Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 март–апрель Том 59 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 517.937

Л. Б. КНЯЖИЩЕ

НЕМОНОТОННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Институт математики НАН Беларуси, Минск *Поступило 04.03.2015*

Введение. В настоящей работе рассматриваются функционально-дифференциальные уравнения нейтрального типа (НФДУ):

$$\frac{d}{dt}D(t, x_t) = f(t, x_t),\ f(t, 0) \equiv 0. \tag{1}$$

Здесь и всюду ниже используются следующие обозначения: $C = C([-r, 0], R^n)$ – пространство непрерывных на отрезке $[-r, 0]$ функций со значениями в R^n; $\Omega \subseteq R \times C$ – открытое множество; $f : \Omega \to R^n$ – непрерывная функция; $D : \Omega \to R^n$, причем D – атомарный в нуле [1] оператор, который называется разностным оператором уравнения (1); $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ для $\theta \in [-r, 0]$; $\| x_t \| = \max\limits_{\theta \in [-r, 0]} | x(t+\theta) |$ – норма x_t в пространстве C; $B(H)$ – шар в C радиуса H с центром в нуле. Для всякой пары $(t_0, \varphi_0) \in \Omega$ функция $x \in C([t_0 - r, t_0 + A], R^n)$ (в дальнейшем $x(t, t_0, \varphi_0)$) называется решением уравнения (1) с начальным условием $x_{t_0} = \varphi_0$ на интервале $[t_0, t_0 + A]$, если $D(t, x_t(t_0, \varphi_0))$ – непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (1) для любого $t \in [t_0, t_0 + A]$ (A может быть и бесконечность). Функции f и D предполагаются такими, что обеспечены существование решений уравнения (1) и их непрерывная зависимость от начальных данных $(t_0, \varphi_0) \in \Omega$. Скалярные, монотонно возрастающие функции a, b, ω такие, что $a(0) = b(0) = \omega(0) = 0$, называются функциями класса Хана.

Устойчивость по Ляпунову тривиального решения $x(t) \equiv 0$ уравнения (1), а также неустойчивость, асимптотическая и равномерная асимптотическая устойчивость понимаются в обычном смысле [1]. Разностный оператор D уравнения (1) называется устойчивым, асимптотически устойчивым [1], если нулевое решение однородного уравнения $D(t, y_t) = 0$ равномерно устойчиво, равномерно асимптотически устойчиво.

Ниже для формулировки условий асимптотической устойчивости решений НФДУ (1) будем использовать непрерывные, липшицевые по второму аргументу вспомогательные функционалы $V : R \times C \to R$, которые далее называются функционалами Ляпунова. Для всякой пары $(t, \varphi) \in \Omega$ определим, следуя [1], величину (если существует конечная)

$$\dot{V}(t, \varphi) = \limsup_{h \to +0} \frac{1}{h}[V(t+h, x_{t+h}(t, \varphi)) - V(t, \varphi)], \tag{2}$$

которую будем называть производной функционала V вдоль решений уравнения (1). Кроме того, мы будем использовать функционалы Ляпунова в качестве вспомогательных функций не только при изучении устойчивости, но и при формулировке и обосновании новых приемов стабилизации положения равновесия в рамках теории Беллмана. Отметим несколько ключевых обстоятельств, возникающих при использовании приемов второго метода Ляпунова для изучения устойчивости и стабилизации решений уравнения (1). При использовании немонотонных функционалов Ляпунова для доказательства асимптотической устойчивости стабилизируемого положения равновесия одна из основных трудностей связана с тем, что в уравнении (1) задается лишь величина $\frac{d}{dt}D(t, x_t)$, а не $\dot{x}(t)$. Следствием этого обстоятельства является то, что вычисление величины производной (2) становится проблематичным даже для достаточно гладких функций $V_1 : R^n \to R_+$, которые, как известно, должны быть составной частью большинства функционалов Ляпунова, как правило, устроенных в виде суммы $V(t, \varphi) = V_1(t, \varphi(0)) + V_2(t, \varphi)$, где $V_1(t, \varphi(0))$ – «сосредоточенная» часть функционала, а $V_2(t, \varphi)$ – «распределенная» часть.

Упомянутая выше трудность легко преодолевается, если «сосредоточенная» часть выбирается в виде $V_1(t, D(t, \varphi))$. Однако, выбрав «сосредоточенную» часть в виде $V_1(t, D(t, \varphi))$ нельзя (даже для устойчивого разностного оператора D) получить оценку

$$a(|\varphi(0)|) \le V_1(t, D(t, \varphi)) \ \forall \varphi \in B(H),$$

необходимую для доказательства устойчивости решений уравнения (1) в рамках второго метода Ляпунова.

Преодолеть это обстоятельство можно, если использовать оценку [1; 2]

$$a(|D(t, \varphi)|) \le V_1(t, D(t, \varphi)) \ \forall \varphi \in B(H).$$

Использование такой оценки, по сути, требует априорной устойчивости разностного оператора. С другой стороны, новые признаки устойчивости, основанные на использовании немонотонных функционалов [2], позволяют в ряде случаев использовать более гибкие оценки и, как следствие, отказаться от априорного требования устойчивости разностного оператора. Развитию этих приемов работы с вспомогательными функционалами и их применению к задачам стабилизации и посвящена данная работа. Всюду ниже предположение, что функция f отображает $R\times$ (ограниченные множества из C) в ограниченные множества в R^n можно опустить, если известно, что для некоторой константы F выполнена оценка

$$|f(t, x_t)| \le F \ \forall t \in R_+, \forall \|x_t\| \le H.$$

Использование немонотонных функционалов в признаках асимптотической устойчивости систем с запаздыванием нейтрального типа. Приведем новые условия асимптотической устойчивости для уравнений с устойчивым разностным оператором, ориентированные на использование функционалов Ляпунова, не являющихся монотонными вдоль траекторий исследуемого уравнения. В сравнении с работой [2] эти условия являются более гибкими, поскольку требуют положительной определенности величины $\dot{V}(t, \varphi)$, лишь на некотором подмножестве фазового пространства системы.

Т е о р е м а 1. *Пусть в уравнении (1) оператор D асимптотически устойчив, функция f отображает $R\times$ (ограниченные множества из C) в ограниченные множества в R^n. Если найдется функционал V, числа $k_1 > 1$, $k_2 > 1$, $H > 0$ и функции класса Хана a, b, ω такие, что для $(t, x_t) \in R_+ \times B(H)$ выполняются условия*

$$a(|x(t)|) \le V(t, x_t), \text{ если } k_1|x(t)| \ge \|x_t\|, \tag{3}$$

$$\dot{V}(t, x_t) \le 0, \text{ если } V(t, x_t) > 0 \text{ и } k_2 V(t, x_t) \ge V(t+\alpha, x_{t+\alpha}) \forall \alpha \in [-r, 0], \tag{4}$$

$$\dot{V}(t, x_t) \le -\omega(|D(t, x_t)|), \text{ если } V(t, x_t) > 0 \text{ и } k_2 V(t+\theta, x_{t+\theta}) \ge V(t+\alpha, x_{t+\alpha}) \forall \alpha, \forall \theta \in [-r, 0], \tag{5}$$

то положение равновесия $x(t) \equiv 0$ уравнения (1) асимптотически устойчиво.

Т е о р е м а 2. *Пусть в уравнении (1) оператор D асимптотически устойчив, функция f отображает $R\times$ (ограниченные множества из C) в ограниченные множества в R^n, решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ непрерывно зависят от начальных данных $(t_0, \varphi_0) \in R_+ \times B(H)$ равномерно по $t_0 \in R_+$. Если найдется функционал V, числа $k_1 > 1$, $k_2 > 1$, $H > 0$ и функции класса Хана a, b, ω такие, что для $(t, x_t) \in R_+ \times B(H)$ выполняются условия (3), (4), (5) и условие*

$$V(t, x_t) \le b(\| x_t \|), \text{ если } k_1 | x(t) | \ge \| x_t \|,$$

то положение равновесия $x(t) \equiv 0$ *уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство этих утверждений опирается на несколько вспомогательных лемм, имеющих и самостоятельный интерес. Приведем формулировки этих утверждений.

Л е м м а 1. *Пусть в уравнении (1) оператор D асимптотически устойчив, функция* f *отображает R× (ограниченные множества из C) в ограниченные множества в* R^n. *Если найдется функционал V, числа* $k_1 > 1$, $k_2 > 1$, $H > 0$ *и функции класса Хана* a, b, ω *такие, что для* $(t, x_t) \in R_+ \times B(H)$ *выполняются условия (3), (4), то для всякого решения* $x(t)$ *такого, что* $\| x_t \| \le H$ $\forall t \in R_+$ *существует конечный* $\lim\limits_{t\to\infty} V(t, x_t) = v > 0$.

Отметим, что приведенная лемма описывает расположение решений относительно поверхностей уровня функционала *V*, что, в отличие от случая монотонных функционалов, далеко не очевидно.

В свою очередь, следующая лемма предоставляет информацию о расположении траекторий относительно нулевой поверхности уровня некоторого вспомогательного функционала $W(t, x_t)$, знакоположительного в области $\| x_t \| \le H$. Данный функционал возникает при вычислении оценки величины производной функционала *V* в условии (4).

Л е м м а 2. *Пусть в уравнении (1) оператор D асимптотически устойчив, функция* f *отображает R× (ограниченные множества из C) в ограниченные множества в* R^n. *Если найдется функционал V, числа* $k_1 > 1$, $k_2 > 1$, $H > 0$ *и функции класса Хана* a, b, ω *такие, что для* $(t, x_t) \in R_+ \times B(H)$ *выполняется условие (3) и условие (4) в виде неравенства*

$$\dot V(t, x_t) \le -W(t, x_t), \quad \text{если } V(t, x_t) > 0 \text{ и } k_2 V(t, x_t) \ge V(t+\alpha, x_{t+\alpha}) \forall \alpha \in [-r, 0],$$

где функционал $W(t, x_t)$ *знакоположителен в области* $\| x_t \| \le H$, *то для всякого решения* $x(t)$ *такого, что* $\| x_t \| \le H$ $\forall t \in R_+$ *существует* $\lim\limits_{t\to\infty} W(t, x_t) = 0$.

Опираясь на эти леммы, легко может быть получено доказательство сформулированных выше теорем по аналогии с доказательствами соответствующих результатов из работ [3–5].

Помимо доказательства признаков асимптотической устойчивости, приведенные выше леммы предоставляют эффективный инструмент и для изучения локализации предельных множеств решений систем нейтрального типа как относительно поверхностей уровня самого функционала *V*, так и относительно поверхностей уровня функционалов *W*, построенных при вычислении оценок величины $\dot V(t, x_t)$.

Отметим, что данные условия ориентированы на применение ряда известных конструкций функционала Ляпунова [1; 2; 6], однако выгодно отличаются от известных условий асимптотической устойчивости тем, что условие на знак производной функционала в этих теоремах намного слабее известных ранее. Последнее обстоятельство, в перспективе, должно приводить к ослаблению требований, налагаемых на коэффициенты и управление системы, применяемое для достижения ее стабилизации.

Кроме того, опишем несколько важных частных случаев, имеющих самостоятельную значимость как для теории, так и для приложений управляемых систем нейтрального типа. Одним из важнейших частных случаев является случай автономных систем

$$\frac{d}{dt} D(x_t) = f(x_t), \; f(0) \equiv 0. \tag{6}$$

Для таких систем использованы немонотонные функционалы, у которых «сосредоточенная» часть является комбинацией знакоопределенной функции и разностного оператора, т. е. $V(x_t) = V_1(D(x_t)) + V_2(x_t)$, где V_1 – функция из R^n в R_+, задающая сосредоточенную часть функционала, а V_2 – функционал, не являющийся атомарным [1] в нуле и задающий распределенную часть *V*. Для таких функционалов целесообразно требовать выполнения в $B(H)$ следующей оценки величины функционала $V(x_t)$

$$a(| x(t) |) \le V(x_t) \le b(\| x_t \|), \text{ если } k_1 | x(t) | \ge \| x_t \|. \tag{7}$$

Для величины производной функционала в такой ситуации логично использовать следующие оценки:

$$\dot{V}(x_t) \le -W(x_t), \text{ если } k_2 V(x_t) \ge V(x_{t+\alpha}) \forall \alpha \in [-r, 0], \tag{8}$$

где функционал W является знакоположительным, т. е. $W(x_t) \ge 0$.

В более узкой области фазового пространства величина $\dot{V}(x_t)$ должна удовлетворять более жесткому условию, аналогичному требованию положительной определенности,

$$\dot{V}(x_t) \le -\mathrm{w}(\| D(x_t) \|), \text{ если } k_2 V(x_{t+\theta}) \ge V(x_{t+\alpha}) \forall \alpha, \forall \theta \in [-r, 0], \tag{9}$$

где $\| D(x_t) \| = \max\limits_{\theta \in [-r, 0]} | D(x_{t+\theta})) |$.

Используя такие функционалы, установлены следующие утверждения, описывающие асимптотическое поведение решений автономных систем.

Т е о р е м а 3. *Пусть в уравнении (6) оператор D асимптотически устойчив, функция f отображает ограниченные множества из C в ограниченные множества в R^n.*

Если найдется функционал V, числа $k_2 > 1$, $H > 0$ и функции класса Хана a, b, ω такие, что для $x_t \in B(H)$ выполняются условия (7), (8), то положение равновесия $x(t) \equiv 0$ уравнения (6) равномерно устойчиво.

Если при этом положение равновесия $x(t) \equiv 0$ уравнения (6) не является асимптотически устойчивым, то всякое решение $x(t)$, не стремящееся к положению равновесия $x(t) \equiv 0$, стремится при $t \to \infty$ к множеству

$$W_0 = \{x_t \mid W(x_t) = 0,\ k_2 V(x_{t+\theta}) \ge V(x_{t+\alpha}) \forall \alpha,\ \forall \theta \in [-r, 0]\}. \tag{10}$$

Основываясь на этой теореме, описывающей расположение траекторий в окрестности положения равновесия автономной системы, установлен следующий признак равномерной асимптотической устойчивости таких систем.

Т е о р е м а 4. *Пусть в уравнении (6) оператор D асимптотически устойчив, функция f отображает ограниченные множества из C в ограниченные множества в R^n.*

Если найдется функционал V, числа $k_2 > 1$, $H > 0$ и функции класса Хана a, b, ω такие, что для $x_t \in B(H)$ выполняются условия (7), (8), (9), то положение равновесия $x(t) \equiv 0$ уравнения (6) равномерно асимптотически устойчиво.

Если же условия теоремы 3 выполнены, а условие (9) не выполнено, то следует построить подмножества W_0^c множества W_0, описанного в (10). Эти подмножества задаются следующим образом:

$$W_0^c = \{x_t \mid W(x_t) = 0,\ V(x_t) = c > 0\}.$$

Опираясь на теорему 3 легко показать, что, если условия теоремы 3 выполнены, а положение равновесия не является асимптотически устойчивым, то найдутся сколь угодно малые числа $c > 0$, такие что во множестве W_0^c обязательно содержится целая положительная полутраектория. Таким образом, отсутствие во множествах W_0^c при всех достаточно малых $c > 0$ целых положительных полутраекторий уравнения (6) является достаточным условием асимптотической устойчивости, аналогичным хорошо известной для ОДУ теореме Барбашина–Красовского.

Использование немонотонных функционалов для синтеза управлений, стабилизирующих системы с запаздыванием нейтрального типа. В настоящем разделе рассматриваются системы уравнений с запаздыванием, имеющие контур управления

$$\frac{d}{dt} D(t, x_t) = f(t, x_t, u_t),\ f(t, 0, 0) \equiv 0, \tag{11}$$

где $f : R_+ \times C([-r, 0], R^n) \times D([-r, 0], R^m) \to R^n$, $u : R_+ \times C([-r, 0],\ R^n) \times D([-r, 0],\ R^m) \to R^m$, $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-r, 0]$.

Здесь и всюду ниже $D_m = D([-r, 0],\ R^m)$ – множество ограниченных, кусочно-непрерывных функций $\psi : [-r, 0] \to R^m$, $\|\psi\| = \sup\limits_{\theta \in [-r, 0]} |\psi(\theta)|$.

Функция f предполагается такой, чтобы для любых $(t_0, \varphi_0) \in R_+ \times C_n$, $\|\varphi_0\| \le H$, и для всякой кусочно-непрерывной функции $u: R_+ \times C_n \times D_m \to R^m$ обеспечить существование дифференцируемого при $t > t_0$ решения $x(t, t_0, \varphi_0, u(t, x_t, u_t))$ такого, что $x(t_0, t_0, \varphi_0, u(t_0, x_{t_0}, u_{t_0})) = \varphi_0$.

Функция $u(t, \varphi, \psi)$ $(u(t, 0, 0) \equiv 0)$ в дальнейшем строится таким образом, чтобы положение равновесия $x(t) \equiv 0$ «замкнутой» системы (11) было равномерно асимптотически устойчивым либо асимптотически устойчивым в обычном смысле.

Задачу выбора такой функции u будем называть задачей стабилизации. Если же дополнительно задан некоторый функционал $\omega: R_+ \times C_n \times D_m \to R$, то задачу поиска управления u, минимизирующего величину

$$I = \int_{t_0}^{\infty} \omega(\tau, x_\tau, u_\tau) d\tau,$$

будем называть задачей оптимальной стабилизации.

При этом говоря об оптимальности некоторого управления $u^0(t, \varphi, \psi)$, всюду ниже будем иметь в виду следующее: найдется такое число $0 < h \le H$, что для всякого иного стабилизирующего систему (11) управления $u(t, \varphi, \psi)$ верно

$$\int_{t_0}^{\infty} \omega(\tau, x_\tau^0, u_\tau^0) d\tau \le \int_{t_0}^{\infty} \omega(\tau, x_\tau, u_\tau) d\tau,$$

если начальное условие (t_0, φ_0) таково, что решение $x^0(t, t_0, \varphi_0, u^0(t, x_t, u_t))$, соответствующее $u^0(t, \varphi, \psi)$, и решение $x(t, t_0, \varphi_0, u(t, x_t, u_t))$, соответствующее $u(t, \varphi, \psi)$, не покидают область $\|x_t\| \le h$ при $t > t_0$.

Одним из основных приемов построения стабилизирующих управлений является привлечение вспомогательных функционалов, опираясь на логику метода динамического программирования. При этом стандартная схема использования метода динамического программирования вынуждает ориентироваться на построение положительно-определенного функционала $V: R_+ \times C_n \to R_+$, в том смысле, что

$$V(t, \varphi) \ge v(|\varphi(0)|) \; \forall t \in R_+, \forall \|\varphi\| \le H. \tag{12}$$

При этом необходимо также использовать и критерий качества ω, являющийся положительно-определенным в том смысле, что

$$\omega(t, \varphi, \psi) \ge \omega_1(|\varphi(0)|), \forall t \in R_+, \; \forall \|\varphi\| \le H, \; \forall \|\psi\| \le H, \tag{13}$$

где условие (13) выполняется, по крайней мере, вдоль решений уравнения (11), порожденных управлением u.

Условия (12) и (13) являются следствием использования в стандартной схеме (метода динамического программирования) теорем об асимптотической устойчивости, опирающихся на определенно-положительные функционалы Ляпунова, имеющие отрицательно-определенную производную в силу исследуемой системы с запаздыванием.

Выше были предложены условия асимптотической устойчивости и равномерной асимптотической устойчивости уравнений с запаздыванием нейтрального типа, опирающиеся на использования функционалов Ляпунова, не являющихся положительно-определенными и монотонно убывающими вдоль траекторий. Неравенства, аналогичные тем, которые содержатся в условиях (12), (13), должны выполняться для таких функционалов лишь на некоторой части фазового пространства. Достаточно часто эта часть фазового пространства имеет весьма простую и наглядную структуру. Например, во многих случаях эта часть – конус в C, задаваемый некоторым числом $K > 1$ и состоящий из таких φ, что $K|\varphi(0)| \ge \|\varphi\|$. Ниже будут приведены достаточные условия оптимальной стабилизации системы (11), опирающиеся на использование немонотонных, незнакоопределенных функционалов V.

Немонотонные функционалы для стабилизации систем с запаздыванием нейтрального типа. В первую очередь приведем признак равномерной стабилизации, опирающийся на установленные выше условия равномерной асимптотической устойчивости систем с запаздыванием нейтрального типа и ориентированный в основном на использование в качестве функционалов V и ω соответствующих квадратичных форм.

Т е о р е м а 5. *Пусть в уравнении (11) оператор D асимптотически устойчив, функция* f *отображает* $R\times$ *(ограниченные множества из* $C_n \times D_m$*) в ограниченные множества в* R^n*, решения* $x(t, t_0, \varphi_0)$ *непрерывно зависят от начальных данных* $(t_0, \varphi_0) \in R_+ \times B(H)$ *равномерно по* $t_0 \in R_+$*. Если для некоторых чисел* $K > 1$ *и* $H > 0$ *найдутся функционалы* $V(t, \varphi)$ *и* $u^0(t, \varphi, \psi)$ *такие, что для некоторых функций класса Хана* a, b, ω_1, *где* $a(Ks) > b(s)$, *при* $\|\varphi\| \le H$, *выполняются условия*

1) $a(|\varphi(0)|) \le V(t, \varphi) \le b(|\varphi(0)|)$, *если* $t \in R_+$, *и* $K|\varphi(0)| \ge \|\varphi\|$;

2) $\omega(t, x_t, u_t^0) \ge \omega_1(|D(t, x_t)|)$, *при* $\|x_t\| \le H$, *если* $K|x(t)| \ge \|x_t\|$, *где* $x(t)$ *– решение, порожденное управлением* u^0;

3) $\dot V(t, x_t, u_t^0) + \omega(t, x_t, u_t^0) = 0$ $\forall t \in R_+$, *при* $\|x_t\| \le H$, *где* $x(t)$ *– решение, порожденное управлением* u^0;

4) $\dot V(t, x_t, u_t) + \omega(t, x_t, u_t) \ge 0$ $\forall t \in R_+$, *при* $\|x_t\| \le H$, *где* $x(t)$ *– решение, порожденное управлением* u,

то $u^0(t, \varphi, \psi)$ *– оптимальное стабилизирующее управление.*

Следующий признак оптимальной стабилизации не содержит требования асимптотической устойчивости разностного оператора. Однако нельзя исключать того, что такое требование (либо близкие к нему по содержанию) может появиться при проверке условия 1) в тех случаях, когда функционал $V(t, x_t)$ задан либо в виде композиции некоторого функционала и разностного оператора $V(t, x_t) = V_1(t, D(x_t))$, либо в виде суммы $V(t, x_t) = V_1(t, D(x_t)) + V_2(t, x_t)$, где V_1 – обычная функция векторного аргумента, а $V_2(t, x_t)$ – функционал, имеющий инвариантную производную в силу уравнения. Последний вариант построения функционала характерен для линейных и возмущенных линейных уравнений, которые представляют особый интерес в связи с изучением вопросов стабилизации по первому приближению.

Т е о р е м а 6. *Пусть найдутся числа* $H > 0$, $K > 1$ *и функционалы* $V(t, \varphi)$ *и* $u^0(t, \varphi, \psi)$ *такие, что для некоторых класса Хана функций* a, b_1, b_2, ω_1, *где* $b_2(s) = b^{-1}(a(s)/K - b_1(s))$ $\forall s > 0$, *выполнены условия*

1) $a(|\varphi(0)|) \le V(t, \varphi) \le b(|\varphi(0)|) + b_1(\|\varphi\|)$, $\forall t \in R_+, \|\varphi\| \le H$;

2) $\omega(t, x_t, u_t^0) \ge \omega_1(|x(t)|)$ $\forall t \in R_+$, *при* $\|x_t\| \le H$, *если* $|x(t)| \ge b_2(\|x_t\|)$, *где* $x(t)$ *– решение, порожденное управлением* u^0;

3) $\dot V(t, x_t, u_t^0) + \omega(t, x_t, u_t^0) = 0$ $\forall t \in R_+$, *при* $\|x_t\| \le H$, *где* $x(t)$ *– решение, порожденное управлением* u^0;

4) $\dot V(t, x_t, u_t) + \omega(t, x_t, u_t) \ge 0$ $\forall t \in R_+$, *при* $\|x_t\| \le H$, *где* $x(t)$ *– решение, порожденное управлением* u.

Тогда $u^0(t, \varphi, \psi)$ *является оптимальным стабилизирующим управлением.*

Нетрудно заметить, что в данном случае функционал качества ω может принимать даже отрицательные значения вне области $|\varphi(0)| \ge b_2\|\varphi\|$, где функция класса Хана b_2 порождена функциями a, b, b_1, оценивающими функционал V снизу и сверху.

Доказательства теорем 6, 5 основаны на применении к стандартным приемам метода динамического программирования идей, использованных при доказательстве теорем об асимптотической устойчивости, приведенных выше, и следующего простого наблюдения. Если для некоторого сегмента x_t решения $x(t)$ уравнения (11) выполнено требование 1) теоремы 6 и верно неравенство $k_2 V(t, x_t) \ge V(t+\alpha, x_{t+\alpha}) \forall \alpha \in [-r, 0]$, то для него выполнено и неравенство $|x(t)| \ge b_2(\|x_t\|)$, где $b_2(s) = b^{-1}(a(s)/K - b_1(s))$ $\forall s > 0$.

Оценки возмущений неразрушающих стабилизирующих свойств управления для систем с запаздыванием нейтрального типа. Перейдем теперь к изучению воздействия возмущений на стабилизированные с помощью описанного выше механизма системы, т. е. к изучению систем вида

$$\frac{d}{dt} D(t, x_t) = f(t, x_t, u_t) + R(t, x_t, u_t),\ f(t, 0, 0) \equiv 0, \tag{14}$$

где возмущение R таково, что для суммарной правой части выполнены предположения указанные вначале для функции f.

В данном разделе для некоторых частных случаев систем с запаздыванием нейтрального типа построены оценки для возмущений, не разрушающих стабилизацию системы. Указанные оценки базируются на приведенных выше утверждениях и отражают специфику задачи стабилизации с использованием того или иного класса функционалов Ляпунова.

Так, теорема 5 ориентирована на стабилизацию линейных систем, у которых разностный оператор имеет вид $D(t, x_t) = x(t) + D_0 x(t-r)$, где D_0 – постоянная матрица и, соответственно, использование функционалов Ляпунова, заданных в виде положительно определенной квадратичной формы $V(t, x_t) = x^T Ax$ на пространстве R^n, т. е. квадратичной функции Ляпунова–Разумихина. При этом естественно считать весовую функцию ω, задающую функционал качества управления, удовлетворяющей оценкам $l_1 |x(t)| \le |\omega(t, x_t, u_t)| \le l_2 |x(t)|$, соответствующим положительно определенной квадратичной форме на пространстве R^n.

Т е о р е м а 7. *Пусть в уравнении (14) оператор D асимптотически устойчив, функция f отображает R× (ограниченные множества из $C_n \times D_m$) в ограниченные множества в R^n и линейна по $x_t, u_t, V(t, x_t) = x^T Ax$. Если выполнены все условия теоремы 5 и для функции R верна оценка*

$$|R(t, \varphi, u_t)| \le \frac{l_1}{l_m K} \|\varphi\|,$$

если $t \in R_+$ и $K|\varphi(0)| \ge \|\varphi\|$, где l_m – максимальное собственное число симметричной положительно определенной матрицы A, то $u^0(t, \varphi, \psi)$ является стабилизирующим управлением и для системы (14).

Отметим, что оценка возмущения не накладывает на функцию $|R(t, \varphi, u_t)|$ существенных ограничений вне области фазового пространства, описываемой условием $K|\varphi(0)| \ge \|\varphi\|$.

Т е о р е м а 8. *Пусть в уравнении (14) функция f отображает R× (ограниченные множества из $C_n \times D_m$) в ограниченные множества в R^n. Если выполнены все условия теоремы 6, выполнено неравенство*

$$\left| \frac{\partial V_1(t, x)}{\partial x} \right| \le L,$$

и для функции R верна оценка

$$|R(t, \varphi, u_t)| \le \frac{1}{2L} \omega_1(\varphi(0)),$$

при $t \in R_+$ и $|\varphi(0)| \ge b_2(\|\varphi\|)$, то $u^0(t, \varphi, \psi)$ является стабилизирующим управлением и для системы (14).

Здесь оценка возмущения не накладывает на рост функции $|R(t, \varphi, u_t)|$ существенных ограничений вне области фазового пространства, описываемой условием $|\varphi(0)| \ge b_2(\|\varphi\|)$.

Кроме того, отметим, что в рамках теоремы 8 не формулируется явных требований к разностному оператору. Тем не менее, по сути дела, характеристики этого оператора оказывают влияние на величину функции b_2, а значит и на область, в которой требуется малость возмущений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Ф13К-004).

Литература

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.
2. *Андреев А. С.* Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. Ульяновск, 2005. – 328 с.
3. *Гайшун И. В., Княжище Л. Б.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 8. С. 1291–1298.
4. *Княжище Л. Б.* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 2. С. 189–196.
5. *Княжище Л. Б.* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 8. С. 1056–1065.
6. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.

L. B. KNYAZHISHCHE

klb@im.bas-net.by

NONMONOTONIC FUNCTIONALS IN STABILITY AND STABILIZATION CONDITIONS FOR NEUTRAL TYPE SYSTEMS

Summary

New stabilization tests are presented with new perturbation estimates that guarantee stabilization properties of control which stabilize unperturbed neutral type systems.