Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 **январь–февраль** **Том 60 № 1**

УДК 517.518.126

М. Л. ГОЛЬДМАН[1], П. П. ЗАБРЕЙКО[2]

ТЕОРЕМЫ ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ИНТЕГРАЛА КУРЦВЕЙЛЯ–ХЕНСТОКА

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

[1]Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
seulydia@yandex.ru
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
zabreiko@mail.ru

В сообщении изучается вопрос об интегрируемости произведения функций для интегралов Курцвейля–Хенстока. Классическим утверждением здесь является теорема об интегрируемости произведения интегрируемой функции и функции ограниченной вариации. Приводится несколько более общих утверждений для функций, одна из которых имеет первообразную, удовлетворяющую обычному или обобщенному условию Гельдера с показателем α или модулем ϕ, а вторая – сама удовлетворяет обычному или обобщенному условию Гельдера, соответственно с показателем β или модулем ψ, причем $\alpha + \beta > 1$ или функция $t^{-2}\phi(t)\psi(t)$ интегрируема в окрестности нуля. Аналогичные утверждения установлены и для функций с ограниченными вариациями в смысле Винера, Янга, Уотермана и Шрама.

Ключевые слова: интегралы Римана, Лебега, Курцвейля–Хенстока; интеграл Римана–Стильтьеса; функции ограниченной вариации; обобщенные вариации функций.

M. L. GOLDMAN[1], P. P. ZABREIKO[2]

KURZWEIL–HENSTOCK INTEGRABILITY OF THE PRODUCT OF INTEGRABLE FUNCTIONS

[1]Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia
seulydia@yandex.ru
[2]Belarussian State University, Minsk, Belarus
zabreiko@mail.ru

The article deals with the problem of integrability of the product of integrable functions in the Kurzweil–Henstock sense. The classical theorem states here that the product of an integrable function and a function of bounded variation is also integrable. In the article it is proved that the product of a function with the primitive satisfying the Hölder condition with the exponent α or with the module ϕ and a function satisfying the Hölder condition with the exponent β or with the module ψ such that $\alpha + \beta > 1$ or $t^{-2}\phi(t)\psi(t)$ is integrable. Similar results for functions with generalized (Winer, Young, Waterman, Schramm) bounded variations are stated.

Keywords: Riemann, Lebesgue, Kurzweil–Henstock integrals, Riemann–Stiltjes integral, functions of bounded variation, generalized variations of functions.

Вопрос об интегрируемости произведения двух интегрируемых функций на отрезке $[a, b]$ естественным образом зависит от того понятия интеграла, при помощи которого определяется класс интегрируемых функций. Для интеграла Римана произведение двух интегрируемых функций оказывается всегда интегрируемой функцией. Для интеграла Лебега ситуация резко усложняется. Самым простым здесь утверждением является теорема об интегрируемости произведения двух функций, если одна из них интегрируема, а вторая измерима и ограничена. Более сложным является классическая теорема Ф. Рисса, которая утверждает интегрируемость произведения двух функций, если первая из них принадлежит пространству L_p, а вторая – пространству L_q, где числа p и q удовлетворяют соотношениям $1 \le p, q \le \infty, 1/p + 1/q = 1$; это утверждение в некотором смысле не улучшаемо: если функция f такова, что функция fg интегрируема для любой функции $g \in L_q$, то $f \in L_p$. Аналоги теоремы Рисса известны для пар функций из двойственных друг другу пространств Орлича и, вообще, для двойственных друг другу пар идеальных пространств. Для интеграла Курцвейля–Хенстока классическим результатом является теорема об интегрируемости произведения двух функций, одна из которых интегрируема, а вторая является функцией ограниченной вариации (утверждение об интегрируемости произведения интегрируемой и ограниченной функций очевидным образом неверно).

Цель работы – установить следующее простое утверждение: если функция f интегрируема по Курцвейлю–Хенстоку и ее первообразная удовлетворяет условию Гельдера с показателем α, функция g удовлетворяет условию Гельдера с показателем β, и $\alpha + \beta > 1$, то функция fg также интегрируема. Устанавливаются также и некоторые обобщения этого утверждения.

1. Напомним определение интеграла Курцвейля–Хенстока [1–3].

Ниже через $\mathcal{P}$ обозначаются так называемые перроновские разбиения отрезка $[a, b]$, т. е. совокупности пар $\{([x_{\sigma-1}, x_\sigma], \xi_\sigma) : \sigma = 1, \ldots, s\}$, такие, что

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_s = b, \quad x_{\sigma-1} \le \xi_\sigma \le x_\sigma, \qquad \sigma = 1, \ldots, s.$$

Пусть теперь $\delta(\cdot)$ – произвольная положительная функция, определенная на отрезке $[a, b]$ (ниже такие функции называются *калибрами* на $[a, b]$). Разбиение $\mathcal{P}$ будем называть $\delta(\cdot)$-*тонким*, если справедливы включения

$$[x_{\sigma-1}, x_\sigma] \subset (\xi_\sigma - \delta(\xi_\sigma), \xi_\sigma + \delta(\xi_\sigma)), \qquad \sigma = 1, \ldots, s.$$

Для любого калибра $\delta(\cdot)$ существуют (лемма Кузена) $\delta(\cdot)$-тонкие разбиения. Тот факт, что разбиение $\mathcal{P}$ является $\delta(\cdot)$-тонким, записывается в виде $\mathcal{P} \prec \delta(\cdot)$.

Для любой функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ перроновское разбиение $\mathcal{P} = \{([x_{\sigma-1}, x_\sigma], \xi_\sigma) : \sigma = 1, \ldots, s\}$ определяет интегральную сумму Римана

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{\sigma=1}^{s} f(\xi_\sigma)(x_\sigma - x_{\sigma-1}).$$

Число I называется *интегралом Курцвейля–Хенстока* от функции f на $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой калибр $\delta_\varepsilon(\cdot)$, что

$$| I - S(f, \mathcal{P}) | < \varepsilon$$

для любого $\delta_\varepsilon(\cdot)$-тонкого разбиения $\mathcal{P}$. Как обычно, интеграл от функции f по отрезку $[a, b]$ обозначается

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{или} \quad (\mathcal{KH})\int_a^b f(x)dx.$$

Как известно, интеграл Курцвейля–Хенстока определяется однозначно; для него справедливы обычные свойства линейности, аддитивности, теоремы о неравенствах и теоремы о среднем. Более того, для него справедливы те же теоремы о предельном переходе, что и для интеграла Лебега (лемма Беппо Леви, лемма Фату, теорема Лебега и др.). Интеграл Курцвейля–Хенстока с переменным верхним пределом от функции f является непрерывной (но не обязательно абсолютно непрерывной) функцией, производная которой существует почти всюду на $[a, b]$ и почти всюду совпадает с f.

Класс интегрируемых по Курцвейлю–Хенстоку функций содержит функции, интегрируемые по Риману и Лебегу как в собственном, так и несобственном смыслах. Интегрируемая по Курцвейлю–Хенстоку функция f оказывается интегрируемой по Лебегу (в собственном смысле) в том и только том случае, когда она интегрируема по Курцвейлю–Хенстоку вместе с функцией $| f |$. Среди интегрируемых по Курцвейлю–Хенстоку функций содержатся все производные дифференцируемых функций, и, более того, для этой производной справедлива формула Ньютона–Лейбница (т. е. интеграл Курцвейля–Хенстока с переменным верхним пределом от производной с точностью до постоянной восстанавливает исходную функцию).

Ниже термины «интеграл», «интегрируемость», если не оговорено иное, понимаются в смысле Курцвейля–Хенстока.

2. Ниже основную роль играет следующее утверждение, являющееся следствием простой модификации рассуждений, используемых при доказательстве теоремы об интегрируемости произведения интегрируемой функции и функции ограниченной вариации.

Л е м м а. *Пусть f – интегрируемая на* [*a*, *b*] *функция*, *g – ограниченная на* [*a*, *b*]; *пусть существует интеграл Стильтьеса*

$$S = \int_a^b g(x)dF(x) \qquad \left(F(x) = \int_a^x f(t)dt\right). \tag{1}$$

Тогда функция fg также интегрируема на [*a*, *b*], *причем*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)dF(x).$$

Для доказательства заметим сначала, что при $S = \int\limits_a^b g(x)dF(x)$ (интеграл в смысле Стильтьеса) справедливы очевидные неравенства

$$|S - S(fg,\mathcal{P})| \le |S - \sum_{\sigma=1}^{s} g(\xi_\sigma)\int_{x_{\sigma-1}}^{x_\sigma} f(t)dt| +$$
$$|\sum_{\sigma=1}^{s} g(\xi_\sigma)\int_{x_{\sigma-1}}^{x_\sigma} f(t)dt - \sum_{\sigma=1}^{s} f(\xi_\sigma)g(\xi_\sigma)(x_\sigma - x_{\sigma-1})| \le$$
$$|S - \sum_{\sigma=1}^{s} g(\xi_\sigma)\int_{x_{\sigma-1}}^{x_\sigma} f(t)dt| + N\sum_{\sigma=1}^{s} |\int_{x_{\sigma-1}}^{x_\sigma} f(t)dt - f(\xi_\sigma)(x_\sigma - x_{\sigma-1})|,$$

где $N = \sup\limits_{x\in[a,b]} |g(x)|$. Пусть теперь задано ε > 0 и δ > 0 – такое положительное число, что первое слагаемое в последней строке выписанной цепочки неравенств меньше ε (такое δ существует в силу существования интеграла Стильтьеса (1)). Выберем теперь такой калибр $\delta_\varepsilon(\cdot)$, чтобы выполнялось неравенство

$$|\int\limits_a^b f(x)dx - \sum_{\sigma=1}^{s} f(\xi_\sigma)(x_\sigma - x_{\sigma-1})| \le \varepsilon;$$

при этом без ограничения общности можно считать, что $\delta_\varepsilon(x) \le \delta$ при всех $x \in [a,b]$. Тогда, в силу леммы Сакса–Хенстока выполняется и неравенство

$$\sum_{\sigma=1}^{s} |\int_{x_{\sigma-1}}^{x_\sigma} f(t)dt - f(\xi_\sigma)(x_\sigma - x_{\sigma-1})| \le 2\varepsilon,$$

откуда вытекает, что

$$|S - S(fg,\mathcal{P})| \le (2N+1)\varepsilon$$

для любого $\delta_\varepsilon(\cdot)$-тонкого разбиения $\mathcal{P}$. Тем самым, лемма доказана.

3. Теорема об интегрируемости произведения интегрируемой функции и функции ограниченной вариации очевидным образом вытекает из леммы. Однако эта лемма содержит и другие утверждения.

Т е о р е м а 1. *Пусть f – интегрируемая функция и ее первообразная F удовлетворяет условию Гельдера с показателем* α. *Пусть далее g – функция, удовлетворяюшая условию Гельдера с показателем* β. *Тогда при* α + β > 1 *функция fg также интегрируема*.

Теорема 1 вытекает непосредственно из леммы и известной теоремы Кондураря [4] о существовании интеграла Стильтьеса в случае, когда функции *f* и *g* удовлетворяют условиям Гельдера соответственно с показателями α и β и выполняется неравенство α + β > 1. Напомним, что удовлетворяющие условию Гельдера функции не обязательно имеют ограниченную вариацию даже в случае их дифференцируемости, поэтому утверждение теоремы 1 не содержится в теореме о произведении интегрируемой функции и функции с ограниченной вариацией. Простейшим примером функции, удовлетворяющей условию Гельдера с показателем 1/2 и не являющейся функцией ограниченной вариации, является (см., напр., [5]) функция

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(x - \frac{n-1}{n}\right)_+}, \qquad 0 \le x \le 1, \quad z_+ = \max\{0, z\}. \tag{2}$$

Действительно, каждый из корней $h_n(x) = \sqrt{\left(x - \frac{n-1}{n}\right)_+}$ является монотонно возрастающей и дифференцируемой при $x \ne (n-1)/n$ функцией с приращением $1/\sqrt{n}$ на [0, 1]. По признаку Лейбница ряд в правой части равенства (2) сходится к дифференцируемой, исключая точки $(n-1)/n,\ n=1,2,\ldots$, функции $h(x)$. Эта функция, очевидно, удовлетворяет неравенствам

$$(h_1(x+k)-h_1(x))-(h_2(x+k)-h_2(x))\le h(x+k)-h(x)\le h_1(x+k)-h_1(x),$$

откуда следует, что она удовлетворяет условию Гельдера с показателем 1/2. Из интегрируемости по Курцвейлю–Хенстоку производных вытекает, что эта функция является первообразной для функции $h'(x)$. Однако она не является абсолютно непрерывной.

Применение теорем Янга [6–8] (см. также [9]), более общих чем теорема Кондураря, приводит к следующему утверждению.

Т е о р е м а 2. *Пусть f – интегрируемая функция и ее первообразная F удовлетворяет условию*

$$|F(x')-F(x'')|\le\phi(|x'-x''|),\qquad a\le x',x''\le b.$$

Пусть далее g – функция, удовлетворяющая условию

$$|g(x')-g(x'')|\le\psi(|x'-x''|),\qquad a\le x',x''\le b.$$

Тогда при

$$\int_0^\delta\frac{\phi(t)\psi(t)}{t^2}dt<\infty,\qquad \delta>0,$$

функция fg также интегрируема.

4. В теоремах 1, 2 функции f и g непрерывны. Теоремы Янга [6–9] позволяют доказать и теоремы об интегрируемости произведения функций для случая, когда обе функции f и g разрывны, но общих точек разрыва не имеют. Напомним, что функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ принадлежит пространству Винера W_p $(0<p<\infty)$, если

$$\varpi_p(f)^p=\sup\sum_{\sigma=1}^{s}|f(x_\sigma)-f(x_{\sigma-1})|^p<\infty;$$

здесь, как обычно, точная верхняя граница берется по всевозможным разбиениям отрезка $[a,b]$ на части: $a=x_0<x_1<\ldots<x_s=b$. Величина $\varpi_p(f)$ $(1\le p<\infty)$ оказывается полунормой на W_p; при $0<p<1$ величина $\varpi_p(f)$ является лишь квазиполунормой. Ядро $\varpi_p(f)$ совпадает с пространством констант. Соответствующее фактор-пространство $\mathring{W}_p$ является полным пространством (банаховым при $1\le p<\infty$ и квазибанаховым при $0<p<1$).

Т е о р е м а 3. *Пусть f – интегрируемая функция и для ее первообразной справедливо включение $F\in W_p$. Пусть далее $g\in W_q$. Тогда при*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1.$$

функция fg также интегрируема.

Теорема 3 является обобщением теоремы 1. Теорема 2 также допускает аналогичное обобщение. Напомним, что *функцией Янга* называется произвольная непрерывная выпуклая функция $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$, для которой $\phi(0)=0$ и $\phi(t)>0$ при $t>0$. Для каждой функции Янга ϕ можно на пространстве функций $[a,b]\to\mathbb{R}$ ввести ϕ-вариацию

$$\mathrm{Var}_\phi(f;[a,b])=\sup\sum_{\sigma=1}^{s}\phi^{-1}(|f(x_\sigma)-f(x_{\sigma-1})|),$$

где точная верхняя граница берется снова по всевозможным разбиениям отрезка $[a,b]$ на части: $a=x_0<x_1<\ldots<x_s=b$. Величина $\varpi_\phi(f)$ по принятой в настоящее время терминологии является полумодуляром (с ядром, совпадающим с пространством констант). Совокупность $W_\phi([a,b])$ функций $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, для каждой из которых при некотором $\lambda\in(0,\infty)$ справедливо неравенство $\mathrm{Var}_\phi(\lambda f,[a,b])\le 1$ является банаховым пространством с нормой $\|f\|_{W_\phi([a,b])}=\sup\{\lambda:\mathrm{Var}_\phi(\lambda f,[a,b])\le 1\}$.

Т е о р е м а 4. *Пусть f – интегрируемая функция и для ее первообразной справедливо включение $F\in W_\phi$. Пусть далее $g\in W_\psi$. Тогда при*

$$\int_0^\delta \frac{\phi(t)\psi(t)}{t^2}dt < \infty, \qquad \delta > 0,$$

функция fg также интегрируема.

5. В работе [10] (см. также [5]) были получены существенно более общие условия существования интеграла Римана–Стильтьеса. Пусть $\Lambda = (\lambda_k)$ – убывающая к нулю последовательность, для которой $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty$. Λ-*вариацией Уотермана* функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ назовем число

$$\mathrm{Var}_\Lambda(f; [a, b]) = \sup \{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \, | f(b_k) - f(a_k) | : \{[a_k, b_k]\} \subset \mathfrak{P}([a, b]) \};$$

здесь $\mathfrak{P}([a, b])$ – семейство всех систем неналегающих друг на друга отрезков $[a_k, b_k]$ $(k = 1, 2, \ldots)$, объединение которых совпадает с отрезком $[a, b]$. Функционал $\mathrm{Var}_\Lambda(\cdot; [a, b])$ является полунормой на пространстве $\Lambda BV([a, b])$ функций $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, для которых $\mathrm{Var}_\Lambda(f; [a, b]) < \infty$; ядром этой полунормы являются функции-константы. Множество функций $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ с ограниченной Λ-вариацией Уотермана является линейным пространством и обычно обозначается через $\Lambda BV([a, b])$. Основные свойства функций с ограниченной Λ-вариацией Уотермана и соответствующего пространства можно найти в [5].

В [5] установлено следующее утверждение: *если* $f \in \Lambda BV([a, b])$, $g \in \mathrm{M}BV([a, b])$, g – *непрерывна, и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \lambda_k \mu_k} < \infty, \tag{3}$$

то существует интеграл Римана–Стильтьеса $\int_a^b f(x)dg(x)$.

Из этого утверждения немедленно вытекает

Т е о р е м а 5. *Пусть f – интегрируемая функция и для ее первообразной F справедливо включение* $F \in \Lambda BV([a, b])$. *Пусть далее* $g \in \mathrm{M}BV([a, b])$. *Тогда при выполнении неравенства (3) функция fg также интегрируема.*

6. Еще более общая теорема о существовании интеграла Римана–Стильтьеса была получена в работе [10] (см. также [5]). Пусть $\Phi = (\phi_k)$ – убывающая к нулю последовательность функций Янга $\phi_k : [0, \infty) \to [0, \infty)$, для которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(t) = \infty \qquad (0 < t < \infty).$$

Для каждой такой последовательности Φ на пространстве функций $[a, b] \to \mathbb{R}$ определен функционал

$$\mathrm{Var}_\Phi(f; [a, b]) = \sup \{ \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(| f(b_k) - f(a_k) |) : \{[a_k, b_k]\} \subset \mathfrak{P}([a, b]) \}$$

(здесь $\mathfrak{P}([a, b])$ – семейство всех систем неналегающих друг на друга отрезков $[a_k, b_k]$ $(k = 1, 2, \ldots)$, объединение которых совпадает с отрезком $[a, b]$). Число $\mathrm{Var}_\Phi(f; [a, b])$ называется Φ-*вариацией* функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, а функции $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$, для которых $\mathrm{Var}_\phi(f; [a, b]) < \infty$ называются *функциями с ограниченной* Φ-*вариацией Шрамма*. Совокупность $\Phi BV([a, b])$ функций $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, для каждой из которых при некотором $\lambda \in (0, \infty)$ справедливо неравенство $\mathrm{Var}_\Phi(\lambda f, [a, b]) \le 1$ является банаховым пространством с нормой $\| f \|_{W_\Phi([a, b])} = \sup \{\lambda : \mathrm{Var}_\Phi(\lambda f, [a, b]) \le 1\}$. Основные свойства функций с ограниченной Φ-вариацией Шрамма и соответствующих пространств можно найти в [5].

В [5] установлено следующее утверждение: *если* $f \in \Phi BV([a, b])$, $g \in \Psi BV([a, b])$, g – *непрерывна, и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) \psi_k^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) < \infty, \tag{4}$$

то существует интеграл Римана–Стильтьеса $\int_a^b f(x)dg(x)$.

Из этого утверждения немедленно вытекает

Т е о р е м а 6. *Пусть f – интегрируемая функция и для ее первообразной F справедливо включение* $F \in \Phi BV([a,b])$. *Пусть далее* $g \in \Psi BV([a,b])$. *Тогда при выполнении неравенства (4) функция fg также интегрируема*.

Исследование первого автора проведено при поддержке государственной программы Министерства образования и науки Российской Федерации в области научных исследований (проект № 1.333.2014/K), а также частично поддержано РФФИ (проекты 15-01-02732 и 14-01-00684).

Список использованной литературы

1. *Лукомский, С. Ф.* Интегральное исчисление (функции одной переменной) / С. Ф. Лукомский. – Саратов: Из-во Саратовского ун-та, 2005. – 144 с.

2. *Лукашенко, Т. П.* Обобщенные интегралы / Т. П. Лукашенко, В. А. Скворцов, А. П. Солодов. – Москва: URSS (ЛИБРОКОМ), 2009; 2011. – 275 с.

3. *Bartle, R. G.* A Modern Theory of Integration (Graduate Studies in Mathematics, 32) / R. G. Bartle. – American Mathematical Society, 2001. – 458 p.

4. *Кондурарь, В. Т.* Sur l'integrale de Stiltjes / В. Т. Кондурарь // Матем. сб. – 1937. – Т. 2, № 44. – С. 361–366.

5. *Appell, J.* Bounded Variation and Around / J. Appell, J. Banaš, N. Merentes. – Berlin, 2014.

6. *Young, L. G.* An inequality of the Hölder type connected with Stieltjes integration / L. G. Young // Acta Math. – 1936. – Vol. 67. – P. 251–282.

7. *Young, L. G.* Inequalities connected with p-th power variation in the Wiener sense and with integrated Lipschitz conditions... / L. G. Young // Proc. London Math. Soc. – 1937. – Vol. 2, N 43. – P. 449–467.

8. *Lesniewicz, R.* On generalized variations / R. Lesniewicz, W. Orlicz // Studia Math. – 1973. – Vol. 45. – P. 71–109.

9. *Леви, П.* Конкретные проблемы функционального анализа / П. Леви. – Москва: Наука, 1967. – 510 с.

10. *Schramm, M.* Functions of Φ-bounded variation and Riemann–Stiltjes integration / M. Schramm // Trans. Amer. Math. Soc. – 1985. – Vol. 287, N 1. – P. 49–63.

Поступило в редакцию 26.08.2015