ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 517.977
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-5-526-532

Поступило в редакцию 15.04.2019
Received 15.04.2019

Л. И. Минченко, С. И. Сиротко

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Республика Беларусь

О ЧАСТИЧНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧ ДВУХУРОВНЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ЗАДАЧЕЙ НИЖНЕГО УРОВНЯ, ЛИНЕЙНОЙ ПО ОСНОВНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Аннотация. Рассматриваются свойства обобщенной липшицевости множества решений задачи нижнего уровня в двухуровневой оптимизации. На их основе доказываются достаточные условия частичной устойчивости задач с линейной по основной переменной задачей нижнего уровня.

Ключевые слова: двухуровневое программирование, частичная устойчивость, функция оптимального значения

Для цитирования: Минченко, Л. И. О частичной устойчивости задач двухуровневого программирования с задачей нижнего уровня, линейной по основной переменной / Л. И. Минченко, С. И. Сиротко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 5. – С. 526–532. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-5-526-532

Leonid I. Minchenko, Sergey I. Sirotko

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

ON PARTIAL CALMNESS FOR BILEVEL PROGRAMMING PROBLEMS WITH LOWER-LEVEL PROBLEM LINEAR IN LOWER-LEVEL VARIABLE

(Communicated by Corresponding Member Valentine V. Gorokhovik)

Abstract. In the paper the Lipschitz-like properties of solution mapping of lower-level problems for bilevel programs are studied and sufficient conditions for partial calmness are proved on the basis of these properties.

Keywords: bilevel programming, partial calmness, optimal value function, solution mapping

For citation: Minchenko L. I., Sirotko S. I. On partial calmness for bilevel programming problems with lower-level problem linear in lower-level variable. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 5, pp. 526–532 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-5-526-532

Введение. Задачи двухуровневого программирования [1; 2] возникают при моделировании управления иерархическими системами в социально-экономических и производственных сферах. Одним из подходов к их решению является сведение двухуровневых задач к негладким одноуровневым задачам [3]. Один из достаточно эффективных способов решения последних основывается на так называемой частичной устойчивости (partial calmness) [4] двухуровневой задачи. Таким образом, достаточные условия частичной устойчивости играют в теории двухуровневого программирования весьма важную роль.

Постановка задачи. Пусть $x \in R^n, y \in R^m$. Рассмотрим задачу двухуровневого программирования (ЗДП):

$$G(x, y) \to \min, \ x \in X = \{x \in R^n \,|\, g_j(x) \le 0, \ j \in J\},$$

$$y \in S(x) \triangleq \operatorname{Arg\,min}\{f(x, y) \,|, y \in F(x)\},$$

где $F(x) = \{y \in R^m \mid h_i(x, y) \le 0, \ i \in I, h_i(x, y) = 0, \ i \in I_0\}$, $I = \{1, ..., l\}, I_0 = \{l+1, ..., p\}$, $J = \{1, ..., s\}$, функции $G(x, y)$, $f(x, y)$, $g_j(x)$ и $h_i(x, y)$ – непрерывны вместе с производными $\nabla_y f(x, y)$, $\nabla_y h_i(x, y)$.

Известно [3], что задача ЗДП равносильна одноуровневой негладкой задаче

$$G(x, y) \to \min_{x,y}, \ x \in X, \ y \in S(x) = \{y \in F(x) \mid f(x, y) \le \varphi(x)\}, \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ – функция оптимального значения задачи нижнего уровня, т. е.

$$\varphi(x) = \min\{f(x, y) \mid y \in F(x)\}.$$

В данном сообщении мы рассматриваем задачу ЗДП в форме (1). Точка (x, y) называется *допустимой точкой* в задаче ЗДП, если $x \in X, \ y \in S(x)$. Допустимая точка (x^0, y^0) называется *решением* (локальным решением) задачи ЗДП, если $G(x^0, y^0) \le G(x, y)$ для всех допустимых точек (x, y) (допустимых точек из некоторой окрестности (x^0, y^0)).

Значительные трудности решения задачи (1) связаны с негладким ограничением, содержащим функцию $\varphi(x)$. В [4] введено понятие частичной устойчивости задачи ЗДП, позволяющее свести ЗДП с помощью функции точного штрафа к существенно более простой одноуровневой задаче.

Пусть (x^0, y^0) – локальное решение задачи ЗДП. Задача ЗДП в форме (1) называется частично устойчивой (partial calm) в точке (x^0, y^0), если существует число $\mu > 0$ такое, что (x^0, y^0) является локальным решением задачи

$$G(x, y) + \mu(f(x, y) - \varphi(x)) \to \min, \ x \in X, y \in F(x). \tag{2}$$

Известно [4], что частично устойчивыми являются двухуровневые задачи с линейной по x, y задачей нижнего уровня. К сожалению, несмотря на значительный интерес [5–8] в литературе не встречается эффективных достаточных условий, гарантирующих частичную устойчивость задачи ЗДП в других случаях. В [9], где без каких-либо ограничительных предположений доказывалась теорема о частичной устойчивости ЗДП с задачей нижнего уровня линейной только по переменной y, содержится ошибка. Ниже приводится контрпример, показывающий, что данное утверждение [9] неверно.

П р и м е р. *Пусть* $x \in R, \ y \in R^2, F(x) = \{y \in R^2 \,|\, y_2 \le 0, \ -xy_1 + y_2 \le 0\}, f(x, y) = -x^2 y_2, X = R, G(x, y) = xy_1$.

Нетрудно убедиться, что

$$S(x) = \begin{cases} y_1 \ge 0, y_2 = 0, & \text{если } x > 0, \\ y_1 \le 0, y_2 = 0, & \text{если } x < 0, \\ y_1 \in R, y_2 \le 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

В данном примере $\varphi(x) = 0$ и точка (x^0, y^0), где $x^0 = 0$ и $y^0 = (0, 0)^T$, является решением задачи ЗДП. Пусть $(x^k, y^k) \to (x^0, y^0)$, где $x^k = 1/k, \ y_1^k = -1/k, \ y_2^k = -1/k^2, \ k = 1, 2, ...$ Тогда $x^k \in X$, $y^k \in F(x^k)$. Для любого $\mu > 0$ получаем

$$G(x^k, y^k) + \mu(f(x^k, y^k) - \varphi(x^k)) = x^k y_1^k - \mu(x^k)^2 y_2^k = -1/k^2 + \mu/k^4 < 0 = G(x^0, y^0),$$

если k достаточно большое. Это означает, что (x^0, y^0) не является решением задачи (2).

Целью данного сообщения является вывод достаточных условий частичной устойчивости задачи ЗДП с линейной только по переменной y задачей нижнего уровня.

В дальнейшем будем обозначать $I(x, y) = \{i \in I \mid h_i(x, y) = 0\}$, $V(x)$, $V(y)$ – окрестности точек x и y, $|v|$ – евклидову норму вектора v. Также обозначим через $d(v, C)$ евклидово расстояние от точки $v \in R^m$ до множества $C \subset R^m$.

Для многозначного отображения $M : x \mapsto M(x) \subset R^m$ введем множества

$$\operatorname{dom} M = \{x \in R^n \mid M(x) \ne \varnothing\} \text{ и } \operatorname{gr} M = \{(x, y) \mid y \in M(x), \ x \in R^n\}.$$

В сообщении принимается следующее обычное предположение [1] о задаче ЗДП: $S(x) \neq \varnothing$ для любого $x \in X \cap \operatorname{dom} F$.

Предварительные результаты. Введем касательный и линеаризованный касательный конусы к множеству $F(x)$ в точке $y \in F(x)$:

$$T(F(x), y) = \{\overline{y} \in R^m \mid \exists t_k \downarrow 0, \overline{y}^k \to \overline{y} \text{ такой как } y + t_k \overline{y}^k \in F(x), k = 1, 2, \ldots\},$$

$$\Gamma(F(x), y) = \{\overline{y} \in R^m \mid \langle \nabla_y h_i(x, y), \overline{y} \rangle \leq 0, \; i \in I(x, y), \; \langle \nabla_y h_i(x, y), \overline{y} \rangle = 0, i \in I_0\}.$$

О п р е д е л е н и е 1. *Отображение F называется полунепрерывным снизу (п. н. сн.) в точке $(x^0, y^0) \in \operatorname{gr} F$ (относительно $X \subset R^n$), если для любой окрестности $V(y^0)$ существует окрестность $V(x^0)$ такая, что $F(x) \cap V(y^0) \neq \varnothing$ для всех $x \in V(x^0)$ (для $x \in V(x^0) \cap X$).*

В [10; 11] введено ослабленное условие постоянного ранга (RCRCQ). Частный случай данного определения приводится ниже.

О п р е д е л е н и е 2. *Многозначное отображение F удовлетворяет ослабленному условию постоянного ранга относительно* $\operatorname{gr} F$ *(коротко* RCRCQ_F*) в точке $(x^0, y^0) \in \operatorname{gr} F$, если для любого множества индексов $K \subset I(x,^0 y^0)$ система векторов $\{\nabla_y h_i(x, y): \; i \in I_0 \cup K\}$ имеет постоянный ранг для всех $(x, y) \in \operatorname{gr} F$ из некоторой окрестности (x^0, y^0).*

Отметим, что из определения 2 следует, что, если отображение F удовлетворяет RCRCQ_F в точке $(x^0, y^0) \in \operatorname{gr} F$, то оно удовлетворяет RCRCQ_F в любой точке $(x, y) \in \operatorname{gr} F$ в некоторой окрестности (x^0, y^0).

Следуя [12; 13], введем понятие R-регулярности многозначного отображения.

О п р е д е л е н и е 3. *Отображение F называется R-регулярным в точке $(x^0, y^0) \in \operatorname{gr} F$ относительно* $\operatorname{dom} F$, *если существует число $\alpha > 0$ и окрестности $V(x^0)$ и $V(y^0)$ такие, что $d(y, F(x)) \leq \alpha \max\{0, h_i(x, y), i \in I, |h_i(x, y)|, i \in I_0\}$ для всех $y \in V(y^0)$ и $x \in V(x^0) \cap \operatorname{dom} F$.*

Т е о р е м а 1. *Предположим, что*

(А) F удовлетворяет RCRCQ_F *в* $(x^0, y^0) \in \operatorname{gr} F$;

(Б) F п. н. сн. в (x^0, y^0) относительно $\operatorname{dom} F$;

(В) существует окрестность $V = V(x^0, y^0)$ такая, что $T(F(x), y) = \Gamma(F(x), y)$ для $(x, y) \in \operatorname{gr} F \cap V$.

Тогда F R-регулярно в (x^0, y^0) относительно $\operatorname{dom} F$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, т. е. F не является R-регулярным в (x^0, y^0) относительно $\operatorname{dom} F$. Тогда существуют последовательности $x^k \to x^0$, $v^k \to y^0$, $v^k \notin F(x^k)$, такие, что

$$d(v^k, F(x^k)) > k \max\{0, h_i(x^k, v^k), i \in I, \left|h_i(x^k, v^k)\right|, i \in I_0\}, \; k = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Пусть y^k является ближайшей точкой в $F(x^k)$ к v^k и $\overline{v}^k = (v^k - y^k)\left|v^k - y^k\right|^{-1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда $y^k \to y^0$ в силу условия (Б). Поскольку $\left|\overline{v}^k\right| = 1$, без потери общности можно считать, что $\overline{v}^k \to \overline{v}$. Вследствие конечности множества I можно извлечь из $\{v^k\}$ и $\{y^k\}$ подпоследовательности (для простоты сохраним для них обозначения $\{v^k\}$ и $\{y^k\}$) такие, что $I(x^k, y^k) = K \subset I(x^0, y^0)$ и K не зависит от k. Из (3) следует

$$d(v^k, F(x^k)) > k \max\{0, h_i(x^k, v^k), \; i \in K, \left|h_i(x^k, v^k)\right|, \; i \in I_0\}$$

и, следовательно,

$$\left|v^k - y^k\right| > k \max\{0, \langle \nabla_y h_i(x^k, \tilde{v}_i^k), v^k - y^k \rangle, i \in K, \left|\langle \nabla_y h_i(x^k, \tilde{v}_i^k), v^k - y^k \rangle\right|, i \in I_0\},$$

где $\tilde{v}_i^k = y^k + \tau_{ki}(v^k - y^k), 0 \leq \tau_{ki} \leq 1$.

Отсюда,

$$\frac{1}{k} > \max\{0, \langle \nabla_y h_i(x^k, \tilde{v}_i^k), \overline{v}^k \rangle,\ i \in K, \left|\langle \nabla_y h_i(x^k, \tilde{v}_i^k), \overline{v}^k \rangle\right|,\ i \in I_0\}$$

и, после перехода к пределу,

$$\max\{0, \langle \nabla_y h_i(x^0, y^0), \overline{v} \rangle, i \in K, \left|\langle \nabla_y h_i(x^0, y^0), \overline{v} \rangle\right|, i \in I_0\} \le 0. \tag{4}$$

Из (4) получаем

$$\overline{v} \in \Gamma(F_K(x^0), y^0), \tag{5}$$

где $F_K(x) = \{y \in R^m \mid h_i(x, y) \le 0, i \in K, h_i(x, y) = 0, i \in I_0\}$.

Множества $F(x^k)$ и $F_K(x^k)$ в окрестности y^k локально совпадают. Поэтому из условия (B) и теоремы 6.42 [14] следует

$$\Gamma(F(x^k), y^k) = T(F(x^k), y^k) \subset T(F\ \ (x^k), y^k).$$

Поскольку $\Gamma(F(x^k), y^k) = \Gamma(F_K(x^k), y^k)$, из последнего включения получим $\Gamma(F_K(x^k), y^k) \subset$ $\subset T(F_K(x^k), y^k)$ и

$$T(F_K(x^k), y^k) = \Gamma(F_K(x^k), y^k) = \Gamma(F(x^k), y^k), k = 1, 2, ... \tag{6}$$

Пусть $\overline{y}^k \in \Gamma(F_K(x^k), y^k)$, $k = 1, 2, ...$ Вследствие (6) существуют последовательности $t_l \downarrow 0$ и $\overline{y}^{kl} \to \overline{y}^k$ такие, что $\tilde{y}^{kl} = y^k + t_l \overline{y}^{kl} \in F_K(x^k)$ для всех $l = 1, 2, ...$ Согласно предложению 2.5.5 [15] получим

$$\langle \tilde{y}^k - y^k, v^k - y^k \rangle \le \frac{1}{2}\left|\tilde{y}^k - y^k\right|^2 \text{ или } \langle \overline{y}^{kl}, v^k - y^k \rangle \le \frac{1}{2} t_l \left|\overline{y}^{kl}\right|^2, l = 1, 2, ...$$

Из последнего неравенства следует $\langle \overline{y}^k, v^k - y^k \rangle \le 0$, следовательно,

$$\langle \overline{y}^k, \overline{v}^k \rangle \le 0 \tag{7}$$

для всех $\overline{y}^k \in \Gamma(F_K(x^k), y^k)$, $k = 1, 2, ...$

Положим $K_0 = \{i \in K \left| \langle \nabla_y h_i(x^0, y^0), \overline{y} \rangle = 0 \ \ \forall \overline{y} \in \Gamma(F_K(x^0), y^0)\right.\}$. Тогда для любого $i \in K \setminus K_0$ найдется $\overline{y}^i \in \Gamma(F_K(x^0), y^0)$ такой, что $\langle \nabla_y h_i(x^0, y^0), \overline{y}^i \rangle < 0$.

В этом случае $\overline{y} = \sum\limits_{i \in K \setminus K_0} \overline{y}^i$ удовлетворяет условиям

$$\langle \nabla_y h_i(x^0, y^0), \overline{y} \rangle = 0, i \in I_0 \cup K_0, \langle \nabla_y h_i(x^0, y^0), \overline{y} \rangle < 0, i \in K \setminus K_0.$$

Следовательно, в силу теоремы 6.5 [14]

$$\operatorname{ri} \Gamma(F_K(x^0), y^0) = \{\overline{y} \left| \langle \nabla_y h_i(x^0, y^0), \overline{y} \rangle = 0,\ i \in I_0 \cup K_0, \langle \nabla_y h_i(x^0, y^0), \overline{y} \rangle < 0, i \in K \setminus K_0\right.\} \ne \varnothing.$$

Пусть $\overline{y} \in \operatorname{ri} \Gamma(F_K(x^0), y^0)$. В силу условия (A) $\operatorname{rank}\{\nabla_y h_i(x^k, y^k), i \in I_0 \cup K_0\} =$ $= \operatorname{rank}\{\nabla_y h_i(x^0, y^0), i \in I_0 \cup K_0\} = l$, $k = 1, 2, ...$

Тогда система векторов $\{\nabla_y h_i(x^0, y^0), i \in I_0 \cup K_0\}$ имеет максимальную линейно независимую подсистему $\{\nabla_y h_i(x^0, y^0), i \in J \subset I_0 \cup K_0\}$ такую, что $\{\nabla_y h_i(x^k, y^k), i \in J\}$ остается максимальной линейно независимой подсистемой в $\{\nabla_y h_i(x^k, y^k), i \in I_0 \cup K_0\}$. Для простоты предположим, что $J = \{1, ..., l\}$. Тогда система уравнений $\langle \nabla_y h_i(x^0, y^0), \overline{y} \rangle = 0, i \in I_0 \cup K_0$, эквивалентна системе

$$\langle \nabla_y h_i(x^0, y^0), \overline{y} \rangle = 0, i \in J. \tag{8}$$

Для определенности предположим, что базисный минор системы (8) расположен в левом верхнем углу соответствующей матрицы. Тогда система (8) может быть записана в виде

$$B_1(x^0, y^0)\overline{y}^1 + B_2(x^0, y^0)\overline{y}^2 = 0, \text{ где } \overline{y} = (\overline{y}^1, \overline{y}^2), \overline{y}^1 = (\overline{y}_1, ..., \overline{y}_l), \overline{y}^2 = (\overline{y}_{l+1}, ..., \overline{y}_m),$$

$$B_1(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1(x, y)}{\partial y_1} \ldots\ldots \dfrac{\partial h_1(x, y)}{\partial y_l} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial h_l(x, y)}{\partial y_1} \ldots\ldots \dfrac{\partial h_l(x, y)}{\partial y_l} \end{bmatrix}, \; B_2(y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1(x, y)}{\partial y_{l+1}} \ldots\ldots \dfrac{\partial h_1(x, y)}{\partial y_m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial h_l(x, y)}{\partial y_{l+1}} \ldots\ldots \dfrac{\partial h_l(x, y)}{\partial y_m} \end{bmatrix}.$$

Последнее уравнение дает $\overline{y}^1 = -B_1^{-1}(x^0, y^0)B_2(x^0, y^0)\overline{y}^2$. Определим вектор $\overline{y}^k = (\overline{y}^{1k}, \overline{y}^{2k})$, где $\overline{y}^{1k} = -B_1^{-1}(x^k, y^k)B_2(x^k, y^k)\overline{y}^2, \overline{y}^{2k} = \overline{y}^2$. Тогда $\langle \nabla_y h_i(x^k, y^k), \overline{y}^k \rangle = 0,\ i \in J$, и $\overline{y}^k \to \overline{y}$ при $k \to \infty$. Более того, для $i \in K \setminus K_0$ получим $\left| \langle \nabla_y h_i(x^k, y^k), \overline{y}^k \rangle - \langle \nabla_y h_i(x^0, y^0), \overline{y} \rangle \right| \to 0$ и, следовательно, $\langle \nabla_y h_i(x^k, y^k), \overline{y}^k \rangle < 0$ для достаточно больших k. Таким образом, получаем, что $\overline{y}^k \in \Gamma(F_K(x^k), y^k)$ для достаточно больших k и $\overline{y}^k \to \overline{y}$. Тогда из (7) следует $\langle \overline{y}, \overline{v} \rangle \le 0$ для всех $\overline{y} \in \operatorname{ri} \Gamma(F_K(x^0), y^0)$ и, значит, для всех $\overline{y} \in \Gamma(F_K(x^0), y^0)$. Последнее противоречит (5). □

Частичная устойчивость в двухуровневых задачах. Рассмотрим задачу ЗДП в форме (1). Положим $h_0(x, y) = f(x, y) - \varphi(x)$. Тогда

$$S(x) = \{ y \in F(x) \,|\, h_i(x, y) \le 0 : i \in \{0\} \cup I,\ h_i(x, y) = 0 : i \in I_0 \}. \tag{9}$$

Обозначим S многозначное отображение $S : x \mapsto S(x)$.

Л е м м а. *Пусть отображение S п. н. сн. в точке $(x^0, y^0) \in \operatorname{gr} S$ относительно* $\operatorname{dom} S$. *Тогда функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x^0 относительно* $\operatorname{dom} S$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\liminf\limits_{x \to x^0,\, x \in \operatorname{dom} S} \varphi(x) = \mu_1$ достигается на последовательности $x^k \to x^0$. В силу п. н. сн. S найдется последовательность $y^k \in S(x^k)$ такая, что $y^k \to y^0$. Тогда $f(x^k, y^k) = \varphi(x^k)$, откуда $\varphi(x^0) = f(x^0, y^0) = \mu_1$. Точно также, если $\limsup\limits_{x \to x^0,\, x \in \operatorname{dom} S} \varphi(x) = \mu_2$ достигается на последовательности $x^k \to x^0$, мы получим $\varphi(x^0) = \mu_2$. Таким образом, $\limsup\limits_{x \to x^0,\, x \in \operatorname{dom} S} \varphi(x) = \liminf\limits_{x \to x^0,\, x \in \operatorname{dom} S} \varphi(x) = \varphi(x^0)$.

Т е о р е м а 2. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

(А) RCRCQ_S *выполняется в* $(x^0, y^0) \in \operatorname{gr} S$;

(Б) отображение S п. н. сн. в точке $(x^0, y^0) \in \operatorname{gr} S$ относительно $\operatorname{dom} S$;

(В) найдется окрестность V точки (x^0, y^0) такая, что $T(S(x), y) = \Gamma(S(x), y)$ для всех $(x, y) \in \operatorname{gr} S \cap V$.

Тогда S R-регулярно в (x^0, y^0) относительно $\operatorname{dom} S$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение справедливо в силу теоремы 1, все условия которой с учетом леммы выполнены для отображения S, заданного условием (9).

Рассмотрим множество

$$D = \{(x, y) \,|\, h_i(x, y) \le 0, i \in I, h_i(x, y) = 0, i \in I_0, g_j(x) \le 0, j \in J\}.$$

Следующие две теоремы дают достаточные условия частичной устойчивости в задаче ЗДП.

Теорема 3. *Пусть точка (x^0, y^0) является локальным решением задачи ЗДП и пусть выполнены условия (А)–(В) теоремы 2. Предположим, что функция G липшицева в окрестности точки (x^0, y^0). Тогда найдутся число $\mu_0 > 0$ и окрестности $V(x^0)$ и $V(y^0)$ такие, что для любого $\mu > \mu_0$ точка (x^0, y^0) будет решением задачи*

$$G(x, y) + \mu(f(x, y) - \varphi(x)) \to \min,\ (x, y) \in D \cap [V(x^0) \times V(y^0)].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $C = \{(x, y) \in D \,|\, h_0(x, y) \le 0\}$. Точка (x^0, y^0) является локальным решением задачи ЗДП тогда и только тогда, когда существуют окрестности $V_0(x^0), V_0(y^0)$ такие, что $G(x, y) \ge G(x^0, y^0)$ при всех $(x, y) \in C \cap [V_0(x^0) \times V_0(y^0)]$. В силу теоремы 2 отображение S

будет R-регулярным в (x^0, y^0) относительно $\operatorname{dom} S$, т. е. существуют число $\alpha > 0$ и окрестности $V(x^0)$ и $V(y^0)$ такие, что $d(y, S(x)) \le \alpha \max\{0, h_i(x, y), i \in \{0\} \cup I, |h_i(x, y)|, i \in I_0\}$ для всех $y \in V(y^0)$ и $x \in V(x^0) \cap \operatorname{dom} S$. Возьмем $V(x^0) \subset V_0(x^0), V(y^0) \subset V_0(y^0)$. Тогда $G(x, y) \ge G(x^0, y^0)$ при всех $(x, y) \in \tilde{C} = C \cap [V(x^0) \times V(y^0)]$. Пусть $l_0 > 0$ – постоянная Липшица функции G на множестве $\tilde{D} = D \cap [V(x^0) \times V(y^0)]$. Тогда в силу предложения 2.4.3 [15] $G(x, y) + \alpha d((x, y), \tilde{C}) \ge G(x^0, y^0)$ для всех $(x, y) \in \tilde{D}$ при любом $\alpha > l_0$. Рассмотрим отображения $\tilde{C}(x) = \{y \in R^m \,|(x, y) \in \tilde{C}\}$, $\tilde{D}(x) = \{y \in R^m \,|(x, y) \in \tilde{D}\}$. Поскольку по сделанному в постановке задачи предположению $X \cap \operatorname{dom} S = X \cap \operatorname{dom} F$, то $\operatorname{dom} C(\cdot) = \operatorname{dom} D(\cdot)$ и, следовательно, $\operatorname{dom} \tilde{C}(\cdot) = \operatorname{dom} \tilde{D}(\cdot)$. Тогда $d(y, \tilde{C}(x)) = d((x, y), \{x\} \times \tilde{C}(x)) \ge d((x, y), \tilde{C})$ для всех $(x, y) \in \tilde{D}$. Отсюда

$$G(x, y) + Md(y, \tilde{C}(x)) \ge G(x^0, y^0) \tag{10}$$

для всех $(x, y) \in \tilde{D}$ при любом $M > l_0$.

Так как $\tilde{C}(x) = \{y \in S(x) | x \in X \cap \operatorname{dom} S \cap V(x^0), y \in V(y^0)\}$, то из R-регулярности S в (x^0, y^0) относительно $\operatorname{dom} S$ следует R-регулярность в данной точке отображения $\tilde{C}(\cdot)$ относительно $\operatorname{dom} \tilde{C}(\cdot) = X \cap \operatorname{dom} S \cap V(x^0)$. В таком случае из (10) следует

$$G(x, y) + \alpha M \max\{0, h_i(x, y), i \in \{0\} \cup I, |h_i(x, y)|, i \in I_0\} \ge$$
$$\ge G(x, y) + Md(y, \tilde{C}(x)) \ge G(x^0, y^0)$$

для всех $(x, y) \in D \cap [V(x^0) \times V(y^0)]$, откуда $G(x, y) + \alpha M \max\{0, h_0(x, y)\} \ge G(x^0, y^0)$ для всех $(x, y) \in D \cap [V(x^0) \times V(y^0)]$. Последнее равносильно утверждению теоремы с $\mu_0 = \alpha l_0$.

Т е о р е м а 4. *Пусть точка* (x^0, y^0) *является локальным решением задачи BLPP, в которой* $f(x, y) = \langle a_0(x), y\rangle$, $h_i(x, y) = \langle a_i(x), y\rangle + b_i(x)$, $i = 1, ..., p$, *где* $a_i(x) \in R^m$, $b_i(x) \in R$. *Предположим, что выполнены условия (А), (Б) теоремы 2 и функция G липшицева в окрестности* (x^0, y^0). *Тогда найдется число* $\mu_0 > 0$ *такое, что при любом* $\mu > \mu_0$ *точка* (x^0, y^0) *является локальным решением задачи* $G(x, y) + \mu(f(x, y) - \varphi(x)) \to \min,\ (x, y) \in D$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку все условия теоремы 2 в данном случае выполнены, утверждение данной теоремы является следствием теоремы 3.

Применим теорему 4 к примеру. Нетрудно проверить, что условие (А) нарушается при $x^0 = 0$, $y^0 = (0, 0)^T$, т. е. нарушение условия (А) является критическим в данном случае и привело к невыполнению условия частичной устойчивости.

Список использованных источников

1. Dempe, S. Foundations of Bilevel programming / S. Dempe. – Dordrecht; Boston; London, 2002. – 282 p. https://doi.org/10.1007/b101970

2. Bard, J. F. Practical Bilevel Optimization / J. F. Bard. – Dordrecht; Boston; London, 1998. – 454 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2836-1

3. Outrata, J. V. A note on the usage of nondifferentiable exact penalties in some special optimization Problems / J. V. Outrata // Kybernetika. – 1988. – Vol. 24, N 4. – P. 251–258.

4. Ye, J. J. Optimality conditions for bilevel programming problems / J. J. Ye, D. L. Zhu // Optimization. – 1995. – Vol. 33, N 1. – P. 9–27. https://doi.org/10.1080/02331939508844060

5. Ye, J. J. New necessary optimality conditions for bilevel programs by combining the MPEC and value function approaches / J. J. Ye, D. L. Zhu // SIAM J. Optim. – 2010. – Vol. 20, N 4. – P. 1885–1905. https://doi.org/10.1137/080725088

6. Dempe, S. New necessary optimality conditions in optimistic bilevel programming / S. Dempe, J. Dutta, B. S. Mordukhovich // Optimization. – 2007. – Vol. 56, N 5–6. – P. 577–604. https://doi.org/10.1080/02331930701617551

7. Henrion, R. On calmness conditions in convex bilevel programming / R. Henrion, T. M. Surowiec // Applicable Analysis. – 2011. – Vol. 90, N 6. – P. 951–970. https://doi.org/10.1080/00036811.2010.495339

8. Minchenko, L. I. On global partial calmness for bilevel programming problems with linear lower-level problem / L. I. Minchenko, D. E. Bereznov // Proceedings of Conference OPTIMA-2017. – Petrovac, Montenegro, 2017. – P. 412–419.

9. Dempe, S. The bilevel programming: reformulations, constraint qualifications and optimality conditions / S. Dempe, A. B. Zemkoho // Mathematical Programming. – 2013. – Vol. 138, N 1–2. – P. 447–473. https://doi.org/10.1007/s10107-011-0508-5

10. Minchenko, L. I. On relaxed constant rank regularity condition in mathematical programming / L. I. Minchenko, S. M. Stakhovski // Optimization. – 2011. – Vol. 60, N 4. – P. 429–440. https://doi.org/10.1080/02331930902971377

11. Minchenko, L. Parametric nonlinear programming problems under the relaxed constant rank condition / L. Minchenko, S. Stakhovski // SIAM J. Optim. – 2011. – Vol. 21, N 1. – P. 314–332.

12. Федоров, В. В. Численные методы максимина / В. В. Федоров. – М., 1979. – 280 с.

13. Luderer, B. Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations / B. Luderer, L. Minchenko, T. Satsura. – Dordrecht; Boston; London, 2002. – 210 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3468-3

14. Rockafellar, R. T. Variational analysis / R. T. Rockafellar, R. J.-B. Wets. – Berlin, 1998. – 734 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-02431-3

15. Кларк, Ф. Оптимизация и негладкий анализ / Ф. Кларк. – М., 1988. – 280 с.

References

1. Dempe S. *Foundations of Bilevel programming*. Dordrecht, Boston, London, 2002. 282 p. https://doi.org/10.1007/b101970

2. Bard J. F. *Practical Bilevel Optimization*. Dordrecht, Boston, London, 1998. 454 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2836-1

3. Outrata J. V. A note on the usage of nondifferentiable exact penalties in some special optimization Problems. *Kybernetika*, 1988, vol. 24, no. 4, pp. 251–258.

4. Ye J. J., Zhu D. L. Optimality conditions for bilevel programming problems. *Optimization*, 1995, vol. 33, no. 1, pp. 9–27. https://doi.org/10.1080/02331939508844060

5. Ye J. J., Zhu D. L. New necessary optimality conditions for bilevel programs by combining the MPEC and value function approaches. *SIAM Journal on Optimization*, 2010, vol. 20, no. 4, pp. 1885–1905. https://doi.org/10.1137/080725088

6. Dempe S., Dutta J., Mordukhovich B. S. New necessary optimality conditions in optimistic bilevel programming. *Optimization*, 2007, vol. 56, no. 5–6, pp. 577–604. https://doi.org/10.1080/02331930701617551

7. Henrion R., Surowiec T. M. On calmness conditions in convex bilevel programming. *Applicable Analysis*, 2011, vol. 90, no. 6, pp. 951–970. https://doi.org/10.1080/00036811.2010.495339

8. Minchenko L. I., Bereznov D. E. On global partial calmness for bilevel programming problems with linear lower-level problem. *Proceedings of Conference OPTIMA-2017*, Petrovac, Montenegro, 2017, pp. 412–419.

9. Dempe S., Zemkoho A. B. The bilevel programming: reformulations, constraint qualifications and optimality conditions. *Mathematical Programming*, 2013, vol. 138, no. 1–2, pp. 447–473. https://doi.org/10.1007/s10107-011-0508-5

10. Minchenko L. I., Stakhovski S. M. On relaxed constant rank regularity condition in mathematical programming. *Optimization*, 2011, vol. 60, no. 4, pp. 429–440. https://doi.org/10.1080/02331930902971377

11. Minchenko L., Stakhovski S. Parametric nonlinear programming problems under the relaxed constant rank condition. *SIAM Journal on Optimization*, 2011, vol. 21, no. 1, pp. 314–332. https://doi.org/10.1137/090761318

12. Fedorov V. V. *Numerical Maximilian Methods*. Moscow, 1979. 280 p. (in Russian).

13. Luderer B., Minchenko L., Satsura T. *Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations*. Dordrecht; Boston; London, 2002. – 210 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3468-3

14. Rockafellar R. T., Wets R. J.-B. *Variational analysis*. Berlin, 1998. 734 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-02431-3

15. Clarke F. *Optimization and nonsmooth analysis.* Moscow, 1988. 280 p. (in Russian).

Информация об авторах

Минченко Леонид Иванович – д-р физ.-мат. наук, профессор. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, Минск, Республика Беларусь). E-mail: inform@bsuir.by.

Сиротко Сергей Иванович – канд. физ.-мат. наук, доцент. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, Минск, Республика Беларусь). E-mail: sergeyis@bsuir.by.

Information about the authors

Minchenko Leonid Ivanovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: inform@bsuir.by.

Sirotko Sergey *Ivanovich* – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assosiate professor. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: sergeyis@bsuir.by.