{k+1})I)U((\mu+b_k))IU(j\mu) \overset{(34)}{=} (\mathrm{ch}(d_{k+1})E + \mathrm{sh}(d_{k+1})I)U(\mu(j-1))U(-b_k). \quad (35)$$

Тогда в силу (30), (31_{k+1}) и (32_k) верны соотношения

$$X_A(2k+1,0) = X_A(2k+1,2k)X_A(2k,2k-1)X_A(2k-1,0) \overset{(31_{k+1}),(32_k)}{=}$$
$$\overset{(31_{k+1}),(32_k)}{=} (\mathrm{ch}(d_{k+1})E + \mathrm{sh}(d_{k+1})I)U((\mu+b_k))X_A(2k-1,0) \overset{(33_k),(35)}{=}$$
$$\overset{(33_k),(35)}{=} (\mathrm{ch}(d_{k+1})E + \mathrm{sh}(d_{k+1})I)\left(\kappa_k U(k\mu+\tilde{b}_k) + \sum_{j=1-k}^{k-2}(U(\mu(j+1))U(b_k)B_{k,j})\right) +$$
$$+(\mathrm{ch}(d_{k+1})E + \mathrm{sh}(d_{k+1})I)\left(\kappa_{k-1}\mathrm{sh}(d_k)U(\mu(k-2))U(\tilde{b}_{k-1}-b_k) + \sum_{j=1-k}^{k-2}\big(U(\mu(j-1))U(-b_k)C_{k,j}\big)\right).$$

Отсюда видно, что найдутся матрицы $B_{k+1,j}, C_{k+1,j} \in H$, $j = \overline{k, k-1}$, для которых выполняется равенство (33_{k+1}). Учитывая следующее из (33_1) соотношение (33_1), по индукции получаем, что равенство (33_n) справедливо для любого $n \in \mathbb{N}$.

Для любой матрицы $\tilde{B} = \sum_{j=1}^{n}\beta_j U(\gamma_j) \in H$ имеем

$$\tilde{B}U(\mu(1-k)) = \sum_{j=1}^{n}(\beta_j U(\gamma_j)U(\mu(1-k))) = \sum_{j=1}^{n}(\beta_j U(\mu(1-k))U(\gamma_j)) = U(\mu(1-k))\tilde{B}. \quad (36)$$

Так как

$$U(\tau) = (\cos\tau)E + (\sin\tau)J, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (37)$$

то, вследствие (30), выполняются соотношения

$$IU(\tau) \overset{(30)}{=} U(-\tau)I \overset{(37)}{=} ((\cos\tau)E - (\sin\tau)J)I. \quad (38)$$

Обозначим $F_k := \kappa_k E + \kappa_{k-1}(d_k)I$, $k \in \mathbb{N}$. В силу (33_k) и (36)–(38) справедливы соотношения

$$\int_0^{2\pi} X_A(2k-1,0)U(\mu(1-k))d\mu \overset{(33_k),(36)}{=}$$
$$\overset{(33_k),(36)}{=} \int_0^{2\pi}\left(F_k U(\tilde{b}_{k-1}) + \sum_{j=1-k}^{k-2}(U(\mu(j-k+1))B_{k,j} + IU(\mu(j-k+1))C_{k,j})\right)d\mu \overset{(37),(38)}{=}$$
$$\overset{(37),(38)}{=} \int_0^{2\pi}(F_k U(\tilde{b}_{k-1}))d\mu + \sum_{j=1-k}^{k-2}\Big((\int_0^{2\pi}\cos(\mu(j-k))d\mu)(B_{k,j} + IC_{k,j}) +$$
$$+(\int_0^{2\pi}\sin(\mu(j-k))d\mu)J(B_{k,j} - IC_{k,j})\Big) = 2\pi F_k U(\tilde{b}_{k-1}). \quad (39)$$

Отсюда следуют равенства

$$\int_0^{2\pi} \| X_A(2k-1,0) \| d\mu = \int_0^{2\pi} \| X_A(2k-1,0)U(\mu(1-k)) \| d\mu \geq$$
$$\geq \left\| \int_0^{2\pi} X_A(2k-1,0)U(\mu(1-k))d\mu \right\| \overset{(39)}{=} 2\pi \| F_k \| \geq 2\pi \left|\kappa_k + \kappa_{k-1}\mathrm{sh}\, d_k\right| \geq 2\pi\kappa_k. \quad (40)$$

Поэтому, с учетом вытекающей из возрастания функции $\operatorname{ch}(\cdot)$ на промежутке $(0, +\infty)$ оценки $d_j \geq d,\ j \in \mathbb{N}$, выполняются соотношения

$$\int_{\mu=0}^{2\pi} \ln \| X_A(2n-1, 0) \| \, d\mu \overset{(40)}{=} \left(\ln(2\pi) + \sum_{j=1}^{n} \ln \operatorname{ch} d_j \right) \geq \sum_{j=1}^{n} \ln \operatorname{ch} d = n \ln \operatorname{ch} d. \tag{41}$$

Предположим, что при почти всех $\mu \in \mathbb{R}$ старший характеристический показатель системы (1_μ) равен нулю. Тогда из (41), в силу леммы Фату [8, с. 324], имеем оценки

$$0 = \int_{\mu=0}^{2\pi} \lambda_{\max}(A_\mu) d\mu = \int_{\mu=0}^{2\pi} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln \| X_A(t, 0) \| \, d\mu \geq$$

$$\geq \int_{\mu=0}^{2\pi} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\ln \| X_A(2n-1, 0) \|}{2n-1} d\mu$$

$$\geq \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{2n-1} \int_{\mu=0}^{2\pi} \ln \| X_A(2n-1, 0) \| \, d\mu \overset{(41)}{\geq} \frac{1}{2} \ln \operatorname{ch} d > 0.$$

Полученное противоречие и доказывает теорему.

Список использованных источников

1. Липницкий, А. В. Оценки снизу старшего характеристического показателя в однопараметрических семействах систем Миллионщикова / А. В. Липницкий // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. – 2014. – Вып. 30. – С. 171–177.

2. Миллионщиков, В. М. Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами / В. М. Миллионщиков // Дифференц. уравнения. – 1968. – Т. 4, № 3. – С. 391–396.

3. Миллионщиков, В. М. Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами / В. М. Миллионщиков // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5, № 11. – С. 1979–1983; 1974. – Т. 10, № 3. – С. 569.

4. Липницкий, А. В. О решении В. М. Миллионщиковым проблемы Еругина // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 12. – С. 1615–1620.

5. Барабанов, Е. А. Сингулярные показатели и критерии правильности линейных дифференциальных систем / Е. А. Барабанов // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 2. – С. 147–157.

6. Изобов, Н. А. Введение в теорию показателей Ляпунова / Н. А. Изобов. – Минск, 2006. – 319 с.

7. Липницкий, А. В. Оценки отклонения решений линейных дифференциальных систем Миллионщикова от соответствующих тригонометрических сумм / А. В. Липницкий // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 3. – С. 5–10.

8. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М., 2004. – 572 с.

References

1. Lipnickij A. V. Lower bounds for the upper Lyapunov exponent in one-parameter families of Millionshchikov systems. *Trudy seminara imeni I. G. Petrovskogo = Proceedings of the I. G. Petrovsky seminar*, 2014, vol. 30, pp. 171–177 (in Russian).

2. Millionshchikov V. M. Proof of existence of irregular systems of linear differential equations with almost-periodic coefficients. *Differentsial'nye uravneniia = Differential Equations*, 1968, vol. 4, no. 3, pp. 391–396 (in Russian).

3. Millionshchikov V. M. Proof of existence of irregular systems of linear differential equations with quasi-periodic coefficients. *Differentsial'nye uravneniia = Differential Equations*, 1969, vol. 5, no. 11, pp. 1979–1983; 1974, vol. 10, no. 3, pp. 569 (in Russian).

4. Lipnickij A. V. On V. M. Millionshchikov's solution of the Erugin problem. *Differentsial'nye uravneniia = Differential Equations*, 2000, vol. 36, no. 12, pp. 1615–1620 (in Russian).

5. Barabanov E. A. Singular exponents and regularity criteria for linear differential systems. *Differentsial'nye uravneniia = Differential Equations*, 2005, vol. 41, no. 2, pp. 147–157 (in Russian).

6. Izobov N. A. *Lyapunov exponents and stability*. Minsk, 2006. 319 p. (in Russian).

7. Lipnickij A. V. Estimation of Millionshchikov linear systems solutions deviation from the corresponding trygonemrtic sums. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2016, vol. 60, no. 3, pp. 5–10 (in Russian).

8. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elements of the theory of functions and of functional analysis*. Moscow, 2004. 572 p. (in Russian).

Информация об авторе

Липницкий Андрей Валерьевич – канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: ya.andrei173@yandex.by.

Information about the author

Lipnitskii Andrei Valer'evich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ya.andrei173@yandex.by.