ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.948.32:517.544
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-4-391-397

Поступило в редакцию 20.03.2019
Received 20.03.2019

А. П. Шилин

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

(Представлено членом-корреспондентом Л. А. Яновичем)

Аннотация. Исследована краевая задача для аналитических функций с краевым условием на замкнутой кривой, расположенной на комплексной плоскости. Задача относится к типу обобщенных краевых задач Римана. В краевом условии присутствуют производные искомых функций. Задача редуцирована к обычной краевой задаче Римана и линейным дифференциальным уравнениям. Решение построено в замкнутой форме. Указано приложение решенной задачи к гиперсингулярным интегро-дифференциальным уравнениям.

Ключевые слова: краевая задача Римана, гиперсингулярные интегралы, обобщенные формулы Сохоцкого, интегро-дифференциальные уравнения

Для цитирования: Шилин, А. П. Дифференциальная краевая задача Римана и ее приложение к интегро-дифференциальным уравнениям / А. П. Шилин // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 4. – С. 391–397. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-4-391-397

Andrei P. Shilin

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

RIEMANN'S DIFFERENTIAL BOUNDARY-VALUE PROBLEM AND ITS APPLICATION TO INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

(Communicated by Corresponding Member Leonid A. Yanovich)

Abstract. The boundary-value problem for analytical functions is investigated. The boundary condition is placed on a closed curve located on the complex plane. The problem belongs to the type of the generalized Riemann boundary-value problems. The boundary condition contains derivatives of the required functions. The problem is reduced to the usual Riemann problem and linear differential equations. The solution is built in closed form. The application of the solved problem to integro-differential equations is indicated.

Keywords: Riemann boundary problem, hypersingular integrals, generalized Sokhotsky formulas, integro-differential equations

For citation: Shilin A. P. Riemann's differential boundary-value problem and its application to integro-differential equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 4, pp. 391–397 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-4-391-397

Введение. Краевые задачи для аналитических функций и связанные с ними сингулярные интегральные уравнения имеют богатые приложения в теории упругости, электродинамике, теплопроводности и других разделах физики и математики. Исследованная в настоящей работе краевая задача относится к обобщенным краевым задачам Римана с производными в краевом условии. От иных подобных задач [1, с. 365–375], для которых проводились разноплановые исследования, ее отличает конструктивное построение решения. Кроме того, обобщенные формулы Сохоцкого

$$\Phi_{\pm}^{(j)}(t) = \pm\frac{1}{2}\varphi^{(j)}(t) + \frac{j!}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{j+1}}, \quad t\in L, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

содержащие интегралы в смысле конечной части по Адамару и доказанные Э. И. Зверовичем [2], позволяют сведением к этой задаче решать интегро-дифференциальные уравнения. Изучение подобных (гиперсингулярных) интегро-дифференциальных уравнений начато недавно [3; 4] и, как нам представляется, здесь следует ожидать много новых интересных и важных результатов.

Постановка задачи. Обозначим через L простую гладкую замкнутую кривую на расширенной комплексной плоскости. Пусть $D_\pm$ – области, для которых кривая L является границей, $0\in D_+, \infty\in D_-$. Ориентируем кривую L так, чтобы при движении по ней в положительном направлении область D_+ оставалась слева.

Пусть $m, n\in\mathbb{N}$. В области D_+ зададим аналитические функции $p_1(z), p_2(z), \ldots, p_m(z)$, H-непрерывные вплоть до кривой L вместе со своими производными до порядка m включительно. В области D_- зададим аналитические функции $q_1(z), q_2(z), \ldots, q_n(z)$, H-непрерывные вплоть до кривой L вместе со своими производными до порядка n включительно. Зададим также H-непрерывные функции $G(t)\neq 0$, $g(t)$, $t\in L$.

Будем искать функции $\Phi_\pm(z)$, аналитические в соответствующих областях $D_\pm$, по краевому условию

$$\begin{vmatrix} p_1(t) & p_2(t) & \ldots & p_m(t) & \Phi_+(t) \\ p_1'(t) & p_2'(t) & \ldots & p_m'(t) & \Phi_+'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_1^{(m)}(t) & p_2^{(m)}(t) & \ldots & p_m^{(m)}(t) & \Phi_+^{(m)}(t) \end{vmatrix} = G(t)\begin{vmatrix} q_1(t) & q_2(t) & \ldots & q_n(t) & \Phi_-(t) \\ q_1'(t) & q_2'(t) & \ldots & q_n'(t) & \Phi_-'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_1^{(n)}(t) & q_2^{(n)}(t) & \ldots & q_n^{(n)}(t) & \Phi_-^{(n)}(t) \end{vmatrix} + g(t), t\in L, \tag{2}$$

предполагая, что все указанные в этом условии предельные значения на кривой L искомых функций и их производных должны существовать и быть H-непрерывными.

Договоримся обозначать буквой W вронскиан функций, указывая в скобках сами функции и их аргумент. Например, те определители, которые фигурируют в краевом условии (2), – это вронскианы $W(p_1, p_2, \ldots, p_m, \Phi_+; t)$, $W(q_1, q_2, \ldots, q_n, \Phi_-; t)$. Будем в дальнейшем считать, что $W(p_1, p_2, \ldots, p_m; z)\neq 0$, $z\in D_+\bigcup L$; $W(q_1, q_2, \ldots, q_n; z)\neq 0, z\in(D_-\bigcup L)\setminus\{\infty\}$.

Вспомогательные факты. Л е м м а 1. *Пусть* $n = 2, 3, \ldots$. *Справедливо неравенство* $D > 0$, *где*

$$D = \begin{vmatrix} 1! & 2! & \ldots & (n-1)! \\ 2! & 3! & \ldots & n! \\ 3! & 4! & \ldots & (n+1)! \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (n-1)! & n! & \ldots & (2n-3)! \end{vmatrix}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Элементы определителя D обозначим d_{rs}, $r, s = 1, 2, \ldots, n-1$, $d_{rs} = (r+s-1)!$. Для $n = 2$ утверждение леммы очевидно. Считаем далее $n > 2$.

Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ – какая-либо нечетная перестановка чисел $1, 2, \ldots, n-1$, и пусть числа s_i и s_j находятся в этой перестановке в инверсии, т. е. $i < j, s_i > s_j$. Сделав транспозицию чисел s_i и s_j в этой перестановке, получим четную перестановку чисел $1, 2, \ldots, n-1$.

Одним из слагаемых, получающихся при вычислении определителя D, будет взятое со знаком «минус» произведение $A_1 \quad d_{1s_1}\ldots d_{is_i}\ldots d_{js_j}\ldots d_{n\ 1,s_n\ 1}$; еще одним слагаемым будет взятое со знаком «плюс» произведение $A_2 = d_{1s_1}\ldots d_{is_j}\ldots d_{js_i}\ldots d_{n-1,s_{n-1}}$. При этом получим

$$A_2 - A_1 = \prod_{\substack{r=1\\ r\neq i,j}}^{n-1} d_{rs_r}(d_{is_j}d_{js_i} - d_{is_i}d_{js_j}) = \prod_{\substack{r=1\\ r\neq i,j}}^{n-1} d_{rs_r}((i+s_j-1)!(j+s_i-1)! - (i+s_i-1)!(j+s_j-1)!) =$$

$$= \prod_{\substack{r=1\\ r\neq i,j}}^{n-1} d_{rs_r}(i+s_j-1)!(j+s_j-1)!((j+s_j)(j+s_j+1)\cdots(j+s_i-1)-(i+s_j)(i+s_j+1)\cdots(i+s_i-1)) > 0.$$

Разбивая все слагаемые, получающиеся при вычислении определителя D, на пары вида $A_2 - A_1$, приходим к утверждению леммы.

Пусть для функций $q_j(z)$, указанных в постановке задачи, справедливы следующие разложения в ряды Тейлора в окрестности бесконечности:

$$q_j(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{k_{js}}{z^s}, \quad k_{js} \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad s = 0, 1, 2, \ldots.$$

Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} k_{10} & k_{20} & \ldots & k_{n0} \\ k_{11} & k_{21} & \ldots & k_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{1,n-1} & k_{2,n-1} & \ldots & k_{n,n-1} \end{vmatrix}.$$

Л е м м а 2. *При* $z \to \infty$ $W(q_1, q_2, \ldots, q_n; z) = O\left(\dfrac{1}{z^{n^2-n}}\right)$. *В частности, при* $\Delta \neq 0$ *существует ненулевая постоянная* k *такая, что при* $z \to \infty$ $W(q_1, q_2, \ldots, q_n; z) \sim \dfrac{k}{z^{n^2-n}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n = 1$ утверждение леммы очевидно. Считаем далее $n > 1$. Запишем выражение для вронскиана в окрестности бесконечности:

$$W(q_1, q_2, \ldots, q_n; z) = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} k_{10} + \dfrac{k_{11}}{z} + \cdots + \dfrac{k_{1,n-1}}{z^{n-1}} + \ldots & \ldots & k_{n0} + \dfrac{k_{n1}}{z} + \cdots + \dfrac{k_{n,n-1}}{z^{n-1}} + \ldots \\ \dfrac{1\cdot k_{11}}{z^2} + \cdots + \dfrac{(n-1)k_{1,n-1}}{z^n} + \ldots & \ldots & \dfrac{1\cdot k_{n1}}{z^2} + \cdots + \dfrac{(n-1)k_{n,n-1}}{z^n} + \ldots \\ \dfrac{1\cdot 2k_{11}}{z^3} + \cdots + \dfrac{(n-1)nk_{1,n-1}}{z^{n+1}} + \ldots & \ldots & \dfrac{1\cdot 2k_{n1}}{z^3} + \cdots + \dfrac{(n-1)nk_{n,n-1}}{z^{n+1}} + \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{1\cdot 2\cdots(n-1)k_{11}}{z^n} + \cdots + \dfrac{(n-1)n\cdots(2n-3)k_{1,n-1}}{z^{2n-2}} + \ldots & \ldots & \dfrac{1\cdot 2\cdots(n-1)k_{n1}}{z^n} + \cdots + \dfrac{(n-1)n\cdots(2n-3)k_{n,n-1}}{z^{2n-2}} + \ldots \end{vmatrix}.$$

Представим этот определитель в виде надлежащей суммы таких определителей, элементами которых будут только отдельные слагаемые элементов приведенного определителя. Получим

$$W(q_1, q_2, \ldots, q_n; z) = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \times$$

$$\times \left(\sum_{(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})} \begin{vmatrix} k_{10} & \ldots & k_{n0} \\ \dfrac{s_1 k_{1s_1}}{z^{s_1+1}} & \ldots & \dfrac{s_1 k_{ns_1}}{z^{s_1+1}} \\ \dfrac{s_2(s_2+1)k_{1s_2}}{z^{s_2+1}} & \ldots & \dfrac{s_2(s_2+1)k_{ns_2}}{z^{s_2+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{s_{n-1}(s_{n-1}+1)\ldots(s_{n-1}+n-2)k_{1,s_{n-1}}}{z^{s_{n-1}+n-1}} & \ldots & \dfrac{s_{n-1}(s_{n-1}+1)\ldots(s_{n-1}+n-2)k_{n,s_{n-1}}}{z^{s_{n-1}+n-1}} \end{vmatrix} + \ldots \right). \quad (3)$$

Здесь $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ – перестановка чисел $1, 2, \ldots, n-1$, а сумма распространяется на всевозможные перестановки этих чисел. Все определители под знаком суммы имеют относительно $\frac{1}{z}$ одинаковую степень, равную $(s_1+1)+(s_2+2)+\ldots+(s_{n-1}+n-1)=n^2-n$. Остальные определители, обозначенные многоточием, очевидно, равны нулю либо будут иметь более высокую степень относительно $\frac{1}{z}$. Тем самым равенство $W(q_1, q_2, \ldots, q_n; z) = O\left(\frac{1}{z^{n^2-n}}\right)$ при $z \to \infty$ обосновано.

Теперь в определителях, стоящих под знаком суммы в (3), вынесем за знак определителей общие множители всех строк. Все оставшиеся в результате определители будут отличаться от определителя Δ разве что порядком строк. Переставив строки, сделаем все определители равными Δ; при этом учтем возможное изменение знаков перед определителями, зависящее от четности или нечетности перестановки $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$. После этого сумма указанных в (3) определителей станет равной

$$\frac{\Delta}{z^{n^2-n}} \sum_{(s_1,s_2,\ldots,s_{n-1})} (-1)^{\sigma} s_1(s_2(s_2+1))(s_3(s_3+1)(s_3+2))\ldots(s_{n-1}(s_{n-1}+1)\ldots(s_{n-1}+n-2)), \tag{4}$$

где $\sigma = 0$, если соответствующая перестановка четная, и $\sigma = 1$, если перестановка нечетная.

Сумма в (4) есть сумма слагаемых, дающая по определению значение определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 \\ 1\cdot 2 & 2\cdot 3 & 3\cdot 4 & \ldots & (n-1)n \\ 1\cdot 2\cdot 3 & 2\cdot 3\cdot 4 & 3\cdot 4\cdot 5 & \ldots & (n-1)n(n+1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1) & 2\cdot 3\cdot 4\cdots n & 3\cdot 4\cdot 5\cdots(n+1) & \ldots & (n-1)n(n+1)\cdots(2n-3) \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Умножая и деля элементы j-го столбца определителя (5) на $(j-1)!$, $j = 2, 3, ..., n-1$, этому определителю легко придать вид $\frac{D}{1!2!...(n-2)!}$, где $D \neq 0$ согласно лемме 1.

Теперь понятно, чему при $\Delta \neq 0$ равно значение числа k из формулировки леммы:

$$k = \frac{(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \Delta D}{1!2!\cdots(n-2)!}.$$

Лемма 2 доказана. В дальнейшем считаем $\Delta \neq 0$.

Основной результат. Введем новые неизвестные функции

$$F_+(z) = W(p_1, p_2, \ldots, p_m, \Phi_+; z), \quad F_-(z) = W(q_1, q_2, \ldots, q_n, \Phi_-; z). \tag{6}$$

Очевидна правомерность написания значков «±» у этих функций, говорящая, как обычно, об их аналитичности в соответствующих областях $D_\pm$ и наличии H-непрерывных предельных значений $F_\pm(t)$, $t \in L$. Кроме того, из леммы 2, примененной к функциям $q_1(z), q_2(z), ..., q_n(z), \Phi_-(z)$, вытекает, что при $z \to \infty$ $F_-(z) = O\left(\frac{1}{z^{(n+1)^2-(n+1)}}\right)$.

Краевое условие (2) станет краевым условием задачи Римана

$$F_+(t) = G(t)F_-(t) + g(t), \ t \in L. \tag{7}$$

Если задача (7) окажется разрешимой и функции $F_\pm(z)$ будут найдены, то соотношения (6) станут линейными неоднородными дифференциальными уравнениями для нахождения функций $\Phi_\pm(z)$ и могут быть решены, например, методом вариации произвольных постоянных.

Введем дальнейшие обозначения: $\alpha = \mathrm{Ind}_L G(t)$; $X_\pm(z)$ – канонические функции задачи Римана (7); $W_+(z) = W(p_1, p_2, ..., p_m; z)$, $W_j^+(z) = W(p_1, ..., p_{j-1}, p_{j+1}, ..., p_m; z)$, $j = 1, 2, ..., m$, $z \in D_+$, (полагаем $W_1^+(z) = 1$ при $m = 1$); $W_-(z) = W(q_1, q_2, ..., q_n; z)$, $W_j^-(z) = W(q_1, ..., q_{j-1}, q_{j+1}, ..., q_n; z)$, $j = 1, 2, ..., n$, $z \in D_-$, (полагаем $W_1^-(z) = 1$ при $n = 1$).

На основании формул Ф. Д. Гахова [1] решения задачи Римана и формул метода вариации произвольных постоянных (напр., [5, с. 94]) получен следующий результат.

Т е о р е м а. *При* $\alpha \ge n^2+n-1$ *задача (2) разрешима безусловно. При* $\alpha < n^2+n-1$ *для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнения условий*

$$\int_L \frac{g(\tau)\tau^j d\tau}{X_+(\tau)} = 0,\ \ j = 0, 1, ..., n^2+n-2-\alpha.$$

При разрешимости задачи (2) ее решение дается формулами

$$\Phi_+(z) = \sum_{j=1}^{m} p_j(z)\left(C_j + (-1)^{m+j}\int_0^z \frac{W_j^+(\zeta)F_+(\zeta)d\zeta}{W_+^2(\zeta)}\right),\ \ z \in D_+,$$

$$\Phi_-(z) = \sum_{j=1}^{n} q_j(z)\left(C_{m+j} + (-1)^{n+j}\int_\infty^z \frac{W_j^-(\zeta)F_-(\zeta)d\zeta}{W_-^2(\zeta)}\right),\ \ z \in D_-, \tag{8}$$

где $C_1, C_2, ..., C_{m+n}$ *– произвольные постоянные,*

$$F_\pm(\zeta) = X_\pm(\zeta)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)d\tau}{X_+(\tau)(\tau-\zeta)} + P(\zeta)\right),\ \ \zeta \in D_\pm,$$

$P(\zeta)$ *– многочлен степени* $\alpha - n^2 - n$ *с произвольными коэффициентами при* $\alpha > n^2+n-1$, $P(\zeta) = 0$ *при* $\alpha \le n^2+n-1$.

Отметим, что согласно лемме 2, примененной к функциям $q_1(\zeta), ..., q_{j-1}(\zeta),\ q_{j+1}(\zeta), ..., q_n(\zeta)$, $j = 1, 2, ..., n$, при $\zeta \to \infty$ $W_j^-(\zeta) = O\left(\dfrac{1}{\zeta^{(n-1)^2-(n-1)}}\right)$. А так как при $\zeta \to \infty$ $F_-(\zeta) = O\left(\dfrac{1}{\zeta^{(n+1)^2-(n+1)}}\right)$, $W_-^2(\zeta) \sim \dfrac{k^2}{\zeta^{2n^2-2n}}$, то будет получаться

$$\frac{W_j^-(\zeta)F_-(\zeta)}{W_-^2(\zeta)} = O\left(\frac{1}{\zeta^{(n-1)^2-(n-1)+(n+1)^2-(n+1)-2n^2+2n}}\right) = O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right),$$

поэтому интегралы в (8) будут сходиться и давать аналитические функции.

Приложение к интегро-дифференциальным уравнениям. К (2) может быть сведено интегро-дифференциальное уравнение

$$a(t)\begin{vmatrix} p_1(t) & p_2(t) & \dots & p_m(t) & \varphi(t) \\ p_1'(t) & p_2'(t) & \dots & p_m'(t) & \varphi'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{(m)}(t) & p_2^{(m)}(t) & \dots & p_m^{(m)}(t) & \varphi^{(m)}(t) \end{vmatrix} + b(t)\begin{vmatrix} q_1(t) & q_2(t) & \dots & q_n(t) & \varphi(t) \\ q_1'(t) & q_2'(t) & \dots & q_n'(t) & \varphi'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^{(n)}(t) & q_2^{(n)}(t) & \dots & q_n^{(n)}(t) & \varphi^{(n)}(t) \end{vmatrix} +$$

$$+\frac{a(t)}{\pi i}\begin{vmatrix} p_1(t) & p_2(t) & \dots & p_m(t) & 0!\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\ p_1'(t) & p_2'(t) & \dots & p_m'(t) & 1!\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{(m)}(t) & p_2^{(m)}(t) & \dots & p_m^{(m)}(t) & m!\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{m+1}} \end{vmatrix} -$$

$$-\frac{b(t)}{\pi i}\begin{vmatrix} q_1(t) & q_2(t) & \dots & q_n(t) & 0!\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\ q_1'(t) & q_2'(t) & \dots & q_n'(t) & 1!\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^{(n)}(t) & q_2^{(n)}(t) & \dots & q_n^{(n)}(t) & n!\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} \end{vmatrix} = f(t),\ \ t \in L, \tag{9}$$

с интегралами в смысле конечной части по Адамару. Здесь $a(t)\neq 0,\ b(t)\neq 0,\ f(t)$ – заданные H-непрерывные функции, а $\varphi(t)$ – искомая H-непрерывная функция, имеющая H-непрерывные производные до порядка $\max(m, n)$ включительно, $t\in L$.

Введем интеграл типа Коши

$$\Phi_{\pm}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-z},\quad z\in D_{\pm}.$$

Уравнение (9) можно записать сначала в виде

$$a(t)\begin{vmatrix} p_1(t) & p_2(t) & \dots & p_m(t) & \frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{0!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\ p_1'(t) & p_2'(t) & \dots & p_m'(t) & \frac{1}{2}\varphi'(t)+\frac{1!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{(m)}(t) & p_2^{(m)}(t) & \dots & p_m^{(m)}(t) & \frac{1}{2}\varphi^{(m)}(t)+\frac{m!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{m+1}} \end{vmatrix}=$$

$$=b(t)\begin{vmatrix} q_1(t) & q_2(t) & \dots & q_n(t) & -\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{0!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\ q_1'(t) & q_2'(t) & \dots & q_n'(t) & -\frac{1}{2}\varphi'(t)+\frac{1!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^{(n)}(t) & q_2^{(n)}(t) & \dots & q_n^{(n)}(t) & -\frac{1}{2}\varphi^{(n)}(t)+\frac{n!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} \end{vmatrix}+\frac{f(t)}{2},\ t\in L,$$

а затем, используя при $j=0,1,...,\max(m,n)$ обобщенные формулы Сохоцкого (1), в виде краевой задачи (2), где $G(t)=\dfrac{b(t)}{a(t)},\ g(t)=\dfrac{f(t)}{2a(t)}$.

Далее вступает в силу сформулированная теорема. Если возникшая краевая задача (2) оказывается разрешимой, то будет разрешимым и уравнение (9). Важно отметить, что теперь при решении задачи (2) следует учитывать условие $\Phi_-(\infty)=0$, поскольку функция $\Phi_-(z)$ представлена интегралом типа Коши. Учет этого условия легко осуществляется и приводит к тому, что произвол постоянных $C_{m+1},C_{m+2},...,C_{m+n}$, входящих в (8), будет ограничен требованием $C_{m+1}q_1(\infty)+C_{m+2}q_2(\infty)+\dots+C_{m+n}q_n(\infty)=0$. Если решение задачи найдено, то решение уравнения (9) находится по формуле $\varphi(t)=\Phi_+(t)-\Phi_-(t)$.

Заключение. В замкнутой форме решена краевая задача (2) для аналитических функций. Указан способ решения интегро-дифференциального уравнения (9) сведением к этой задаче.

Список использованных источников

1. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М., 1977. – 640 с.

2. Зверович, Э. И. Обобщение формул Сохоцкого / Э. И. Зверович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 2. – С. 24–28.

3. Зверович, Э. И. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами / Э. И. Зверович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 6. – С. 5–8.

4. Зверович, Э. И. Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида / Э. И. Зверович, А. П. Шилин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 404–407. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407

5. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: пер. с нем. / Э. Камке. – 6-е изд., стер. – СПб., 2003. – 576 с.

References

1. Gakhov F. D. *Boundary Value Problems*. Moscow, 1977. 640 p. (in Russian).

2. Zverovich E. I. Generalization of Sohotsky formulas. *Vestsi Natsyianal'nai academii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2012, no. 6, pp. 24–28 (in Russian).

3. Zverovich E. I. Solution of the hypersingular integro-differential equation with constant coefficients. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus,* 2010, vol. 54, no. 6, pp. 5–8 (in Russian).

4. Zverovich E. I., Shilin A. P. Integro-differential equations with a singular and hypersingular integrals. *Vestsi Natsyianal'nai academii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 404–407 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407

5. Kamke E. *Handbook of differential equations.* St. Petersburg, 2003. 576 p. (in Russian).

Информация об авторе

Шилин Андрей Петрович – канд. физ.-мат. наук, доцент. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: a.p.shilin@gmail.com.

Information about the author

Shilin Andrei Petrovich – Ph. D (Physics and Mathematics), Assistant professor. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: a.p.shilin@gmail.com.