Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 **январь–февраль** **Том 60 № 1**

УДК 517.926.4

Е. А. БАРАБАНОВ, А. С. ВОЙДЕЛЕВИЧ

СПЕКТРЫ ВЕРХНИХ ЧАСТОТ СЕРГЕЕВА НУЛЕЙ И ЗНАКОВ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
bar@im.bas-net.by; voidelevich@gmail.com

Доказано, что спектры верхних характеристических частот нулей и знаков (называемых также верхними частотами Сергеева) линейного дифференциального уравнения порядка выше двух являются суслинскими множествами неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой. В предположении, что спектры содержат точку нуль, получено обращение этого утверждения. Доказано также, что верхние частоты Сергеева нулей и знаков, рассматриваемые как функции начального вектора решения, являются функциями третьего и второго бэровских классов соответственно.

Ключевые слова: линейное дифференциальное уравнение, верхняя характеристическая частота нулей, верхняя характеристическая частота знаков, классы Бэра.

E. A. BARABANOV, A. S. VAIDZELEVICH

SPECTRA OF THE UPPER SERGEEV FREQUENCIES OF ZEROS AND SIGNS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
bar@im.bas-net.by; voidelevich@gmail.com

It is proved that the spectra of the upper characteristic frequency of zeros and the frequency of signs (also called as the upper Sergeev frequencies) of the linear differential equations are the Suslin sets of the nonnegative semi-axis of the extended number straight line. The inverse claim is obtained under the assumption that the spectra contain zero. It is also proved that the upper Sergeev frequency of zeros and the frequency of signs, considered as the functions of initial values, are the functions of the third and second Baire classes, respectively.

Keywords: linear differential equation, upper characteristic frequency of zeros, upper characteristic frequency of signs, Baire classes.

Введение и постановка задачи. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-ого порядка ($n \in \mathbb{N}$)

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \stackrel{\text{def}}{=} [0,+\infty), \tag{1}$$

с непрерывными коэффициентами $a_i(\cdot): \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$. Будем отождествлять уравнение (1) и его строку $a = a(\cdot) = (a_1(\cdot),\ldots,a_n(\cdot))$ коэффициентов и в силу этого обозначать уравнение (1) также через a. Множество всех решений (продолженных на $[0,+\infty)$) уравнения a обозначим через $S(a)$, а через $S_*(a)$ – множество его ненулевых решений. Класс всех уравнений (1) обозначим через $\tilde{\mathcal{E}}^n$ и вследствие указанного отождествления будем писать $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$.

Говорят, что в точке $t > 0$ происходит смена знака функции $y(\cdot): \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, если в любой окрестности этой точки функция $y(\cdot)$ принимает как отрицательные, так и положительные значения. Через $\nu^0(y(\cdot);\alpha,\beta)$ обозначим число нулей, а через $\nu^-(y(\cdot);\alpha,\beta)$ – число смен знака функции $y(\cdot): \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ на полуинтервале $(\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}_+$ (если число нулей или число точек смен знака функции $y(\cdot)$ на промежутке $(\alpha,\beta]$ бесконечно, то соответствующие величины считаем равными $+\infty$; очевидно, что для ненулевого решения $y(\cdot)$ уравнения (1) эти величины конечны).

Следующие определения даны И. Н. Сергеевым [1; 2].

О п р е д е л е н и е 1. *Верхней характеристической частотой нулей и верхней характеристической частотой знаков решения $y(\cdot)\in S_*(a)$ уравнения $a\in\widetilde{\mathcal{E}}^n$ называются соответственно величины*

$$\hat{\nu}^0[y] \overset{\text{def}}{=} \varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^0(y(\cdot);0,t) \quad и \quad \hat{\nu}^-[y] \overset{\text{def}}{=} \varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^-(y(\cdot);0,t). \tag{2}$$

Далее верхние характеристические частоты нулей и знаков мы называем частотами Сергеева нулей и знаков соответственно.

О п р е д е л е н и е 2. *Спектрами верхних частот Сергеева нулей $\hat{\nu}^0(S_*(a))$ и знаков $\hat{\nu}^-(S_*(a))$ уравнения $a\in\widetilde{\mathcal{E}}^n$ называются множества, состоящие соответственно из верхних частот Сергеева нулей и знаков ненулевых решений этого уравнения.*

Теория асимптотических характеристик (2) и других родственных им характеристик решений линейных дифференциальных уравнений и систем начата И. Н. Сергеевым работами [1] и [2] и развита в его работе [3]. Ряд результатов о величинах (2) получен также в работах других математиков. Приведем непосредственно примыкающие к настоящей работе и нужные нам результаты о характеристиках (2). Если коэффициенты уравнения (1) ограничены на временно́й полуоси, то, как доказано в [2], частоты (2) также ограничены (одной и той же постоянной для всех ненулевых решений). Для уравнения с неограниченными коэффициентами величины (2) могут, вообще говоря, на некоторых или всех ненулевых решениях уравнения (1) принимать значение $+\infty$. Как следует из теоремы Штурма и отмечено в [1; 2], спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков уравнения порядка не выше второго совпадают и состоят из одного неотрицательного числа; причем для уравнения первого порядка это число равно нулю. Для уравнений высших порядков о строении спектров известно следующее. В [4] доказано, что для произвольных положительных несоизмеримых чисел $\omega_2>\omega_1$ существует автономное уравнение (1) четвертого порядка, каждый из спектров верхних частот Сергеева нулей и знаков которого совпадает с отрезком $[\omega_1,\omega_2]$. В [5] установлено существование периодического дифференциального уравнения третьего порядка, спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков которого содержат невырожденный отрезок. В [6] построены примеры двух дифференциальных уравнений третьего порядка, спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков одного из которых совпадают с множеством рациональных чисел отрезка $[0,1]$, а другого – с объединением множества иррациональных чисел отрезка $[0,1]$ и числа нуль.

Естественно возникает вопрос, что́ при каждом $n\geqslant 3$ представляет собой каждый из спектров верхних частот Сергеева нулей и знаков уравнений $a\in\widetilde{\mathcal{E}}^n$. В работе получен «почти полный» ответ на этот вопрос: доказано, что указанные спектры являются суслинскими множествами неотрицательной полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+\overset{\text{def}}{=}[0,+\infty]$ расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}\overset{\text{def}}{=}\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ (которую мы рассматриваем с естественным порядком и с порядковой топологией), и в предположении принадлежности нуля таким множествам получено обращение этого утверждения для $n=3$. Доказательство того, что указанные спектры являются суслинскими множествами, получается в работе как следствие устанавливаемого в ней утверждения о принадлежности определяемых ниже функций $\hat{\nu}^0(\cdot)$ и $\hat{\nu}^-(\cdot)$ классу бэровских функций.

Основная часть. Для каждого уравнения $a\in\widetilde{\mathcal{E}}^n$ асимптотические характеристики (2) задают отображения

$$\hat{\nu}^0[\cdot]:S_*(a)\to\overline{\mathbb{R}}_+ \quad и \quad \hat{\nu}^-[\cdot]:S_*(a)\to\overline{\mathbb{R}}_+, \tag{3}$$

действующие соответственно по правилу: $y\mapsto\hat{\nu}^0[y]$ и $y\mapsto\hat{\nu}^-[y]$. Вместо отображений (3) удобнее рассматривать соответственно функции $\hat{\nu}^0(\cdot)$ и $\hat{\nu}^-(\cdot)$, которые определяются следующим образом. Поскольку между векторным пространством $S(a)$ решений уравнения $a\in\widetilde{\mathcal{E}}^n$ и векторным пространством $\mathbb{R}^n$ имеется естественный изоморфизм $\iota : S(a) \to \mathbb{R}^n$, действующий по правилу $y(\cdot) \mapsto (y(0), \dot{y}(0), \ldots, y^{(n-1)}(0))^{\mathsf{T}}$, то отображения (3) задают функции

$$\hat{\nu}^0(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\nu}^0[\cdot] \circ \iota^{-1} : \mathbb{R}^n_* \to \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ и } \hat{\nu}^-(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\nu}^-[\cdot] \circ \iota^{-1} : \mathbb{R}^n_* \to \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{4}$$

Обратно, поскольку ι – биекция, функции (4) задают отображения (3). Преимущество функций (4) перед отображениями (3) состоит в том, что для всех уравнений из $\widetilde{\mathcal{E}}^n$ их области определения совпадают. Так как отображения (3) (и функции (4)) постоянны на любом одномерном подпространстве с выколотым нулем, то каждая из функций $\hat{\nu}^0(\cdot)$ и $\hat{\nu}^-(\cdot)$ однозначно восстанавливается по ее сужениям (ограничениям) на единичную $(n-1)$-мерную сферу $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле (т. е. $\mathbb{S}^{n-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{C = (C_1, \ldots, C_n)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^n : C_1^2 + \ldots + C_n^2 = 1\}$). Сужения функций $\hat{\nu}^0(\cdot)$ и $\hat{\nu}^-(\cdot)$ на сферу $\mathbb{S}^{n-1}$ обозначим через $\hat{\nu}^0_{\mathbb{S}}(\cdot)$ и $\hat{\nu}^-_{\mathbb{S}}(\cdot)$ соответственно.

Для доказательства теоремы 1 работы нам понадобится доказанная в [2]

Л е м м а 1. *Для уравнения $a \in \widetilde{\mathcal{E}}^n$ найдется последовательность $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$ положительных действительных чисел, такая, что для любого решения $y(\cdot) \in S_*(a)$ справедливы равенства*

$$\hat{\nu}^0[y] = \overline{\lim_{k \to +\infty}} \frac{\pi}{\theta_k} \nu^0(y(\cdot); 0, \theta_k) \quad и \quad \hat{\nu}^-[y] = \overline{\lim_{k \to +\infty}} \frac{\pi}{\theta_k} \nu^-(y(\cdot); 0, \theta_k). \tag{5}$$

Более того, в [2] доказано, что этим свойством обладает любая последовательность положительных чисел $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$, для которой $\theta_k / \theta_{k+1} \to 1$ при $k \to +\infty$, т. е. последовательность, о которой говорится в лемме 1, можно выбрать одной и той же для всех уравнений (1) и их решений.

Для дальнейшего удобно обозначить через $\nu^-_*(y(\cdot); \alpha, \beta)$ число смен знака функции $y(\cdot)$ на интервале (α, β). Очевидно, что замена величины ν^- величиной ν^-_* в правой части последнего равенства в (2) не изменяет значение вычисляемого в нем верхнего предела.

Далее при использовании результатов дескриптивной теории функций мы ссылаемся на монографию [7] как наиболее полно содержащую в нужном нам виде необходимые сведения. Хотя в [7] рассматриваются функции со значениями в $\mathbb{R}$, все результаты и определения справедливы и для функций, как в рассматриваемой нами ситуации, со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$ в силу гомеоморфизма $\ell : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$, задаваемого, например, равенствами: $\ell(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x$, если $x \in \mathbb{R}$, и $\ell(-\infty) = -1$, $\ell(+\infty) = 1$.

Т е о р е м а 1. *Для любого уравнения $a \in \widetilde{\mathcal{E}}^n$ функции $\hat{\nu}^0(\cdot)$ и $\hat{\nu}^-(\cdot)$ являются бэровскими. Более того, имеют место включения: $\hat{\nu}^0(\cdot) \in (*, F_{\sigma\delta})$ и $\hat{\nu}^-(\cdot) \in (*, G_\delta)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через $\{y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot)\}$ обозначим ту фундаментальную систему решений уравнения $a \in \widetilde{\mathcal{E}}^n$, для которой $\iota y_i(\cdot) = e_i$, где e_i – единичный вектор с единицей на i-м месте и нулями на остальных местах, а через $\varphi(\cdot)$ – вектор-функцию $(y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot))^{\mathsf{T}}$. Рассмотрим отображение $y(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$, задаваемое равенством $y(t, C) = \langle \varphi(t), C \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – естественное скалярное произведение (т. е. $\langle \varphi(t), C \rangle = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(t)$, где $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$). Для каждого фиксированного $t > 0$ рассмотрим функции $\nu^0_t(\cdot), \nu^-_t(\cdot) : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{N}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N} \sqcup \{0\}$, действующие соответственно по правилу $C \mapsto \nu^0(y(\cdot, C); 0, t)$ и $C \mapsto \nu^-_*(y(\cdot, C); 0, t)$. Очевидны равенства

$$\hat{\nu}^0_{\mathbb{S}}(C) = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\pi}{t} \nu^0_t(C) \quad и \quad \hat{\nu}^-_{\mathbb{S}}(C) = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\pi}{t} \nu^-_t(C).$$

Для каждого $m \in \mathbb{N}_0$ найдем борелевские типы множеств Лебега $[\nu^0_t(\cdot) \geqslant m]$ и $[\nu^-_t(\cdot) > m]$ функций $\nu^0_t(\cdot)$ и $\nu^-_t(\cdot)$ соответственно.

1. Поскольку функция $y(\cdot,\cdot)$ является непрерывной (по совокупности переменных), то для любых неотрицательных $\alpha < \beta$ множество

$$\overline{M}(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \{(t, C) \in [\alpha, \beta] \times \mathbb{S}^{n-1} : y(t, C) = 0\}$$

замкнуто в $[\alpha, \beta] \times \mathbb{S}^{n-1}$ как прообраз замкнутого множества (нуля) при непрерывном отображении $y(\cdot,\cdot)$. В частности, поскольку пространство $[\alpha, \beta] \times \mathbb{S}^{n-1}$ как произведение компактных пространств компактно, множество $\overline{M}(\alpha, \beta)$ компактно.

Пусть Pr_2 – проекция на второй сомножитель в произведении $[\alpha,\beta]\times\mathbb{S}^{n-1}$. Тогда множество $\overline{N}(\alpha,\beta)\overset{\text{def}}{=}Pr_2\,\overline{M}(\alpha,\beta)$ состоит из всех тех векторов $C\in\mathbb{S}^{n-1}$, для каждого из которых найдется $t_C\in[\alpha,\beta]$ (вообще говоря, свое для каждого такого вектора C), при котором $y(t_C,C)=0$. Поскольку $\overline{M}(\alpha,\beta)$ – компактное множество и проекция Pr_2 – непрерывное отображение, а образ компакта при непрерывном отображении компактен, то $\overline{N}(\alpha,\beta)$ – компактное и, значит, замкнутое в $\mathbb{S}^{n-1}$ множество.

Обозначим множества

$$M(\alpha,\beta)\overset{\text{def}}{=}\{(t,C)\in(\alpha,\beta]\times\mathbb{S}^{n-1}: y(t,C)=0\}\ \text{ и }\ N(\alpha,\beta)\overset{\text{def}}{=}Pr_2M(\alpha,\beta).$$

Поскольку очевидны равенства $M(\alpha,\beta)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\overline{M}(\alpha+k^{-1},\beta)$ и

$$N(\alpha,\beta)=Pr_2\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\overline{M}(\alpha+k^{-1},\beta)\Big)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}Pr_2\overline{M}(\alpha+k^{-1},\beta)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\overline{N}(\alpha+k^{-1},\beta),$$

то для любых неотрицательных $\alpha<\beta$ каждое из множеств $M(\alpha,\beta)$ и $N(\alpha,\beta)$ является F_σ-множеством.

2. Обозначим $\mathbb{Q}_t=\mathbb{Q}\cap(0,t)$, где $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел. Через $\mathbb{Q}_t^{[m-1]}$ обозначим множество всех возрастающих последовательностей длины $m-1$, образованных элементами из $\mathbb{Q}_t$. Очевидно, что множество $\mathbb{Q}_t^{[m-1]}$ является счетным. Элемент из $\mathbb{Q}_t^{[m-1]}$ обозначим через r, а его члены – через $r_1<r_2<\ldots<r_{m-1}$. Покажем, что

$$[\nu_t^0(\cdot)\geqslant m]=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}_t^{[m-1]}}\ \bigcap_{i=0}^{m-1}N(r_i,r_{i+1}),\ \text{ где }\ r_0=0,\ r_m=t. \tag{6}$$

В самом деле, если для некоторого вектора $C\in\mathbb{S}^{n-1}$ функция $y(\cdot,C)$ на полуинтервале $(0,t]$ имеет хотя бы m нулей $z_1<z_2<\ldots<z_m$, то для любого $i=\overline{0,m-1}$ верно включение $C\in N(r_i,r_{i+1})$, где r_j, $j=\overline{1,m-1}$, – какое-либо рациональное число, принадлежащее интервалу (z_j,z_{j+1}), и, как обозначено выше, $r_0=0$ и $r_m=t$. Следовательно, $C\in R$, где через R обозначена правая часть формулы (6). Если же для некоторого вектора $C\in\mathbb{S}^{n-1}$ функция $y(\cdot,C)$ на полуинтервале $(0,t]$ имеет менее m нулей, то для любого $r=(r_1,\ldots,r_{m-1})\in\mathbb{Q}_t^{[m-1]}$ найдется $i\in\{0,1,\ldots,m-1\}$, при котором $C\not\in N(r_i,r_{i+1})$, где, как и выше, $r_0=0$ и $r_m=t$, а значит, для любого $r\in\mathbb{Q}_t^{[m-1]}$ пересечение в (6) не содержит C, и поэтому $C\notin R$.

Поскольку, как показано в п. 1 доказательства, $N(r_i,r_{i+1})$ является F_σ-множеством, то из представления (6) заключаем, что для любого $m\in\mathbb{N}_0\overset{\text{def}}{=}\mathbb{N}\sqcup\{0\}$ множество Лебега $[\nu_t^0(\cdot)\geqslant m]$ является F_σ-множеством. Другими словами, для любого $t>0$ функция $\nu_t^0(\cdot)$ принадлежит классу $(*,F_\sigma)$. Этому же классу принадлежит, очевидно, и функция $t^{-1}\,\nu_t^0(\cdot)$.

Если при некотором $C\in\mathbb{S}^{n-1}$ у решения $y(\cdot,C)$ уравнения (1) более чем $m\in\mathbb{N}_0$ смен знака на интервале $(0,t)$, то существует такая окрестность $U_C\subset\mathbb{S}^{n-1}$ точки C, что для всех $\widetilde{C}\in U_C$ у функции $y(\cdot,\widetilde{C})$ также более чем m перемен знака на этом интервале. Следовательно, для любого $m\in\mathbb{N}_0$ множество Лебега $[\nu_t^-(\cdot)>m]$ является открытым, поэтому для любого $t>0$ функция $\nu_t^-(\cdot)$, а вместе с ней и функция $t^{-1}\,\nu_t^-(\cdot)$, принадлежат классу $(G,*)$.

3. Пусть последовательность $(\theta_k)_{k\in\mathbb{N}}\uparrow+\infty$ такова, что для любого решения $y(\cdot)\in S_*(a)$ выполнены равенства (5). Так как [7, с. 223] справедливы представления

$$\hat{\nu}^0_{\mathbb{S}}(C)=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\pi}{t}\nu^0(y(\cdot,C);0,t)=\pi\inf_{m\in\mathbb{N}}\sup\{\theta_m^{-1}\,\nu^0_{\theta_m}(C),\theta_{m+1}^{-1}\,\nu^0_{\theta_{m+1}}(C),\ldots\},$$

$$\hat{\nu}^-_{\mathbb{S}}(C)=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\pi}{t}\nu^-(y(\cdot,C);0,t)=\pi\inf_{m\in\mathbb{N}}\sup\{\theta_m^{-1}\,\nu^-_{\theta_m}(C),\theta_{m+1}^{-1}\,\nu^-_{\theta_{m+1}}(C),\ldots\}$$

и включения $t^{-1}\,\nu_t^0(\cdot)\in(*,F_\sigma)$, $t^{-1}\,\nu_t^-(\cdot)\in(G,*)$ для любого $t>0$, то согласно [7, с. 224] получаем: функция $\hat{\nu}^0_{\mathbb{S}}(\cdot)$, а значит, и функция $\hat{\nu}^0(\cdot)$, принадлежат классу $(*,F_{\sigma\delta})$, в частности, третьему классу Бэра; функция $\hat{\nu}_{\mathbb{S}}^{-}(\cdot)$, а вместе с ней и функция $\hat{\nu}^{-}(\cdot)$, принадлежат классу $(*, G_{\delta})$, в частности, второму классу Бэра. Теорема доказана.

Поскольку множество значений любой бэровской функции является [7, с. 255] суслинским, то в силу теоремы 1 справедливо

С л е д с т в и е 1. *Спектры верхних частот Сергеева нулей* $\hat{\nu}^{0}(S_{*}(a))$ *и знаков* $\hat{\nu}^{-}(S_{*}(a))$ *уравнения* $a \in \tilde{\mathcal{E}}^{n}$ *являются суслинскими множествами неотрицательной полуоси* $\overline{\mathbb{R}}_{+}$.

Перейдем к доказательству того, что для произвольного суслинского [7, с. 98] множества $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_{+}$, такого, что $0 \in \mathcal{A}$, существует уравнение (1) третьего порядка, спектры верхних частот Сергеева нулей $\hat{\nu}^{0}(S_{*}(a))$ и знаков $\hat{\nu}^{-}(S_{*}(a))$ которого совпадают с множеством $\mathcal{A}$. Вначале приведем некоторые определения и докажем ряд вспомогательных утверждений.

Через $\mathcal{K}$ обозначим канторово множество [8, с. 138], т. е.

$$\mathcal{K} = \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^{m}} [\alpha_{m,i}, \beta_{m,i}],$$

где отрезки $[\alpha_{m,i}, \beta_{m,i}]$, $i = \overline{1, 2^{m}}$, (называемые отрезками m-го ранга) определяются индукцией по $m \in \mathbb{N}_{0}$: отрезок нулевого ранга $[\alpha_{0,1}, \beta_{0,1}] = [0,1]$, а для $m \in \mathbb{N}$ при всех $i = \overline{1, 2^{m}}$ по определению

$$[\alpha_{m+1,2i-1}, \beta_{m+1,2i-1}] = [\alpha_{m,i}, \alpha_{m,i} + 3^{-(m+1)}] \text{ и } [\alpha_{m+1,2i}, \beta_{m+1,2i}] = [\beta_{m,i} - 3^{-(m+1)}, \beta_{m,i}]. \quad (7)$$

Через $\mathcal{K}_{2}$ обозначим множество точек второго рода [8, с. 141] канторова множества $\mathcal{K}$. Хорошо известно [8, с. 141–142], что множество $\mathcal{K}$ состоит из тех чисел отрезка [0,1], одна из записей которых в виде троичной систематической дроби содержит только цифры 0 и 2, а множество $\mathcal{K}_{2}$ – из тех, для которых эта запись содержит бесконечно много как цифр 0, так и цифр 2. Кроме того, из представления (7) индукцией по $m \in \mathbb{N}_{0}$ легко убедиться, что число является левым концом отрезка m-го ранга, если и только если в той его троичной записи, в которой участвуют только цифры 0 и 2, цифр после запятой не более чем m штук.

Для каждого $m \in \mathbb{N}_{0}$ определим 2^{m} отрезков

$$[\tilde{\alpha}_{m,i}, \tilde{\beta}_{m,i}] = [\alpha_{m,i} + 6^{-(m+2)}, \beta_{m,i} - 6^{-(m+2)}],\ i = \overline{1, 2^{m}}.$$

Ниже через $\overline{\mathrm{Lim}}$ обозначен верхний предел последовательности множеств [7, с. 17].

Л е м м а 2. *Имеет место представление*

$$\mathcal{K}_{2} = \overline{\lim_{m \to +\infty}} S_{m},$$

где $S_{m} = \bigsqcup_{i=1}^{2^{m}} [\tilde{\alpha}_{m,i}, \tilde{\beta}_{m,i}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В доказательстве леммы запись числа в виде систематической дроби означает запись в троичной системе счисления.

Обозначим верхний предел последовательности $(S_{m})_{m \in \mathbb{N}_{0}}$ множеств через $\mathcal{K}^{*}$, т. е. $\mathcal{K}^{*} = \overline{\lim_{m \to +\infty}} S_{m}$. Так как $[\tilde{\alpha}_{m,i}, \tilde{\beta}_{m,i}] \subset (\alpha_{m,i}, \beta_{m,i})$ и справедливо [8, с. 141] представление

$$\mathcal{K}_{2} = \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^{m}} (\alpha_{m,i}, \beta_{m,i}),$$

то включение $\mathcal{K}^{*} \subset \mathcal{K}_{2}$ очевидно.

Докажем обратное включение $\mathcal{K}_{2} \subset \mathcal{K}^{*}$. Пусть число $\omega \in \mathcal{K}_{2}$. Тогда, как легко вытекает из сказанного выше, в его троичном представлении $\omega = 0, \omega_{1} \omega_{2} \ldots$ (где цифры $\omega_{i} \in \{0, 2\}$) существует бесконечно много $m \in \mathbb{N}$, таких, что $\omega_{m} = 0$ и $\omega_{m+1} = 2$. Обозначим $\underline{\omega}^{(m)} = 0, \omega_{1} \omega_{2} \ldots \omega_{m-1}$ и $\overline{\omega}^{(m)} = 0, \omega_{1} \omega_{2} \ldots \omega_{m-1}(2)$. Так как троичная запись числа $\underline{\omega}^{(m)}$ содержит после запятой не более чем $(m-1)$-цифр 0 и 2, то $\underline{\omega}^{(m)}$ – левый конец некоторого отрезка $(m-1)$-го ранга, а поскольку $\overline{\omega}^{(m)} - \underline{\omega}^{(m)} = 3^{-(m-1)}$, то отрезок $[\underline{\omega}^{(m)}, \overline{\omega}^{(m)}]$ – некоторый отрезок $(m-1)$-го ранга.

Докажем неравенства

$$\underline{\omega}^{(m)} + 6^{-(m+1)} < \omega < \overline{\omega}^{(m)} - 6^{-(m+1)}. \tag{8}$$

Действительно, вычитая из всех частей двойного неравенства (8) число $\underline{\omega}^{(m)}$ и затем умножая их на 3^m, получим равносильное неравенство

$$2^{-(m+1)} \cdot 3^{-1} < 0{,}2\ \omega_{m+2}\ldots < 3 - 2^{-(m+1)} \cdot 3^{-1}.$$

Поскольку $2/3 \leqslant 0{,}2\ \omega_{m+2}\ldots \leqslant 1$, то последняя цепочка неравенств очевидна.

Из неравенств (8) следует, что число ω принадлежит некоторому отрезку из множества S_m. Так как таких $m \in \mathbb{N}$ бесконечно много, то $\omega \in \mathcal{K}^*$. Лемма доказана.

О п р е д е л е н и е 3. [6] *Назовем непрерывную кусочно-линейную функцию $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ регулярной ломаной, если ее производная на соседних участках своего постоянства имеет разные знаки.*

Другими словами, функция $z(\cdot): \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ – регулярная ломаная, если существует неограниченная возрастающая последовательность $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ неотрицательных чисел, такая, что $\tau_0 = 0$ и на каждом интервале (τ_k, τ_{k+1}), $k \in \mathbb{N}_0$, функция $z(\cdot)$ имеет постоянную производную r_k, при этом для любого $k \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство $r_k r_{k+1} < 0$. Вершины регулярной ломаной $z(\cdot)$ – точки плоскости с координатами $(\tau_k, z(\tau_k))$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Далее важную роль играет функция $h(\cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определяемая следующим образом:

$$h(t) = \begin{cases} t - 2k, & \text{если} \quad t \in [2k, 2k+1), \\ 2k + 2 - t, & \text{если} \quad t \in [2k+1, 2k+2), \end{cases} \qquad \text{где} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, что $h(\cdot)$ – непрерывная кусочно-линейная 2-периодическая функция, сужение которой на $\mathbb{R}_+$ является регулярной ломаной.

Для натурального $m \in \mathbb{N}$ и действительных чисел $\alpha < \beta$ и $b < d$ определим на отрезке $[\alpha, \beta]$ функцию $f(\cdot\,; \alpha, \beta; b, d; m)$ равенством

$$f(t; \alpha, \beta; b, d; m) = b + (d - b)h\left((2m-1)\frac{t - \alpha}{\beta - \alpha}\right), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

В дальнейшем при формулировании утверждений, которые справедливы как для $\nu^0(y(\cdot); \alpha, \beta)$, так и для $\nu^-(y(\cdot); \alpha, \beta)$, верхние индексы у этих величин опускаем и пишем просто $\nu(y(\cdot); \alpha, \beta)$. Такое же соглашение действует для величин $\hat{\nu}^0[y]$, $\hat{\nu}^-[y]$ и для множеств $\hat{\nu}^0(S_*(a))$, $\hat{\nu}^-(S_*(a))$.

Из определения функции $f(\cdot) \overset{\text{def}}{=} f(\cdot; \alpha, \beta; b, d; m)$ вытекает, что для всех $t \in (\alpha, \beta]$ и чисел $f_1 \in [b, d]$, $f_2 \in (b, d)$ и $f_3 \notin [b, d]$ справедливы соотношения

$$\nu(f(\cdot) - f_1; \alpha, t) \leqslant (2m-1)\frac{t - \alpha}{\beta - \alpha} + 1, \quad \nu(f(\cdot) - f_2; \alpha, \beta) = 2m - 1, \quad \nu(f(\cdot) - f_3; \alpha, \beta) = 0.$$

Зафиксируем какую-либо последовательность $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ чисел, удовлетворяющих неравенствам

$$T_1 \geqslant 1, \quad T_{m+1} \geqslant (m+1)(T_1 + T_2 + \ldots + T_m), \quad m \geqslant 1.$$

По последовательности $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ построим новую последовательность $(t_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$, задав ее равенствами

$$t_0 = 0, \quad t_m = \sum_{i=1}^{m} T_i, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Л е м м а 3. *Пусть $\mathcal{A}$ – произвольное суслинское множество вещественных чисел такое, что $\min \mathcal{A} = 0$. Тогда существует регулярная ломаная $z_{\mathcal{A}}(\cdot)$, для которой справедливо соотношение $\{\hat{\nu}(z_{\mathcal{A}}(\cdot) - c) : c \in \mathbb{R}\} = \mathcal{A}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через $\varphi(\cdot): \mathcal{K}_2 \to \mathbb{I}$ обозначим гомеоморфизм между множеством $\mathcal{K}_2$ и множеством $\mathbb{I}$ иррациональных чисел [8, с. 147]. Для суслинского множества $\mathcal{A}$ существует [7, с. 213] непрерывное сюръективное отображение $\psi_{\mathcal{A}}(\cdot):\mathbb{I}\to\mathcal{A}$. Обозначим через $g_{\mathcal{A}}(\cdot)=\psi_{\mathcal{A}}(\cdot)\circ\varphi(\cdot):\mathcal{K}_2\to\mathcal{A}$ композицию отображений $\varphi(\cdot)$ и $\psi_{\mathcal{A}}(\cdot)$.

Занумеруем отрезки $[\tilde{\alpha}_{m,i},\tilde{\beta}_{m,i}]$, $m\in\mathbb{N}_0$, $i=1,2^m$, натуральными числами: $\Delta(1),\Delta(2),\ldots$, следующим образом: $\Delta(2^m+i-1)=[\tilde{\alpha}_{m,i},\tilde{\beta}_{m,i}]$. Определим функцию $z_{\mathcal{A}}(\cdot)$ сначала на отрезках $[t_{4k},t_{4k+1}]$ для всех $k\in\mathbb{N}_0$. Для этого на каждом отрезке $\Delta(k+1)$ выберем число $\xi_k\in\Delta(k+1)$, $k\in\mathbb{N}_0$, второго рода и построим последовательность натуральных чисел $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, элементы которой зададим формулой

$$n_k=\left[(2\pi)^{-1}T_{4k+1}\,g_{\mathcal{A}}(\xi_k)\right]+1,$$

здесь и далее $[\cdot]$ – целая часть числа. При $t\in[t_{4k},t_{4k+1}]$ положим $z_{\mathcal{A}}(t)=f(t;t_{4k},t_{4k+1};b_k,d_k;n_k)$, где величины b_k и d_k – левый и правый концы отрезка $\Delta(k+1)$ соответственно.

Для всех $k\in\mathbb{N}_0$ доопределим $z_{\mathcal{A}}(\cdot)$ на интервалах (t_{4k+2},t_{4k+4}) так, чтобы функция $z_{\mathcal{A}}(\cdot)$ стала регулярной ломаной, а любая прямая, параллельная оси абсцисс, пересекала график функции $z_{\mathcal{A}}(\cdot)$ на каждом интервале (t_{4k+2},t_{4k+4}), $k\in\mathbb{N}_0$, не более двух раз.

Пусть $c\notin\mathcal{K}_2$. Тогда найдется такое натуральное $k_0\in\mathbb{N}$, что при всех натуральных $k\geqslant k_0$ функция $z_{\mathcal{A}}(\cdot)-c$ имеет не более двух нулей на отрезке $[t_k,t_{k+1}]$. Из леммы 1 работы [6] вытекает, что $\hat{\nu}(z_{\mathcal{A}}(\cdot)-c)=0$.

Пусть теперь $c\in\mathcal{K}_2$. Тогда из леммы 2 настоящей работы, непрерывности $g_{\mathcal{A}}(\cdot)$ и леммы 1 работы [6] следует, что $\hat{\nu}(z_{\mathcal{A}}(\cdot)-c)=g_{\mathcal{A}}(c)$. Таким образом, справедливо соотношение $\{\hat{\nu}(z_{\mathcal{A}}(\cdot)-c):c\in\mathbb{R}\}=\mathcal{A}\cup\{0\}=\mathcal{A}$. Лемма доказана.

С л е д с т в и е 2. *Пусть $\mathcal{A}\subset\overline{\mathbb{R}}_+$ – произвольное суслинское множество, такое, что $0\in\mathcal{A}$. Тогда существует регулярная ломанная $z^*_{\mathcal{A}}(\cdot)$, для которой справедливо соотношение $\{\hat{\nu}(z^*_{\mathcal{A}}(\cdot)-c):c\in\mathbb{R}\}=\mathcal{A}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $+\infty\notin\mathcal{A}$, то положим $z^*_{\mathcal{A}}(\cdot)=z_{\mathcal{A}}(\cdot)$, где $z_{\mathcal{A}}(\cdot)$ – функция, построенная для суслинского множества $\mathcal{A}$ в лемме 3.

Рассмотрим случай, когда $+\infty\in\mathcal{A}$. На отрезках $[t_{4k},t_{4k+1}]$, $k\in\mathbb{N}_0$, определим $z^*_{\mathcal{A}}(\cdot)$ равной $z_{\mathcal{B}}(\cdot)$, где $\mathcal{B}=\mathcal{A}\setminus\{+\infty\}$. При $t\in[t_{4k+2},t_{4k+3}]$ положим

$$z^*_{\mathcal{A}}(t)=f(t;t_{4k+2},t_{4k+3};2,3;m_k),$$

где $m_k=\left[(2\pi)^{-1}T_{4k+3}\,k\right]+1$.

Наконец, для всех $k\in\mathbb{N}_0$ доопределим $z^*_{\mathcal{A}}(\cdot)$ на интервалах (t_{4k+1},t_{4k+2}) и (t_{4k+3},t_{4k+4}) так, чтобы функция $z^*_{\mathcal{A}}(\cdot)$ стала регулярной ломаной, а любая прямая, параллельная оси абсцисс, пересекала график функции $z^*_{\mathcal{A}}(\cdot)$ на каждом интервале (t_{4k+1},t_{4k+2}) и (t_{4k+3},t_{4k+4}), $k\in\mathbb{N}_0$, не более двух раз. Согласно лемме 3 настоящей работы и лемме 1 работы [6] для функции $z^*_{\mathcal{A}}(\cdot)$ справедливо равенство $\{\hat{\nu}(z^*_{\mathcal{A}}(\cdot)-c):c\in\mathbb{R}\}=\mathcal{A}$.

С л е д с т в и е 3. *Для произвольного суслинского множества $\mathcal{A}\subset\overline{\mathbb{R}}_+$ такого, что $0\in\mathcal{A}$, существует ограниченная на $\mathbb{R}_+$ функция $x_{\mathcal{A}}(\cdot)\in C^3(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющая соотношению $\{\hat{\nu}(x_{\mathcal{A}}(\cdot)-c):c\in\mathbb{R}\}=\mathcal{A}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству следствия 3 работы [6].

Т е о р е м а 2. *Для произвольного содержащего нуль суслинского множества $\mathcal{A}\subset\overline{\mathbb{R}}_+$ существует линейное дифференциальное уравнение (1) третьего порядка, каждый из спектров верхних частот Сергеева нулей и знаков которого совпадает с множеством $\mathcal{A}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично построению, приведенному в теореме работы [6], дополним систему функций $\{1,x_{\mathcal{A}}(\cdot)\}$, где $x_{\mathcal{A}}(\cdot)$ – функция, существование которой установлено следствием 3, до фундаментальной системы решений $\{1,x_{\mathcal{A}}(\cdot),u_{\mathcal{A}}(\cdot)\}$ некоторого уравнения (1) третьего порядка, где функция $u_{\mathcal{A}}(\cdot)$ удовлетворяет равенству $\lim\limits_{t\to+\infty}u_{\mathcal{A}}(t)=+\infty$.

Так как $x_{\mathcal{A}}(\cdot)$ – ограниченная функция на вещественной прямой, то для произвольного решения $y(\cdot,C)=C_1+C_2\,x_{\mathcal{A}}(\cdot)+C_3\,u_{\mathcal{A}}(\cdot)$, $C_3\neq0$, уравнения (1) справедливо равенство $\{\hat{\nu}(y(\cdot;C))\}=0$. Таким образом, $\hat{\nu}(S_*(a))=\{\hat{\nu}(x_{\mathcal{A}}(\cdot)-c):c\in\mathbb{R}\}\cup\{0\}=\mathcal{A}$. Теорема доказана.

Заключение. Пусть $\hat{\nu}^{+}(\cdot)$ и $\hat{\nu}^{+}(S_*(a))$ – соответственно функция и спектр верхней частоты Сергеева корней [3] уравнения (1). Из доказательства теоремы 1 следует включение $\hat{\nu}^{+}(\cdot) \in (*, F_{\sigma\delta})$. Аналогично следствию 1 и теореме 2 несложно показать, что спектр $\hat{\nu}^{+}(S_*(a))$ верхней частоты Сергеева корней уравнения (1) является суслинским множеством неотрицательной полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+$ и что для произвольного содержащего нуль суслинского множества $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ существует линейное дифференциальное уравнение (1) третьего порядка, спектр верхней частоты Сергеева корней которого совпадает с множеством $\mathcal{A}$. Также отметим, что утверждение о принадлежности функции $\hat{\nu}^{-}(\cdot)$ классу $(*, G_\delta)$, вообще говоря, неулучшаемо. Относительно точности утверждения о принадлежности функций $\hat{\nu}^{0}(\cdot), \hat{\nu}^{+}(\cdot)$ классу $(*, F_{\sigma\delta})$ доказан несколько более слабый факт: существует уравнение (1), такое, что для некоторого α прообраз при отображениях $\hat{\nu}^{0}(\cdot), \hat{\nu}^{+}(\cdot)$ интервала $[\alpha, +\infty]$ – множество точного второго борелевского класса.

Если заменить в определении 2 верхние пределы нижними, то такими же рассуждениями, как и в доказательстве теоремы 1, легко показать, что получающиеся функции ($\check{\nu}^{0}(\cdot)$ и $\check{\nu}^{-}(\cdot)$) принадлежат классам функций $(F_{\sigma\delta\sigma}, *)$ и $(G_{\delta\sigma}, *)$ соответственно. Для нижней функции Сергеева корней $\check{\nu}^{+}(\cdot)$ (определение нижней частоты корней см. [3]) аналогичными рассуждениями можно показать, что $\check{\nu}^{+}(\cdot) \in (F_{\sigma\delta\sigma}, *)$.

Отметим, что теорема 2 справедлива, скорее всего, и без предположения $0 \in \mathcal{A}$, т. е. что спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков могут быть любым суслинским множеством неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой.

Список использованной литературы

1. *Сергеев, И. Н.* Определение характеристических частот линейного уравнения / И. Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 11. – С. 1573.

2. *Сергеев, И. Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения / И. Н. Сергеев // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. – М.: Изд-во Моск. ун-та. – 2006. – Вып. 25. – С. 249–294.

3. *Сергеев, И. Н.* Свойства характеристических частот линейных уравнений произвольного порядка / И. Н. Сергеев // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013. – Вып. 29. – С. 414–442.

4. *Горицкий, А. Ю.* Характеристические частоты нулей суммы двух гармонических колебаний / А. Ю. Горицкий, Т. Н. Фисенко // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 4. – С. 479–485.

5. *Смоленцев, М. В.* Пример периодического дифференциального уравнения третьего порядка, спектр частот которого содержит отрезок / М. В. Смоленцев // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1413–1417.

6. *Войделевич, А. С.* Существование бесконечных всюду разрывных спектров верхних характеристических частот нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений / А. С. Войделевич // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 3. – С. 17–23.

7. *Хаусдорф, Ф.* Теория множеств / Ф. Хаусдорф. – М.; Л.: ОНТИ, 1937. – 304 с.

8. *Александров, П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию / П. С. Александров. – М.: Наука, 1977. – 368 с.

Поступило в редакцию 09.09.2015