

ISSN 1561-8323 (Print)  
ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 536.2.001  
<https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-4-495-505>

Поступило в редакцию 14.04.2020  
Received 14.04.2020

**В. А. Кот**

*Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси,  
Минск, Республика Беларусь*

## НОВЫЙ ПОДХОД В ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ СТЕФАНА С КОНВЕКТИВНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

*(Представлено членом-корреспондентом Н. В. Павлюкевичем)*

**Аннотация.** Предложено два новых варианта приближенного аналитического решения однофазной задачи Стефана с конвективным граничным условием на фиксированной границе. Данные решения основаны на применении новых интегральных соотношений, вытекающих из постановочной части задачи и образующих бесконечную последовательность. Показано, что наиболее точным вариантом решения задачи Стефана с конвективным граничным условием является отказ от точного выполнения классического условия Стефана на свободной границе с его заменой на одно из интегральных соотношений. На примере рассмотрения тестовой задачи Стефана с граничным условием Робина, имеющей точное аналитическое решение, показано, что предложенный новый подход в решении задачи является существенно более точным и эффективным по сравнению с известными вариантами интегральной расчетной схемы, в том числе по сравнению с методом интеграла теплового баланса при точном выполнении условия Стефана на свободной границе. В работе представлены решения задачи на основе применения квадратичного и кубического полиномов. В решениях тестовой задачи на основе кубического полинома относительная ошибка определения положения свободной границы составляет тысячные и сотые доли процента. При этом в момент времени  $t = 1$  относительная ошибка для температурного профиля составляет всего  $\varepsilon_r = 0,075\%$ .

**Ключевые слова:** интегральный метод теплового баланса, задача Стефана, конвективное граничное условие, интегральные соотношения, свободная граница

**Для цитирования:** Кот, В. А. Новый подход в приближенном решении задачи Стефана с конвективным граничным условием / В. А. Кот // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2020. – Т. 64, № 4. – С. 495–505. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-4-495-505>

**Valery A. Kot**

*A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*

## A NEW APPROACH TO APPROXIMATE SOLUTION OF THE STEFAN PROBLEM WITH A CONVECTIVE BOUNDARY CONDITION

*(Communicated by Corresponding Member Nikolai V. Pavlyukevich)*

**Abstract.** Two new variants of approximate analytical solution of the one-phase Stefan problem with a convective boundary condition at a fixed boundary are proposed. These approaches are based on the use of new integral relations forming infinite sequences. It is shown that the most exact variant of solving the Stefan problem with a convective boundary condition is to refuse from the classical Stefan condition at the free boundary and to replace it with its integral relation. By the example of solving the test Stefan problem with a Robin boundary condition, having an exact analytical solution, it is shown that the proposed approach is much more exact and efficient compared to the known variants of the integral computational scheme, including the heat-balance integral method allowing the Stefan condition at the free boundary to be satisfied. The solutions obtained with the use of the square-law and cubic polynomials are presented. As for the test problem using the cubic polynomial, the relative error in determining the free boundary comprises hundredths and thousandths of percent. In this case, at the time instant  $t = 1$ , the relative error in determining the temperature profile is  $\varepsilon_r = 0.075\%$ .

**Keywords:** heat-balance integral method, Stefan problem, convective boundary condition, integral relations, free boundary

**For citation:** Kot V. A. A new approach to approximate solution of the Stefan problem with convective boundary condition. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2020, vol. 64, no. 4, pp. 495–505 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-4-495-505>

**Введение.** Задачи Стефана, моделирующие процессы теплообмена при одновременных фазовых превращениях, составляют обширную область исследований и охватывают широкий спектр различных приложений [1–4]. Обширная библиография по данной тематике представлена в [5], а обзор аналитических решений – в [6]. Из-за нелинейности данного типа задач точные их решения крайне ограничены. Поэтому в подавляющем большинстве случаев прибегают к численным либо приближенным решениям. Метод интеграла теплового баланса, введенный в [7], является общеизвестным приближенным математическим подходом в решении задач теплообмена и, в частности, задач с определением свободной границы при фазовых превращениях. Данный метод заключается в преобразовании уравнения теплопроводности в обыкновенное дифференциальное уравнение по времени с описанием температуры в пространстве с помощью квадратичного профиля.

В настоящей работе рассмотрена однофазная задача Стефана, отвечающая процессу плавления полубесконечного материала  $\bar{x} > 0$ , когда конвективное граничное условие накладывается на фиксированную границу  $\bar{x} = 0$ , и температура омывающей среды превышает температуру фазового перехода. Конвективный теплообмен предполагает, что тепловой поток на фиксированной границе пропорционален разности между температурой поверхности тела и температурой среды, т. е.  $-\lambda \partial \bar{T}(0, \bar{t}) / \partial \bar{x} = h(W(\bar{t}) - \bar{T}(0, \bar{t}))$ , где  $\bar{T}$  – температура тела;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $h$  – коэффициент теплообмена;  $W(\bar{t})$  – температура среды. Имеется крайне малое число публикаций, в которых применяется интегральный метод теплового баланса в задачах Стефана с конвективным граничным условием [7–11]. Как правило, принимается постоянный во времени коэффициент  $h > 0$ . Точность приближенных решений проверяется на основе их сравнения с аналогичными численными решениями. В отличие от работы [8], в которой коэффициент теплообмена задается в виде функции  $h(\bar{t}) = h / \sqrt{\bar{t}}$ , примем постоянство коэффициента теплообмена во времени и плавное изменение температуры среды по экспоненциальному закону [12].

**Постановка задачи Стефана с конвективным граничным условием.** Когда полуограниченное пространство находится при температуре фазового перехода  $\bar{T}_m$  и его поверхность омывается средой переменной температуры  $W(\bar{t})$ , тогда мы приходим к задаче в следующей математической формулировке: требуется найти положение свободной границы  $\bar{s}(\bar{t})$  для времени  $\bar{t} > 0$  и температуру  $\bar{T}(\bar{x}, \bar{t})$ , которые удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \bar{T}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = \kappa \frac{\partial^2 \bar{T}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^2}, \quad 0 < \bar{x} < \bar{s}(\bar{t}), \quad \bar{t} > 0$$

с граничным условием

$$-\lambda \frac{\partial \bar{T}(0, \bar{t})}{\partial \bar{x}} = h(W(\bar{t}) - \bar{T}(0, \bar{t})), \quad \bar{t} > 0,$$

условиями на свободной границе

$$\bar{T}(\bar{s}(\bar{t}), \bar{t}) = \bar{T}_m, \quad -\lambda \frac{\partial \bar{T}(\bar{s}(\bar{t}), \bar{t})}{\partial \bar{x}} = \rho L \frac{d\bar{s}(\bar{t})}{d\bar{t}}, \quad \bar{t} > 0,$$

и с начальным условием  $\bar{s}(0) = 0$ . Здесь  $\kappa = \lambda / c\rho$  – коэффициент температуропроводности;  $\rho$ ,  $c$ ,  $L_m$  – плотность, удельная теплоемкость и скрытая теплота плавления соответственно. Придадим задаче безразмерный вид, введя обозначения

$$T = \frac{\bar{T} - T_m}{\Delta T}, \quad x = \frac{\bar{x}}{l_{\text{ref}}}, \quad t = \frac{\bar{t}}{\tau}, \quad \tau = \frac{l_{\text{ref}}^2}{\kappa}, \quad s = s(t) = \frac{\bar{s}(\bar{t})}{l_{\text{ref}}}, \quad \text{Ste} = \frac{c\Delta T}{L_m},$$

$$\Delta T = T_{\text{ref}} - T_m, \quad w(t) = \frac{W(\bar{t}) - T_m}{\Delta T}, \quad \text{Bi} = \frac{hl_{\text{ref}}}{\lambda},$$

где Ste – число Стефана;  $T_{\text{ref}}$  – референтная температура;  $\tau = l_{\text{ref}}^2 / \kappa$  – временной масштаб;  $l_{\text{ref}}$  – референтная длина. В итоге получаем следующую задачу:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, 0 < x < s(t), t > 0,$$

$$-\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = \text{Bi}(w(t) - T(0, t)), T(s, t) = 0, \tag{1}$$

$$-\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=s} = \frac{1}{\text{Ste}} \frac{ds}{dt}, s(0) = 0. \tag{2}$$

**Последовательность интегральных соотношений.** Перепишем граничное условие (1), придав ему вид  $T(0, t) - \frac{1}{\text{Bi}} \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = w(t)$ . Если ввести в рассмотрение новые коэффициенты  $\alpha, \beta$ , а также новую функцию  $\gamma(t)$ , то мы приходим к граничному условию как частному случаю, описывающему конвективный теплообмен на фиксированной границе, где  $\alpha = 1, \beta = -1 / \text{Bi}$  и  $w(t) = \gamma(t)$ . Отсюда можем записать следующее граничное условие общего вида:

$$\alpha T(0, t) + \beta \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = \gamma(t). \tag{3}$$

Как нами было показано в [13; 14], в задаче Стефана с граничными условиями  $T(0, t) = h(t)$  и  $-\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = q(t)$  имеют место интегральные соотношения

$$\frac{d}{dt} \int_s^{0x} T dt + \frac{ss'}{\text{Ste}} = h(t) = T(0, t), \frac{d}{dt} \int_0^s T dx + \frac{s'}{\text{Ste}} = q(t) = -\frac{\partial T(0, t)}{\partial x}. \tag{4}$$

Подстановка в (3) вместо  $T(0, t)$  и  $\partial T(0, t) / \partial x$  левых частей соотношений (4) дает

$$\frac{d}{dt} \left( \alpha \int_s^{0x} T dt - \beta \int_s^0 T dt \right) + \frac{\alpha ss' - \beta s'}{\text{Ste}} = \gamma(t). \tag{5}$$

Интегрирование уравнения (5) приводит к интегральному соотношению

$$\int_s^0 \left( \alpha \int_s^x T dx - \beta T \right) dx + \frac{1}{\text{Ste}} \left( \alpha \frac{s^2}{2} - \beta s \right) = Y_1(t), \tag{6}$$

где  $Y_1(t) = \int_0^t \gamma(t) dt$ . Соотношению (6) может быть придан более простой вид посредством интегрирования по частям. Тогда мы имеем интегральное соотношение первого порядка

$$\int_0^s T(\alpha x - \beta) dx + \frac{s}{\text{Ste}} \left( \alpha \frac{s}{2} - \beta \right) = Y_1(t). \tag{7}$$

Далее получим интегральное соотношение второго порядка. Для этого вначале проинтегрируем граничное условие (3) дважды:

$$\alpha \int_0^t \int_0^t T(0, t) dt dt + \beta \int_0^t \int_0^t \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} dt dt = \int_0^t \int_0^t \gamma(t) dt dt. \tag{8}$$

Заменим в (8)  $T(0, t)$  и  $\partial T(0, t) / \partial x$  на их соответствия согласно граничным условиям Дирихле и Неймана:  $T(0, t) \rightarrow h(t), \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} \rightarrow -q(t)$ . Это дает

$$\alpha \int_0^t \int_0^t h(t) dt - \beta \int_0^t \int_0^t q(t) dt = \int_0^t \int_0^t \gamma(t) dt, \tag{9}$$

или в иной записи  $\alpha H_2(t) - \beta Q_2(t) = Y_2(t)$ , где  $H_2(t) = \int_0^t \int_0^t h(t) dt, Q_2(t) = \int_0^t \int_0^t q(t) dt$  – интегральные граничные характеристики [13–15]. Для  $H_2(t)$  имеем тождество [13]

$$H_2(t) \equiv \int_0^s \int_0^t \int_0^t \int_0^t T dt dt dt dt + \frac{1}{2\text{Ste}} \int_0^t s^2 dt + \frac{s^4}{24\text{Ste}}. \quad (10)$$

Произведя в (10) многократное интегрирование по частям, приходим к соотношению

$$H_2(t) \equiv \int_0^s \frac{x^3}{6} T dx + \frac{1}{2\text{Ste}} \int_0^t s^2 dt + \frac{s^4}{24\text{Ste}}. \quad (11)$$

Для интегральной характеристики  $Q_2(t)$  было получено тождество [14]

$$Q_2(t) \equiv \int_0^s \int_0^t \int_0^t T dx dx dx - \frac{1}{\text{Ste}} \left( \frac{s^3}{6} + \int_0^t s dt \right). \quad (12)$$

Интегрирование по частям правой части (12) приводит к интегральному соотношению

$$Q_2(t) = \int_0^s \frac{x^2}{4} T dx - \frac{1}{\text{Ste}} \left( \frac{s^3}{6} + \int_0^t s dt \right). \quad (13)$$

Теперь подставим в (9) вместо  $H_2(t)$  и  $Q_2(t)$  правые части выражений (11) и (13):

$$\alpha \left[ \int_0^s \frac{x^3}{6} T dx + \frac{1}{2\text{Ste}} \int_0^t s^2 dt + \frac{s^4}{24\text{Ste}} \right] - \beta \left[ \int_0^s \frac{x^2}{4} T dx - \frac{1}{\text{Ste}} \left( \frac{s^3}{6} + \int_0^t s dt \right) \right] = Y_2(t).$$

После некоторых упрощений приходим к интегральному соотношению

$$\int_0^s \frac{x^2}{2} \left( \frac{\alpha}{3} x - \beta \right) T dx + \frac{1}{\text{Ste}} \left( \int_0^t \left( \alpha \frac{s^2}{2} - \beta s \right) dt + \left( \alpha \frac{s^4}{4!} - \beta \right) \frac{s^3}{3!} \right) \equiv Y_2(t). \quad (14)$$

Поступая далее аналогичным образом, могут быть получены интегральные соотношения более высокого порядка, например:

$$\int_0^s \frac{x^4}{4!} \left( \alpha \frac{x}{5} - \beta \right) T dx + \frac{1}{\text{Ste}} \left[ \int_0^t \int_0^t \left( \alpha \frac{s^2}{2} - \beta s \right) dt^2 + \int_0^t \left( \alpha \frac{s^4}{4!} - \beta \frac{s^3}{3!} \right) dt + \left( \alpha \frac{s^6}{6!} - \beta \frac{s^5}{5!} \right) \right] = Y_3(t). \quad (15)$$

Интегральные соотношения (7), (14) и (15) позволяют записать последовательность

$$\left\{ \int_0^s T \left( \alpha \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \beta \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} \right) dx + \frac{1}{\text{Ste}} \underbrace{\sum_{k=1}^n \int_0^t \dots \int_0^t}_{n-k} \left[ \alpha \frac{s^{2k}}{(2k)!} - \beta \frac{s^{2k-1}}{(2k-1)!} \right] dt = Y_n(t) \right\}_n, \forall n \in \mathbb{Z}_+. \quad (16)$$

**Тестовая задача и ее решение.** Оценим точность приближенных решений на основе применения системы интегральных соотношений. Для этого воспользуемся известным точным решением задачи Стефана в следующей математической постановке:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad (17)$$

$$-\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = w(t) - T(0, t), \quad w(t) = 2 \exp(t) - 1, \quad (18)$$

$$T(s(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad -\frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t) = \dot{s}(t), \quad t > 0, \quad s(0) = 0. \quad (19)$$

Данная задача описывает процесс плавления полуограниченного тела с температурой среды, изменяющейся по закону  $w(t) = 2 \exp(t) - 1$  и с числами Био и Стефана соответственно  $Bi = 1$  и  $Ste = 1$ . Точное решение данной задачи имеет вид

$$T^*(x, t) = \exp(t - x) - 1, s^*(t) = t. \tag{20}$$

Для точности приближенных решений задачи (17)–(19) используем параметры

$$|E_s| = |s - s^*|, \varepsilon_s = \left| \frac{s - s^*}{s^*} \right| 100\%, |E_T| = |T - T^*|, \varepsilon_T = \left| \frac{T - T^*}{T^*(0, t)} \right|_{\max} 100\%.$$

*Известный подход в решении задачи Стефана.* В [8] рассмотрены четыре варианта приближенной формулировки и решения однофазной задачи Стефана с конвективным граничным условием при  $h(t) = h / \sqrt{t}$ . Наиболее точное решение дает вариант применения классического граничного условия Стефана с интегралом теплового баланса [7].

Для решения задачи (17)–(19) опишем температурный профиль полиномом

$$T(x, t) = a_1(t)(1 - x / s(t)) + a_2(t)(1 - x / s(t))^2. \tag{21}$$

Подстановка полинома (21) в граничное условие (18) и граничное условие Стефана (19) дает систему двух уравнений, из которой находим коэффициенты

$$a_1 = ss', a_2 = -s((1 + s)s' - w(t)) / (2 + s). \tag{22}$$

Подстановка в интеграл теплового баланса [7]

$$-\frac{d}{dt} \int_0^s T(x, t) dx = \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} + s'(t). \tag{23}$$

Полином (21) с коэффициентами (22) дает нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$24(1 - 2e^t + s') + 4s[3 - 6e^t + (7 + 4e^t)s' + 4s'^2] + s^4 s'' + 2s^3(2e^t + s'^2 + 3s'') + 2s^2[(5 + 2e^t)s' + 5s'^2 + 4(e^t + s'')] = 0. \tag{24}$$

Данное уравнение с начальным условием (19) может быть решено численно либо приближенно аналитически, например, с помощью представления функции  $s(t)$  в виде ряда  $s(t) = b_0 t + b_1 t^k + b_2 t^{k+1} + \dots$ . Его подстановка в (24) дает  $s(t) = t - t^4 / 16 + O(t^5)$ . При  $t = 1$  имеем ошибку  $\varepsilon_s = 6,25\%$ . Применяя численное решение уравнения (24), находим  $s(1) = 0,9802$ ,  $s'(1) = 0,9316$ . Отсюда для  $t = 1$  ошибка несколько ниже и составляет  $\varepsilon_s = 1,98\%$ . Подстановка  $s(1)$  и  $s'(1)$  в (22), (23) дает температурный профиль с ошибкой  $\varepsilon_T = 2,75\%$  при  $t = 1$ .

*Новый подход в решении задачи Стефана: квадратичный полином.* Для приближенного решения задачи (17)–(19) применим новый подход, который предусматривает применение полученных выше интегральных соотношений (16). Здесь возможны два варианта, в которых граничное условие Стефана (19) выполняется точно (Вариант 1) либо не выполняется (Вариант 2) и при этом условие Стефана (19) заменяется на одно из интегральных соотношений (16):

$$\begin{aligned} \text{Вариант 1: } & \left\{ \begin{array}{l} \text{Интегральные соотношения (16)} \Leftrightarrow -\frac{\partial T}{\partial x}(s, t) = \frac{1}{\text{Ste}} \frac{ds}{dt} \end{array} \right\}, \\ \text{Вариант 2: } & \left\{ \begin{array}{l} \text{Интегральные соотношения (16)} \Leftrightarrow -\frac{\partial T}{\partial x}(s, t) \neq \frac{1}{\text{Ste}} \frac{ds}{dt} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

**В а р и а н т 1.** Для определения полиномиальных коэффициентов воспользуемся граничным условием (18) и интегральным тождеством первого порядка (10), что дает систему уравнений

$$a_1 + a_2 + \frac{a_1}{s} + \frac{2a_2}{s} = w(t), 2a_1(3 + s) + a_2(4 + s) = \frac{12}{s} \int_0^t w(t) dt - 12 \left( 1 + \frac{s}{2} \right). \tag{25}$$

Из (25) находим коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$ . Для определения свободной границы  $s(t)$  применим граничное условие Стефана (19). Подстановка в него температурного профиля (21) приводит к нелинейному дифференциальному уравнению

$$s's^2 = [24 + 12s(2e^t - t - 2) - s^2(4 + s)(2e^t + 5)] / (8 + 5s + s^2). \quad (26)$$

Данное уравнение может быть решено численно либо аналитически путем представления функции  $s(t)$  степенным рядом с разложением функции  $e^t$  в ряд Тейлора. Приближенное аналитическое решение уравнения (26) дает  $s(t) \approx t - t^4 / 24 + O(t^5)$ . Отсюда находим  $\varepsilon_s = -25 / 6t^3 (\%)$ . При  $t = 1$  имеем  $\varepsilon_s = 4,17 \%$ . Численное решение уравнения (26) дает при  $t = 1$  значение свободной границы  $s(1) = 0,9870$ , чему отвечает значение  $\varepsilon_s = 4,17 \%$ . Ошибка в определении свободной границы  $s(t)$  на основе расчетной схемы согласно первому варианту оказалась сниженной примерно в полтора раза по сравнению с известным методом [7; 8]. Результаты расчета свободной границы  $s(t)$  и температурного профиля при  $t = 1$  на основе численного метода и приближенной формулы  $s(t) \approx t - t^4 / 24$  представлены на рис. 1.

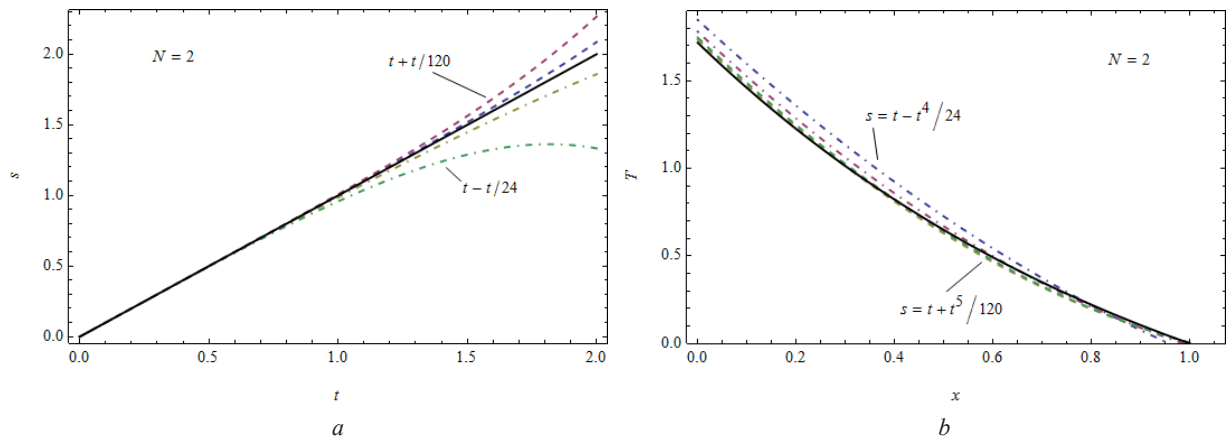


Рис. 1. Изменение во времени положения свободной границы (а) и температурные профили в момент времени  $t = 1$  (b) на основе точного решения (сплошная линия) и приближенного с квадратичным профилем (21) согласно варианту 1 (штрих-пунктирные линии) и варианту 2 (штриховые линии)

Fig. 1. Time change in the position of the free boundary (a) and temperature profiles at the instant of time  $t = 1$  (b) constructed on the basis of the exact solution (full line) and the approximate solution with a quadratic profile (21) obtained by variant 1 (dash-dot lines) and variant 2 (dashed lines)

**В а р и а н т 2.** Для нахождения функции  $s(t)$  применим подход, который связан с пренебрежением точного выполнения граничного условия Стефана (2) и применением вместо него интегрального соотношения второго порядка (14). Это дает уравнения

$$\begin{aligned} & 11520(2e^t - 2 - t) + e^t s^8 + 2s^7 [7e^t + 2(-2 + e^t)s'] + \\ & + s^6 [53e^t + 52(e^t - 2)s' - 78] - 12s^3 [1399 - 68e^t + 150t + 2(26 + 70e^t - 51t)s'] - \\ & - 36s^2 [938 - 346e^t + 205t + 4(38e^t - 19t - 22)s'] - \\ & - 576s [70 - 50e^t + 25t + (8e^t - 4t - 8)s'] + 12s^5 [(19e^t + 2t - 45)s' - 78 - 8e^t] - \\ & - 6s^4 [865 + 128e^t + 30t - (32e^t + 44t - 213)s'] = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Приближенное решение уравнения (27) посредством разложения искомой функции  $s(t)$  в степенной ряд дает  $s(t) \approx t + t^5 / 120 + O(t^6)$ . При  $t = 1$  имеем ошибку  $\varepsilon_s = 5 / 6t^4 \%$ , которая при  $t = 1$  составляет 0,83 %. В данном варианте мы имеем существенно более точное решение задачи для свободной границы по сравнению с первым вариантом (рис. 1, а). Результаты численного решения уравнения (27) приведены на рис. 1, а. При  $t = 1$  отклонение в положении рассчитанной на основе (27) свободной границы от точного положения  $s(1) = 1$  составляет 0,0026, или 0,26 %. Для ошибки аппроксимации температурного профиля в момент времени  $t = 1$  имеем  $\varepsilon_T = 1,72 \%$ .

*Новый подход в решении задачи Стефана: кубический полином.* Опишем температурный профиль полиномом третьей степени



$$T(x, t) = a_1(t)(1 - x/s) + a_2(t)(1 - x/s)^2 + a_3(t)(1 - x/s)^3. \quad (28)$$

В а р и а н т 1. Применив граничное условие Стефана, получаем систему трех уравнений:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_1/s + 2a_1/s + 3a_1/s &= w(t), \quad -a_1(t) = -s's, \\ 10a_1(3 + s) + 5a_2(4 + s) + 3a_3(5 + s) &= \frac{60}{s} \int_0^t w(t)dt - 60(1 + s/2). \end{aligned} \quad (29)$$

Решив систему уравнений (29), находим коэффициенты  $a_1, a_2$  и  $a_3$ . Подстановка профиля (28) в интегральное соотношение (14) дает определяющее уравнение

$$\begin{aligned} 90s[7(931 - 256e^t + 158t) + (209 + 736e^t - 368t)s'] + 18900[43 - 28e^t + 14t + \\ + 2(2e^t - t - 2)s'] + 180s^2[1390 - 8e^t + 98t + (403 + 89e^t - 62t)s' + 70s'^2] + 2s^8s'' + \\ + s^7(10s'^2 + 38s'' - 3e^t) = 283500(2e^t - t - 2)s^{-1} + 3s^5[87e^t - 190 + 68(e^t - 8)s' - \\ - 464s'^2 - 456s''] + 45s^3[(24e^t + 40t - 934)s' - 288s'^2 - 70s'' - 1422 - 173e^t - 28t] + \\ + 6s^6[9e^t + 2(e^t - 8)s' - 30s'^2 - 52s''] + 6s^4[2(97e^t + 10t - 966)s' - 962s'^2 - 5(304 + 23e^t + 106s'')]. \end{aligned} \quad (30)$$

Вначале найдем приближенное решение уравнения (30) посредством представления функции  $s(t)$  в виде ряда  $s(t) = b_0t + b_1t^k + b_2t^{k+1} + \dots$ . Отсюда находим  $s(t) \approx t + t^6/1350 + O(t^7)$  с относительной ошибкой  $\varepsilon_s = 2/27t^5$  (%), что дает при  $t = 1$  ошибку 0,074 %. Результаты численного решения (30) представлены на рис. 2, а. Точность определения свободной границы в данном случае существенно возросла по сравнению с описанием температурного профиля квадратичным полиномом (21). Отмечаем практически полное слияние рассчитанного на основе (30) приближенного и точного решений вплоть до  $t = 2$ . На рис. 2, б приведен график абсолютного отклонения  $|E_s|$ . Из него следует, что в диапазоне  $t = (0, 1)$  отклонение  $|E_s|$  является незначительным, не превосходя 0,0002. При  $t = 1$  имеем относительную ошибку  $\varepsilon_s = 0,016$  %.

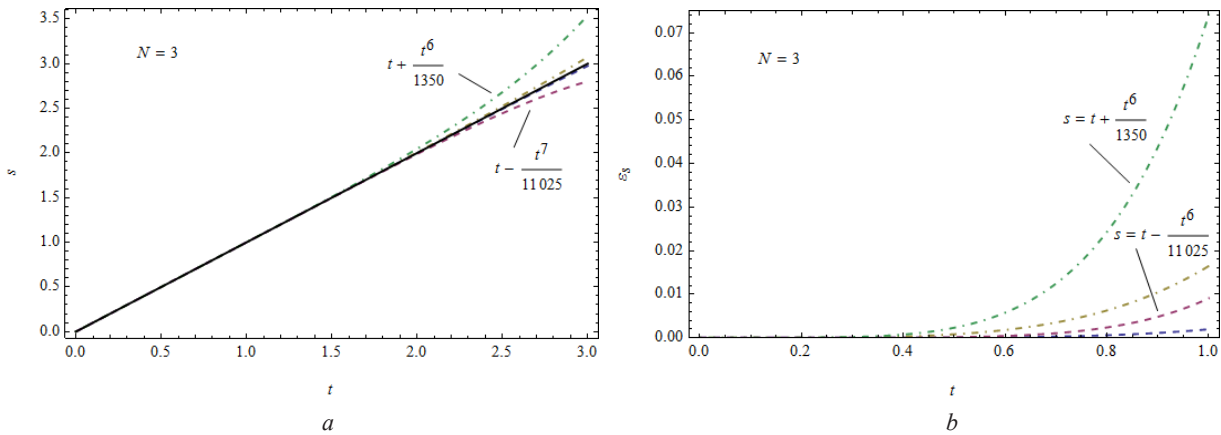


Рис. 2. Изменение во времени свободной границы на основе точного решения (сплошная линия) и приближенного с кубическим полиномом (28) согласно варианту 1 (штрих-пунктирные линии) и варианту 2 (штриховые линии) (а) и изменение во времени относительной ошибки  $\varepsilon_s$  в решениях на основе кубического полинома (28) для вариантов 1 (штрих-пунктирные линии) и 2 (штриховые линии) (б)

Fig. 2. Time change in the free boundary determined on the basis of the exact solution (full line) and the approximate solution with a cubic profile (28) obtained by variant 1 (dash-dot lines) and variant 2 (dashed lines) (a) and time change in the relative error  $\varepsilon_s$  of the solutions in the form of the cubic polynomial (28) obtained by variant 1 (dash-dot lines) and variant 2 (dashed lines) (b)

Графики температурных профилей согласно (28), (29) и  $s(t) = t + t^6/1350$ , а также для точного решения (20) представлены на рис. 3, а. Как видим, что при  $t = 2$  имеет место существенное несоответствие приближенного и точного решений. Даже в момент времени  $t = 1,5$  отмечаем ви-

зуально различимое несовпадение сравниваемых температурных профилей. Однако решение на основе кубического полинома дает намного более точную аппроксимацию по сравнению с квадратичным полиномом (рис. 1, *b*, рис. 3, *a*).

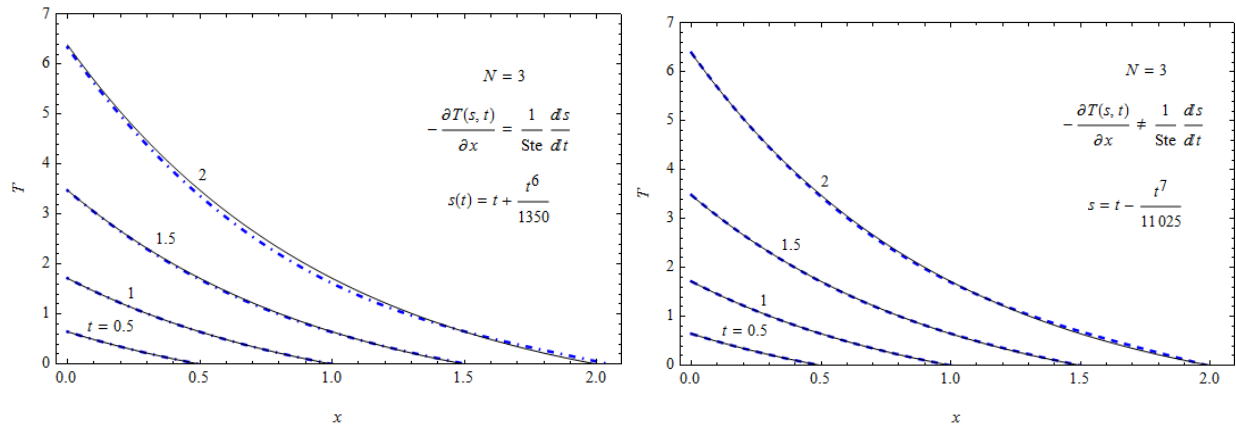


Рис. 3. Температурные профили в различные моменты времени согласно точному решению (сплошная линия) и приближенному решению с кубическим полиномом (28) согласно варианту 1 (штрих-пунктирная линия) (*a*) и варианту 2 (штриховая линия) (*b*)

Fig. 3. Temperature profiles at different instants of time constructed on the basis of the exact solution (full line) and the approximate solution with a cubic profile (28) obtained by variant 1 (dash-dot lines) (*a*) and variant 2 (dashed lines) (*b*)

**В а р и а н т 2.** Другим подходом в решении задачи (17)–(19) является замена граничного условия Стефана (2) либо (19) на одно из интегральных соотношений (16). В данном случае таким соотношением является интегральное соотношение третьего порядка (15), которому после дифференцирования можно придать вид

$$\frac{d}{dt} \int_0^s T x^4 \left(1 + \frac{x}{5}\right) dx + 4s^3 + 12 \int_0^t (2+s) s dt + \frac{s^5 s'}{5} + s^4 (1+s) = 24 \int_0^t \int_0^t w(t) dt dt.$$

В этом случае для определения коэффициентов  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \frac{a_1}{s} + \frac{2a_1}{s} + \frac{3a_1}{s} &= w(t), \\ 10a_1(3+s) + 5a_2(4+s) + 3a_3(5+s) &= \frac{60}{s} \int_0^t w(t) dt - 60 \left(1 + \frac{s}{2}\right), \\ 21a_1(5+s) + 7a_2(6+s) + 3a_3(7+s) + 105s^3(4+s) + 1260 \int_0^t (2+s) s dt &= \frac{2520}{s^3} \int_0^t \int_0^t w(t) dt dt. \end{aligned}$$

Определяющее уравнение найдем в результате подстановки температурного профиля (28) в интегральное соотношение четвертого порядка, вытекающее из последовательности (16):

$$\frac{d}{dt} \int_0^s T x^4 \left(1 + \frac{x}{5}\right) dx + 4s^3 + 12 \int_0^t (2+s) s dt + \frac{s^5 s'}{5} + s^4 (1+s') = 4 \int_0^t \int_0^t w(t) dt dt. \quad (31)$$

Дифференцирование уравнения (31) дает определяющее уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^s T x^4 \left(1 + \frac{x}{5}\right) dx + 12s(ss' + s + 2) + s^3[ss'^2 + 4s'(1+s')] + s^4 s'' \left(1 + \frac{s}{5}\right) = 4 \int_0^t w(t) dt. \quad (32)$$



Приближенное решение уравнения (32) дает  $s(t) \approx t - t^7 / 11025$  с ошибкой  $\varepsilon_s = 4 / 441t^6$  (%). При  $t = 1$  имеем  $\varepsilon_s = 0,0091$  %. Результаты численного решения уравнения (32) представлены на рис. 2, *a*. Замена условия Стефана (2) на интегральное соотношение третьего порядка (15) позволяет весьма существенно повысить точность определения свободной границы  $s(t)$ . При  $t = 1$  имеем  $|E_s| = 0,00002$  либо  $\varepsilon_s = 0,002$  % (рис. 2, *b*).

Температурные профили согласно второму варианту с  $s(t) = t - t^7 / 11025$  представлены на рис. 3, *b*. В отличие от первого варианта, в данном случае при  $t = 2$  отмечаем достаточно точную аппроксимацию. В момент времени  $t = 1,5$  температурные профили приближенного и точного решений практически полностью сливаются. Сравнение абсолютных отклонений  $|E_T|$  приближенных температурных профилей от соответствующих точных профилей (рис. 4) показывает, что второй вариант расчета обеспечивает в два-три раза более точное аппроксимационное решение задачи. Для первого и второго вариантов расчета при  $t = 1$  имеем ошибки  $\varepsilon_T = 0,163$  % и  $\varepsilon_T = 0,075$  % соответственно.

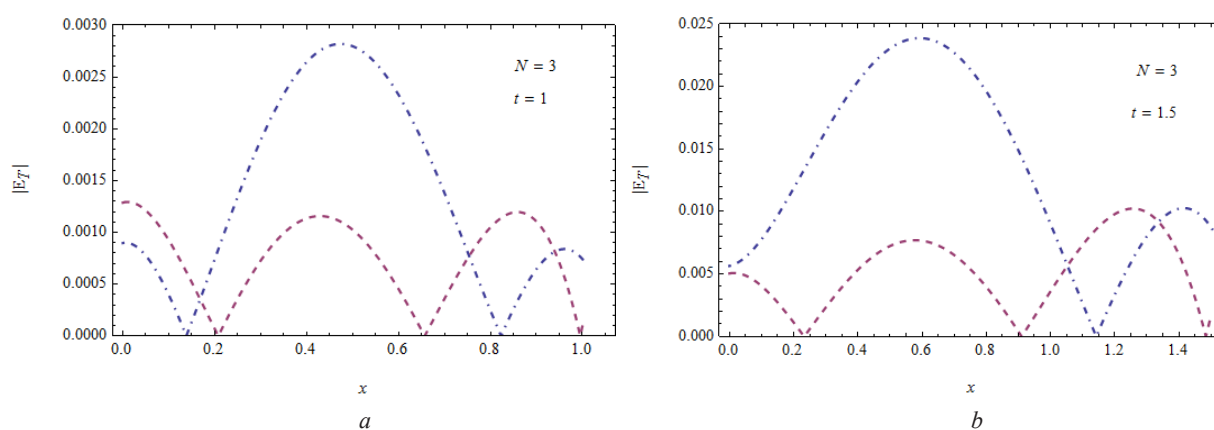


Рис. 4. Абсолютные отклонения  $|E_T|$  приближенных решений (28) согласно вариантам 1 (штрих-пунктирная линия) и 2 (штриховая линия) от точного решения для моментов времени  $t = 1$  (*a*) и  $t = 1,5$  (*b*)

Fig. 4. Absolute deviation  $|E_T|$  of the approximate solution (28) obtained by variant 1 by variant 1 (dash-dot lines) and variant 2 (dashed lines) from the exact solution at the instants of time  $t = 1$  (*a*) and  $t = 1,5$  (*b*)

**Заключение.** Предложено два новых варианта приближенного аналитического решения однофазной задачи Стефана с конвективным граничным условием на фиксированной границе. Данные решения основаны на применении новых интегральных соотношений, образующих бесконечную последовательность. Наиболее точным вариантом решения задачи является отказ от условия точного выполнения классического условия Стефана на свободной границе с его заменой на одно из интегральных соотношений. На примере рассмотрения тестовой задачи показано, что предложенный новый подход является существенно более точным и эффективным по сравнению с известными интегральными подходами. Представлены решения задачи на основе применения квадратичного и кубического полиномов. В решениях тестовой задачи на основе кубического полинома относительная ошибка определения положения свободной границы составляет тысячные и сотые доли процента. В момент времени  $t = 1$  относительная ошибка для температурного профиля составляет  $\varepsilon_T = 0,075$  %.

#### Список использованных источников

1. Alexiades, V. Mathematical Modeling of Melting and Freezing Processes / V. Alexiades, A. D. Solomon. – New York, 1993. – 340 p. <https://doi.org/10.1201/9780203749449>
2. Cannon, J. R. The One-Dimensional Heat Equation / J. R. Cannon. – California, 1984. – 483 p. <https://doi.org/10.1017/cbo9781139086967>
3. Gupta, S. C. The Classical Stefan Problem. Basic Concepts, Modelling and Analysis / S. C. Gupta. – Amsterdam, 2003.

4. Lunardini, V. J. Heat Transfer with Freezing and Thawing / V. J. Lunardini. – London, 1991. – 437 p. <https://doi.org/10.1016/c2009-0-09960-7>
5. Tarzia, D. A. A bibliography on moving-free boundary problems for heat diffusion equation. The Stefan and related problems / D. A. Tarzia // *MAT Serie A*. – 2000. – Vol. 2. – P. 1–297. <https://doi.org/10.26422/mat.a.2000.2.tar>
6. Tarzia, D. A. Explicit and Approximated Solutions for Heat and Mass Transfer Problems with a Moving Interface / D. A. Tarzia // *Advanced Topics in Mass Transfer*. – 2011. – P. 439–484. <https://doi.org/10.5772/14537>
7. Goodman, T. The heat balance integral methods and its application to problems involving a change of phase / T. Goodman // *Trans. ASME*. – 1958. – Vol. 90. – P. 335–342.
8. Bollati, J. Heat balance integral methods applied to the one-phase Stefan problem with a convective boundary condition at the fixed face / J. Bollati, J. Semitiel, D. A. Tarzia // *Appl. Math. Comput.* – 2018. – Vol. 331. – P. 1–19. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.02.054>
9. Mitchell, S. L. Application of standard and refined heat balance integral methods to one-dimensional Stefan problems / S. L. Mitchell, T. Myers // *SIAM Rev.* – 2010. – Vol. 52, N 1. – P. 57–86. <https://doi.org/10.1137/080733036>
10. Roday, A. Analysis of phase-change in finite slabs subjected to convective boundary conditions: part I – melting / A. Roday, M. Kazmierczak // *Int. Rev. Chem. Eng.* – 2009. – Vol. 1. – P. 87–99.
11. Tarzia, D. A. Relationship between Neumann solutions for two-phase Lamé–Clapeyron–Stefan problems with convective and temperature boundary conditions / D. A. Tarzia // *Therm. Sci.* – 2017. – Vol. 21, N 1. – P. 187–197. <https://doi.org/10.2298/tsci140607003t>
12. Whye-Teong, Ang. A numerical method based on integro-differential formulation for solving a one-dimensional Stefan problem / Ang. Whye-Teong // *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. – 2008. – Vol. 24, N 3. – P. 939–949. <https://doi.org/10.1002/num.20298>
13. Kot, V. A. Integral Method of Boundary Characteristics in Solving the Stefan Problem: Dirichlet Condition // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. – 2016. – Vol. 89, N 5. – P. 1289–1314. <https://doi.org/10.1007/s10891-016-1499-0>
14. Kot, V. A. Solution of the Classical Stefan Problem: Neumann Condition / V. A. Kot // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. – 2017. – Vol. 90, N 4. – P. 889–917. <https://doi.org/10.1007/s10891-017-1638-2>
15. Kot, V. A. Integral Method of Boundary Characteristics: The Dirichlet Condition. Principles / V. A. Kot // *Heat Transfer Res.* – 2016. – Vol. 47, N 11. – P. 1035–1055. <https://doi.org/10.1615/heattransres.2016014882>

## References

1. Alexiades V., Solomon A. D. *Mathematical Modeling of Melting and Freezing Processes*. New York, 1993. 340 p. <https://doi.org/10.1201/9780203749449>
2. Cannon J. R. *The One-Dimensional Heat Equation*. California, 1984. 483 p. <https://doi.org/10.1017/cbo9781139086967>
3. Gupta S. C. *The Classical Stefan Problem. Basic Concepts, Modelling and Analysis*. Amsterdam, 2003.
4. Lunardini V. J. *Heat Transfer with Freezing and Thawing*. London, 1991. 437 p. <https://doi.org/10.1016/c2009-0-09960-7>
5. Tarzia D. A. A bibliography on moving-free boundary problems for heat diffusion equation. The Stefan and related problems. *MAT Serie A*, 2000, vol. 2, pp. 1–297. <https://doi.org/10.26422/mat.a.2000.2.tar>
6. Tarzia D. A. Explicit and Approximated Solutions for Heat and Mass Transfer Problems with a Moving Interface. *Advanced Topics in Mass Transfer*, 2011, pp. 439–484. <https://doi.org/10.5772/14537>
7. Goodman T. The heat balance integral methods and its application to problems involving a change of phase. *Trans. ASME*, 1958, vol. 90, pp. 335–342.
8. Bollati J., Semitiel J., Tarzia D. A. Heat balance integral methods applied to the one-phase Stefan problem with a convective boundary condition at the fixed face. *Applied Mathematics and Computation*, 2018, vol. 331, pp. 1–19. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.02.054>
9. Mitchell S. L., Myers T. Application of standard and refined heat balance integral methods to one-dimensional Stefan problems. *SIAM Review*, 2010, vol. 52, no. 1, pp. 57–86. <https://doi.org/10.1137/080733036>
10. Roday A., Kazmierczak M. Analysis of phase-change in finite slabs subjected to convective boundary conditions: part I – melting. *International Review of Chemistry England*, 2009, vol. 1, pp. 87–99.
11. Tarzia D. A. Relationship between Neumann solutions for two-phase Lamé–Clapeyron–Stefan problems with convective and temperature boundary conditions. *Thermal Science*, 2017, vol. 21, no. 1, pp. 187–197. <https://doi.org/10.2298/tsci140607003t>
12. Whye-Teong Ang. A numerical method based on integro-differential formulation for solving a one-dimensional Stefan problem. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2008, vol. 24, no. 3, pp. 939–949. <https://doi.org/10.1002/num.20298>
13. Kot V. A. Integral Method of Boundary Characteristics in Solving the Stefan Problem: Dirichlet Condition. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2016, vol. 89, no. 5, pp. 1289–1314. <https://doi.org/10.1007/s10891-016-1499-0>
14. Kot V. A. Solution of the Classical Stefan Problem: Neumann Condition. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2017, vol. 90, no. 4, pp. 889–917. <https://doi.org/10.1007/s10891-017-1638-2>
15. Kot V. A. Integral Method of Boundary Characteristics: The Dirichlet Condition. Principles. *Heat Transfer Research*, 2016, vol. 47, no. 11, pp. 1035–1055. <https://doi.org/10.1615/heattransres.2016014882>

---

### **Информация об авторе**

*Кот Валерий Андреевич* – канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник. Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: [valery.kot@hmti.ac.by](mailto:valery.kot@hmti.ac.by).

### **Information about the author**

*Kot Valery Andreevich* – Ph. D. (Engineering), Senior researcher. A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [valery.kot@hmti.ac.by](mailto:valery.kot@hmti.ac.by).