ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

## *ИНФОРМАТИКА*

## *INFORMATICS*

УДК 519.17
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-4-408-420

Поступило в редакцию 02.01.2019
Received 02.01.2019

**П. А. Иржавский, Ю. Л. Орлович**

*Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь*

# СОВЕРШЕННЫЕ ПАРОСОЧЕТАНИЯ В ГРАФАХ С ПРЕДПИСАННЫМИ ЛОКАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

*(Представлено членом-корреспондентом М. Я. Ковалёвым)*

**Аннотация.** Граф называется $K_{1,p}$-ограниченным ($p \geq 3$), если для каждой вершины графа между любыми $p$ ее соседями есть хотя бы $p - 2$ ребер. В работе устанавливаются достаточные условия существования совершенного паросочетания в $K_{1,p}$-ограниченных графах. Из этих условий, в частности, вытекает классический результат Ю. Петерсена о том, что в любом реберно 2-связном 3-регулярном графе существует совершенное паросочетание.

**Ключевые слова:** $K_{1,p}$-ограниченный граф, сильно $K_{1,p}$-ограниченный граф, совершенное паросочетание, факторно-критический граф

**Для цитирования:** Иржавский, П. А. Совершенные паросочетания в графах с предписанными локальными ограничениями / П. А. Иржавский, Ю. Л. Орлович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 4. – С. 408–420. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-4-408-420

**Pavel A. Irzhavski, Yury L. Orlovich**

*Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus*

## PERFECT MATCHINGS IN GRAPHS WITH PRESCRIBED LOCAL RESTRICTIONS

*(Communicated by Corresponding Member Mikhail Ya. Kovalev)*

**Abstract.** A graph is called $K_{1,p}$-restricted ($p \geq 3$) if for every vertex of the graph there are at least $p - 2$ edges between any $p$ neighbours of the vertex. In this article, new sufficient conditions for existence of a perfect matching in $K_{1,p}$-restricted graphs are established. In particular, J. Petersen's classical result that every 2-edge connected 3-regular graph contains a perfect matching follows from these conditions.

**Keywords:** $K_{1,p}$-restricted graph, strongly $K_{1,p}$-restricted graph, perfect matching, factor-critical graph

**For citation:** Irzhavski P. A., Orlovich Yu. L. Perfect matchings in graphs with prescribed local restrictions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 4, pp. 408–420 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-4-408-420

**Введение.** Паросочетанием в графе называется произвольное подмножество попарно несмежных ребер. Паросочетание называется совершенным (или 1-фактором), если каждой вершине графа инцидентно одно из ребер паросочетания. Среди многочисленных направлений исследований в теории графов паросочетания занимают видное место. Задача нахождения наибольшего (в частности, совершенного) паросочетания в графе широко применяется в теории и на практике. Эта задача возникает, например, при проектировании коммуникационных сетей и размещении производственного оборудования, при планировании и оптимальной организации работы транспортных средств, при организации параллельных и конвейерных вычислений [1]. Теория паросочетаний инициировала исследование структурных и алгоритмических свойств графов и привела ко многим важным результатам. Достаточно подробный обзор полученных до 2003 г. результатов имеется в [2]. Современное состояние теории паросочетаний отражено в [3; 4].

Цель настоящей работы – установление новых достаточных условий существования совершенного паросочетания в $K_{1,p}$-ограниченных графах. Отметим, что класс $K_{1,4}$-ограниченных графов является расширением таких хорошо известных классов, как $K_{1,3}$-свободные графы и 3-регулярные (кубические) графы. Гамильтоновы свойства $K_{1,4}$-ограниченных графов изучались в [5–10] при различных дополнительных ограничениях, накладываемых на класс рассматриваемых графов. Например, в [5] установлено, что 3-связные $K_{1,4}$-ограниченные графы порядка $n \geq 30$ и минимальной степени не менее $n / 5 + 1$ являются гамильтоновыми, т. е. содержат простой остовный цикл. Отсюда, в частности, следует, что при четном $n$ такие графы обладают совершенным паросочетанием. В то же время указанные ограничения на связность и минимальную степень графа являются достаточно сильными. Как показывают результаты нашей работы, $K_{1,p}$-ограниченность графа обеспечивает наличие совершенного паросочетания и при существенно более слабых ограничениях на связность и минимальную степень.

Все графы, рассматриваемые в данной работе, являются конечными, неориентированными, без петель и кратных ребер. Стандартные понятия теории графов, не определяемые в работе, можно найти в [11]. Пусть $G$ – граф. Через $V(G)$ обозначается множество вершин, через $E(G)$ – множество ребер графа $G$. Множество всех вершин каждой компоненты связности графа называется областью связности этого графа. Запись $u \sim v$ (соответственно, $u \nsim v$) означает, что вершины $u$ и $v$ смежны (соответственно, несмежны) в исходном графе. Для непересекающихся множеств вершин $X$ и $Y$ запись $X \sim Y$ (или $X \nsim Y$) означает, что каждая вершина множества $X$ смежна (несмежна) с каждой вершиной из $Y$. Если $X = \{v\}$, будем писать $v \sim Y$ (или $v \nsim Y$) вместо $\{v\} \sim Y$ (или $\{v\} \nsim Y$).

Для графов $G$ и $H$, не содержащих общих вершин, через $G + H$ будем обозначать граф $F$ со множеством вершин $V(F) = V(G) \cup V(H)$ и множеством ребер

$$E(F) = E(G) \cup \{uv \ \forall\ u \in V(G)\ \forall\ v \in V(H)\} \cup E(H).$$

Как обычно, через $K_{1,p}$ обозначается звезда – полный двудольный граф с долями мощности 1 и $p$. Граф называется $r$-регулярным, если степени всех его вершин равны $r$, и $\{r, t\}$-регулярным, если степень каждой вершины равна $r$ или $t$. Граф $G$ называется $H$-свободным для некоторого графа $H$, если $G$ не содержит порожденных подграфов, изоморфных $H$, и $\mathcal{F}$-свободным для некоторого набора $\mathcal{F}$ графов, если $G$ не содержит порожденных подграфов, изоморфных любому из графов набора $\mathcal{F}$. В частности, $K_{1,p}$-свободный граф – это граф, который не содержит порожденных подграфов, изоморфных звезде $K_{1,p}$.

Граф $G$ называется $K_{1,p}$-ограниченным ($p \geq 3$) [7], если для любого подграфа $H$ графа $G$, изоморфного $K_{1,p}$, порожденный подграф $G(V(H))$ содержит по крайней мере $p + (p - 2)$ ребер. Легко видеть, что граф является $K_{1,3}$-свободным тогда и только тогда, когда он $K_{1,3}$-ограниченный. Очевидно, что при $p \geq 3$ всякий $K_{1,p}$-ограниченный граф является также $K_{1,p+1}$-ограниченным, но обратное, вообще говоря, неверно [7]. Отсюда, в частности, следует, что класс $K_{1,4}$-ограниченных графов является естественным расширением класса $K_{1,3}$-свободных графов. Заметим также, что граф является $K_{1,4}$-ограниченным тогда и только тогда, когда он является $\{K_{1,4}, K_{1,4} + e\}$-свободным, а условие $K_{1,5}$-ограниченности равносильно запрету четырех порожденных подграфов порядка 6: $K_{1,5}$, $K_{1,5} + e$, $K_1 + (2K_2 \cup K_1)$ и $K_1 + (P_3 \cup 2K_1)$.

Назовем граф $G$ сильно $K_{1,p}$-ограниченным ($p \geq 3$), если для любого подграфа $H$ графа $G$, изоморфного $K_{1,p}$, порожденный подграф $G(V(H))$ содержит по крайней мере $p + \lfloor (p - 1)^2 / 4 \rfloor$ ребер. Легко видеть, что при $p \in \{3, 4\}$ граф является $K_{1,p}$-ограниченным тогда и только тогда, когда он сильно $K_{1,p}$-ограниченный. Также имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. *Для любого целого числа $p \geq 3$ всякий сильно $K_{1,p}$-ограниченный граф является также сильно $K_{1,p+1}$-ограниченным, но обратное, вообще говоря, неверно.*

Отсюда, в частности, следует, что класс сильно $K_{1,5}$-ограниченных графов, определяемый восемью запрещенными порожденными подграфами порядка 6, является альтернативным расширением класса $K_{1,4}$-ограниченных графов. При этом класс сильно $K_{1,p+1}$-ограниченных графов является наиболее узким расширением класса сильно $K_{1,p}$-ограниченных графов в терминах требований к числу ребер в подграфе, порожденном $V(K_{1,p+1})$. По этой причине такое расширение сохраняет максимально возможное число структурных свойств, которыми обладают все графы класса.

Пусть $s$ – положительное целое число. Граф $G$ называется $s$-факторно-критическим, если для любого подмножества $S \subseteq V(G)$, $|S| = s$, в графе $G - S$ существует совершенное паросочетание. Если $s = 1$, то $s$-факторно-критический граф будем называть просто факторно-критическим. Заметим, что любой факторно-критический граф всегда связен и имеет нечетный порядок.

Изучение условий существования совершенных паросочетаний – одно из весьма популярных направлений теории графов. Хронологически первой работой, посвященной достаточным условиям существования совершенного паросочетания, была, по-видимому, статья Ю. Петерсена 1891 г. [12].

Т е о р е м а 2 (Ю. Петерсен [12]). *В любом реберно 2-связном 3-регулярном графе существует совершенное паросочетание.*

Обозначим через $c_o(H)$ число компонент нечетного порядка графа $H$. Следующая теорема, принадлежащая У. Татту, является наиболее значительным результатом среди всех, касающихся совершенных паросочетаний в графах общего вида.

Т е о р е м а 3 (У. Татт [13]). *В графе $G$ совершенное паросочетание существует тогда и только тогда, когда для любого подмножества $S \subseteq V(G)$ вершин верно неравенство $c_o(G - S) \leq |S|$.*

В заключение этого раздела упомянем одну интересную характеризацию, касающуюся $s$-факторно-критических графов и естественным образом обобщающую теорему 3, несмотря на то что случай $s = 0$ формально не допускается в определении $s$-факторно-критического графа.

Т е о р е м а 4 (Yu Q. [14]). *Граф $G$ является $s$-факторно-критическим тогда и только тогда, когда $|G| \equiv s \pmod 2$ и для любого подмножества $S \subseteq V(G)$ вершин, $|S| \geq s$, верно неравенство $c_o(G - S) \leq |S| - s$.*

**Новые достаточные условия.** При исследовании достаточных условий существования совершенного паросочетания в $K_{1,p}$-ограниченных графах нами получены следующие результаты.

Т е о р е м а 5. *Пусть $G$ – реберно 3-связный $K_{1,4}$-ограниченный граф четного порядка. Тогда в графе $G$ существует совершенное паросочетание.*

Заметим также, что существует реберно 2-связный $K_{1,4}$-ограниченный граф четного порядка, не содержащий совершенного паросочетания (рис. 1; на этом и последующих рисунках черным цветом выделены вершины множества $S$, удаление которого из исходного графа приводит к графу с числом компонент нечетного порядка, большим чем $|S|$). В связи с этим вызывает обоснованный интерес дополнительное ограничение, например, на степени вершин, при выполнении которого в реберно 2-связном $K_{1,4}$-ограниченном графе четного порядка существует совершенное паросочетание.

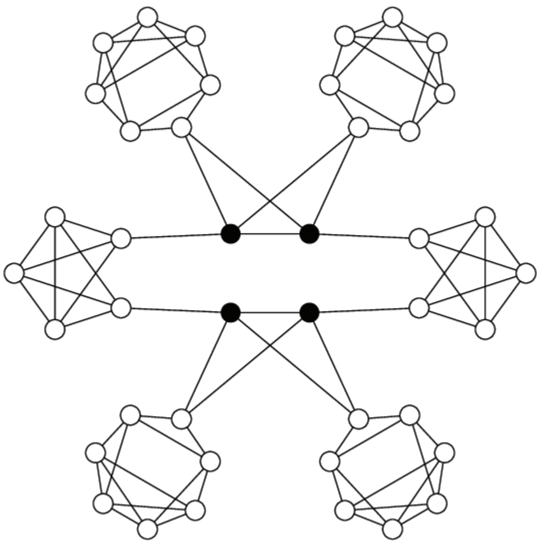

Рис. 1. Реберно 2-связный 4-регулярный $K_{1,4}$-ограниченный граф порядка 42, не содержащий совершенного паросочетания

Fig. 1. 2-edge connected 4-regular $K_{1,4}$-restricted graph of order 42 without a perfect matching

Т е о р е м а 6. *Пусть $G$ – реберно 2-связный $K_{1,4}$-ограниченный граф. Если степень каждой вершины графа $G$ – нечетное число, то в этом графе существует совершенное паросочетание.*

Теорема 6 обобщает приведенную выше теорему Ю. Петерсена, поскольку всякий 3-регулярный граф является $K_{1,4}$-ограниченным. Также нами установлено следующее достаточное условие.

Т е о р е м а 7. *Пусть $G$ – реберно 2-связный $K_{1,4}$-ограниченный граф четного порядка. Если $\delta(G) \geq 6$, то в графе $G$ существует совершенное паросочетание.*

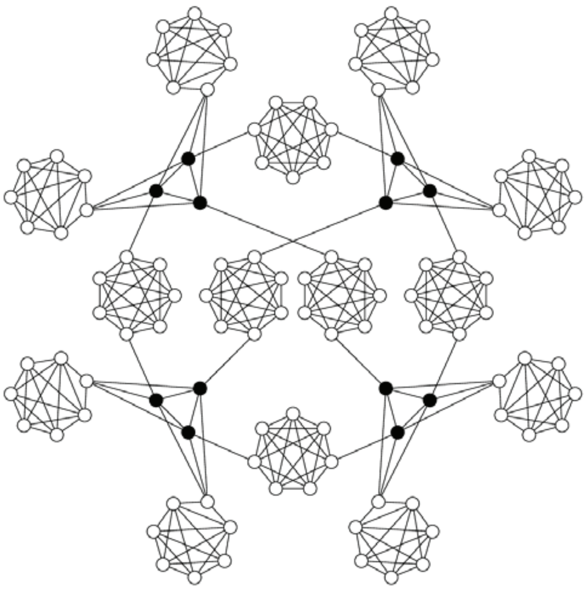

Рис. 2. Реберно 2-связный {5, 6}-регулярный $K_{1,4}$-ограниченный граф порядка 110, не содержащий совершенного паросочетания

Fig. 2. 2-edge connected {5, 6}-regular $K_{1,4}$-restricted graph of order 110 without a perfect matching

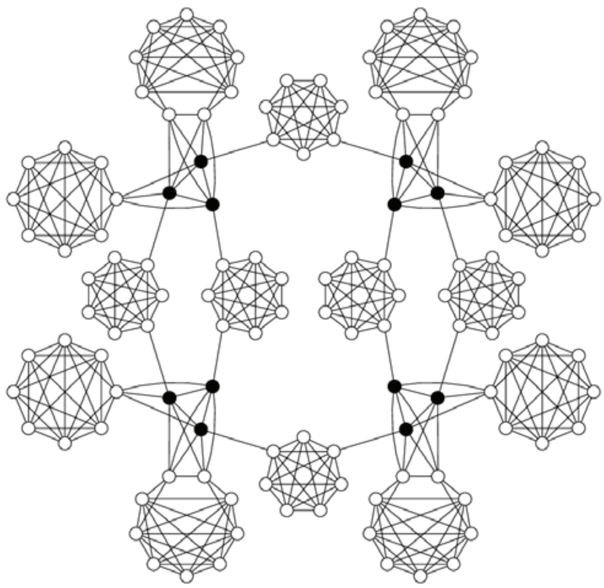

Рис. 3. Реберно 2-связный {6, 7}-регулярный сильно $K_{1,5}$-ограниченный граф порядка 122, не содержащий совершенного паросочетания

Fig. 3. 2-edge connected {6, 7}-regular strongly $K_{1,5}$-restricted graph of order 122 without a perfect matching

Из теорем 6 и 7 получается любопытное следствие.

С л е д с т в и е 1. *Для любого $r \neq 4$ в каждом реберно 2-связном $r$-регулярном $K_{1,4}$-ограниченном графе четного порядка существует совершенное паросочетание.*

Как показывает пример графа, приведенного на рис. 1, условие $r \neq 4$ в этом следствии является обязательным. Также условия теорем 6 и 7 неулучшаемы в том смысле, что существуют реберно 2-связные 4-регулярный и {5, 6}-регулярный $K_{1,4}$-ограниченные графы, не содержащие совершенного паросочетания (рис. 1 и 2 соответственно). Кроме того, условие $K_{1,4}$-ограниченности в теореме 7 нельзя заменить на условие сильной $K_{1,5}$-ограниченности, поскольку существует реберно 2-связный {6, 7}-регулярный сильно $K_{1,5}$-ограниченный граф, не содержащий совершенного паросочетания (рис. 3). Тем не менее, если поднять ограничение снизу на степени вершин до семи, то такое ослабление условия $K_{1,4}$-ограниченности графа становится возможным.

Т е о р е м а 8. *Пусть $G$ – реберно 2-связный сильно $K_{1,5}$-ограниченный граф четного порядка. Если $\delta(G) \geq 7$, то в графе $G$ существует совершенное паросочетание.*

Как показывает следующая теорема, ослабить условие $K_{1,4}$-ограниченности графа в теореме 7 до условия $K_{1,5}$-ограниченности или сильной $K_{1,6}$-ограниченности не представляется возможным ни при каком ограничении снизу на степени вершин.

Т е о р е м а 9. *Для любого целого числа $d$ существует 2-связный $K_{1,5}$-ограниченный сильно $K_{1,6}$-ограниченный граф четного порядка, степени вершин которого не меньше $d$, не содержащий совершенного паросочетания.*

Возможно, добиться описанного выше ослабления условия $K_{1,4}$-ограниченности удастся за счет усиления условия связности графа до 3-связности (вершинной или реберной). Тем не менее, как показывает следующая теорема, при фиксированном ограничении на число вершинной связности ослабление условия $K_{1,4}$-ограниченности графа в теореме 7 за счет усиления ограничения снизу на степени вершин не может осуществляться сколь угодно большое число раз.

Т е о р е м а 10. *Для любого положительного целого числа $k$ существует целое число $p = p(k) \geq 3$, при котором для любого целого числа $d$ существует $k$-связный сильно $K_{1,p}$-ограниченный граф четного порядка, степени вершин которого не меньше $d$, не содержащий совершенного паросочетания.*

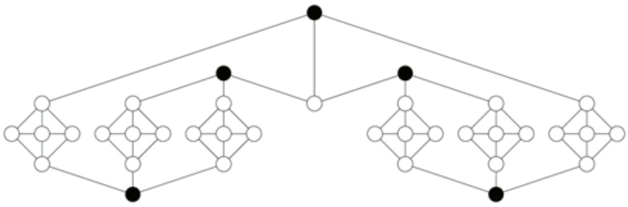

Рис. 4. 2-связный {3, 4}-регулярный $K_{1,4}$-ограниченный граф порядка 36, не содержащий совершенного паросочетания

Fig. 4. 2-connected {3, 4}-regular $K_{1,4}$-restricted graph of order 36 without a perfect matching

Замена в теореме 7 условия реберной 2-связности на условие (вершинной) 2-связности позволяет понизить минимальную степень вершин, достаточную для существования в графе совершенного паросочетания.

Т е о р е м а 11. *Пусть $G$ – 2-связный $K_{1,4}$-ограниченный граф четного порядка. Если $\delta(G) \geq 4$, то в графе $G$ существует совершенное паросочетание.*

Из теорем 6 и 11 получаем следствие.

С л е д с т в и е 2. *В любом 2-связном $r$-регулярном $K_{1,4}$-ограниченном графе четного порядка существует совершенное паросочетание.*

Отметим следующий факт. Всякий 2-связный 3-регулярный (а значит, $K_{1,4}$-ограниченный) граф, как и всякий 2-связный 4-регулярный $K_{1,4}$-ограниченный граф четного порядка, содержит совершенное паросочетание. Тем не менее, существует 2-связный {3, 4}-регулярный $K_{1,4}$-ограниченный граф четного порядка, не содержащий совершенного паросочетания (рис. 4).

Результат теоремы 11 успешно переносится на графы нечетного порядка следующим образом.

Т е о р е м а 12. *Пусть $G$ – 2-связный $K_{1,4}$-ограниченный граф нечетного порядка. Если $\delta(G) \geq 4$, то граф $G$ является факторно-критическим.*

Заметим, что условие $K_{1,p}$-ограниченности (сильной $K_{1,p}$-ограниченности) является требованием только к подграфам, порожденным окружениями вершин степени не меньше $p$. Поэтому в теоремах 11 и 12 ограничение снизу на степени вершин «приводит в действие» условие $K_{1,4}$-ограниченности.

В заключение отметим, что перенести результат теорем 5 и 7 на графы нечетного порядка подобно переходу от теоремы 11 к теореме 12 не представляется возможным ввиду следующего утверждения.

Т е о р е м а 13. *Для любого положительного целого числа $k$ существует реберно $k$-связный $K_{1,3}$-свободный не факторно-критический граф нечетного порядка, степени всех вершин которого не меньше $k + 1$.*

**Доказательства и схемы доказательств.** В этом разделе приведем доказательства теорем 1 и 5–13, некоторые в виде схем.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Пусть граф $G$ является сильно $K_{1,p}$-ограниченным. Рассмотрим подграф $H$ графа $G$, порожденный множеством $\{v_1, v_2, \ldots, v_{p+1}\}$ вершин, смежных с произвольной вершиной $u \in V(G)$. Предположим, что граф $H$ содержит ровно $k$ ребер. Рассмотрим в графе $H$ вершину $v_i$ максимальной степени. Тогда $\deg_H v_i \geq \left\lceil \frac{2k}{p+1} \right\rceil$. В силу свойства сильной $K_{1,p}$-ограниченности графа $G$ число ребер в графе $H - \{v_i\}$ не меньше $\left\lfloor \frac{(p-1)^2}{4} \right\rfloor$. Значит,

$$k \geq \left\lceil \frac{2k}{p+1} \right\rceil + \left\lfloor \frac{(p-1)^2}{4} \right\rfloor \geq \frac{2k}{p+1} + \frac{(p-1)^2-1}{4},$$

откуда получаем, что

$$k \geq \frac{(p-1)^2-1}{4}\frac{p+1}{p-1} = \frac{p(p-2)(p+1)}{4(p-1)} = \frac{p^2}{4} - \frac{2p}{4(p-1)} > \left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor - 1,$$

т. е. $k \geq \left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor$, а это свидетельствует о сильной $K_{1,p+1}$-ограниченности графа $G$. Остается заметить, что граф $K_{1,p}$ является сильно $K_{1,p+1}$-ограниченным, но не является сильно $K_{1,p}$-ограниченным. Теорема доказана.

Легко видеть, что для произвольного графа $G$ и любого подмножества $S \subseteq V(G)$ выполняется следующее свойство: $c_o(G - S) - |S| \equiv |G| \pmod 2$. Отсюда следует, что $c_o(G - S) \equiv |S| \pmod 2$, если

$|G|$ – четное число, и $c_o(G - S) \equiv |S| + 1 \pmod 2$ в противном случае. В дальнейшем будем использовать эти простые свойства, не ссылаясь на них.

Прежде чем перейти к обоснованию теорем 5–13, установим справедливость двух вспомогательных утверждений.

Л е м м а 1. *Пусть связный граф $G$ четного порядка не содержит совершенного паросочетания. Тогда существует непустое подмножество $S \subseteq V(G)$ вершин графа $G$, обладающее следующими свойствами: 1) $c_o(G - S) > |S|$; 2) множество $S$ минимально по включению среди множеств, обладающих свойством 1; 3) каждая вершина из $S$ смежна с вершинами не менее чем трех компонент нечетного порядка графа $G - S$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пустое множество не обладает свойством 1, поскольку граф $G$ связен, а его порядок четный. Существование множества $S \subseteq V(G)$, обладающего свойством 1, обеспечено теоремой 3. Более того, так как граф $G$ имеет четный порядок, то $c_o(G - S) \geq |S| + 2$. Заметим, что если $|S| = 1$, то множество $S$ обладает свойством 2, а также выполняется неравенство $c_o(G - S) \geq 3$ и, следовательно, множество $S$ обладает свойством 3. Поэтому далее будем считать, что $|S| \geq 2$.

Рассмотрим минимальное по включению множество $S$, обладающее свойством 1, и покажем, что $S$ также обладает свойством 3. Предположим, что существует вершина $v \in S$, смежная с вершинами не более чем двух компонент нечетного порядка графа $G - S$. Положим $S^- = S \setminus \{v\}$. Тогда, как нетрудно видеть, $c_o(G - S^-) \geq c_o(G - S) - 2$. Отсюда, учитывая $|S^-| = |S| - 1$, получаем неравенство $c_o(G - S^-) - |S^-| \geq c_o(G - S) - |S| - 1$. Из этого неравенства и доказанного выше соотношения $c_o(G - S) - |S| \geq 2$ следует, что $c_o(G - S^-) > |S^-|$, т. е. для непустого собственного подмножества $S^- \subset S$ выполняется свойство 1. Но это противоречит минимальности множества $S$ относительно свойства 1. Следовательно, вершина $v$ смежна с вершинами не менее чем трех компонент нечетного порядка графа $G - S$. Лемма доказана.

Л е м м а 2. *Пусть связный $K_{1,4}$-ограниченный граф $G$ четного порядка не содержит совершенного паросочетания. Тогда существует непустое подмножество $S \subseteq V(G)$ вершин графа $G$, обладающее следующими свойствами: 1) $c_o(G - S) > |S|$; 2) множество $S$ минимально по включению среди множеств, обладающих свойством 1; 3) каждая вершина из $S$ смежна ровно с тремя вершинами из $V(G) \setminus S$, причем эти три вершины лежат в попарно различных компонентах нечетного порядка графа $G - S$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольное множество $S \subseteq V(G)$, содержащее вершину $v \in S$, смежную с вершинами не менее чем трех компонент графа $G - S$. Пусть $v \sim \{a, b, c\}$, где $a$, $b$ и $c$ принадлежат различным компонентам графа $G - S$. Предположим, что вершина $v$ смежна еще с вершиной $d \in V(G) \setminus S$, отличной от $a$, $b$ и $c$. Тогда $d$ смежна не более, чем с одной из вершин множества $\{a, b, c\}$. Следовательно, число ребер подграфа $G(\{v, a, b, c, d\})$ не превосходит пяти, что противоречит свойству $K_{1,4}$-ограниченности графа $G$. Таким образом, для $K_{1,4}$-ограниченного графа $G$ непустое множество $S$ из леммы 1 обладает свойствами 1–3 настоящей леммы. Лемма доказана.

Теперь приступим к доказательству теорем 5–13.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 5. Предположим, что граф $G$ не содержит совершенного паросочетания. Рассмотрим непустое множество $S \subseteq V(G)$, обладающее свойствами 1–3 из леммы 2. Поскольку каждая вершина $v \in S$ смежна ровно с тремя вершинами из множества $V(G) \setminus S$, то число ребер с одним концом в $S$, а другим – в $V(G) \setminus S$ равно $3|S|$. С другой стороны, указанные три вершины, смежные с $v$, лежат в попарно различных компонентах нечетного порядка графа $G - S$. Отсюда с учетом неравенства $c_o(G - S) > |S|$ получаем, что вершинам хотя бы одной из компонент $H$ нечетного порядка графа $G - S$ инцидентно меньше трех ребер с одним концом в $S$, а другим – в $V(H)$. Но это противоречит условию реберной 3-связности графа $G$. Полученное противоречие доказывает, что граф $G$ содержит совершенное паросочетание. Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 6. Поскольку степень каждой вершины графа $G$ нечетна, то его порядок $|G|$ – четное число. Предположим, что граф $G$ не содержит совершенного паросочетания. Рассмотрим непустое множество $S \subseteq V(G)$, обладающее свойствами 1–3 из леммы 2. Пусть $H$ – произвольная компонента нечетного порядка графа $G - S$. Тогда число $m_H$ ребер графа $G$ с одним концом во множестве $S$, а другим – во множестве $V(H)$, является нечетным. Этот факт вытекает из нечетности степеней вершин графа $G$, нечетности порядка $|H|$ и очевидного равенства $\sum_{v\in V(H)}\deg_G v - 2|E(H)| = m_H$. Отсюда и из условия реберной 2-связности графа $G$ получаем, что $m_H \geq 3$. С другой стороны, согласно лемме 2 каждая вершина из $S$ смежна ровно с тремя вершинами из $V(G) \setminus S$, причем эти три вершины лежат в попарно различных компонентах нечетного порядка графа $G - S$. Следовательно, $3|S| = \sum_{H_i} m_{H_i}$, где суммирование производится по всем компонентам $H_i$ нечетного порядка графа $G - S$. Отсюда, учитывая, что $m_{H_i} \geq 3$, приходим к противоречию с неравенством $c_o(G - S) > |S|$. Значит, в графе $G$ существует совершенное паросочетание. Теорема доказана.

Для упрощения дальнейшего изложения введем дополнительные определения и докажем еще одну лемму. Будем считать, что граф $G$ и подмножество $S \subseteq V(G)$ его вершин зафиксированы. Обозначим через $\mathcal{C}_S$ множество всех компонент графа $G - S$, а через $C_v$ – компоненту из множества $\mathcal{C}_S$, содержащую вершину $v \in V(G) \setminus S$. Зафиксируем подмножество $T \subseteq S$ и назовем весом компоненты $H \in \mathcal{C}_S$ относительно подмножества $T$ число

$$w_T(H) = \min\left\{1, \frac{1}{2}\left|\{(u,v) \in T \times V(H) \mid u \sim v\}\right|\right\}.$$

Таким образом, по определению числа $w_T(H)$ имеем $w_T(H) \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. При этом $w_T(H) = 0$, если $T \nsim V(H)$, $w_T(H) = \frac{1}{2}$, если в графе $G$ между вершинами множества $T$ и вершинами множества $V(H)$ есть ровно одно ребро, и $w_T(H) = 1$, если в графе $G$ между вершинами множества $T$ и вершинами множества $V(H)$ есть хотя бы два ребра.

Весом подмножества $T \subseteq S$ назовем число $W(T)$, равное суммарному весу компонент $H \in \mathcal{C}_S$ относительно $T$, т. е. $W(T) = \sum_{H\in\mathcal{C}_S} w_T(H)$.

Для подмножества $U \subseteq V(G) \setminus S$ через $m(T, \overline{U})$ обозначим число ребер с одним концом в $T \subseteq S$, а другим – в $V(G) \setminus (S \cup \bigcup_{v\in U} V(C_v))$. Тогда, как легко видеть,

$$W(T) = \sum_{H\in\mathcal{C}_S} w_T(H) \leq \sum_{v\in U} w_T(C_v) + \tfrac{1}{2} m(T, \overline{U}).$$

Следовательно, с учетом неравенства $w_T(C_v) \leq 1$ получаем, что

$$W(T) \leq |U| + \tfrac{1}{2} m(T, \overline{U}). \tag{1}$$

Л е м м а 3. *Пусть $G$ – реберно 2-связный граф четного порядка и $S \subseteq V(G)$ – произвольное непустое подмножество его вершин, для которого $c_o(G - S) > |S|$. Пусть далее $S_1, S_2, \ldots, S_k$ – все области связности графа $G(S)$. Тогда найдется хотя бы одна область $S_i \subseteq S$, $1 \leq i \leq k$, для которой выполняется неравенство*

$$W(S_i) > |S_i|. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что для каждой области связности $S_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, графа $G(S)$ выполняется неравенство $W(S_i) \leq |S_i|$. Тогда с учетом неравенства $\sum_{i=1}^{k} w_{S_i}(H) \geq 1$ для $H \in \mathcal{C}_S$, верного в силу реберной 2-связности графа $G$, имеем

$$|S| = \sum_{i=1}^{k} |S_i| \geq \sum_{i=1}^{k} W(S_i) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{H\in\mathcal{C}_S} w_{S_i}(H) = \sum_{H\in\mathcal{C}_S} \sum_{i=1}^{k} w_{S_i}(H) \geq \sum_{H\in\mathcal{C}_S} 1 = |\mathcal{C}_S| = c_o(G - S).$$

Полученное неравенство $|S| \geq c_o(G - S)$ противоречит условию леммы. Таким образом, исходное предположение неверно, т. е. найдется хотя бы одна область $S_i \subseteq S$, $1 \leq i \leq k$, для которой $W(S_i) > |S_i|$. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 7. Предположим, что граф $G$ не содержит совершенного паросочетания. Зафиксируем непустое множество $S$, обладающее свойствами 1–3 из леммы 2. Согласно свойству 3 каждая вершина из $S$ смежна ровно с тремя вершинами из $V(G) \setminus S$, которые, в свою очередь, лежат в трех попарно различных компонентах нечетного порядка графа $G - S$.

Отсюда с учетом $K_{1,4}$-ограниченности графа $G$ и условия $\deg_G v \geq 6$, верного для каждой вершины $v$ графа $G$, получаем следующие дополнительные свойства вершин множества $S$: 4) если вершины $u, v \in S$ смежны в графе $G$ и $v \sim \{a, b, c\}$, где $a, b, c \in V(G) \setminus S$, то вершина $u$ смежна хотя бы с двумя вершинами из множества $\{a, b, c\}$; 5) каждая вершина множества $S$ смежна хотя бы с тремя вершинами из $S$. Будем использовать эти свойства множества $S$ на протяжении всего доказательства теоремы, порой явно не ссылаясь на них.

Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_k$ – все области связности графа $G(S)$.

У т в е р ж д е н и е 1. *Пусть $S_j$ – произвольная область связности графа $G(S)$, а $T$ – любое собственное подмножество множества $S_j$, порождающее связный подграф $G(T)$. Если $|T| \geq 2$, то существует множество $T^+$, для которого $T \subset T^+ \subseteq S_j$ и $W(T^+) - |T^+| \leq W(T) - |T|$, а порожденный подграф $G(T^+)$ связен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим две смежные вершины $v \in T$ и $x \in S_j \setminus T$. Положим $T^+ = T \cup \{ x \}$. Тогда подграф $G(T^+)$ – связный. Пусть $v$ смежна также с вершинами $a, b, c \in V(G) \setminus S$. Поскольку подграф $G(T)$ связный и $|T| \geq 2$, то существует вершина $u \in T$, смежная с вершиной $v$ и, следовательно, хотя бы с двумя вершинами из множества $\{a, b, c\}$. Не нарушая общности, будем считать, что $u \sim \{a, b\}$. Отсюда получаем $w_T(C_a) = w_T(C_b) = 1$, а значит, и $w_{T^+}(C_a) = w_{T^+}(C_b) = 1$.

Вершина $x$, будучи смежной с вершиной $v$, также смежна хотя бы с двумя вершинами из множества $\{a, b, c\}$. Обозначим через $d$ третью вершину из $V(G) \setminus S$, смежную с $x$ (возможно, $d \in V(C_z)$ для некоторой $z \in \{a, b, c\}$). Тогда, как нетрудно видеть, выполняются следующие неравенства:

$$w_{T^+}(C_c) \leq w_T(C_c) + \frac{1}{2},\ w_{T^+}(C_d) \leq w_T(C_d) + \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Веса всех остальных компонент графа $G - S$ относительно множеств $T$ и $T^+$ совпадают, т. е. $w_T(H) = w_{T^+}(H)$ для любой компоненты $H \in C_S \setminus \{C_c, C_d\}$. Отсюда с учетом очевидного соотношения

$$W(T^+) = W(T) + \sum_{H \in C_S} (w_{T^+}(H) - w_T(H))$$

приходим к неравенству

$$W(T^+) \leq W(T) + \sum_{z \in \{c,d\}} (w_{T^+}(C_z) - w_T(C_z)),$$

которое будет строгим, если $c \neq d$, $C_c = C_d$ и $w_{T^+}(C_c) > w_T(C_c)$.

Используя полученное неравенство вместе с (3), имеем

$$W(T^+) - \left|T^+\right| \leq W(T) + \sum_{z \in \{c,d\}} (w_{T^+}(C_z) - w_T(C_z)) - \left|T^+\right| \leq W(T) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - (\left|T\right| + 1) = W(T) - \left|T\right|,$$

что и доказывает утверждение.

Рассмотрим любые две смежные вершины $u, v \in S$ и покажем, что существуют ровно две вершины из $V(G) \setminus S$, одновременно смежные с $u$ и $v$. Пусть $v$ смежна с вершинами $a, b, c \in V(G) \setminus S$. В силу свойства 4 вершина $u$ смежна хотя бы с двумя вершинами из множества $\{a, b, c\}$. Предположим, что $u \sim \{a, b, c\}$. В силу свойства 5 подмножество $S^- = S \setminus \{u, v\}$ непусто. Подграф $G - S^-$ получается из подграфа $G - S$ добавлением вершин $u$ и $v$, а также ребер $ua$, $ub$, $uc$, $va$, $vb$, $vc$ и $uv$. При этом компоненты $C_a$, $C_b$ и $C_c$ нечетного порядка вместе с вершинами $u$ и $v$ объединяются в одну компоненту нечетного порядка графа $G - S^-$, а все остальные компоненты графа $G - S$ становятся компонентами графа $G - S^-$. Значит, $c_o(G - S^-) = c_o(G - S) - 3 + 1 = c_o(G - S) - 2$ и $|S^-| = |S \setminus \{u, v\}| = |S| - 2$. Тогда в силу свойства 1 для множества $S$ это же свойство выполняется и для множества $S^-$, что противоречит свойству 2 – минимальности множества $S$ по включению. Следовательно, для любых двух смежных вершин $u, v \in S$ существуют ровно две вершины из $V(G) \setminus S$, одновременно смежные с $u$ и $v$.

В силу леммы 3 существует область $S_i \subseteq S$, $1 \leq i \leq k$, для которой выполняется (2). Для дальнейшего изложения доказательства зафиксируем эту область $S_i$.

Из утверждения 1 следует, что если подмножество $T$ множества $S_i$ порождает связный подграф $G(T)$ и $|T| \geq 2$, то верно

$$W(T) > |T|, \tag{4}$$

поскольку в противном случае, итеративно применяя утверждение 1 для все большего надмножества множества $T$, получим противоречие с (2) для области $S_i$.

Допустим, что существует вершина $v \in S_i$ степени не менее семи, смежная с вершинами $a, b, c \in V(G) \setminus S$. Пусть множество $T \subseteq S_i$ состоит из вершины $v$ и всех смежных с ней вершин из области $S_i$, тогда $|T| \geq 5$. Согласно доказанному выше каждая вершина из множества $T \setminus \{v\}$ смежна ровно с двумя вершинами из множества $\{a, b, c\}$ и, следовательно, ровно с одной вершиной из множества $V(G) \setminus (S \cup \{a, b, c\})$. Применяя (1) при $U = \{a, b, c\}$, получаем, что

$$W(T) \leq |U| + \frac{1}{2} m(T, \overline{U}) \leq 3 + \frac{|T|-1}{2} = \frac{5}{2} + \frac{|T|}{2} \leq |T|,$$

а это противоречит (4). Значит, все вершины из области $S_i$ имеют степень шесть в графе $G$, т. е. каждая из них смежна ровно с тремя вершинами из $S_i$.

Пусть существуют две смежные вершины $u, v \in S_i$, не смежные одновременно ни с одной вершиной из области $S_i$. Пусть $T^-$ – множество вершин из $S_i$, смежных с вершиной $u$ или вершиной $v$ и отличных от $u$ и $v$. Тогда $|T^-| = 4$. Пусть вершина $v$ смежна с вершинами $a, b, c \in V(G) \setminus S$. Тогда вершина $u$ смежна с двумя из этих трех вершин и вершиной $d \in V(G) \setminus (S \cup \{a, b, c\})$. Каждая вершина из множества $T^-$ смежна хотя бы с двумя вершинами из множества $\{a, b, c, d\}$ и не более чем с одной вершиной из множества $V(G) \setminus (S \cup \{a, b, c, d\})$. Из (1) при $T = T^- \cup \{u, v\}$ и $U = \{a, b, c, d\}$ получаем, что

$$W(T) \leq |U| + \frac{1}{2} m(T, \overline{U}) \leq 4 + \frac{|T^-|}{2} = 6 = |T|,$$

а это противоречит (4). Следовательно, любые две смежные вершины из области $S_i$ одновременно смежны хотя бы с одной вершиной из $S_i$. Рассмотрим тройку попарно смежных вершин $u, v, x \in S_i$. Существует еще ровно одна вершина $y \in S_i \setminus \{u, x\}$, смежная с вершиной $v$. Вершина $y$ смежна хотя бы с одной из вершин $u$ и $x$, иначе смежные вершины $v$ и $y$ не имеют общих соседей в $S_i$. Не нарушая общности, будем считать, что $y \sim u$. Если вершина $x$ не смежна с вершиной $y$, то она смежна с вершиной $z \in S_i \setminus \{u, v, y\}$. Тогда вершина $z$ должна быть смежна хотя бы с одной из вершин $u$ и $v$. Последнее невозможно, поскольку каждая из вершин $u$ и $v$ уже смежна с тремя вершинами из области $S_i$. Значит, вершины $x$ и $y$ смежны.

Пусть вершина $v$ смежна с вершинами $a, b, c \in V(G) \setminus S$. Тогда вершина $u$ смежна ровно с двумя вершинами из множества $\{a, b, c\}$ и вершиной $d \in V(G) \setminus (S \cup \{a, b, c\})$. Не нарушая общности, будем считать, что $u \sim \{a, b\}$. Вершина $x$ также смежна ровно с двумя вершинами из множества $\{a, b, c\}$ и ровно с двумя вершинами из множества $\{a, b, d\}$. Легко видеть, что возможны три варианта: $x \sim \{a, b, e\}$, где $e \in V(G) \setminus (S \cup \{a, b, c, d\})$, $x \sim \{a, c, d\}$ и $x \sim \{b, c, d\}$. Последние два варианта симметричны относительно вершин $a$ и $b$, поэтому рассмотрим только один из них.

Если $x \sim \{a, b, e\}$, то вершина $y$ смежна ровно с двумя вершинами из множества $\{a, b, c\}$, ровно с двумя вершинами из множества $\{a, b, d\}$ и ровно с двумя вершинами из множества $\{a, b, e\}$. Легко видеть, что тогда $y \sim \{a, b\}$. Из (1) при $T = \{u, v, x, y\}$ и $U = \{a, b\}$ получаем, что

$$W(T) \leq |U| + \frac{1}{2} m(T, \overline{U}) \leq 2 + \frac{4}{2} = 4 = |T|,$$

а это противоречит (4).

Пусть $x \sim \{a, c, d\}$. В этом случае вершина $y$ смежна ровно с двумя вершинами из множества $\{a, b, c\}$, ровно с двумя вершинами из множества $\{a, b, d\}$ и ровно с двумя вершинами из множества $\{a, c, d\}$. Легко видеть, что тогда $y \sim \{b, c, d\}$. Из (1) при $T = \{u, v, x, y\}$ и $U = \{a, b, c, d\}$ получаем, что

$$W(T) \leq |U| + \frac{1}{2} m(T, \overline{U}) \leq 4 + \frac{0}{2} = 4 = |T|.$$

Из полученного противоречия с (4) следует, что исходное предположение об отсутствии в графе $G$ совершенного паросочетания неверно. Теорема доказана.

С х е м а  д о к а з а т е л ь с т в а  т е о р е м ы 8. Предположим, что граф $G$ не содержит совершенного паросочетания. Зафиксируем непустое множество $S$, обладающее свойствами 1–3 из леммы 1. Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_k$ – все области связности графа $G(S)$. В силу леммы 3 существует область $S_i \subseteq S$, $1 \le i \le k$, для которой выполняется (2). Для дальнейшего изложения доказательства зафиксируем эту область $S_i$.

Для доказательства теоремы можно последовательно сделать следующие выводы. Каждая вершина из $S$ смежна с тремя или четырьмя вершинами из $V(G) \setminus S$. Также никакая вершина из $S_i$ не может быть смежна с четырьмя попарно несмежными вершинами из $V(G) \setminus S$. Для любых двух смежных вершин $u, v \in S_i$ существует не более двух общих компонент, т. е. компонент нечетного порядка из $C_S$, каждая из которых содержит как вершину, смежную с $u$, так и вершину, смежную с $v$. Если вершина из $S_i$ смежна с четырьмя вершинами из $V(G) \setminus S$, то две из них смежны друг с другом и со всеми вершинами из $S_i$. Этот случай разбивается на три подслучая, в каждом из которых обнаруживается противоречие. Значит, каждая вершина из $S_i$ смежна ровно с тремя вершинами из $V(G) \setminus S$. Для любых двух смежных вершин $u, v \in S_i$ существует вершина из $V(G) \setminus S$, смежная с ними обеими. Тем не менее, число таких вершин не может быть равно ни одному, ни двум. Наличие же трех таких вершин противоречит выводу о числе общих для $u$ и $v$ компонент. Таким образом, совокупность этих результатов противоречит предположению об отсутствии совершенного паросочетания в графе $G$. Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о  т е о р е м ы  9. Для каждого четного числа $\ell \ge 4$ построим граф $G_\ell$ следующим образом. Рассмотрим $2\ell - 4$ копии $C_0, C_1, \ldots, C_{2\ell-5}$ полного графа $K_{\ell+1}$. В каждом таком графе $C_i$ зафиксируем две вершины $u_{i,0}$ и $u_{i,1}$ при $i = 0, 1, \ldots, 2\ell - 5$. Далее рассмотрим две копии $C'_0$ и $C'_1$ полного графа $K_{\ell-3}$, где $V(C'_j) = \{v_{j,0}, v_{j,1}, \ldots, v_{j,\ell-4}\}$ при $j = 0, 1$. Теперь построим граф $G_\ell$, добавив к дизъюнктному объединению $\bigcup_{i=0}^{2\ell-5} C_i \cup \bigcup_{j=0}^{1} C'_j$ рассматриваемых полных графов множество ребер вида

$$\{u_{2k,j}v_{j,k},\ u_{2k+1,j}v_{j,k},\ u_{2\ell-6,j}v_{0,k},\ u_{2\ell-5,j}v_{1,k}\ \forall\, j = 0, 1\ \forall\, k = 0, 1, \ldots, \ell - 4\}.$$

Нетрудно проверить, что $G_\ell$ является 2-связным $K_{1,5}$-ограниченным сильно $K_{1,6}$-ограниченным графом порядка $2\ell^2 - 10$ с $\delta(G_\ell) = \ell$. Кроме того, при удалении из графа $G_\ell$ множества $V(C'_0 \cup C'_1)$ мощности $2\ell - 6$ получается граф, содержащий $2\ell - 4$ компоненты связности нечетного порядка, что доказывает, согласно теореме 3, отсутствие совершенного паросочетания в графе $G_\ell$. Следовательно, для заданного целого числа $d$ условию теоремы удовлетворяет граф $G_\ell$ при $\ell = \max\left\{4, \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil\right\}$. Теорема доказана.

С х е м а  д о к а з а т е л ь с т в а  т е о р е м ы 10. Далее будем полагать, что $d \ge k$ и число $d$ четное. Это не нарушает общности, поскольку $d$ является ограничением снизу на степени вершин графа.

Для начала формально опишем графы $G_{k,d}$, показывающие справедливость утверждения теоремы. Рассмотрим $2d + 6$ копий $C_0, C_1, \ldots, C_{2d+5}$ полного графа $K_{d+1}$, где $V(C_i) = \{v_{i,0}, v_{i,1}, \ldots, v_{i,d}\}$ при $i = 0, 1, \ldots, 2d + 5$. Пусть $V(G_{k,d}) = \bigcup_{i=0}^{2d+5} V(C_i)$ и

$$E(G_{k,d}) = \{v_{i,s}v_{i,t}\ \forall\, i = 0, 1, \ldots, 2d + 5\ \forall\, 0 \le s < t \le d\} \cup$$

$$\cup \{v_{2d+2+\ell,s}v_{2d+4+\ell,t}\ \forall\, \ell = 0, 1\ \forall\, s = 0, 1, \ldots, d\ \forall\, t = 0, 1, \ldots, d\} \cup$$

$$\cup \{v_{2d+4+\lfloor t/(kd+k)\rfloor,\, t \bmod (d+1)}v_{t \bmod (2d+2),\, \lfloor t/(2d+2)\rfloor}\ \forall\, t = 0, 1, \ldots, k(2d + 2) - 1\}.$$

Опишем теперь эти же графы менее формально и вместе с тем отметим свойства полученных графов. Граф $G_{k,d}$ получается добавлением ребер к дизъюнктному объединению $2d + 6$ полных графов порядка $d + 1$ каждый. Таким образом, уже выполнены ограничения на степени вершин и четность порядка графа. Кроме того, $V(C_{2d+2}) \sim V(C_{2d+4})$ и $V(C_{2d+3}) \sim V(C_{2d+5})$. Также каждая вершина из $V(C_{2d+4} \cup C_{2d+5})$ смежна ровно с $k$ вершинами из $V\left(\bigcup_{i=0}^{2d+1} C_i\right)$, но не более чем с одной вершиной из каждой клики $V(C_i)$. При этом для каждой клики $V(C_i)$, $i = 0, 1, \ldots, 2d + 1$, всем ее вершинам в совокупности инцидентны ровно $k$ ребер со вторым концом не из $V(C_i)$, причем эти $k$ ребер попарно не смежны. Нетрудно показать, что из описанной структуры графа $G_{k,d}$ следует сильная $K_{1,p}$-ограниченность этого графа при $p = 4k + 1$, а по теореме Х. Уитни [11, с. 147] – $k$-связность этого графа.

Легко видеть, что после удаления из графа $G_{k,d}$ множества $V(C_{2d+4} \cup C_{2d+5})$ мощности $2d + 2$ каждая из клик $V(C_0)$, $V(C_1)$, …, $V(C_{2d+3})$ порождает компоненту связности нечетного порядка. Значит, в силу теоремы 3 граф $G_{k,d}$ не содержит совершенного паросочетания. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 11. Допустим, что граф $G$ не содержит совершенного паросочетания. Рассмотрим непустое множество $S$, обладающее свойствами 1–3 из леммы 2. Степень каждой вершины графа $G$ не меньше четырех, значит, у каждой вершины множества $S$ есть хотя бы один сосед из $S$. Пусть вершина $v \in S$ смежна с вершинами $a, b, c \in V(G) \setminus S$, а также вершиной $u \in S$. Тогда, исходя из условия $K_{1,4}$-ограниченности графа $G$ и попарной несмежности вершин $a$, $b$ и $c$, заключаем, что вершина $u$ смежна хотя бы с двумя вершинами из множества $\{a, b, c\}$.

Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_k$ – все области связности графа $G(S)$. Одновершинные компоненты будем называть тривиальными. Заметим, что, исходя из условия вершинной 2-связности графа $G$, в каждой нетривиальной компоненте графа $G - S$ есть хотя бы две вершины, каждой из которых инцидентно хотя бы одно ребро со вторым концом из множества $S$. С другой стороны, исходя из условия $\delta(G) \geq 4$, для каждой тривиальной компоненты графа $G - S$ ее единственная вершина инцидентна хотя бы четырем таким ребрам.

В связи с этим переопределим понятие веса компоненты $H$ графа $G - S$ относительно подмножества $T$ множества $S$ следующим образом:

$$w_T(H) = \begin{cases} \min\left\{1, \dfrac{1}{4}\left|\{(u, v) \in T \times V(H) \mid u \sim v\}\right|\right\}, & \text{если } |V(H)| = 1; \\ \min\left\{1, \dfrac{1}{2}\left|\{v \in V(H) \mid N(v) \bigcap T \neq \varnothing\}\right|\right\}, & \text{если } |V(H)| > 1. \end{cases}$$

Таким образом, каждое ребро, соединяющее вершину тривиальной компоненты $H \in \mathcal{C}_S$ с вершиной множества $T$, добавляет $\dfrac{1}{4}$ к весу $w_T(H)$, а каждая вершина нетривиальной компоненты $F \in \mathcal{C}_S$, смежная хотя бы с одной вершиной из $T$, добавляет $\dfrac{1}{2}$ к весу $w_T(F)$. При этом вес компоненты относительно множества $T$ не превосходит 1. Весом множества $T \subseteq S$ по-прежнему будем называть число $W(T)$, равное сумме весов компонент графа $G - S$ относительно множества $T$: $W(T) = \sum_{H \in \mathcal{C}_S} w_T(H)$. Заметим, что $\sum_{i=1}^{k} w_{S_i}(H) \geq 1$ для $H \in \mathcal{C}_S$, поскольку $\delta(G) \geq 4$ и $G$ – 2-связен. Тогда, повторяя рассуждения из доказательства леммы 3, получаем, что для некоторого $i$, $1 \leq i \leq k$, верно $W(S_i) > |S_i|$. Для дальнейшего изложения доказательства зафиксируем эту область $S_i$.

Утверждение 2. *Пусть $S_j$ – произвольная область связности графа $G(S)$, а $T$ – любое непустое собственное подмножество множества $S_j$. Тогда существует множество $T^+$, для которого $T \subset T^+ \subseteq S_j$ и $W(T^+) - |T^+| \leq W(T) - |T|$.*

Доказательство. Рассмотрим вершину $v \in T$, смежную с вершиной $x \in S_j \setminus T$. Пусть $v$ смежна с вершинами $a$, $b$ и $c$ из $V(G) \setminus S$. Вершина $x$ смежна хотя бы с двумя вершинами из множества $\{a, b, c\}$, исходя из условия $K_{1,4}$-ограниченности графа $G$. Не нарушая общности, $x \sim \{a, b, d\}$, где $d \in V(G) \setminus S$.

Пусть $T^+ = T \cup \{x\}$. Если $C_a \in \mathcal{C}_S$ – тривиальная компонента, то $w_{T^+}(C_a) \leq w_T(C_a) + \dfrac{1}{4}$. В противном случае $w_{T^+}(C_a) = w_T(C_a)$. Аналогично получаем, что $w_{T^+}(C_b) \leq w_T(C_b) + \dfrac{1}{4}$. Учитывая, что $w_{T^+}(C_d) \leq w_T(C_d) + \dfrac{1}{2}$, а веса прочих компонент графа $G - S$ относительно множеств $T$ и $T^+$ совпадают, получаем, что

$$W(T^+)-\left|T^+\right|=W(T)+\sum_{z\in\{a,b,d\}}(w_{T^+}(C_z)-w_T(C_z))-\left|T^+\right|\le W(T)+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-(\left|T\right|+1)=W(T)-\left|T\right|.$$

Таким образом, утверждение доказано.

Рассмотрим две смежные вершины $u, v \in S_i$. Пусть $a, b, c, d \in V(G) \setminus S$, $u \sim \{a, b, c\}$, $v \sim \{a, b, d\}$. Тогда независимо от того, являются ли компоненты $C_a$, $C_b \in \mathcal{C}_S$ тривиальными, получаем, что $w_{\{u,v\}}(C_a)=w_{\{u,v\}}(C_b)=\frac{1}{2}$, а также $w_{\{u,v\}}(C_c)\le\frac{1}{2}$ и $w_{\{u,v\}}(C_d)\le\frac{1}{2}$. Значит, $W(\{u,v\})\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+$ $+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\ 2=\left|\{u,v\}\right|$. Итеративно применяя утверждение 2 для все большего надмножества множества $T = \{u, v\}$, получим $W(S_i) - |S_i| \le W(\{u, v\}) - |\{u, v\}| \le 0$, что противоречит неравенству $W(S_i) > |S_i|$ для области $S_i$. Значит, граф $G$ содержит совершенное паросочетание. Таким образом, теорема доказана.

Схема доказательства теоремы 12. Здесь мы представим только схему доказательства, следуя которой несложно восстановить его целиком. Предположим, что граф $G$ не является факторно-критическим. Тогда согласно теореме 4 при $s = 1$ существует множество $S$ вершин графа $G$, для которого верно $c_o(G - S) > |S| - 1 \ge 0$. Поскольку $c_o(G - S) \not\equiv |S| \pmod 2$, то $c_o(G - S) > |S|$.

Исходя из условия 2-связности графа $G$ получаем, что $|S| \ge 2$. Повторяя рассуждения из доказательств лемм 1 и 2, получаем, что каждая вершина минимального по включению такого множества $S$ смежна ровно с тремя вершинами графа $G - S$. Далее повторяем рассуждения из доказательства теоремы 11 и приходим к противоречию. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 13. Примером такого графа является граф $G \cong K_1 + 2K_{2\ell+1}$ для любого целого положительного $\ell \ge k / 2$. Действительно, $\delta(G) = 2\ell + 1 \ge k + 1$. Легко видеть, что граф $G$ является реберно $k$-связным и $K_{1,3}$-свободным. Если удалить доминирующую вершину из графа $G$, то граф распадется на две компоненты нечетного порядка, значит, он не является факторно-критическим. Таким образом, теорема доказана.

**Заключение.** В работе установлены новые достаточные условия существования совершенного паросочетания в графах с ограниченной локальной структурой, а также показана неулучшаемость полученных условий. Дальнейший интерес представляет исследование возможности ослабления локальных ограничений, накладываемых на граф для гарантированного наличия в нем совершенного паросочетания, за счет повышения требований к числу вершинной или реберной связности. Например, рассмотрение (реберно) $k$-связных (сильно) $K_{1,p}$-ограниченных графов при $k \ge 3$ и $p \ge 6$.

## Список использованных источников


1. Ловас, Л. Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии / Л. Ловас, М. Пламмер. – М., 1998. – 653 с.

2. Plummer, M. D. Graph factors and factorization: 1985–2003: A survey / M. D. Plummer // Discrete Math. – 2007. – Vol. 307, N 7–8. – P. 791–821. https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.11.059

3. Akiyama, J. Factors and factorizations of graphs. Proof techniques in factor theory / J. Akiyama, M. Kano. – Berlin, 2011. – Vol. 2031. – 353 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-21919-1

4. Yu Q. R. Graph factors and matching extensions / Q. R. Yu, G. Liu. – Berlin, 2009. – 353 p. https://doi.org/10.1007/978-3-540-93952-8

5. Li, R. Hamiltonicity of $\{K_{1,4}, K_{1,4} + e\}$-free graphs / R. Li, R. H. Schelp // Discrete Math. – 2002. – Vol. 245, N 1–3. – P. 195–202. https://doi.org/10.1016/s0012-365x(01)00141-8

6. Li, R. Hamiltonicity of 2-connected $\{K_{1,4}, K_{1,4} + e\}$-free graphs / R. Li // Discrete Math. – 2004. – Vol. 287, N 1–2. – P. 69–76. https://doi.org/10.1016/j.disc.2004.05.014

7. Wang, J. $K_{1,p}$-restricted graphs / J. Wang, Y. Teng // Adv. Math. (China). – 2006. – Vol. 35. – P. 657–662.

8. Wang, J. Fully cycle extendability of $K_{1,4}$-restricted graphs / J. Wang, M. Li // Discrete Math. – 2009. – Vol. 309, N 12. – P. 4011–4016. https://doi.org/10.1016/j.disc.2008.11.035

9. Иржавский, П. А. Полная циклическая расширяемость локально связных $K_{1,4}$-ограниченных графов / П. А. Иржавский, Ю. Л. Орлович // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2012. – Т. 20, № 2. – С. 36–50.

10. Ryjáček, Z. Closure for $\{K_{1,4}, K_{1,4} + e\}$-free graphs / Z. Ryjáček, P. Vrána, Sh. Wang // J. Combin. Theory Ser. B. – 2019. – Vol. 134. – P. 239–263. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2018.06.006

11. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев [и др.]. – М., 1990. – 384 с.

12. Petersen, J. Die Theorie der regulären graphs / J. Petersen // Acta Math. – 1891. – Vol. 15. – P. 193–220. https://doi.org/10.1007/bf02392606

13. Tutte, W. T. The factorization of linear graphs / W. T. Tutte // J. London Math. Soc. – 1947. – Vol. s1–22, N 2. – P. 107–111. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-22.2.107

14. Yu, Q. Characterizations of various matching extensions in graphs / Q. Yu // Australas. J. Comb. – 1993. – Vol. 7. – P. 55–64.

## References

1. Lovász L., Plummer M. D. *Applied problems of graph theory. Theory of matchings in mathematics, physics and chemistry*. Moscow, 1998. 653 p. (in Russian).

2. Plummer M. D. Graph factors and factorization: 1985–2003: A survey. *Discrete Mathematics*, 2007, vol. 307, no. 7–8, pp. 791–821. https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.11.059

3. Akiyama J., Kano M. *Factors and factorizations of graphs. Proof techniques in factor theory. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 2031.* Berlin, 2011. 353 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-21919-1

4. Yu Q. R., Liu G. *Graph factors and matching extensions*. Berlin, 2009. 353 p. https://doi.org/10.1007/978-3-540-93952-8

5. Li R., Schelp R. H. Hamiltonicity of $\{K_{1,4}, K_{1,4} + e\}$-free graphs. *Discrete Mathematics*, 2002, vol. 245, no. 1–3, p. 195–202. https://doi.org/10.1016/s0012-365x(01)00141-8

6. Li R. Hamiltonicity of 2-connected $\{K_{1,4}, K_{1,4} + e\}$-free graphs. *Discrete Mathematics*, 2004, vol. 287, p. 69–76. https://doi.org/10.1016/j.disc.2004.05.014

7. Wang J., Teng Y. $K_{1,p}$-restricted graphs. *Adv. Math.* (*China*), 2006, vol. 35, p. 657–662.

8. Wang J., Li M. Fully cycle extendability of $K_{1,4}$-restricted graphs. *Discrete Mathematics*, 2009, vol. 309, p. 4011–4016. https://doi.org/10.1016/j.disc.2008.11.035

9. Irzhavski P. A., Orlovich Yu. L. Full cycle extendability of locally connected $K_{1,4}$-restricted graphs. *Trudy Instituta matematiki* [*Proceedings of the Institute of Mathematics*], 2012, vol. 20, no. 2, p. 36–50 (in Russian).

10. Ryjáček Z., Vrána P., Wang Sh. Closure for $\{K_{1,4}, K_{1,4} + e\}$-free graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 2019, vol. 134, p. 239–263. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2018.06.006

11. Emelichev V. A., Melnikov O. I., Sarvanov V. I., Tyshkevich R. I. *Lectures on graph theory*. Moscow, 1990. 384 p. (in Russian).

12. Petersen J. Die Theorie der regulären graphs. *Acta Mathematica*, 1891, vol. 15, p. 193–220 (in German). https://doi.org/10.1007/bf02392606

13. Tutte W. T. The factorization of linear graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, 1947, vol. s1–22, no. 2, p. 107–111. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-22.2.107

14. Yu Q. Characterizations of various matching extensions in graphs. *Australasian Journal of Combinatorics,* 1993, vol. 7, p. 55–64.

## Информация об авторах

*Иржавский Павел Александрович* – магистр, ассистент кафедры. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: irzhavski@bsu.by.

*Орлович Юрий Леонидович* – канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: orlovich@bsu.by.

## Information about the authors

*Irzhavski Pavel Aleksandrovich* – Master of philosophy (Physics and Mathematics), Assistant of the Department. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: irzhavski@bsu.by.

*Orlovich Yury Leonidovich* – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate professor, Head of the Department. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: orlovich@bsu.by.