ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 517.5
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-4-398-407

Поступило в редакцию 10.04.2019
Received 10.04.2019

Е. А. Ровба, П. Г. Поцейко

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Гродно, Республика Беларусь

ОБ ОДНОМ РАЦИОНАЛЬНОМ СИНГУЛЯРНОМ ИНТЕГРАЛЕ ДЖЕКСОНА НА ОТРЕЗКЕ

(Представлено членом-корреспондентом Л. А. Яновичем)

Аннотация. Приведены основные результаты ранее известных работ о сингулярном интеграле Джексона в полиномиальном и рациональном случаях. Вводится в рассмотрение сингулярный интеграл Джексона на отрезке [–1, 1] с ядром, полученным с помощью одной системы рациональных дробей Чебышёва–Маркова, и устанавливаются его основные аппроксимативные свойства: получена теорема о равномерной сходимости последовательности сингулярных интегралов Джексона для четной функции $f \in C[-1,1]$, и указаны условия, которым должен удовлетворять параметр, чтобы равномерная сходимость имела место; исследованы аппроксимативные свойства последовательности сингулярных интегралов Джексона на классах $MH^{(\gamma)}[-1,1]$ функций, удовлетворяющих на отрезке [–1, 1] условию Липшица степени $\gamma, 0 < \gamma \le 1$, с константой M. Полученные оценки являются асимптотически точными при $n \to \infty$; найдены оценка уклонений рационального сингулярного интеграла Джексона от функции $|x|^s$, $0 < s < 2$, в зависимости от положения точки x на отрезке, равномерная оценка уклонения на отрезке [–1, 1] и ее асимптотика. Получено оптимальное значение параметра, при котором погрешность уклонения изучаемого аппарата приближения от функции $|x|^s$, $0 < s < 2$, на отрезке [–1, 1] имеет наиболее высокую скорость стремления к нулю; найден порядок приближения функции $|x|$ на отрезке [–1, 1] рассматриваемым сингулярным интегралом Джексона. Показано, что при специальном выборе параметра скорость стремления к нулю погрешности приближения является более высокой в сравнении с полиномиальным случаем. Работа носит как теоретический характер, так и прикладной. Возможно применение результатов для решения конкретных задач вычислительной математики и при чтении спецкурсов на математических факультетах.

Ключевые слова: рациональный ряд Фурье–Чебышёва, частичные суммы, сингулярный интеграл Джексона, равномерная сходимость, условие Липшица, асимптотические оценки, точные константы

Для цитирования: Ровба, Е. А. Об одном рациональном сингулярном интеграле Джексона на отрезке / Е. А. Ровба, П. Г. Поцейко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 4. – С. 398–407. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-4-398-407

Yevgeniy A. Rovba, Pavel G. Potsejko

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus

JACKSON'S RATIONAL SINGULAR INTEGRAL ON THE CUT

(Communicated by Corresponding Member Leonid A. Yanovich)

Abstract. The introduction presents the main results of previously known papers on Jackson's singular integral in polynomial and rational cases. Next, we introduce Jackson's singular integral on the interval [–1, 1] with the kernel obtained by one system of rational Chebyshev–Markov fractions and establish its basic approximative properties: a theorem on uniform convergence of a sequence of Jackson's singular integrals for an even function is obtained, and conditions are specified that the parameter must satisfy in order for uniform convergence to take place; the approximative properties of sequences of Jackson's singular integrals on classes of functions satisfying on the interval [–1, 1] the condition of Lipschitz class with constant M. are investigated. The obtained estimates are asymptotically exact as $n \to \infty$; an estimate of deviation of Jackson's rational singular integral from the function $|x|^s$, $0 < s < 2$ depending on the position of the point on the segment, a uniform estimate of the deviation on the segment [–1, 1] and its asymptotics are found. The optimal value of the parameter is obtained, for which the deviation error of the studied approximation apparatus from the function $|x|^s$, $0 < s < 2$ on the interval [–1, 1] has the highest rate of zero; the order of approximation of the function $|x|$ on the interval [–1, 1] by Jackson's considered singular integral is found. It is shown that with a special choice of the parameter, the velocity of the approximation error tending to zero is higher in comparison with the polynomial case. All results of this article are new. The work is both theoretical and applied. It is possible to apply the results to solve specific problems of computational mathematics and to read special courses at mathematical faculties.

Keywords: rational Fourier–Chebyshev series, partial sums, Jackson singular integral, uniform convergence, Lipschitz condition, asymptotic estimates, exact constants

For citation: Rovba Ye. A., Potsejko P. G. Jackson's rational singular integral on the cut. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 4, pp. 398–407 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-4-398-407

Введение. В [1] Д. Джексон для решения задачи аппроксимации 2π-периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица тригонометрическими полиномами, вводит конструкцию, представляющую собой тригонометрический полином степени не выше $2n - 2$. Позже эта конструкция получила название сингулярного интеграла Джексона, ядро интеграла – ядра Джексона. Сингулярный интеграл Джексона, построенный на основании классической тригонометрической системы, к настоящему времени достаточно хорошо изучен и нашел широкое применение при решении практических задач [2; 3]. Г. П. Сафроновой [4] был исследован сингулярный интеграл Джексона как метод суммирования рядов Фурье с треугольной матрицей специального вида. В частности, были найдены в явном виде коэффициенты суммирования. Таким образом, сингулярный интеграл Джексона естественно связать с соответствующей ортогональной системой и рядами Фурье.

Оператор типа Джексона на основании системы ортогональных рациональных функций С. Такенака [5] и Ф. Мальмквиста [6] на канонических областях был построен и исследован В. Н. Русаком [7]. Им установлены оценки приближения «джексоновского» типа для различных классов функций. Аппроксимативные свойства рационального оператора типа Джексона на отрезке исследовались в [8] и [9].

В теории приближений, в том числе рядами Фурье, выступают как различные классы непрерывных функций, например классы Липшица, так и индивидуальные функции [10].

Задача наилучшего равномерного приближения функции $|x|$ на отрезке имеет богатую историю и ведет свое начало с работы С. Н. Бернштейна [11]. Новый импульс в этом направлении придала работа Д. Ньюмена [12] о рациональной аппроксимации функции $|x|$ на отрезке $[-1, 1]$. Этот результат уточнялся во многих работах [13; 14], и окончательный результат был получен Г. Шталем [15]. Задача приближения функции $|x|^s$, $s > 0$, возникла несколько позже и также берет свое начало с работы С. Н. Бернштейна [16]. К настоящему времени имеется достаточно большое число работ, посвященных как наилучшим приближениям этой функции [17; 20], так и конкретным методам приближений [21; 22].

В [23] нами изучалось приближение функции $|x|^s, 0 < s < 2$, на отрезке $[-1, 1]$ посредством сингулярного интеграла Джексона, ассоциированного с системой полиномов Чебышёва первого рода, являющегося полиномом степени не выше $4n$. В работе была найдена оценка погрешности приближения в зависимости от положения точки x на отрезке, а также равномерная асимптотически точная оценка погрешности приближения.

Настоящая работа посвящена приближению вышеупомянутых классов непрерывных функций и индивидуальных функций посредством сингулярного интеграла Джексона, порожденного одной ортогональной системой рациональных дробей Чебышёва–Маркова [22] на отрезке $[-1, 1]$. Получены теорема о равномерной сходимости последовательности сингулярных интегралов Джексона для непрерывных на отрезке функций и условия, которым должен удовлетворять параметр, чтобы равномерная сходимость имела место. Установлено асимптотическое поведение верхней грани отклонения на классах $MH^{(\gamma)}[-1, 1]$ функций, удовлетворяющих на отрезке $[-1, 1]$ условию Липшица, порядка $\gamma, 0 < \gamma \le 1$, от соответствующих им сингулярных интегралов Джексона. Далее найдены поточечная оценка уклонений от функции $\left|x\right|^s$, $0 < s < 2$, и асимптотика равномерной оценки уклонений на отрезке $[-1, 1]$. Полученные результаты иллюстрируются на примере функции $|x|$.

Напомним основные сведения о системе рациональных дробей Чебышёва–Маркова. Как известно [24], алгебраическая косинус-дробь Чебышёва–Маркова на отрезке $[-1, 1]$ с двумя комплексно-сопряженными параметрами имеет вид

$$M_n(x) = \cos n \arccos x \sqrt{\frac{1+a^2}{1+a^2x^2}}, \quad x \in [-1,1], a \geq 0, \quad n = 0,1,\ldots$$

и при $a = 0$ представляет собой классический полином Чебышёва первого рода. Система алгебраических дробей $M_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, является ортогональной на отрезке [–1, 1] с весом

$$\rho(x, a) = \frac{\sqrt{1+a^2}}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1,$$

т. е.

$$\int_{-1}^{1} M_n(x) M_m(x) \rho(x, a) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \quad m, n = 0,1,2,\ldots \\ \pi/2, & m = n, \quad m, n = 1,2,\ldots \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

Функции $f(x)$, абсолютно суммируемой с весом $\rho(x, a)$ на отрезке [–1, 1], поставим в соответствие ряд Фурье по системе рациональных функций Чебышёва–Маркова

$$f(x) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n M_n(x), \quad c_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \rho(x, a) f(x) M_n(x) dx, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Справедлива

Т е о р е м а 1 [25]. *Для частичных сумм ряда Фурье при условии четности функции f справедливо представление*

$$s_{2n}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos v) \frac{\sin[(2n+1)\varphi(u,v)]}{\sin \varphi(u,v)} \lambda(v) dv, \quad x = \cos u, \tag{1}$$

где

$$\varphi(u, v) = \int_u^v \lambda(y) dy, \quad \lambda(y) = \frac{1-\alpha^4}{1+2\alpha^2 \cos 2y + \alpha^4}, \ \alpha \in [0,1), \quad \alpha = \frac{\sqrt{1+a^2}-1}{a}, \tag{2}$$

причем оператор $s_{2n} : f \to \mathbb{R}_{2n}(a)$, *где* $\mathbb{R}_{2n}(a)$ *– множество рациональных функций вида* $p_{2n}(x)/(1+a^2x^2)^n$, $p_{2n}(x) \in P_{2n}$ *и является точным на константах.*

Аппроксимативные свойства частичных сумм (1) исследованы нами в [25].

Сингулярным интегралом Джексона на основании ряда Фурье по системе рациональных дробей Чебышёва–Маркова четной функции $f \in C[-1,1]$ будем называть выражение вида

$$U_{4n}(x, f) = \frac{1}{\gamma_n} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos v) G_{4n}(u, v) \lambda(v) dv, x = \cos u, \ n = 0,1,\ldots, \tag{3}$$

где

$$G_{4n}(u, v) = \frac{\sin^4[(n+1)\varphi(u,v)]}{\sin^4 \varphi(u,v)}, \quad \gamma_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} G_{4n}(u, v) \lambda(y) dv,$$

$\varphi(u, v)$ и $\lambda(y)$ определены в соотношении (2).

Нетрудно убедиться, что оператор U_{4n} обладает следующими свойствами:

1. $U_{4n} : f \to \Re_{4n}(a)$, где $\Re_{4n}(a)$ – множество рациональных функций вида

$$\frac{p_{4n}(x)}{(1+a^2x^2)^{2n}}, \quad a \geq 0,$$

$p_{4n}(x)$ – некоторый многочлен степени не выше $4n$ с коэффициентами, зависящими от функции f;

2. Является точным на константах.

Нашей задачей будет исследование аппроксимативных свойств сингулярного интеграла Джексона (3). Предварительно найдем явное выражение для константы Джексона γ_n.

Л е м м а 1. *Справедливо равенство*

$$\gamma_n = \frac{\pi}{3}(n+1)(2(n+1)^2+1), \ \ n = 0, 1, \ldots.$$

Таким образом, сингулярный интеграл Джексона (3), порожденный ортогональной системой рациональных дробей Чебышёва–Маркова, имеет вид

$$U_{4n}(x, f) = \frac{3}{\pi(n+1)(2(n+1)^2+1)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos v) \frac{\sin^4[(n+1)\varphi(u, v)]}{\sin^4 \varphi(u, v)} \lambda(v) dv,$$

где $\varphi(u, v)$, $\lambda(v)$ из (2), $x = \cos u$, $n = 0, 1, \ldots$.

З а м е ч а н и е 1. *Интересно отметить, что несмотря на наличие в определении константы Джексона* γ_n *как переменных* $x = \cos u$, $\xi = e^{iu}$, *так и параметра* α, *конечный результат вычисления интеграла их не содержит. Более того, лемма 1 говорит, что константы Джексона в полиномиальном [26] и рассматриваемом рациональном случаях совпадают.*

Приведем еще один результат в этом направлении. Имеет место

Л е м м а 2. *Для сингулярного интеграла Джексона* $U_{4n}(f, x)$ *справедливо представление*

$$U_{4n}(f, x) = \frac{1}{\pi\gamma_n \lambda^2(u)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos v) \frac{\sin^4[(n+1)\varphi(u, v)]}{\sin^4(v-u)} \frac{dv}{\lambda(v)}, \quad x = \cos u.$$

З а м е ч а н и е 2. *Положив в представлении из леммы 2 значение* $\alpha = 0$, *получим*

$$U_{4n}(f, x) = \frac{3}{\pi(n+1)(2(n+1)^2+1)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos v) \frac{\sin^4[(n+1)(v-u)]}{\sin^4(v-u)} dv.$$

Переходя к полиномиальному случаю, функция $U_{4n}(f, x)$ представляет собой классический сингулярный интеграл Джексона, соответствующий системе полиномов Чебышёва первого рода при условии четности функции *f*. Аппроксимативные свойства последнего изучались нами в [23].

Как и в полиномиальном случае имеет место представление рассматриваемого интеграла Джексона в виде линейной комбинации частичных сумм рациональных рядов Фурье–Чебышёва, а именно справедлива

Т е о р е м а 2. *Для сингулярного интеграла Джексона (3) имеет место представление*

$$U_{4n}(f, x) = \frac{3}{2(n+1)(2(n+1)^2+1)} \left[\sum_{k=0}^{n-1} [-3k^2 + (4n+1)k + 2(n+1)] s_{2k}(f, x) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=0}^{n} [(n+1-k)^2 + (n+1-k)] s_{2n+2k}(f, x) \right], \quad -1 \le x \le 1,$$

где $s_{2k}(f, x)$ *– частичные суммы ряда Фурье (1).*

Порядок приближений непрерывных на отрезке [–1, 1] функций сингулярным интегралом Джексона. Дальнейшим этапом наших исследований будет нахождение оценки приближений сингулярным интегралом Джексона (3) непрерывных на отрезке [–1, 1] функций.

Отметим, что в исследуемом нами случае при каждом значении индекса *n* могут выбираться соответствующие значения параметра α, т. е., вообще говоря, $\alpha = \alpha_n$, $n = 0, 1, \ldots$. Это обстоятельство будем учитывать в дальнейшем. Рассмотрим последовательность сингулярных интегралов Джексона

$$\{U_{4n}(f, x, \alpha_n)\}_{n=0}^{n=+\infty}. \tag{4}$$

Имеет место

Т е о р е м а 3. *Для всякой четной функции* $f \in C[-1, 1]$ *справедливо неравенство*

$$| f(x) - U_{4n}(f, x, \alpha_n) | \le 4 \left[\omega_f \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{(n+1)\lambda(u)} \right) + \omega_f \left(\frac{|x|}{[(n+1)\lambda(u)]^2} \right) \right], \quad x \in [-1, 1], x = \cos u,$$

где ω_f *– модуль непрерывности функции f на отрезке* [–1, 1], $\lambda(u)$ *из (2).*

Из теоремы 3 непосредственно следуют условия, которым должен удовлетворять параметр α, при котором последовательность (4) будет сходиться равномерно на отрезке [–1, 1]. А именно, справедливо

С л е д с т в и е 1. *Если выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty} n(1-\alpha_n)=\infty, \tag{5}$$

то последовательность (4) сходится к $f(x)$ *равномерно на отрезке* [–1, 1].

Заметим, что и здесь, и везде в дальнейшем для каждого индекса n может выбираться соответствующее α_n. Однако мы не будем указывать эту зависимость, так как все приведенные оценки являются равномерными относительно α, $\alpha\in[0,1)$. Будем также полагать везде ниже условие (5) выполненным.

Приближение на классах $MH^{(\gamma)}$ [–1, 1]. В настоящем разделе рассматривается приближение сингулярным интегралом Джексона (3) на классах $MH^{(\gamma)}[-1,1]$, $0<\gamma\le 1$, функций $f(x)$, удовлетворяющих условию Липшица степени γ с константой M, т. е. условию вида

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le M\left|x_1-x_2\right|^{\gamma},\quad x_1,x_2\in[-1,1].$$

Выясним, каково асимптотическое поведение верхней грани отклонения при $n\to\infty$

$$\mathcal{E}_{4n}^{(\gamma)}(x,\alpha)=\sup_{f\in MH^{\gamma}[-1,1]}\left|f(x)-U_{4n}(f,x,\alpha)\right| \tag{6}$$

в каждой точке x отрезка [–1, 1] для функции $f\in MH^{\gamma}[-1,1]$, $(0<\gamma\le 1)$. Величина (6) введена С. М. Никольским [10] при исследовании приближений непрерывных функций средними Фейера и названа мерой приближения всего класса $MH^{\gamma}[-1,1]$. Справедлива следующая

Т е о р е м а 4. *Для приближений на классах* $MH^{\gamma}[-1,1]$ *при* $n\to\infty$ *равномерно относительно* $x\in[-1,1]$ *справедливы следующие асимптотические равенства:*

1) $$\mathcal{E}_{2n}^{(\gamma)}(x,\alpha)=\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\lambda(u)(n+1)}\right)^{\gamma}\frac{12M\Gamma(\gamma)(2^{1-\gamma}-1)\sin\frac{\pi\gamma}{2}}{\pi(3-\gamma)(2-\gamma)(1-\gamma)}+O\left(\frac{(\sqrt{1-x^2})^{\gamma}}{\lambda(u)(n+1)}\right)+\delta_{4n}^{(\gamma)}(x,\alpha),$$ *если* $0<\gamma<1$, *и*

2) $$\mathcal{E}_{2n}^{(1)}(x,\alpha)=\frac{3M}{\pi}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}\ln 2}{\lambda(u)(n+1)}+\frac{\pi|x|}{8[\lambda(u)(n+1)]^2}\right)+O\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{[\lambda(u)(n+1)]^2}\right)+o\left(\frac{\pi|x|}{8[\lambda(u)(n+1)]^2}\right),$$ *если* $\gamma=1$, *где для* $|x|\le 1$

$$\begin{cases}\delta_{4n}^{(\gamma)}(x,\alpha)=O\left(\dfrac{|x|^{\gamma}}{[\lambda(u)(n+1)]^{2\gamma}}\dfrac{2^{2-3\gamma}\Gamma(2\gamma)\sin\pi\gamma(2^{1-2\gamma}-1)}{(3-2\gamma)(2-2\gamma)(1-2\gamma)}\right), & 0<\gamma<\dfrac{1}{2},\\[2ex] \delta_{4n}^{(1/2)}(x,\alpha)=O\left(\dfrac{2^{3/2}\ln 2\sqrt{x}}{\lambda(u)(n+1)}\right), & \gamma=\dfrac{1}{2},\\[2ex] \delta_{4n}^{(\gamma)}(x,\alpha)=O\left(\dfrac{|x|^{\gamma}}{[\lambda(u)(n+1)]^{2\gamma}}\right), & \gamma>\dfrac{1}{2},\quad n\to\infty.\end{cases}$$

При этом

$$\begin{cases}\delta_{4n}^{(\gamma)}(\pm1,\alpha)=\dfrac{2^{2-3\gamma}\Gamma(2\gamma)\sin\pi\gamma(2^{1-2\gamma}-1)}{(3-2\gamma)(2-2\gamma)(1-2\gamma)}\dfrac{1}{[\beta(n+1)]^{2\gamma}}+O\left(\dfrac{1}{\beta(n+1)}\right), & \gamma\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right),\\[2ex] \delta_{4n}^{(1/2)}(\pm1,\alpha)=\dfrac{2^{3/2}\ln 2}{\beta(n+1)}+O\left(\dfrac{1}{[\beta(n+1)]^2}\right), & \gamma=\dfrac{1}{2},\\[2ex] \delta_{4n}^{(\gamma)}(\pm1,\alpha)=2^{4-2\gamma}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\dfrac{\sin^4((n+1)\varphi(0,t))}{\sin^{4-2\gamma}t}\dfrac{dt}{\lambda(t)}+o\left(\dfrac{1}{[\beta(n+1)]^{2\gamma}}\right), & \gamma>\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

где $\beta=(1-\alpha^2)/(1+\alpha^2)$, $\alpha\in[0,1)$.

С помощью теоремы 4 установим оценку погрешности приближения функции $|x|$ на отрезке [–1, 1] сингулярным интегралом Джексона (1). С этой целью положим

$$\varepsilon_{4n}(\alpha) = \left\| |x| - U_{4n}(|x|, x) \right\|_{C[-1,1]},$$

$$\varepsilon_{4n} = \inf_{\alpha\in[0,1)} \varepsilon_{4n}(\alpha).$$

С л е д с т в и е 3. *Для погрешности приближения функции* $|x|$ *на отрезке* [–1, 1] *сингулярным интегралом Джексона (3) имеют место соотношения*

$$\varepsilon_{4n}(\alpha) \le \varepsilon^*_{4n}(\alpha) = \frac{3}{\pi}\left(\frac{\beta\ln 2}{n+1} + \frac{\pi}{8\beta^2(n+1)^2}\right) + O\left(\left(\frac{\beta}{n+1}\right)^2\right) + o\left(\frac{1}{[\beta(n+1)]^2}\right), \quad \beta = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}, 0<\beta\le 1; \quad (7)$$

$$\varepsilon_{4n} \le \frac{9}{2}\left(\frac{\ln 2}{2\pi}\right)^{2/3} \frac{1}{(n+1)^{4/3}} + o\left(\frac{1}{(n+1)^{4/3}}\right), \quad n\to\infty. \quad (8)$$

Заметим, что оценка (8) получается из оценки (7) при оптимальном для данной задачи параметре β. Таким образом, при специальном выборе параметра рассматриваемый сингулярный интеграл Джексона осуществляет более эффективное приближение функции $|x|$ на отрезке [–1, 1] по сравнению с классическим полиномиальным случаем.

Оценка приближения функции $|x|^s$, $0 < s < 2$, $x\in[-1,1]$, сингулярным интегралом Джексона. В данном разделе изучим приближение функции $|x|^s$, $0 < s < 2$, на отрезке [–1, 1] сингулярным интегралом Джексона (3). С этой целью положим

$$\delta_{4n}(x,\alpha) = |x|^s - U_{4n}(|x|^s, x), \ -1\le x\le 1, \qquad \delta_{4n}(\alpha) = \left\| |x|^s - U_{4n}(|x|^s, x) \right\|_{C[-1,1]}. \quad (9)$$

Следующая теорема устанавливает оценку величины $\delta_{4n}(x,\alpha)$ в зависимости от положения точки $x\in[-1,1]$:

Т е о р е м а 5. *Для оценки погрешности приближения функции* $|x|^s, 0<s<2$, *на отрезке* [–1, 1] *сингулярным интегралом Джексона* $U_{4n}(|x|^s, x)$ *справедливо соотношение*

$$|\delta_{4n}(x,\alpha)| \le \frac{1}{2\ \ {}^2\gamma} \sin\frac{\pi s}{}\int \frac{(1-t^2)^s t^{1\ \ s}}{1-\alpha^2 t^2}\sqrt{\frac{1+2\alpha^2\cos 2u+\alpha^4}{1+2t^2\cos 2u+t^4}} K_{4n}(t,\alpha)dt, \quad x=\cos u, x\in[-1,1], \quad (10)$$

где γ_n *– константа Джексона,*

$$K_{4n}(t,\alpha) = \frac{(n+1)\bigl(1-|\chi_2(t)|\bigr) - 3|\chi_1(t)| + 4|\chi_{n+2}(t)| - |\chi_{2n+3}(t)|}{(1-|\chi_1(t)|)^3}, \quad \chi_n(t) = \left(\frac{t^2-\alpha^2}{1-\alpha^2 t^2}\right)^n, \ \alpha\in[0,1).$$

З а м е ч а н и е 3. *Ограничение на параметр* $s\in(0,2)$ *объясняется подынтегральной функцией (10). В самом деле при* $0<s\le 1$ *интеграл справа в (10) существует, при* $1<s<2$ *также существует как несобственный. При* $s\ge 2$ *интеграл в (10) расходится.*

Дальнейшим этапом наших исследований является нахождение равномерной оценки величины $\delta_{4n}(x,\alpha)$. Справедлива

Т е о р е м а 6. *Для приближения функции* $|x|^s$, $0<s<2$, *на отрезке* [–1, 1] *сингулярным интегралом Джексона* $U_{4n}(|x|^s, x)$ *имеет место равномерная оценка*

$$\delta_{4n}(\alpha) \le \delta^*_{4n}(\alpha) = \frac{1}{2^{s-2}\gamma_n}\sin\frac{\pi s}{2}\,[I_1(\alpha,n) + I_2(\alpha,n)], \quad (11)$$

где

$$I_1(\alpha,n) = \frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^3}\int_\alpha^1 (1-t^2)^{s-4} t^{1-s}(1-\alpha^2t^2)^2[(n+1)(1-\chi_2(t)) - 3\chi_1(t) + 4\chi_{n+2}(t) - \chi_{2n+3}(t)]dt,$$

$$I_2(\alpha,n) = \frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha^2)^3}\int_0^\alpha \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}(1-\alpha^2t^2)^2}{(1+t^2)^4}[(n+1)(1-\chi_2^-(t)) - 3\chi_1^-(t) + 4\chi_{n+2}^-(t) - \chi_{2n+3}^-(t)]dt,$$

$$\chi_n^-(t)=\left(\frac{\alpha^2-t^2}{1-\alpha^2t^2}\right)^n=(-1)^n\chi_n(t),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Асимптотика мажоранты равномерной оценки приближений. Нашей задачей на этом этапе исследования будет нахождение асимптотики при $n\to\infty$ правой части выражения (11). С этой целью в интегралах $I_1(\alpha,n)$ и $I_2(\alpha,n)$ выполним замену переменного интегрирования по формуле $t^2=(1-u)/(1+u)$, $dt=-du/((1+u)\sqrt{1-u^2})$. Тогда

$$\delta_{4n}^*(\alpha)=\frac{1}{4\gamma_n}\sin\frac{\pi s}{2}\left[\beta I_1(\alpha,n)+\frac{1}{\beta^3}I_2(\alpha,n)\right],\quad \beta=\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2},\quad \beta\in(0,1],$$

где $\delta_{4n}^*(\alpha)$ из (11),

$$I_1(\alpha,n)=\int_0^\beta\frac{(\beta+u)^2u^{s-4}}{(1-u^2)^{s/2}}\left[(n+1)\left(1-\left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^2\right)-3\frac{\beta-u}{\beta+u}+4\left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^{n+2}-\left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^{2n+3}\right]du,$$

$$I_2(\alpha,n)=\int_\beta^1\frac{(\beta+u)^2u^{s}}{(1-u^2)^{s/2}}\left[(n+1)\left(1-\left(\frac{u-\beta}{\beta+u}\right)^2\right)-3\frac{u-\beta}{\beta+u}+4\left(\frac{u-\beta}{\beta+u}\right)^{n+2}-\left(\frac{u-\beta}{\beta+u}\right)^{2n+3}\right]du.$$

Справедлива

Т е о р е м а 7. *Для мажоранты равномерной оценки приближений функции* $|x|^s$, $s\in(0,2)$, *на отрезке* $[-1,1]$ *сингулярным интегралом Джексона (3) при* $n\to\infty$ *имеет место асимптотическая формула*

$$\delta_{4n}^*(\alpha)=\frac{3}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\begin{cases}\left(\frac{\beta}{2(n+1)}\right)^s\frac{4\Gamma(s)(2^{1-s}-1)}{(1-s)(2-s)(3-s)}+\frac{\mu(\beta,s)}{2(\beta(n+1))^2}+O\left(\frac{\beta}{n+1}\right), & s\in(0,1),\\ \frac{\beta\ln 2}{n+1}+\frac{\arccos\beta+\sqrt{1-\beta^2}\beta}{4(\beta(n+1))^2}+O\left(\frac{\beta\ln(n+1)}{(n+1)^2}\right), & s=1,\\ \left(\frac{\beta}{2(n+1)}\right)^s\frac{4\Gamma(s-1)(1-2^{1-s})}{(2-s)(3-s)}+\frac{\mu(\beta,s)}{2(\beta(n+1))^2}+O\left(\frac{\beta}{(n+1)^2}\right), & s\in(1,2),\end{cases}\tag{12}$$

где $\mu(\beta,s)=\int_0^{\arccos\beta}\cos^{s+1}\theta\sin^{1-s}d\theta$, $\beta=(1-\alpha^2)/(1+\alpha^2)$, $\Gamma(s)$ *– гамма-функция Эйлера.*

С л е д с т в и е 3. *Положив теореме 7* $\beta=1$, *что соответствует значению параметра* $\alpha=0$, *получим оценку погрешности приближения функции* $|x|^s$, $s\in(0,2)$, *сингулярным интегралом Джексона, ассоциированным с рядом Фурье–Чебышёва в полиномиальном случае. Тогда*

$$\left\||x|^s-U_{4n}^{(0)}(|x|^s,x)\right\|_{C[-1,1]}=\frac{3}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\begin{cases}\frac{4\Gamma(s)(2^{1-s}-1)}{2^s(n+1)^s(1-s)(2-s)(3-s)}+O\left(\frac{1}{n+1}\right), & s\in(0,1),\\ \frac{\ln 2}{(n+1)}+O\left(\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}\right), & s=1,\\ \frac{4\Gamma(s-1)(1-2^{1-s})}{2^s(n+1)^s(2-s)(3-s)}+O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right), & s\in(1,2).\end{cases}$$

Этот результат содержится в [23].

Представляет интерес минимизировать правую часть в соотношениях (12) и (13) посредством выбора оптимального для этой задачи параметра $\beta=\beta^*$. С этой целью положим

$$\delta_{4n}=\inf_{0<\alpha<1}\delta_{4n}(\alpha),$$

где величина $\delta_{4n}(\alpha)$ из (9). Справедлива

Т е о р е м а 8. *Для равномерной оценки приближений функции* $|x|^s$, $s \in (0, 2)$, *на отрезке* [–1, 1] *сингулярным интегралом Джексона (3) справедливо асимптотическое соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{4s}{s+2}}\delta_{4n} \le \begin{cases} \dfrac{3(s+2)}{2}\left(\dfrac{4^{1-s}\Gamma(s)(2^{1-s}-1)}{\pi(1-s)(2-s)(3-s)}\sin\dfrac{\pi s}{2}\right)^{\frac{2}{s+2}}, & s \in (0,1), \\ \dfrac{9}{2}\left(\dfrac{\ln 2}{2\pi}\right)^{2/3}, & s = 1, \\ \dfrac{3(s+2)}{2}\left(\dfrac{4^{1-s}\Gamma(s-1)(1-2^{1-s})}{\pi(2-s)(3-s)}\sin\dfrac{\pi s}{2}\right)^{\frac{2}{s+2}}, & s \in (1,2). \end{cases} \tag{13}$$

При этом оптимальным значением параметра будет $\alpha^* = \sqrt{(1-\beta^*)/(1+\beta^*)}$, *где*

$$\beta^* = \sqrt[s+2]{\frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{2}}\gamma(s)}\,(2(n+1))^{\frac{s-2}{s+2}}, \quad \gamma(s) = \begin{cases} \dfrac{4\Gamma(s)(2^{1-s}-1)}{(1-s)(2-s)(3-s)}, & s \in (0,1), \\ 2\ln 2, & s = 1, \\ \dfrac{4\Gamma(s-1)(1-2^{1-s})}{(2-s)(3-s)}, & s \in (1,2). \end{cases}$$

С л е д с т в и е 4. *Из теоремы 8 при* $s = 1$ *находим наилучшую скорость убывания погрешности приближений функции* $|x|$ *на отрезке* [–1, 1] *сингулярным интегралом Джексона*

$$\left\| |x| - U_{4n}(|x|, x) \right\|_{C[-1,1]} \le \frac{9}{2}\left(\frac{\ln 2}{2\pi}\right)^{2/3}\frac{1}{(n+1)^{4/3}} + o\left(\frac{1}{(n+1)^{4/3}}\right), \quad n \to \infty.$$

При этом оптимальным значением параметра для достижения оценки справа будет

$$\beta^* = \left(\frac{\pi}{4\ln 2}\right)^{1/3}\frac{1}{(n+1)^{1/3}}.$$

Заметим, что эта же оценка уже имеется в (7) и (8). Однако получена другим путем, без ссылок на теорему 8.

Соотношение (13) показывает, что при подходящем выборе параметра в приближении функции $|x|^s$, $s \in (0, 2)$, на отрезке [–1, 1] сингулярным интегралом (1) можно достичь более высокой скорости стремления к нулю погрешности приближения в сравнении с приближением тем же типом оператора в полиномиальном случае.

З а м е ч а н и е 4. *Интересно сравнить скорости убывания погрешности приближения* $\delta^*_{4n}(\alpha)$, *если в качестве параметров задавать значения, оптимальные для других способов приближения исследуемой функции. Например, исследуя приближение функции* $|x|$ *на отрезке* [–1, 1] *посредством частичных сумм ряда Фурье по системе рациональных функций Чебышёва–Маркова [23] оптимальным было значение параметра* $\beta^* = \ln n / n$. *Подставив данное значение в (12), находим, что при* $n \to \infty$ *эти значения параметра обеспечивают скорость убывания порядка* $O(1/\ln^2(n+1))$, *и являются неподходящими с точки зрения приближений интегралом Джексона.*

Заключение. В работе исследованы аппроксимативные свойства сингулярного интеграла Джексона на отрезке [–1, 1], соответствующего одной системе рациональных дробей Чебышёва–Маркова. Показано, что при определенном выборе параметра в ряде случаев достигается увеличение скорости приближения непрерывных на отрезке функций в сравнении с полиномиальным случаем.

Список использованных источников

1. Jackson, D. The theory of approximation / D. Jackson. – American Mathematical Society Colloquium Publications, 1930. – Vol. XI. – 184 p. http://dx.doi.org/10.1090/coll/011

2. Schurer, F. On the Degree of Approximation of Functions in $C_{2\pi1}$ with Operators of the Jackson Type / F. Schurer, F. W. Steutel // Journal of Approximation Theory. – 1979. – Vol. 27, N 2. – P. 153–178. https://doi.org/10.1016/0021-9045(79)90117-5

3. Wafi, A. Saturation of local approximation by linear positive operators of Jackson type / A. Wafi // Indian J. Pure Appl. Math. – 1980. – Vol. 11, N 9. – P. 1194–1201.

4. Сафронова, Г. П. О методе суммирования расходящихся рядов, связанном с сингулярным интегралом Джексона / Г. П. Сафронова // Докл. АН СССР. – 1950. – Т. 73, № 2. – С. 277–278.

5. Takenaka, S. On the orthogonal functions and a new formula of interpolations / S. Takenaka // Japanese Journal of Mathematics. – 1925. – Vol. 2. – P. 129–145. https://doi.org/10.4099/jjm1924.2.0_129

6. Malmquist, F. Sur la determination d'une classe functions analytiques par leurs dans un ensemble donne de points / F. Malmquist // Compte Rendus Six. Cong. math. scand. – Kopenhagen, Denmark, 1925. – P. 253–259.

7. Русак, В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения / В. Н. Русак. – Минск, 1979. – 178 с.

8. Ровба, Е. А. Рациональные интегральные операторы на отрезке / Е. А. Ровба // Докл. АН Беларуси. – 1996. – Т. 40, № 3. – С. 42–46.

9. Смотрицкий, К. А. О приближении выпуклых функций рациональными интегральными операторами на отрезке / К. А. Смотрицкий // Вестн. БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2005. – № 3. – С. 64–70.

10. Никольский, С. М. Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера / С. М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1940. – Т. 4, № 6. – С. 501–508.

11. Bernstein, S. Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynomes de degres donnes / S. Bernstein // Acta Math. – 1913. – Vol. 37. – P. 1–57. https://doi.org/10.1007/bf02401828

12. Newman, D. J. Rational approximation to $|x|$ / D. J. Newman // Mich. Math. J. – 1964. – Vol. 11, N 1. – P. 11–14. https://doi.org/10.1307/mmj/1028999029

13. Буланов, А. П. Асимптотика для наименьших уклонений $|x|$ от рациональных функций / А. П. Буланов // Матем. сб. – 1968. – Т. 76, № 2. – С. 288–303.

14. Вячеславов, Н. С. О приближении функции $|x|$ рациональными функциями / Н. С. Вячеславов // Матем. заметки. – 1974. – Т. 16, вып. 1. – С. 163–171.

15. Шталь, Г. Наилучшие равномерные рациональные аппроксимации $|x|$ на $[-1, 1]$ / Г. Шталь // Матем. сб. – 1992. – Т. 183, № 8. – С. 85–118.

16. Бернштеин, С. Н. О наилучшем приближении $|x|^p$ при помощи многочленов весьма высокой степени / С. Н. Бернштеин // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. – 1938. – Т. 2, вып. 2. – С. 169–190.

17. Freud, G. Rational approximation to x^a / G. Freud, J. Szabados // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. – 1967. – Т. 18, N 3–4. – P. 393–399. https://doi.org/10.1007/bf02280298

18. Гончар, А. А. О скорости рациональной аппроксимации непрерывных функций с характерными особенностями / А. А. Гончар // Матем. сб. – 1967. – Т. 73, № 4. – С. 630–638.

19. Вячеславов, Н. С. Об аппроксимации x^a рациональными функциями / Н. С. Вячеславов // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1980. – Т. 44, вып. 1. – С. 92–109.

20. Stahl, H. Best uniform rational approximation of x^a on [0, 1] / H. Stahl // Bul. Am. Math. Society. – 1993. – Vol. 28, N 1. – P. 116–122. https://doi.org/10.1090/s0273-0979-1993-00351-3

21. Revers, M. On the asymptotics of polynomial interpolation to x^a at the Chebyshev nodes / M. Revers // Journal of Approximation Theory. – 2013. – Vol. 165. – P. 70–82.

22. Райцин, Р. А. Асимптотические свойства равномерных приближений функций с алгебраическими особенностями частичными суммами ряда Фурье–Чебышева / Р. А. Райцин // Изв. вузов. Матем. – 1980. – № 3. – С. 45–49.

23. Поцейко, П. Г. Об одном представлении сингулярного интеграла Джексона и аппроксимации функции $|x|^s$ на отрезке $[-1, 1]$ / П. Г. Поцейко // Весн. Гродзенскага дзярж. ун-та. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2019. – Т. 9, № 2. – С. 22–38.

24. Ровба, Е. А. Об одной системе рациональных дробей Чебышёва–Маркова / Е. А. Ровба, П. Г. Поцейко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 24–29.

25. Rouba, Y. On a system of rational Chebyshev–Markov fractions // Y. Rouba, P. Patseika, K. Smatrytski // Analysis Math. – 2018. – Vol. 44, N 1. – P. 115–140. https://doi.org/10.1007/s10476-018-0110-7

26. Натансон, И. П. Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. – М., 1949. – 684 с.

References

1. Jackson D. *The theory of approximation*. *American Mathematical Society. Vol. XI.* Colloquium Publications, 1930. 184 p. http://dx.doi.org/10.1090/coll/011

2. Schurer F., Steutel F. W. On the Degree of Approximation of Functions in $C_{2\pi1}$ with Operators of the Jackson Type. *Journal of Approximation Theory*, 1979, vol. 27, no. 2, pp. 153–178. https://doi.org/10.1016/0021-9045(79)90117-5

3. Wafi A. Saturation of local approximation by linear positive operators of Jackson type. *Indian Journal Pure Applied Mathematics*, 1980, vol. 11, no. 9, pp. 1194–1201.

4. Safronova G. P. On the summation method for divergent series associated with the singular Jackson integral. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1950, vol. 73, no. 2, pp. 277–278 (in Russian).

5. Takenaka S. On the orthogonal functions and a new formula of interpolations. *Japanese Journal of Mathematics*, 1925, vol. 2, pp. 129–145. https://doi.org/10.4099/jjm1924.2.0_129

6. Malmquist F. Sur la determination d'une classe functions analytiques par leurs dans un ensemble donne de points. *Compte Rendus Six. Cong. math. scand.* Kopenhagen, Denmark, 1925, pp. 253–259.

7. Rusak V. N. *Rational functions as approximation apparatus*. Minsk, Belarusian State University, 1979. 176 p. (in Russian).

8. Rovba E. A. Rational integral operators on a segment. *Doklady Akademii nauk Belarusi = Doklady of the Academy of Sciences of Belarus*, 1996, vol. 40, no. 3, p. 42–46 (in Russian).

9. Smatrytski K. A. Approximation of convex functions by rational integral operators on an interval. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika = Vestnik BSU. Series 1. Physics. Mathematics. Informatics*, 2005, no. 3, pp. 64–70 (in Russian).

10. Nikol'skii S. M. On the asymptotic behavior of the remainder in the approximation of functions that satisfy the Lipschitz condition by Fejer sums. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya matematicheskaya = Izvestiya: Mathematics*, 1940, vol. 4, no. 6, pp. 501–508 (in Russian).

11. Bernstein S. Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynomes de degres donnes. *Acta Mathematica*, 1913, vol. 37, pp. 1–57. https://doi.org/10.1007/bf02401828

12. Newman D. J. Rational approximation to $|x|$. *Michigan Mathematical Journal*, 1964, vol. 11, no. 1, pp. 11–14. https://doi.org/10.1307/mmj/1028999029

13. Bulanov A. P. Asymptotics for the smallest deviations $|x|$ from rational functions. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1968, vol. 5, no. 2, pp. 275–290. https://doi.org/10.1070/sm1968v005n02abeh001006

14. Vyacheslavov N. S. On the approximation of the function $|x|$ rational functions. *Matematicheskie zametki = Mathematical Notes*, 1974, vol. 16, no. 1, pp. 163–171 (in Russian).

15. Stahl H. Best uniform rational approximation of $|x|$ on [–1, 1]. *Russian Academy of Sciences. Sbornik Mathematics*, 1993, vol. 76, no. 2, pp. 461–487. http://dx.doi.org/10.1070/SM1993v076n02ABEH003422

16. Bernstein S. Sur la meilleure approximation de $|x|^p$ par des polynomes de degres tres eleves. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya matematicheskaya = Izvestiya: Mathematics*, 1938, vol. 2, no. 2, pp. 169–190 (in Russian).

17. Freud G., Szabados J. Rational approximation to x^a. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 1967, vol. 18, no. 3–4, pp. 393–399. https://doi.org/10.1007/bf02280298

18. Gonchar A. A. On the rapidity of rational approximation of continuous functions with characteristic singularities. *Mathematics of the USSR-Sbornik,* 1967, vol. 2, no. 4, 561–568. http://dx.doi.org/10.1070/SM1967v002n04ABEH002355

19. Vyacheslavov N. S. On approximation of x^a by rational functions. *Mathematics of the USSR – Izvestiya*, 1981, vol. 16, no. 1, pp. 83–101. http://dx.doi.org/10.1070/IM1981v016n01ABEH001297

20. Stahl H. Best uniform rational approximation of x^a on [0, 1]. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1993, vol. 28, no. 1, pp. 116–122. https://doi.org/10.1090/s0273-0979-1993-00351-3

21. Revers M. On the asymptotics of polynomial interpolation to x^a at the Chebyshev nodes. *Journal of Approximation Theory*, 2013, vol. 165, pp. 70–82.

22. Raitsin R. A. Asymptotic properties of uniform approximations of functions with algebraic singularities by partial sums of the Fourier-Chebyshev series. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika = Soviet Mathematics*, 1980, no. 3, pp. 45–49 (in Russian).

23. Potseiko P. G. On one representation of singular integral of Jackson and approximation of the function $|x|^s$ on the segment [–1, 1]. *Vestnik Grodnenskogo Gosudarstvennogo Universiteta imeni Yanki Kupaly. Seriya 2. Matematika, Fizika, Informatika, Vychislitel'naya Tekhnika i upravlenie = Bulletin of the Grodno State University named after Yanki Kupaly. Series 2. Mathematics, Physics, Informatics, Computing technology and control*, 2019, vol. 9, no. 2, pp. 22–38 (in Russian)

24. Rovba Y. A., Potsejko P. G. About one system of the Chebyshev–Markov rational fractions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 1, pp. 24–29 (in Russian).

25. Rouba Y., Patseika P., Smatrytski K. On a system of rational Chebyshev–Markov fractions. *Analysis Mathematica*, 2018, vol. 44, no. 1, pp. 115–140. https://doi.org/10.1007/s10476-018-0110-7

26. Natanson I. P. *Constructive theory of functions*. Moscow, State publishing house of technical and theoretical literature, 1949. 684 p. (in Russian).

Информация об авторах

Ровба Евгений Алексеевич – д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, Гродно, Республика Беларусь). E-mail: rovba.ea@gmail.com.

Поцейко Павел Геннадьевич – аспирант. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, Гродно, Республика Беларусь). E-mail: pahamatby@gmail.com.

Information about the authors

Rovba Yevgeniy Alekseyevich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department. Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: rovba.ea@gmail.com.

Potsejko Pavel Gennadievich – Postgraduate student. Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: pahamatby@gmail.com.