ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 519.63
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-4-391-398

Поступило в редакцию 04.05.2020
Received 04.05.2020

Член-корреспондент П. П. Матус[1,2], Б. Д. Утебаев[1]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Католический университет Люблина, Люблин, Польша

МОНОТОННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Строятся и исследуются монотонные разностные схемы для линейных неоднородных параболических уравнений, уравнения Фишера, или Колмогорова–Петровского–Пискунова. Доказывается устойчивость и сходимость предложенных методов в равномерной норме L_∞ или C. Полученные результаты обобщаются на произвольные полулинейные параболические уравнения с нелинейным стоком произвольного вида, а также на квазилинейные уравнения.

Ключевые слова: монотонная разностная схема, принцип максимума, разностные схемы повышенного порядка, компактные схемы

Для цитирования: Матус, П. П. Монотонные разностные схемы повышенного порядка точности для параболических уравнений / П. П. Матус, Б. Д. Утебаев // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2020. – Т. 64, № 4. – С. 391–398. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-4-391-398

Corresponding Member Piotr P. Matus[1,2], Bakhadir D. Utebaev[1]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]Institute of Mathematics and Computer Science The John Paul II Catholic University of Lublin, Lublin, Poland

MONOTONE DIFFERENCE SCHEMES OF HIGHER ACCURACY FOR PARABOLIC EQUATIONS

Abstract. In this article, monotone difference schemes for linear inhomogeneous parabolic equations, the Fisher or Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov equations are constructed and investigated. The stability and convergence of the proposed methods in the uniform norm L_∞ or C is proved. The results obtained are generalized to arbitrary semi-linear parabolic equations with an arbitrary nonlinear sink, as well as to quasi-linear equations.

Keywords: monotone difference schemes, maximum principle, high-order difference schemes and compact schemes

For citation: Matus P. P., Utebaev B. D. Monotone difference schemes of higher accuracy for parabolic equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2020, vol. 64, no. 4, pp. 391–398 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-4-391-398

Введение. Разностные схемы, удовлетворяющие принципу максимума, принято называть монотонными. Основываясь на этом факте, мы даем определение, которое в некоторой степени объединяет все существующие определения монотонности и которое будет справедливо как для линейных, так и для разностных схем, аппроксимирующих нелинейные краевые задачи уравнений математической физики [1]. Монотонные разностные схемы играют важную роль при математическом моделировании прикладных задач, так как они позволяют получить численное решение без нефизических осцилляций [2]. Отметим также, что под компактными разностными схемами понимают вычислительные методы повышенного порядка аппроксимации, построенные на стандартных шаблонах. Построенные схемы для параболических уравнений имеют как правило 4 + 2 порядок аппроксимаций, т. е. четвертый по пространственной переменной и второй по временной [3–5].

В настоящей работе строятся и исследуются монотонные разностные схемы для линейных неоднородных параболических уравнений, уравнения Фишера, или Колмогорова–Петровского–Пискунова [6]. Доказывается устойчивость и сходимость предложенных методов в равномерной норме L_∞ или C. Полученные результаты обобщаются на произвольные полулинейные параболические уравнения с нелинейным стоком произвольного вида, а также на квазилинейные уравнения.

О п р е д е л е н и е м о н о т о н н о с т и. *Рассмотрим дифференциальную задачу в абстрактной форме*

$$Lu = f. \tag{1}$$

Запишем символически разностную схему, аппроксимирующую дифференциальную задачу (1) в виде

$$L_h y = \varphi. \tag{2}$$

Это представление включает начальные и краевые условия (φ – аппроксимация входных данных f).

Пусть $\tilde{y}$ – решение разностной задачи (2) с возмущенным входным данным $\tilde{f}$:

$$L_h \tilde{y} = \tilde{\varphi}.$$

О п р е д е л е н и е 1 [1; 7]. *Разностную схему (2) будем называть монотонной, если из условий*

$$\tilde{\varphi} \ge \varphi \quad (\tilde{\varphi} \le \varphi)$$

следует неравенство

$$\tilde{y} \ge y \quad (\tilde{y} \le y).$$

Это определение также тесно связано с определением монотонного оператора или отображения.

В случае линейных операторов L, L_h определение 1 эквивалентно следствию принципа максимума [2; 8].

О п р е д е л е н и е 2. *Разностная схема (2) называется монотонной, если из условий*

$$\varphi \ge 0 \quad (\varphi \le 0)$$

следует неравенство

$$y \ge 0 \quad (y \le 0).$$

Постановка задачи и разностная схема. В области $\overline{Q}_T = \{(x,t): 0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ рассмотрим начально-краевую задачу для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \ 0 < t \le T, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{4}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \ u(l,t) = \mu_2(t), \ \ 0 < t \le T. \tag{5}$$

Введем равномерную сетку узлов [9] $\overline{\omega} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(x_i, t_n) \in \overline{Q}_T\}$, где $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih, 0 \le i \le N,$ $h = l / N\}$, $\overline{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, 0 \le n \le K, \tau = T / K\}$.

Для аппроксимации дифференциальной задачи (3)–(5) используем следующую схему с весами [10]:

$$y_{t,i} = y^{(\sigma)}_{\bar{x}x,i} + \varphi_i, \ i = \overline{1, N-1}, \tag{6}$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \tag{7}$$

$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), \ y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}), \tag{8}$$

где

$$\sigma = 1 - \frac{h^2}{12\tau}, \ \ \tau \ge \frac{h^2}{12}. \tag{9}$$

В работе используются обозначения из [9; 10]. Известно, что при произвольном $0 \le \sigma \le 1$, $\sigma \ne 0{,}5$, схема (6)–(8) имеет порядок аппроксимации $O(h^2+\tau)$, а при $\sigma = 0{,}5 -$ $O(h^2+\tau^2)$. В [10] показано, что при $\sigma = 0{,}5 - h^2/(12\tau)$ и специальном выборе шаблонного функционала φ разностная схема имеет порядок аппроксимации 4 + 2, т. е. четвертый по пространственной переменной и второй по временной: $\psi = O(h^4+\tau^2)$. Однако она не является монотонной в общем случае.

Легко доказать, что разностная схема А. А. Самарского [5] будет монотонной лишь при соотношениях типа Куранта

$$\frac{h^2}{6} \le \tau \le \frac{5h^2}{6}.$$

Покажем, что если вес σ удовлетворяет соотношению (9) и

$$\varphi_i^{n+1} = \overline{f}_i^{\,n+1} = \frac{1}{12} f_{i-1}^{n+1} + \frac{5}{6} f_i^{n+1} + \frac{1}{12} f_{i+1}^{n+1},$$

то схема имеет порядок аппроксимации 4 + 1:

$$\psi_i^n = \left(1 - \frac{h^2}{12\tau}\right) u_{\bar{x}x,i}^{n+1} - \frac{h^2}{12\tau} u_{\bar{x}x,i}^{n} - u_{t,i}^n + \varphi_i^{n+1} = u_i'' - \dot{u}_i + f_i^{n+1} +$$

$$+ \frac{h^2}{12}\left(u_i^{(IV)} - \dot{u}_i'' + \frac{f_{i-1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i+1}^{n+1}}{h^2} \right) + O(h^4+\tau) = O(h^4+\tau).$$

Ниже будет доказано, что она является монотонной и устойчивой в сеточной норме C без верхних ограничений на временный шаг.

Устойчивость по входным данным. Для получения соответствующей априорной оценки применим стандартную технику принципа максимума [10]. Запишем схему (6)–(8) в каноническом виде:

$$A_i^n y_{i-1}^{n+1} - C_i^n y_i^{n+1} + B_i^n y_{i+1}^{n+1} = -F_i^n, \quad i = \overline{1, N-1}, \tag{10}$$

$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), \; y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}). \tag{11}$$

Здесь

$$A_i^n = B_i^n = \frac{\sigma\tau}{h^2} > 0, \; C_i^n = 1 + \frac{2\sigma\tau}{h^2} > 0,$$

$$D_i^n = C_i^n - A_i^n - B_i^n = 1, \; F_i^n = \frac{1}{12} y_{i-1}^n + \frac{5}{6} y_i^n + \frac{1}{12} y_{i+1}^n + \tau\varphi_i^{n+1}.$$

Введем в рассмотрение равномерную сеточную норму

$$\|y\|_C = \max_{x\in\omega_h} \left| y^n(x) \right|, \; \|y\|_{\overline{C}} = \max_{x\in\overline{\omega}_h} \left| y^n(x) \right| = L_\infty.$$

Максимум модуля сеточной функции y^{n+1} может достигаться либо на границе области

$$\left\| y^{n+1} \right\|_{\overline{C}} = \max\left\{ \left|\mu_1^{n+1}\right|, \left|\mu_2^{n+1}\right| \right\},$$

либо во внутренней точке $x \in \omega_h$. Но тогда из уравнения (6) сразу получаем

$$\left\| y^{n+1} \right\|_{\overline{C}} = \left\| y^{n+1} \right\|_C \le \left\| y^n \right\|_C + \tau \left\| \varphi^n \right\|_C.$$

Объединяя полученные оценки, приходим к априорной оценке

$$\left\| y^{n+1} \right\|_{\overline{C}} \le \max\left\{ \max_{t_n\in\omega_\tau} \left\{ \left|\mu_1(t_n)\right|, \left|\mu_2(t_n)\right| \right\}, \left\| u_0 \right\|_C \right\} + t_n \max_{t_n\in\omega_\tau} \left\| \varphi(t_n) \right\|_C,$$

выражающей устойчивость по начальным данным, граничным условиям и правой части.

Монотонность разностной схемы. Для анализа этого свойства воспользуемся двусторонней оценкой разностного решения, полученной в [11],

$$m_1 \le y_i^n \le m_2, \ n = 0, 1, ..., K,$$

где

$$m_1 = \min_{(x,t)\in \underline{Q}_T} \{\mu_1(t), \mu_2(t), u_0(x)\} + T\min\left\{0, \min_{(x,t)\in Q_T} f(x,t)\right\},$$

$$m_2 = \max_{(x,t)\in \underline{Q}_T} \{\mu_1(t), \mu_2(t), u_0(x)\} + T\max\left\{0, \max_{(x,t)\in Q_T} f(x,t)\right\}.$$

Отсюда видно, что рассматриваемая разностная схема (6)–(8) является монотонной в смысле определения 2.

Компактные схемы для уравнения Фишера. Уравнение Фишера известно также как уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова [6]. Оно названо в честь статистика и биолога Рональда Фишера, предложившего его в 1937 г. для описания процессов популяционной динамики. Поставим для этого уравнения начальную задачу с краевыми условиями Дирихле

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u(1-u), \ \lambda = \mathrm{const} > 0, \tag{12}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \ge 0, \ u(0,t) = \mu_1(t) \ge 0, \ u(l,t) = \mu_2(t) \ge 0, \tag{13}$$

т. е. априори предполагаем неотрицательность всех входных данных. Здесь и далее предполагаем, что решение дифференциальной задачи (12), (13) существует, единственно и обладает в $\overline{Q}_T$ всеми непрерывными производными, необходимыми по ходу изложения. Схема четвертого порядка аппроксимаций в идейном плане строится совершенно аналогично разностной схеме А. А. Самарского [5; 10]

$$y_t = y_{\bar{x}x}^{(\sigma)} + \overline{f}, \ \sigma = 1 - \frac{h^2}{12\tau}. \tag{14}$$

Начальное и граничные условия аппроксимируются аналогично разностным уравнениям (7), (8). Здесь

$$\overline{f} = \lambda\overline{y} - \frac{5\lambda}{6} y\hat{y} - \frac{\lambda}{12}(y_- \hat{y}_- + y_+ \hat{y}_+),$$

$$\overline{y} = \frac{5}{6} y + \frac{1}{12}(y_- + y_+), \ y_\pm = y_{i\pm 1}^n.$$

Для получения априорных оценок сеточного решения запишем разностную схему в каноническом виде (10), (11), в котором

$$A_i^n = \frac{\tau}{h^2} - \frac{1}{12} - \frac{\tau\lambda}{12} y_{i-1}^n, \ B_i^n = A_{i+2}^n, \ C_i^n = 1 + \frac{2\sigma\tau}{h^2} + \frac{5\tau\lambda}{6} y_i^n, \ F_i^n = (1+\tau\lambda)\overline{y}_i^n.$$

Пусть

$$m_1 = \min_{(x,t)\in \underline{Q}_T} \{\mu_1(t), \mu_2(t), u_0(x)\}, \ m_2 = \max_{(x,t)\in \underline{Q}_T} \{\mu_1(t), \mu_2(t), u_0(x)\}.$$

Т е о р е м а. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$h \le h_0, \ h_0^2 < \frac{12}{\lambda m_2} e^{\lambda T}, \ \tau > \frac{h^2}{12 - h^2 \lambda e^{\lambda T} m_2}. \tag{15}$$

Тогда разностное решение $y(x,t), \ (x,t) \in \overline{\omega}_{h\tau}$ *неотрицательно и для* $i = 1, 2, ..., N; \ k = 1, ..., K$ *имеет место двусторонняя оценка*

$$0 \le y_i^k \le e^{\lambda t_k} m_2. \tag{16}$$

Доказательство. Очевидно, что $0 \le m_1 \le y_i^0 \le u_0(x_i) \le m_2$. По индукции предполагаем, что оценка (16) имеет место для всех $k = 1, 2, ..., n$. Докажем теперь справедливость этих неравенств и для $k = n+1$. Действительно, в силу условий теоремы (15) и предположения индукции

$$A_i^n \ge r - \frac{\lambda\tau}{12}\max_{1\le i\le N-1} y_{i-1}^n \ge r - \frac{\lambda\tau m_2}{12}e^{\lambda t_n} > 0,\ r = \frac{\tau}{h^2} - \frac{1}{12},$$

$$B_i^n > 0,\ C_i^n > 0,\ D_i^n > 0,\ i = 1, 2, ..., N-1.$$

В соответствии с двусторонней оценкой, полученной в [11], имеет место неравенство

$$m_1^{n+1} \le y_i^{n+1} \le m_2^{n+1}, \tag{17}$$

где

$$m_1^{n+1} = \min\left\{\min\{\mu_1^{n+1}, \mu_2^{n+1}\}, \min\frac{F_i^n}{D_i^n}\right\} \ge 0,\ m_2^{n+1} = \max\left\{\max\{\mu_1^{n+1}, \mu_2^{n+1}\}, \max\frac{F_i^n}{D_i^n}\right\} \ge 0.$$

Заметим, что

$$\max_i \frac{F_i^n}{D_i^n} \le \frac{(1+\tau\lambda)\max \bar{y}_i^n}{1+\tau\lambda_2 \min\limits_i y_i^n} \le e^{\lambda\tau}\max_i y_i^n.$$

Следовательно,

$$y_i^{n+1} \le \max\{m_2^{n+1}, e^{\lambda\tau}\max y_i^n\} \le m_2 e^{\lambda t_{n+1}}.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Для решения разностной схемы (14), (7), (8) имеет место априорная оценка*

$$\left\|y^n\right\|_{\bar{C}} \le e^{\lambda t_n} m_2.$$

Монотонность и устойчивость. Для исследования монотонности схемы необходимо составить задачу для сеточной функции $\delta y = \tilde{y} - y$, $\tilde{y}$ – решение той же разностной схемы, но с возмущенными входными данными. После элементарных преобразований получаем задачу для возмущения

$$\delta y_t = \delta y_{\bar{x}x}^{(\sigma)} + \lambda(1-\hat{\bar{y}})\delta\bar{y} - \lambda\tilde{\bar{y}}\delta\hat{\bar{y}}, \tag{18}$$

$$\delta y_i^0 = \delta u_0 = \tilde{u}_0 - u_0;\ \delta y_0^{n+1} = \tilde{\mu}_1^{n+1} - \mu_1^{n+1},\ \delta y_N^{n+1} = \tilde{\mu}_2^{n+1} - \mu_2^{n+1}. \tag{19}$$

Записывая эту схему в каноническом виде

$$A_i^n \delta y_{i-1}^{n+1} - C_i^n \delta y_i^{n+1} + B_i{}^n \delta y_{i+1}^{n+1} = -F_i{}^n,\ i = 1, 2, ..., N-1,$$

$$\delta y_0^{n+1} = \tilde{\mu}_1^{n+1} - \mu_1^{n+1},\ \delta y_N^{n+1} = \tilde{\mu}_2^{n+1} - \mu_2^{n+1},$$

находим коэффициенты

$$A_i^n = r - \frac{\tau\lambda}{12}\tilde{y}_{i-1}^n,\ B_i^n = A_{i+2}^n,\ C_i^n = 1 + A_i^n + B_i^n + \frac{5\tau\lambda}{6}\tilde{y}_i^n,$$

$$F_i{}^n = (1+\tau\lambda(1-\hat{\bar{y}}_i))\delta\tilde{\bar{y}}_i{}^n.$$

Очевидно, что при выполнении условий (15) коэффициенты $A_i^n > 0$, $B_i^n > 0$ положительны. С другой стороны, коэффициент в выражении для F_i^n всегда положителен при достаточно малом

$$\tau \le \tilde{\tau}_0,\ \tilde{\tau}_0 = (\lambda m_2 e^{\lambda T})^{-1}.$$

Следовательно, на основании двусторонней оценки (17), заключаем, что

$$\delta m_1^{n+1} \le \delta y_i^{n+1} \le \delta m_2^{n+1},$$

$$\delta m_1^{n+1} = \min\left\{\min\{\delta\mu_1^{n+1}, \delta\mu_2^{n+1}\}, \min_i \frac{F_i^n}{D_i^n}\right\},$$

$$\delta m_2^{n+1} = \max\left\{\max\{\delta\mu_1^{n+1}, \delta\mu_2^{n+1}\}, \max_i \frac{F_i^n}{D_i^n}\right\},$$

$$\frac{F_i^n}{D_i^n} = \frac{(1+\tau\lambda(1-\hat{\tilde{y}}_i))\delta y_i^n}{1+\tau\lambda\tilde{y}_i^n}.$$

Отсюда следует выполнимость важного неравенства:

$$\tilde{y}(x,t) - y(x,t) \geq 0,$$

если

$$\tilde{\mu}_k(t) - \mu_k(t) \geq 0,\ \tilde{u}_0(x) - u_0(x) \geq 0,\ \text{при всех}\ (x,t) \in \overline{\omega}_{h\tau},\ k = 1, 2,$$

$$h < \frac{12}{\lambda \max\{\tilde{m}_2, m_2\}} e^{\lambda T},\ \ \tau > \min\left\{\frac{h^2}{12 - h^2\lambda e^{\lambda T}\max\{\tilde{m}_2, m_2\}}, \tilde{\tau}_0\right\}. \tag{20}$$

Итак, монотонность нелинейной разностной схемы (14), (7), (8) в соответствии с определением 1 доказана.

Перейдем теперь к исследованию устойчивости разностной схемы. Рассмотрим задачу (18), (19). Максимум модуля сеточной функции δy_i^{n+1} может достигаться либо на границе $\left\|\delta y^{n+1}\right\|_{\overline{C}} = \max\limits_{k=1,2}|\delta\mu_k|$, либо во внутренней точке. Но тогда из уравнения (18) следует неравенство

$$\left\|\delta y^{n+1}\right\|_C \leq \left\|\frac{F}{D}\right\|_C \leq e^{\tau c_1}\left\|\delta y^n\right\|_C,$$

где $c_1 = \text{const} > 0.$ Объединяя полученные оценки, приходим к неравенству

$$\left\|\tilde{y}^{n+1} - y^n\right\|_{\overline{C}} \leq \max\left\{\max_{k,t}\left|\tilde{\mu}_k(t) - \mu_k(t)\right|, e^{c_1 t_{n+1}}\left\|\tilde{u}_0 - u_0\right\|_C\right\}, \tag{21}$$

выражающему при выполнении условий (20) устойчивость разностной схемы (14), (7), (8) по отношению к малому возмущению начального и граничных условий.

З а м е ч а н и е 1. Аналогично (21) для $z = y - u$ нетрудно получить оценку

$$\left\|y^n - u^n\right\|_C \leq Te^{c_2 T}\left\|\psi\right\|_C \leq c_3(h^4 + \tau),\ n = 0, 1, ..., K,$$

из которой следует (при всех выше сделанных предположениях на гладкость точного решения $u(x, t)$ и соотношения на сеточные шаги τ, h) сходимость разностного метода с порядком 4 + 1.

З а м е ч а н и е 2. Довольно просто строятся компактные схемы и с порядком точности 4 + 2:

$$y_t = y_{\bar{x}x}^{(\sigma)} + \lambda\overline{y}^{(0,5)} - \frac{5\lambda}{6}y\hat{y} - \frac{\lambda}{12}(y_-\hat{y}_- + y_+\hat{y}_+),$$

$$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau},\ \ \psi = O(h^4 + \tau^2).$$

К сожалению, к исследованию устойчивости, монотонности и сходимости неприменима вышеприведенная техника принципа максимума, так как она дает неестественные ограничения на соотношения сеточных шагов τ и h типа Куранта. Чтобы избежать этого, для достижения указанных выше целей необходимо применить метод энергетических неравенств. Данному вопросу будет посвящена отдельная работа.

З а м е ч а н и е 3. Полученные выше результаты остаются справедливыми и для всех полулинейных параболических уравнений со стоком произвольного вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-f(u),$$

$f(u)\geq 0$ для любого $u\in R$, $\left|f(\tilde{u})-f(u)\right|\leq L\left|\tilde{u}-u\right|$, $\tilde{u},u\in D\tilde{u}_i$, где $D\tilde{u}_i$ – малая окрестность области значений точного решения (неограниченная нелинейность).

З а м е ч а н и е 4. Очень важно обобщить полученные результаты и на случай переменных коэффициентов:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f(x,t).$$

Компактная разностная схема 4 + 2 построена еще в 1963 г. [5] и имеет вид

$$y_t=\frac{1}{2}\Lambda(y+\hat{y})-\frac{h^2}{12}\Lambda(py_t)+\varphi,$$

где

$$p=\frac{1}{k(x,t)},\ \ \varphi=\left[f+\frac{h^2}{12}\Lambda(pf)\right]^{n+\frac{1}{2}},\ \ \Lambda y=(ay_{\bar{x}})_x,$$

$$a_i=\left[\frac{1}{6}(p_i+p_{i-1})+\frac{2}{3}p_{i-1/2}\right]^{-1}.$$

Детальному изучению обобщения этой схемы на случай уравнения Фишера и других нелинейных уравнений параболического типа, включая и многомерные, будет посвящена отдельная работа.

Компактные схемы для квазилинейных уравнений. В области $\overline{Q}_T$ рассмотрим теперь неоднородное квазилинейное параболическое уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f(u)$$

с начальным и граничными условиями (4), (5). Уравнение перепишем в форме, удобной для дальнейших исследований,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varphi(u))+f(u),\ \ \varphi'_u=k(u).$$

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальную задачу заменим разностной

$$y_t=(\varphi(y))_{\bar{x}x}^{(\sigma)}+\varphi^{(\sigma_1)}(y),$$

с начальным и граничными условиями (7), (8). Здесь

$$\sigma=1-\frac{h^2}{12\tau},\ \ 0\leq\sigma_1\leq 1;\ \ \varphi(y)=\frac{1}{12}f(y_{i-1})+\frac{5}{6}f(y_i)+\frac{1}{12}f(y_{i+1}).$$

Непосредственным вычислением легко показать, что данная разностная схема имеет порядок аппроксимаций 4 + 1:

$$\psi=O(h^4+\tau).$$

Список использованных источников

1. Matus, P. Stability and monotonicity of difference schemes for nonlinear scalar conservation laws and multidimensional quasi-linear parabolic equations / P. Matus, S. V. Lemeshevsky // Comput. Meth. Appl. Math. – 2009. – Vol. 9, N 3. – P. 253–280. https://doi.org/10.2478/cmam-2009-0016

2. Монотонные разностные схемы для систем эллиптических и параболических уравнений / Ф. Ж. Гаспар [и др.] // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 5. – С. 29–33.

3. Liao, W. A fourth-order compact finite difference scheme for solving unsteady convection-diffusion equations / W. Liao, J. Zhu // Computational Simulations and Applications. – 2011. – P. 81–96. https://doi.org/10.5772/25149

4. Толстых, А. И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики / А. И. Толстых. – М., 1990. – 230 с.

5. Самарский, А. А. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности / А. А. Самарский // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1963. – Т. 3, № 5. – С. 812–840.

6. Matus, P. Stability of difference schemes for nonlinear time-dependent problems / P. Matus // Comput. Meth. Appl. Math. – 2003. – Vol. 3, N 2. – P. 313–329. https://doi.org/10.2478/cmam-2003-0020

7. Godlewski, E. Hyperbolic systems of conservation laws / E. Godlewski, P.-A. Raviart. – Ellipses, 1991. – 254 p.

8. Matus, P. The maximum principle and some of its applications / P. Matus // Comput. Meth. Appl. Math. – 2002. – Vol. 2, N 1. – P. 50–91. https://doi.org/10.2478/cmam-2002-0004

9. Samarskii, A. A. Difference Schemes with Operator Factors / A. A. Samarskii, P. N. Vabishchevich, P. P. Matus. – London, 2002. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9874-3

10. Samarskii, A. A. The Theory of Difference Schemes / A. A. Samarskii. – New York, 2001. – 786 p. https://doi.org/10.1201/9780203908518

11. Matus, P. P. Analysis of second order difference schemes on non-uniform grids for quasilinear parabolic equations / P. P. Matus, L. M. Hieu, L. G. Vulkov // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2017. – Vol. 310. – P. 186–199. https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.04.006

References

1. Matus P. P., Lemeshevsky S. V. Stability and monotonicity of difference schemes for nonlinear scalar conservation laws and multidimensional quasi-linear parabolic equations. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2009, vol. 9, no. 3, pp. 253–280. https://doi.org/10.2478/cmam-2009-0016

2. Gaspar F. G., Matus P. P., Tuyen V. T. K., Hieu L. M. Monotone difference schemes for systems of elliptic and parabolic equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2016, vol. 60, no. 5, pp. 29–33 (in Russian).

3. Liao W., Zhu J. A fourth-order compact finite difference scheme for solving unsteady convection-diffusion equations. *Computational Simulations and Applications*. 2011, pp. 81–96. https://doi.org/10.5772/25149

4. Tolstykh A. I. *Compact difference schemes and their applications to fluid dynamics problems*. Moscow, 1990. 230 p. (in Russian).

5. Samarskii A. A. Schemes of high-order accuracy for the multi-dimensional heat conduction equation. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1963, vol. 3, no. 5, pp. 1107–1146. https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90104-6

6. Matus P. Stability of difference schemes for nonlinear time-dependent problems. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2003, vol. 3, no. 2. pp. 313–329. https://doi.org/10.2478/cmam-2003-0020

7. Godlewski E., Raviart P.-A. *Hyperbolic systems of conservation laws*. Ellipses, 1991. 254 p.

8. Matus P. The maximum principle and some of its applications. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2002, vol. 2, no. 1, pp. 50–91. https://doi.org/10.2478/cmam-2002-0004

9. Samarskii A. A., Matus P. P., Vabishchevich P. N. *Difference Schemes with Operator Factors*. London, 2002. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9874-3

10. Samarskii A. A. *The Theory of Difference Schemes*. New York, 2001. 786 p. https://doi.org/10.1201/9780203908518

11. Matus P. P., Hieu L. M., Vulkov L. G. Analysis of second order difference schemes on non-uniform grids for quasilinear parabolic equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2017, vol. 310, pp. 186–199. https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.04.006

Информация об авторах

Матус Петр Павлович – член-корреспондент, д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: piotr.p.matus@gmail.com.

Утебаев Бахадыр Даулетбай улы – аспирант. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: bakhadir1992@gmail.com.

Information about the authors

Matus Piotr P. – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: piotr.p.matus@gmail.com.

Utebaev Bakhadir D. – Postgraduate student. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: bakhadir1992@gmail.com.