Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **март–апрель** **Том 59 № 2**

УДК 517.9

М. Х. МАЗЕЛЬ, О. И. ПИНДРИК

КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено членом-корреспондентом Я. В. Радыно)

Белорусский государственный университет, Минск *Поступило 05.11.2014*

При построении общей теории уравнений в частных производных было обнаружено, что даже в случае постоянных коэффициентов существует настолько обширное множество качественно различных типов уравнений, что вопрос об их классификации даже не ставился. Обычно в этой теории рассматриваются вопросы об описании уравнений с заданными свойствами решений, что приводит к выделению эллиптических, гипоэллиптических и некоторых других типов уравнений [1; 2]. Вместе с тем для уравнений второго порядка с вещественными коэффициентами в учебниках [3–5] описано приведение таких уравнений к каноническому виду. При этом обычно по каноническому виду выделяются три типа уравнений: эллиптические, гиперболические и параболические. Случай двух переменных здесь особый – в этом случае классификация уравнений второго порядка с вещественными коэффициентами исчерпывается тремя типами – главная часть любого такого уравнения с помощью линейных преобразований переменных приводится к одному из трех канонических видов:

I) $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, если оператор параболический;

II) $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, если оператор эллиптический;

III) $\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ или $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$, если оператор гиперболический.

Кроме того, для каждого из канонических видов в случае двух переменных приведены постановки корректных краевых задач.

При рассмотрении уравнений с комплексными коэффициентами (даже в случае двух независимых переменных) появляются качественно новые типы уравнений, постановка краевых задач для которых требует дополнительного исследования.

Например, для эллиптических уравнений одной из наиболее естественных краевых задач является задача Дирихле. В случае вещественных коэффициентов и в случае трех и более независимых переменных каждое эллиптическое уравнение – правильно эллиптическое и задача Дирихле для него является фредгольмовой. А в случае двух переменных существуют так называемые неправильно эллиптические уравнения второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами, для которых свойства задачи Дирихле принципиально другие. Такие задачи рассматривались в [6].

Другим примером может служить задача Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

При положительном a это уравнение теплопроводности, при отрицательном a – это обратное уравнение теплопроводности. А в комплексном случае, при $a = i$, это уравнение есть уравнение Шрёдингера. Заметим, что уравнение Шрёдингера является одним из основных объектов в квантовой механике и это уравнение не эквивалентно какому-либо уравнению с вещественными коэффициентами. Задача Коши для таких уравнений рассматривалась в [7], где было отмечено качественное отличие свойств задачи Коши для указанных трех случаев.

Эти примеры показывают, что при комплексных коэффициентах даже в случае двух независимых переменных классификация уравнений не может сводиться к трем классическим типам уравнений. Поэтому возникает задача классификации таких уравнений и задача о приведении их к каноническому виду. Отметим отличие этих задач. Классификация уравнений заключается в разбиении их на классы по какому-либо свойству; уравнения можно классифицировать по разным свойствам, т. е. возможны различные классификации. Задача о приведении к каноническому виду есть задача классификации, при которой в один класс попадают уравнения, переходящие друг в друга с помощью заданных преобразований. Например, для рассматриваемых уравнений возможна естественная классификация по расположению корней характеристического уравнения в комплексной плоскости. В случае вещественных коэффициентов эти две классификации совпадают. Но при комплексных коэффициентах оказывается, что уравнения из одного класса (с одинаковым расположением корней) не приводятся одно к другому. Таким образом, решение задачи о приведении к каноническому виду дает более детальную классификацию уравнений. Нам не удалось обнаружить в литературе решения этой задачи.

Цель работы – приведение к наиболее простому виду оператора

$$A = a_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{1}$$

где a_1, b_1 и c_1 – комплексные коэффициенты.

Для такого приведения будем использовать не только линейные преобразования координат (с вещественными коэффициентами)

$$x = \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1,$$

$$y = \alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1,$$

но и умножение оператора на комплексное число.

Поясним имеющиеся здесь сложности. Оператор A может быть разложен на вещественную и мнимую части: записан в виде $A = A_1 + iA_2$, где A_i – дифференциальные операторы второго порядка с двумя независимыми переменными и вещественными коэффициентами. Каждый из операторов A_1, A_2 можно привести своим линейным преобразованием переменных к одному из видов I)–III). Основная сложность задачи связана с тем, что одним линейным преобразованием невозможно одновременно привести вещественную и мнимую части к каноническом виду.

Кроме того, отметим, что классификация уравнений по каноническому виду вещественной и мнимой части не является содержательной. Например, если оператор $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + i\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$, у которого действительная часть A_1 – эллиптический оператор, а мнимая часть A_2 – гиперболический, умножить на число $\frac{(1+i)}{2}$, получим оператор $\frac{\partial^2}{\partial y^2} + i\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, у которого вещественная и мнимая части являются параболическими.

Поясним также отличие вещественного и комплексного случаев с геометрической точки зрения.

В вещественном случае множество операторов устроено как трехмерное вещественное пространство. На нем действует четырехпараметрическая группа линейных преобразований и существует только три класса операторов, переходящих друг в друга при рассматриваемых преобразованиях.

В комплексном случае множество операторов устроено как шестимерное вещественное пространство. На нем действует пятипараметрическая группа линейных преобразований. Из этого следует, что класс операторов, в которые переходит заданный оператор при рассматриваемых преобразованиях, является подмногообразием, размерность которого не больше пяти. Поэтому множество таких классов имеет мощность континуума; обычно это проявляется в том, что множества классов нумеруются с помощью нескольких вещественных параметров. В частности, в формулировке приведенной ниже теоремы виды 3, 4 и 6 состоят не из одного оператора, а представляют собой семейства, занумерованные одном вещественным параметром.

Т е о р е м а. *Любой оператор (1) с комплексными коэффициентами можно с помощью линейных преобразований независимых переменных и умножения на комплексное число привести к одному из следующих шести видов:*

1. $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$;
2. $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+i\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$;
3. $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+ia^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, *где* $a\in R$;
4. $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+ia^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, *где* $a\in R$;
5. $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+i\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}$;
6. $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+(1+ia^2)\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}$, $a\in R$,

при этом он может быть приведен только к одному из них.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассматриваемый оператор A линейной заменой переменных и умножением на число $(-i)$ можно привести к одному из следующих видов:

I) $A=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+iB$, если A_1 или A_2 – параболические;

II) $A=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+iB$, если один из операторов A_i эллиптический, а другой не параболический;

III) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+iB$, если операторы A_i гиперболические

(здесь $B=a\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+b\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}+c\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$; $a,b,c\in R$), т. е. оператор A приводится к форме с канонической вещественной частью и мнимой частью общего вида.

Опишем далее преобразования, которые приводят к наиболее простому виду как действительную, так и мнимую части операторов.

Рассмотрим сначала оператор I) при $c\neq 0$. С помощью замены

$$x=x_1,$$

$$y=-\frac{b}{2c}x_1+\beta_2 y_1,$$

оператор A приводится к виду

$$A=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+i\left(\frac{4ac-b^2}{4c}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c\beta_2^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

(здесь и далее в операторе обозначаем новые переменные через x и y).

При этом возможны три случая:

а) $4ac-b^2=0$ (т. е. оператор B – параболический).

Тогда при $c>0$ возьмем $\beta_2=\dfrac{1}{\sqrt{c}}$ и оператор A будет иметь вид

$$A=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{2}$$

Если $c<0$, то $\beta_2=\dfrac{1}{\sqrt{-c}}$, получим

$$A=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-i\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Умножая A на i и заменяя x на y, получим (2).

б) $4ac-b^2>0$ (т. е. оператор B – эллиптический).

В этом случае A имеет вид

$$A=c\alpha_1^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+i\left(\alpha_1^2(4ac-b^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c^2\beta_2^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

который приводится к следующему оператору:

$$A=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+ia\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Если $a<0$, то разделим полученный оператор на число $(1+ia)$.

Итак, в случае $4ac-b^2>0$ рассматриваемый оператор A приводится к виду

$$A=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+ia^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}. \tag{3}$$

в) $4ac-b^2<0$ (т. е. B – гиперболический).

Аналогично б) оператор A приводится к виду

$$A=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}+ia^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}. \tag{4}$$

2) Рассмотрим теперь случай $c=0$.

Тогда оператор A с помощью замены переменных приводится к виду

$$A=\alpha_1^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+i\alpha_1\left((a\alpha_1+\beta b\beta_1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b\beta_2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right).$$

Возможны следующие ситуации:

а) если $b\neq 0$, то возьмем $\beta_1=\frac{-a}{b}\alpha_1$.

Тогда оператор A приводится к виду

$$A=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2}{\partial x\partial y};$$

б) если $b=0$, то умножением на комплексное число $\frac{1}{(\alpha_1^2+i(a\alpha_1^2))}$

оператор приводится к виду

$$A=\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Рассмотрим теперь оператор II), т. е. оператор $A=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+iB$.

Положим

$$x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}x_1-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}y_1,$$
$$y=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}y_1,$$

где t – корень уравнения $bt^2-2(a-c)t-b=0$, дискриминант которого $((a-c)^2+b^2)$ неотрицателен.

После замены оператор A примет вид

$$A=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+i\left(\frac{a-bt+ct^2}{1+t^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{at^2+bt+c}{1+t^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right),$$

т. е. $A=(1+ia')\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(1+ic')\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, где $a',c'\in R$.

Тогда

а) если $1+a'c'>0,$ то оператор A умножением на $\lambda \in C$ приводится к виду (3);

б) если $1+a'c'<0,$ то оператор A приводится к виду (4);

в) если $1+a'c'=0,$ то получаем (2).

Наконец, рассмотрим оператор III): $A=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}+iB,$ где B – гиперболический оператор.

1) Если $(a+c)^2-b^2\geq 0,$ то существует $t\in R,$ являющееся корнем квадратного уравнения $bt^2+2(a+c)t+b.$ Сделав замену $\beta_1=t\alpha_1,$ $\alpha_2=t\beta_2,$ получим оператор

$$A=(1-t^2)\left(\alpha_1^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\beta_2^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+i\left(\alpha_1^2(a+bt+ct^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\beta_2^2(at^2+bt+c)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

который приводится либо к виду (3), либо к виду (4).

2) Если $(a+c)^2-b^2<0,$ то сделав замену

$$x_1=x+y,$$

$$y_1=x-y,$$

получим оператор

$$A=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+i\left(a'\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b'\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+c'\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

при этом условие $(a+c)^2-b^2<0$ эквивалентно условию $a'c'<0.$ Другими словами, оператор A имеет вид

$$A=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+i\left(a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-c^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

Полученный оператор можно привести к виду

$$A=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}+(a^2+ib^2)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y},$$

рассмотрение которого можно свести к случаю $a=1$. Теорема доказана.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору А. Б. Антоневичу и академику В. И. Корзюку за обсуждение и ценные советы.

Литература

1. *Паламодов В. П.* Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. М.: Физматгиз, 1967. – 488 с.

2. *Егоров Ю. В.* Линейные дифференциальные операторы главного типа. М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. лит., 1984. – 360 с.

3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. – 528 с.

4. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ; Наука, 2004. 7-е изд. – 798 с.

5. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977. – 504 с.

6. *Бурский В. П., Кирпиченко Е. В.* // Укр. мат. журн. 2011. Т. 62, № 2. С. 156–164.

7. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Главное издательство физ.-мат. лит., 1958. – 275 с.

M. H. MAZEL, O. I. PINDRIK

olgapindrik@gmail.com

CANONICAL FORM OF SECOND-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH COMPLEX COEFFICIENTS

Summary

This article presents a canonical form of second-order partial differential operators with complex coefficients in the case of two variables.