ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 517.925
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-3-268-272

Поступило в редакцию 11.11.2019
Received 11.11.2019

А. П. Садовский

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

О СИСТЕМЕ КОЛМОГОРОВА С ОДНОРОДНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Аннотация. Необходимые условия центра для особой точки O (0, 0) для системы Колмогорова с однородными нелинейностями четвертой степени найдены в работе Б. Ференц, Ж. Джени, У. Лиу, В. Г. Романовского. Для всех этих случаев, за исключением двух, доказана и достаточность. В настоящей работе доказана достаточность для двух случаев центра, которые не были доказаны в упомянутой выше работе. Кроме того, другим способом доказана достаточность двух других условий центра.

Ключевые слова: система с однородными нелинейностями четвертой степени, центр, интегрирующий множитель, линейная алгебраическая система

Для цитирования: Садовский, А. П. О системе Колмогорова с однородными нелинейностями четвертой степени / А. П. Садовский // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2020. – Т. 64, № 3. – С. 268–272. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-3-268-272

Anton P. Sadovskii

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

ON THE KOLMOGOROV SYSTEM WITH FOURTH-DEGREE HOMOGENEOUS NONLINEARITIES

(Communicated by Academician Nikolay A. Izobov)

Abstract. The necessary conditions of the center at the singular point O (0, 0) for the Kolmogorov system with fourth-degree homogeneous nonlinearities are found in the work of B. Ferenc, J. Dzheny, W. Liu, V. G. Romanovsky. For all these cases, with the exception of two, sufficiency is also proved. In the present article, sufficiency is proved for two cases of the center that were not proved in the above-mentioned work. In addition, the sufficiency of two other conditions of the center is proved in another way.

Keywords: system with homogeneous nonlinearities of the fourth degree, center, integrating factor, linear algebraic system

For citation: Sadovskii A. P. On the Kolmogorov system with fourth-degree homogeneous nonlinearities. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2020, vol. 64, no. 3, pp. 268–272 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-3-268-272

Введение. Будем рассматривать систему Колмогорова вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 + Ax^3 + Bx^2y + Cy^2 + Dy^3), \\ \dot{y} &= y(-1 + Kx^3 + Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3), \end{aligned} \tag{1}$$

где $A, B, C, D, K, L, M, N \in \mathbb{C}_0$. В [1] в теореме 2 для системы (1) приводится 13 необходимых условий центра. Во всех случаях, кроме (10) и (12) доказана и достаточность этих условий.

В настоящей работе будет доказана достаточность этих условий (10), (12). Кроме этого будут приведены новые доказательства достаточности условия (7) теоремы 2 и условия (5) теоремы (3).

В случае (10) теоремы 2 работы [1] система (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 - 3x^3/16 + x^2y/2 - xy^2 + 8y^3/9), \\ \dot{y} &= y(-1 - 9x^3/16 + x^2y - 5xy^2/3 - 16y^3/9). \end{aligned} \tag{2}$$

Замена $x = 2(2/3)^{1/3} X$, $y = (3/2)^{2/3} Y$ приводит систему (2) к виду (не меняем обозначений x, y)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-(x-y)(x^2-xy+2y^2)) = P(x, y), \\ \dot{y} &= y(1-8x^3+(5x+4y)(x^2-y^2)) = Q(x, y). \end{aligned} \tag{3}$$

Будем искать для системы (3) интегрирующий множитель вида

$$\mu(x, y) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha + y)^k f_{2k}(x, y), \tag{4}$$

где

$$f_{2i}(x, y) = \sum_{j=0}^{2i} f_{j,2i-j} x^i y^{2i-j}. \tag{5}$$

В этом случае интегрирующий множитель $\mu(x, y)$ определяется из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu P) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu Q) = \sum_{m=0}^{\infty} (x+y)^m g_m(x, y), \tag{6}$$

в котором функции $g_m(x, y)$ имеют представление

$$\begin{aligned} g_m(x, y) &= (-(7+3m)x^3 - 2(7+2m)x^2 y + (21+5m)xy^2 + 4y^3) f_{2m}(x, y) + \\ &+ (1+m)(3x+y) f_{2m+2}(x, y) - 2y(x+y)((x^2-2xy+3y^2) f'_{2m,y} + f'_{2m+2,y}(x, y)). \end{aligned} \tag{7}$$

Будем в дальнейшем считать, что $f_0(x, y) = 1$. Тогда в равенстве (6) функция $g_0(x, y)$ приобретает значение

$$g_0(x, y) = -7(x^3 - 2x^2 y + 3xy^2 + 2y^3) + (3x+y) f_2(x, y) - 2y(x+y) f'_{2,y}(x, y).$$

Из равенства $g_0(x, y) = 0$ находим функцию $f_2(x, y) = \frac{7}{3}\left(x^2 - 7xy - 2y^2\right)$.

Положим $\sigma_{2m} = \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k f_{k,2m-k}$.

Из (7) вытекает выполнение тождества $g_m(x, y) = 0$.

Л е м м а 1. *Если выполнено тождество* $g_m(x, y) \equiv 0$, *то справедливо равенство* $2(7+3m)\sigma_{2m} - (1+m)\sigma_{2m+2} = 0, 4(4+3m)(7+3m)\sigma_{2m-2} - m(1+m)\sigma_{2m+2} = 0$

$$\sigma_{2m+2} = 2^{m+1} / (m+1)! \prod_{i\equiv 0}^{m} (7+3i).$$

Из тождества $g_m(x, y) \equiv 0$ образуем линейную систему, состоящую из $2m+4$ уравнений с $2m+4$ неизвестными $f_{2m+2,0}$, $f_{2m+1,1 \ldots,}$ $f_{0,2m+2}$, $f_{m,m}$. Эта система имеет вид

$$\begin{aligned} &3(1+m) f_{2m+2,0} = \gamma_1, \\ &(1+3m) f_{2m+1,1} + (1+m) f_{2m+2,0} = \gamma_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(m+5) f_{m+3,m-1} + (5-m) f_{m+4,m-2} = \gamma_m, \\ &(m+3) f_{m+2,m} + (3-m) f_{m+3,m-1} + \beta_1 = \gamma_{m+1}, \\ &(m+1) f_{m+1,m+1} + (1-m) f_{m+2,m} + \beta_2 = \gamma_{m+2}, \\ &(m-1) f_{m,m+2} - (1+m) f_{m+1,m+1} + \beta_3 = \gamma_{m+3}, \\ &(m-3) f_{m-1,m+3} - (3+m) f_{m,m+2} + \beta_4 = \gamma_{m+4}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$(m-5)f_{m-2,m+4}-(5+m)f_{m-1,m+3}=\gamma_{m+5},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(1+3m)f_{1,2m+1,}-(1+m)f_{0,2m+2}=\gamma_{2m+3},$$
$$-3(1+m)f_{0,2m+2}=\gamma_{2m+4},$$

где

$$\beta_1=-5m-7,\ \beta_2=2(3m+7),\ \beta_3=-7(m+3),\ \beta_4=-2(3m+7).$$

Л е м м а 2. *Определитель системы (8) имеет представление*

$$\Delta=(-1)^m\prod_{i=1}^{m}(m+3+2i)\Delta_1, \tag{9}$$

где $\Delta_1=-4m(m+1)(m+3)(3m+5)$.

Доказательство вытекает из вида системы (8).

Т е о р е м а 1. *Особая точка* $0(0,0)$ *системы (3) является центром.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что для (3) существует интегрирующий множитель вида (4). Из тождества $g_0(x,y)\equiv 0$ находим $f_{2,0}=7/3,\ f_{1,1}=-49/3,\ f_{0,2}=-14/3.$ Подставляя найденные $f_{2,0}, f_{0,2}$ в систему (8) при $m=1,$ получаем линейную систему с неизвестными $f_{4,0}, f_{3,1}, f_{2,2}, f_{1,3}, f_{0,4},$ $f_{1,1}$, которая на основании леммы 2 имеет единственное решение. На основании леммы 1 $f_{1,1}$ будет совпадать с найденным ранее $f_{1,1}=-49/3.$ Допустим теперь, что из $g_2(x,y)=0\ldots,\ g_i(x,y)=0,$ где $i<m$ единственным образом найдены $f_{i,j}$ с $i+j<2m+2.$ Подставляя из тождества $g_{m-1}(x,y)\equiv 0$ найденные $f_{k,2m-k}$, где $k\neq m$ в g_m получаем систему (8), из которой на основании леммы 2 единственным образом находим $f_{2m+2,0},\ldots,f_{0,2m+2}, f_{m,m}$. При этом найденное $f_{m,m}$ совпадает с найденным ранее $f_{m,m}$ из системы вида (8), полученной из $g_{m-1}(x,y)\equiv 0.$ Это следует из леммы 1. Теорема доказана.

В случае (12) теоремы 2 из [1] полагая $x\to y, y\to x, t\to -t$ получаем систему (2). Это доказывает достаточность условия центра (12) из [1].

Случаю (7) теоремы 2 из [1] соответствует система (10) из [1]. В обозначениях системы (1) она имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}&=x(1+(-1+4B)(7+8B)x^3/27+Bx^2y-xy^2+27(2+B)y^3/(7+8B)^2),\\ \dot{y}&=y(-1-(2+B)(7+8B)x^3 27+x^2y+(7B-4)xy^2/(7+8B)+27(4B-1)y^3/(7+8B)^2).\end{aligned} \tag{10}$$

Замена $x=3^{4/3}, X/(7+8B)^{1/3}, y=(7+8B)^{2/3}Y/3^{2/3}$ приводит систему (10) к виду (сохраняем старые обозначения переменных x, y)

$$\begin{aligned}\dot{x}&=x(1+3(4B-1)x^3+9Bx^2y-(7+8B)xy^2+3(2+B)y^3),\\ \dot{y}&=y(-1-3(2+B)x^3+9x^2y+(7B-4)xy^2+3(4B-1)y)^3.\end{aligned} \tag{11}$$

Для системы (11) ищем интегрирующий множитель в виде (4). В рассматриваемом случае имеет место формула (6), где выражение $g_m(x,y)$ имеет вид

$$\begin{gathered}g_m(x,y)=(9(B(4m+5)-m-2))x^3+3(6-m+B(9+4m))x^2y-(26+9m+B(18M-5))xy^2+\\ +3(3m-2+B(17+6m))y^3)f_{2m}(x,y)+(1+m)(3x+y)f_{2m+2}(x,y)+y(x+y)(-3(x-y)(1+5B)x+\\ +3(B-1)y)f'_{2m,y}(x,y)-2f'_{2m+2,y}(x,y)).\end{gathered}$$

В этом случае справедлива

Л е м м а 3. *Если тождество* $g_m(x,y)\equiv 0,$ *то справедливы равенства*

$$2(2+B)(7+3m)\sigma_{2m}-(1+m)\sigma_{2m+2}=0,$$
$$2(2+B)(7+3m)\sigma_{2m}-(1+m)\sigma_{2m+2}=0,$$

$$4(2+B)^2(4+3m)(7+3m)\sigma_{2m-2} - m(1+m)\sigma_{2m+2} = 0,$$

$$\sigma_{2m+2} = 2^{m+1}(2+B)^{m+1} / (m+1)!\prod_{i=0}^{m}(7+3i).$$

Из тождества $g_m(x, y) \equiv 0$ можно образовать линейную систему из $2m+4$ уравнений с $2m+4$ неизвестными $f_{2m+2,0}, ..., f_{0,2m+2}, f_{m,m}$. Эта система имеет вид (8), где

$$\beta_1 = 3(B(15+7m) - 6 - 4m), \quad \beta_2 = 3(2(3+m) + B(9+m)),$$

$$\beta_3 = 5B - 26 - 3(2+B)m, \quad \beta_4 = 3(B(17+9m) - 2).$$

В этом случае определитель системы (8) выражается формулой (9), где

$$\Delta_{\div} = 4(4B-1)m(1+m)(3+m)(5+3m).$$

Т е о р е м а 2. *Особая точка* $0(0, 0)$ *системы (9) является центром.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала $4B - 1 \neq 0.$ При этом совершенно аналогично доказательству теоремы 1 получим, что 0(0, 0) системы (10) – центр. Здесь используется лемма 3. Определитель системы (8) $\Delta \neq 0,$ ибо $4B - 1 \neq 0.$

Если $4B - 1 = 0,$ то система (9) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 9xy(x-y)(x-3\gamma)/4, \\ \dot{y} &= y - 9xy(x-y)(3x-y)/4. \end{aligned} \tag{12}$$

Начало координат системы (12) – центр [2].

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай (5) теоремы 3 из [1]. Система (20) из [1] имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 + 27x^3/(1+8D^2) + 27x^2y/(64D) - xy^2 + 4Dy^3), \\ \dot{y} &= y(-1 - 27x^3/(5+2D^2) + 7xy^2/8 + 4Dy^3). \end{aligned} \tag{13}$$

Замена

$$x = 8D^{2/3}X/3^{2/3}, \ y = 3^{1/3}Y/D^{1/3}$$

приводит систему (13) к виду (сохраняем обозначения (x, y)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 + 12x^3 + 9x^2y - 8xy^2 + 3y^3), \\ \dot{y} &= y(-1 - 3x^3 + 7xy^2 + 12y^3). \end{aligned} \tag{14}$$

Если для (14) существует интегрирующий множитель вида (4), то имеет место (6), где выражение $g_m(x, y)$ имеет вид

$$g_m(x, y) = (9(5+4m)x^3 + 3(9+4m)x^2y + (5-18m)xy^2 + 3(17+6m)y^3)f_{2m}(x, y) +$$
$$+(1+m)(3x+y)f_{2m+2}(x, y) + y(x+y)(-3(x-y)(5x+3y)f'_{2m,y}(x, y) - 2f'_{2m+2,y}(x, y)).$$

В рассматриваемом случае имеет место

Л е м м а 4. *Если справедливо тождество* $g_m(x, y) \equiv 0,$ *то имеет место равенство*

$$2(7+3m)\sigma_{2m} - (1+m)\sigma_{2m+2} = 0,$$
$$4(4+3m)(7+3m)\sigma_{2m-2} - m(1+m)\sigma_{2m+2} = 0,$$

$$\sigma_{2m+2} = 2^{m+1} / (m+2i)!\prod_{c=0}^{n}(7+3n).$$

В этом случае из тождества $g_m(x, y) = 0$ можно образовать линейную систему, которая имеет вид (8), если положить $\beta_1 = 3(15+7m), \beta_2 = 3(9+m), \beta_3 = 5 - 3m, \ \beta_4 = 3(17+9m).$ Определитель этой системы выражается (9), где

$$\Delta_1 = 16(1+m)(3+m)(5+3m).$$

Ясно, что в этом случае $\Delta \neq 0$. Таким образом, имеем

Т е о р е м а 3. *Начало координат системы (14) является центром.*

Впервые система (3) рассматривалась автором в [3].

Список использованных источников

1. Integrability Conditions for Lotka–Volterra Planar Complex Quartic Systems Hoving Homogeneous Nonlinearities / B. Ferčec [et al.] // Acta Appl. Math. – 2013. – Vol. 124, N 1. – P. 107–122. https://doi.org/10.1007/s10440-012-9772-5

2. Садовский, А. П. Условия центра для системы с однородными нелинейностями / А. П. Садовский // Тр. Междунар. конф. по дифференц. уравнениям «Еругинские чтения–2007». – Минск, 2007. – С. 156–167.

3. Садовский, А. П. Об одном случае центра системы с однородными нелинейностями четвёртой степени / А. П. Садовский // Материалы конф. «Еругинские чтения–2018». Минск, 15–18 мая 2018. – Минск, 2018. – Ч. 1. – С. 91–93.

References

1. Ferčec B., Gine J., Liu Y., Romanovski V. G. Integrability Conditions for Lotka–Volterra Planar Complex Quartic Systems Hoving Homogeneous Nonlinearities. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2013, vol. 124, no. 1, pp. 107–122. https://doi.org/10.1007/s10440-012-9772-5

2. Sadovskii A. P. Center conditions for a system with homogeneous nonlinearities. *Trudy Mezhdunarodnoi konferentsii po differentsial'nym uravneniyam «Eruginskie chteniya–2007»* [Proceedings of the International Conference on Differential Equations "Eruginskie Chteniya–2007"]. Minsk, 2007, pp. 156–167 (in Russian).

3. Sadovskii A. P. On one case of the center of a system with homogeneous non-linearities of the fourth degree. *Materialy konferentsii «Eruginskie chteniya–2018». Minsk, 15–18 maya 2018. Chast' 1* [Proceedings of the conference "Eruginskie Chtenija–2018". Minsk, May 15–18, 2018. Part 1]. Minsk, 2018, pp. 91–93 (in Russian).

Информация об авторе

Садовский Антон Павлович – д-р физ.-мат. наук, профессор. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: sadovskii@bsu.by.

Information about the author

Sadovskii Anton Pavlovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave, 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: sadovskii@bsu.by.