ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.977
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-5-519-525

Поступило в редакцию 13.04.2020
Received 13.04.2020

Д. А. Костюкевич, Н. М. Дмитрук

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

СТРАТЕГИЯ С ЗАМЫКАНИЕМ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ГАРАНТИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления линейной дискретной системой с неизвестными ограниченными возмущениями, которую требуется за конечное время перевести с гарантией на терминальное множество, обеспечивая при этом минимум гарантированного значения заданного критерия качества. Определяется оптимальная стратегия управления с замыканием, где под замыканием понимается учет информации об одном будущем состоянии объекта; предлагается эффективный алгоритм ее построения.

Ключевые слова: оптимальное гарантированное управление, линейная дискретная система, возмущения, стратегия управления, алгоритм

Для цитирования. Костюкевич, Д. А. Стратегия с замыканием в задаче оптимального гарантированного управления линейной системой / Д. А. Костюкевич, Н. М. Дмитрук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2020. – Т. 64, № 5. – С. 519–525. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-5-519-525

Dzmitry A. Kastsiukevich, Natalia M. Dmitruk

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

A CLOSED-LOOP STRATEGY IN AN OPTIMAL GUARANTEED CONTROL PROBLEM FOR A LINEAR SYSTEM

(Communicated by Corresponding Member Valentin V. Gorokhovik)

Abstract. This paper deals with an optimal control problem for a linear discrete system subject to unknown bounded disturbances with the control goal being to steer the system with guarantees to a given target set while minimizing a given cost function. We define an optimal control strategy with one correction time instant, meaning taking into account information about one future state of the object, and propose an efficient numerical method for constructing it.

Keywords: optimal guaranteed control, linear discrete system, disturbances, control strategy, algorithm

For citation: Kastsiukevich D. A., Dmitruk N. M. A closed-loop strategy in an optimal guaranteed control problem for a linear system. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2020, vol. 64, no. 5, pp. 519–525 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-5-519-525

Введение. Задачи оптимального управления динамическими системами, подверженными действию неизвестных ограниченных возмущений, для которых требуется получить гарантированный результат (перевести систему на заданное целевое множество независимо от реализации возмущения, обеспечить минимальное значение критерия при наихудшей неопределенности), рассматриваются в литературе с конца 1960-х годов [1–3].

Современный этап развития теории гарантированного оптимального управления связан с теорией управления по прогнозирующей модели (Model Predictive Control, MPC) [4] и ее разделом, посвященным робастным подходам MPC [5; 6]. Методы MPC разработаны для решения различных задач теории управления, в частности задач стабилизации. Они опираются на решение в ходе конкретного процесса управления в каждый текущий момент времени прогнозирующей задачи оптимального управления на конечном промежутке времени с начальным состоянием, совпадающим с текущим состоянием процесса. Значение оптимального управления в начальный момент времени подается на вход системы, и в следующий момент процесс повторяется для нового состояния. Результатом применения описанного алгоритма является обратная связь, при ряде предположений о параметрах прогнозирующих задач обеспечивающая асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

В робастных методах MPC формирование обратной связи на основе оптимальных гарантирующих программных решений, использующих информацию только о текущей позиции процесса управления, считается неэффективным. Прогнозирующие задачи оптимального управления необходимо формулировать в терминах построения оптимальных стратегий [5; 6], учитывающих зависимость управляющих воздействий от информации не только о текущих, но и о будущих позициях процесса управления. Поскольку задачи оптимального управления решаются в режиме реального времени, актуальны формулировки прогнозирующих задач, допускающие эффективное с вычислительной точки зрения построение оптимальных стратегий.

Настоящее сообщение следует идеям работ [7–9], в которых стратегия управления определяется в предположении о возможности измерения состояний объекта и коррекции управляющих воздействий в один будущий момент времени. Основное отличие от работ [7–9] – вид критерия качества. Он задается функционалом из [6], что позволяет непосредственно применять результаты настоящего сообщения в алгоритмах MPC. Кроме того, рассматривается дискретная система управления.

Постановка задачи. Оптимальная гарантирующая программа. Рассмотрим дискретную линейную систему с возмущением

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t),\ x(0) = x_0,\ t = 0, 1, \ldots, T-1, \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние; $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r$ – значение управления; $w(t) \in W \subset \mathbb{R}^p$ – неизвестное возмущение в момент времени t; $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$ – заданные матрицы; $U = \{u \in \mathbb{R}^r : \|u\|_\infty \le \le w_{\max}\}$, $W = \{w \in \mathbb{R}^p : \|w\|_\infty \le w_{\max}\}$, где $\|z\|_\infty = \max_i |z_i|$. Для траектории системы (1) с допустимым управлением $u(\cdot) = (u(t) \in U,\ t = 0, 1, \ldots, T-1)$ и возможным возмущением $w(\cdot) = (w(t) \in W,\ t = = 0, 1, \ldots, T-1)$ будем использовать обозначение $x(t \mid x_0, u(\cdot), w(\cdot)),\ t = 0, 1, ..., T$.

Целями управления системой (1) являются:

1) ее перевод с гарантией на заданное терминальное множество $X_T = \{x \in \mathbb{R}^n : Hx \le g\}$;

2) минимизация гарантированного значения:

$$J(u) = \max_{w(\cdot)} \sum_{t=0}^{T-1} (\|Qx(t)\|_\infty + \|Ru(t)\|_\infty) + \|Px(T)\|_\infty, \quad (2)$$

где $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $g \in \mathbb{R}^m$ таковы, что X_T – компакт; $Q, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{R}^{r\times r}$. Критерий качества (2) выбран как в [6] с целью последующего использования результатов в теории MPC.

Определение 1. *Гарантирующей программой управления называется такое допустимое управление* $u(\cdot)$, *что при любой реализации возможного возмущения* $w(\cdot)$ *соответствующая траектория* $x(t \mid x_0, u(\cdot), w(\cdot)),\ t = 0, 1, \ldots, T$, *системы (1) в момент времени T попадает на терминальное множество:* $x(T \mid x_0, u(\cdot), w(\cdot)) \in X_T$, $\forall\ w(t) \in W$, $t = 0, 1, \ldots, T-1$.

Определение 2. *Гарантирующая программа управления* $u^0(\cdot)$ *называется оптимальной, если она доставляет минимум критерию качества (2):* $J(u^0) = \min J(u)$, *где минимум ищется среди всех гарантирующих программ.*

Отметим, что максимизируемая в (2) функция является выпуклой, а переменная оптимизации $w(\cdot)$ принадлежит множеству $W \times \ldots \times W$, которое является гиперкубом в $\mathbb{R}^{T\times p}$. Максимум функции (2) на гиперкубе достигается в одной или нескольких его вершинах, поэтому введем соответствующие обозначения: V – множество всех вершин гиперкуба $W \times \ldots \times W$: $L = \{1, 2, ..., |V|\}$ – множество индексов; $w^l(\cdot) = (w^l(0), w^l(1), ..., w^l(T-1))$ – l-ая вершина гиперкуба (l-ое экстремальное возмущение); $l \in L$; $x^l(t \mid x_0, u(\cdot)) = x(t \mid x_0, u(\cdot), w^l(\cdot))$, $t = 0, 1, ..., T$; $x_0(t \mid x_0, u(\cdot)) = x(t \mid x_0, u(\cdot), 0)$, $t = 0, 1, ..., T$, – траектория номинальной системы, соответствующей (1):

$$x_0(t+1) = Ax_0(t) + Bu(t),\ x_0(0) = x_0,\ t = 0, 1, ..., T-1.$$

Следуя [6; 7], задачу построения оптимальной гарантирующей программы можно свести к следующей детерминированной (без возмущения) задаче:

$$\min_{u(\cdot)} \max_{l \in L} \sum_{t=0}^{T-1} \left(\left\| Qx^l(t \mid x_0, u(\cdot)) \right\|_\infty + \left\| Ru(t) \right\|_\infty \right) + \left\| Px^l(T \mid x_0, u(\cdot)) \right\|_\infty, \quad (3)$$

при условиях

$$Hx_0(T \mid x_0, u(\cdot)) \le g - \gamma, \; u(t) \in U, \; t = 0, 1, \ldots, T-1,$$

где $\gamma = (\gamma_i, i = 1, ..., m)$; $\gamma_i = w_{\max} \sum_{s=0}^{T-1} \left\| h_i' A^s M \right\|_1$ – оценка наихудшей реализации возмущения; h_i' – i-я строка матрицы H.

Задача (3) в свою очередь сводится [10] к задаче линейного программирования:

$$\min_{u(\cdot), \alpha, \varepsilon_u(\cdot), \varepsilon_x(\cdot)} \alpha,$$

$$\sum_{t=0}^{T} \varepsilon_x^l(t) + \sum_{t=0}^{T-1} \varepsilon_u(t) - \alpha \le 0, \; l \in L,$$

$$-\varepsilon_x^l(t) \mathbf{1}_n \pm \sum_{s=0}^{t-1} QA^{t-s-1} Bu(s) \le \mp Qx^l(t \mid x_0, 0), \; t = 0, \ldots, T-1, \; l \in L,$$

$$-\varepsilon_x^l(T) \mathbf{1}_n \pm \sum_{s=0}^{T-1} PA^{T-s-1} Bu(s) \le \mp Px^l(T \mid x_0, 0), \; l \in L,$$

$$-\varepsilon_u(t) \mathbf{1}_r \pm Ru(t) \le 0, \; \pm u(t) \le u_{\max} \mathbf{1}_r, \; t = 0, \ldots, T-1,$$

$$\sum_{s=0}^{T-1} HA^{T-s-1} Bu(s) \le g - \gamma - HA^T x_0,$$

где $\pm$ и $\mp$ используются для сокращения записи и означают учет неравенства как со знаком «+», так и со знаком «–»; $\varepsilon_x^l(t) \in \mathbb{R}, t = 0, 1, \ldots, T, l \in L$; $\varepsilon_u(t) \in \mathbb{R}, t = 0, 1, \ldots, T-1$; $\mathbf{1}_n = (1, 1, \ldots, 1)' \in \mathbb{R}^n$.

Оптимальная стратегия управления. Известно [8; 9], что оптимальная гарантирующая программа недооценивает потенциальные возможности системы управления, поскольку не учитывает возможность поступления информации о ее поведении в будущем. Такую возможность учтем, определив стратегию управления с одним моментом замыкания. Далее считаем, что момент замыкания $T_1 \in \{1, 2, \ldots, T-1\}$ выбран до начала процесса управления.

Пусть $\Delta_0 = \{0, 1, \ldots, T_1 - 1\}$, $\Delta_1 = \{T_1, T_1 + 1, \ldots, T-1\}$. Для промежутков управления Δ_0 и Δ_1 определим: $u_k(\cdot) = (u_k(t) \in U, t \in \Delta_k)$, $w_k(\cdot) = (w_k(t) \in W, t \in \Delta_k)$ – управление и возмущение на k-ом промежутке, $k = 0, 1$; $U_k = \{u_k(\cdot) : u_k(t) \in U, \; t \in \Delta_k\}$ – множество доступных управлений, определенных на k-ом промежутке; $W_k = \{w_k(\cdot) : w_k(t) \in W, \; t \in \Delta_k\}$ – множество возможных возмущений на k-ом промежутке; $X(T_1 \mid x_0, u_0(\cdot)) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x(T_1 \mid x_0, u_0(\cdot), w_0(\cdot)), w_0(\cdot) \in W_0\}$, $X(T \mid x_1, u_1(\cdot)) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x(T \mid x_1, u_1(\cdot), w_1(\cdot)), w_1(\cdot) \in W_1\}$ – множества возможных состояний в моменты времени T_1 и T, где $x(t \mid x_k, u_k(\cdot), w_k(\cdot))$, $t \in \Delta_k$, – траектория системы (1) с начальным условием $x(0) = x_0$ или $x(T_1) = x_1$ под действием управления $u_k(\cdot)$ и возмущения $w_k(\cdot)$.

Следуя работам [8; 9], будем считать, что до начала процесса управления известно, что в момент T_1 можно будет

1) измерить текущее состояние объекта управления $x_1 = x(T_1 \mid x_0, u_0(\cdot), w_0(\cdot))$;

2) выбрать новое управление $u_1(\cdot) = u_1(\cdot \mid x_1)$ на интервале Δ_1 с учетом измеренного x_1.

С учетом 1), 2) будем искать решение рассматриваемой задачи в виде *стратегии управления* (с моментом замыкания T_1)

$$\pi_1 = \{u_0(\cdot \mid x_0); u_1(\cdot \mid x_1), x_1 \in X(T_1 \mid x_0, u_0(\cdot \mid x_0))\},$$

где $u_0(\cdot \mid x_0) = u_0(\cdot) = (u_0(t), t \in \Delta_0)$; $u_1(\cdot \mid x_1) = (u_1(t \mid x_1), t \in \Delta_1)$; $x_1 \in X(T_1 \mid x_0, u_0(\cdot \mid x_0))$.

Программу управления $u_0(\cdot \mid x_0)$ в составе π_1 будем называть *начальной программой*.

Траекторию системы управления (1), соответствующую стратегии π_1 и некоторому возмущению $w(\cdot)$, определим как последовательное решение двух систем [8; 9]:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu_0(t) + Mw_0(t), \; x(0) = x_0, \; t \in \Delta_0,$$

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu_1(t \mid x(T_1)) + Mw_1(t),\ x(T_1) = x(T_1 \mid x_0, u_0(\cdot), w_0(\cdot)),\ t \in \Delta_1.$$

Для определения допустимой стратегии управления рассмотрим сначала промежуток управления Δ_1, а затем Δ_0. На промежутке Δ_1 первая цель управления состоит в переводе системы на терминальное множество X_T. Попадание на него должно быть выполнено с гарантией, т. е. при всех возможных возмущениях $w_1(\cdot) \in W_1$. Таким образом, при фиксированном x_1 на Δ_1 необходимо найти гарантирующую программу управления $u_1(\cdot \mid x_1) \in U_1$, которая обеспечит включение

$$X(T \mid x_1, u_1(\cdot \mid x_1)) \subseteq X_T. \tag{4}$$

На промежутке Δ_0 управление $u_0(\cdot)$ должно быть таким, чтобы для любой точки x_1 множества $X(T_1 \mid x_0, u_0(\cdot))$ существовала гарантирующая программа управления $u_1(\cdot \mid x_1)$. Таким образом, получим

Определение 3. *Стратегия π_1 называется допустимой стратегией управления, если*

$$X(T \mid x_1, u_1(\cdot \mid x_1)) \subseteq X_T,\ \ \forall x_1 \in X(T_1 \mid x_0, u_0(\cdot)).$$

Для определения оптимальной стратегии управления π_1^0 снова последовательно рассмотрим промежутки Δ_1 и Δ_0. На промежутке Δ_1 для некоторого состояния x_1 задача управления заключается в отыскании оптимальной гарантирующей программы $u_1^0(\cdot \mid x_1)$, которая является решением минимаксной задачи

$$J_1(x_1) = \min_{u_1(\cdot)\in U_1} \max_{w_1(\cdot)\in W_1} \left\{ \sum_{t\in\Delta_1} \left(\left\| Qx(t \mid x_1, u_1(\cdot), w_1(\cdot)) \right\|_\infty + \left\| Ru_1(t) \right\|_\infty \right) + \left\| Px(T \mid x_1, u_1(\cdot), w_1(\cdot)) \right\|_\infty \right\} \tag{5}$$

при условии (4). Если задача (4)–(5) не имеет решения, полагаем $J_1(x_1) = +\infty$.

Далее считаем, что непусто множество $X_1 = \{x_1 : J_1(x_1) < +\infty\}$ и существует $u_0(\cdot)$, обеспечивающее включение $X(T_1 \mid x_0, u_0(\cdot)) \subseteq X_1$. Это означает, что существует допустимая стратегия управления $\pi_1 = \{u_0(\cdot \mid x_0); u_1^0(\cdot \mid x_1), x_1 \in X(T_1 \mid x_0, u_0(\cdot \mid x_0))\}$. Качество этой стратегии оценивается критерием качества (2), который с учетом разбиения промежутка можно записать в виде

$$V(\pi_1) = \max_{w_0(\cdot)\in W_0} \sum_{t\in\Delta_0} \left(\left\| Qx(t \mid x_0, u_0(\cdot), w_0(\cdot)) \right\|_\infty + \left\| Ru_0(t) \right\|_\infty \right) + J_1(x(T_1 \mid x_0, u_0(\cdot), w_0(\cdot))).$$

Определение 4. *Допустимая стратегия управления*

$$\pi_1^0 = \{u_0^0(\cdot \mid x_0); u_1^0(\cdot \mid x_1), x_1 \in X(T_1 \mid x_0, u_0^0(\cdot \mid x_0))\}, \tag{6}$$

называется оптимальной, если $V(\pi_1^0) = \min V(\pi_1)$, где минимум ищется среди всех допустимых стратегий. Программа управления $u_0^0(\cdot \mid x_0)$ – оптимальная начальная программа.

Таким образом, оптимальная начальная программа $u_0^0(\cdot \mid x_0)$ на промежутке Δ_0 является решением минимаксной задачи

$$V(\pi_1^0) = \min_{u_0(\cdot)\in U_0} \max_{w_0(\cdot)\in W_0} \sum_{t\in\Delta_0} \left(\left\| Qx(t) \right\|_\infty + \left\| Ru_0(t) \right\|_\infty \right) + J_1(x(T_1)) \tag{7}$$

при условиях

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu_0(t) + Mw_0(t),\ x(0) = x_0,\ t \in \Delta_0,\ x(T_1) \in X_1\ ,\ \forall w_0(\cdot) \in W_0.$$

Подытожим проведенные построения. Стратегия управления (6) оптимальна, если $u_0^0(\cdot \mid x_0)$ – решение задачи (7), $u_1^0(\cdot \mid x_1)$ – решения задач (5) для состояний $x_1 \in X(T_1 \mid x_0, u_0^0(\cdot \mid x_0))$.

Отметим, что из задачи (7) следует, что качество оптимальной стратегии π_1^0 вычисляется как

$$V(\pi_1^0) = \min_{u_0(\cdot)\in U_0} \max_{w_0(\cdot)\in W_0} \min_{u_1(\cdot)\in U_1} \max_{w_1(\cdot)\in W_1} \left\{ \sum_{k=0,1} \sum_{t\in\Delta_k} \left(\left\| Qx(t \mid x_k, u_k(\cdot \mid x_k), w_k(\cdot)) \right\|_\infty + \left\| Ru_k(t \mid x_k) \right\|_\infty \right) + \right.$$
$$\left. + \left\| Px(T \mid x_1, u_1(\cdot \mid x_1), w_1(\cdot)) \right\|_\infty \right\},$$

тогда как качество оптимальной гарантирующей программы $u^0(t)$ находится из

$$J(u^0)=\min_{u_0(\cdot)\in U_0}\min_{u_1(\cdot)\in U_1}\max_{w_0(\cdot)\in W_0}\max_{w_1(\cdot)\in W_1}\left\{\sum_{k=0,1}\sum_{t\in\Delta_k}\left(\left\|Qx(t\,|\,x_k,u_k(\cdot),w_k(\cdot))\right\|_\infty+\left\|Ru_k(t)\right\|_\infty\right)+\right.$$
$$\left.+\left\|Px(T\,|\,x_1,u_1(\cdot),w_1(\cdot))\right\|_\infty\right\}.$$

Таким образом, принимая во внимание неравенство минимакс, можно заключить что $V(\pi_1^0)\le J(u^0)$, т. е. использование оптимальной стратегии даже с одним моментом замыкания может улучшить гарантированное значение критерия качества по сравнению с тем, которое дает применение оптимальной гарантирующей программы.

Сведение задачи (7) к задаче линейного программирования. До начала процесса управления необходимо знать лишь оптимальную начальную программу $u_0^0(\cdot\,|\,x_0)$. Оптимальные гарантирующие программы $u_1^0(\cdot\,|\,x_1)$ заранее не строятся, а вычисляются в момент замыкания T_1, когда будет измерено текущее состояние $x(T_1)$. Цель дальнейшего изложения – эффективное вычисление оптимальной начальной программы $u_0^0(\cdot\,|\,x_0)$.

Задачу (7) запишем в эквивалентном виде (см. [9; 10])

$$V(\pi_1^0)=\min_{u_0(\cdot)\in U_0,\alpha}\max_{w_0(\cdot)\in W_0}\sum_{t\in\Delta_0}\left(\left\|Qx(t)\right\|_\infty+\left\|Ru_0(t)\right\|_\infty\right)+\alpha \tag{8}$$

при условиях

$$x(t+1)=Ax(t)+Bu_0(t)+Mw_0(t),\ x(0)=x_0,\ t\in\Delta_0,$$
$$x(T_1)\in X_1(\alpha)=\{x_1\in X_1: J_1(x_1)\le\alpha\}\ ,\forall w_0(\cdot)\in W_0.$$

Центральный результат данного сообщения – аппроксимация задачи (8) задачей линейного программирования.

Пусть $\alpha_{\min}$ – минимальное значение α, при котором $X_1(\alpha)$ непусто, $\alpha_{\max}=\max J_1(x_1),\, x_1\in X_1$. При фиксированном значении $\alpha\in[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]$, множество $X_1(\alpha)$ для дискретной системы (1) – многогранник. Будем аппроксимировать $X_1(\alpha)$ внешним многогранником $\overline{X}_1(\alpha)=\{x_1\in\mathbb{R}^n: P_1x_1\le$ $\le g(\alpha)\}$, где матрица P_1 со строками $p_i\in\mathbb{R}^n$, $i=1,2,\dots,m_1$, $\|p_i\|=1$, выбрана независящей от параметра α, $g(\alpha)=(g_i(\alpha),\ i=1,2,\dots,m_1)$:

$$g_i(\alpha)=\max p_i'x_1,\ x_1\in X_1(\alpha). \tag{9}$$

Выбирая достаточно большое количество нормалей p_i, $i=1,2,\dots,m_1$, можно достаточно хорошо аппроксимировать множество $X_1(\alpha)$ при любом $\alpha\in[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]$.

Задача (9) – задача линейного программирования, зависящая от параметра α. Тогда, согласно [11], функция $g_i(\alpha)$, $\alpha\in[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]$, – вогнутая, кусочно-линейная. Для нее с использованием результатов параметрического линейного программирования [11; 12] может быть найдено разбиение отрезка $[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]$ на области линейности функции $g_i(\alpha)$.

Далее будем считать, что указанное разбиение найдено для всех p_i, $i=1,2,\dots,m_1$, в результате чего построено обобщающее разбиение $\alpha_{\min}=\alpha^1<\ldots<\alpha^{K+1}=\alpha_{\max}$ и найдены значения $q_i^k=\dfrac{dg_i(\alpha^k+0)}{d\alpha}$, $i=1,\dots,m_1$, $k=1,\dots,K$. В силу вогнутости функции $g_i(\alpha)$, для каждого i имеют место неравенства $q_i^k\ge q_i^{k+1}$. Тогда для некоторого α из промежутка $[\alpha^{k(\alpha)},\alpha^{k(\alpha)+1})$ имеет место следующее представление решения задачи (9):

$$g_i(\alpha)=g_i(\alpha^1)+\sum_{k=1}^{k(\alpha)}q_i^k\omega_k(\alpha),$$

где $\omega_k(\alpha)=\alpha^{k+1}-\alpha^k$, $k=1,\dots,k(\alpha)-1$; $\omega_{k(\alpha)}(\alpha)=\alpha-\alpha^{k(\alpha)}$; $\omega_k(\alpha)=0,\ \ k=k(\alpha)+1,\dots,K$.

Пусть $Q_1\in\mathbb{R}^{m_1\times K}$ – матрица, элементами которой являются q_i^k, $g_1=(g_i(\alpha^1),\,i=1,2,\dots,m_1)$. Следуя рассуждениям [9], в задаче (8) заменим переменную оптимизации $\alpha\in\mathbb{R}$ на переменную $\omega\in\mathbb{R}^K$, $0\le\omega_k\le\alpha^{k+1}-\alpha^k$, $k=1,\dots,K$, $\alpha=\sum_{k=1}^K\omega_k$, а включение $x(T_1)\in X_1(\alpha)$ – на включение

$$x(T_1) \in \overline{X}_1(\alpha) = \{x_1 \in \mathbb{R}^n : P_1 x_1 \le g_1 + Q_1\omega\}.$$

Окончательно задача, аппроксимирующая задачу (8), принимает вид

$$V(\pi_1^0) = \alpha^1 + \min_{u_0(\cdot)\in U_0, \omega} \max_{w_0(\cdot)\in W_0} \sum_{t\in\Delta_0} \left(\|Qx(t)\|_\infty + \|Ru_0(t)\|_\infty \right) + \sum_{k=1}^{K} \omega_k \tag{10}$$

при условиях

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu_0(t) + Mw_0(t),\ x(0) = x_0,\ t \in \Delta_0,$$

$$P_1 x(T_1) - Q_1\omega \le g_1, \forall w_0(\cdot) \in W_0,\ 0 \le \omega_k \le \alpha^{k+1} - \alpha^k,\ k = 1, \ldots, K.$$

Для эффективного численного решения задача (10) сводится к задаче линейного программирования

$$\begin{gathered}
\min_{u_0, \omega, \varepsilon, \mu} \mu + \sum_{k=1}^{K} \omega_k, \\
\sum_{t\in\Delta_0} \varepsilon_x^l(t) + \sum_{t\in\Delta_0} \varepsilon_u(t) - \mu \le 0, l \in L_0, \\
-\varepsilon_x^l(t)\mathbf{1}_n \pm \sum_{s=0}^{t-1} QA^{t-s-1}Bu_0(s) \le \mp Qx^l(t \mid x_0), t \in \Delta_0, l \in L_0, \\
-\varepsilon_u(t)\mathbf{1}_r \pm Ru_0(t) \le 0, \pm u_0(t) \le u_{\max}\mathbf{1}_r, t \in \Delta_0, \\
0 \le \omega_k \le \alpha^{k+1} - \alpha^k, k = 1, \ldots, K, \\
\sum_{s\in\Delta_0} P_1 A^{T_1-s-1} Bu_0(s) - Q_1\omega \le g_1 - \gamma_0 - HA^{T_1}x_0,
\end{gathered} \tag{11}$$

где $x^l(t \mid x_0) = x(t \mid x_0, 0, w_0^l(\cdot))$, $t \in \Delta_0$; $w_0^l(\cdot) = (w_0^l(t), t \in \Delta_0)$ – l-я вершина гиперкуба $W_0 \times \ldots \times W_0 \in \mathbb{R}^{T_1\times p}$; – множество индексов его вершин; $\varepsilon_x^l(t) \in \mathbb{R}, t \in \Delta_0, l \in L_0$; $\varepsilon_u(t) \in \mathbb{R}, t \in \Delta_0$; $\gamma_0 = (\gamma_{0i}, i = 1, \ldots, m_1) : \gamma_{0i} = w_{\max} \sum_{s\in\Delta_0} \left\| p_i' A^s M \right\|_1$.

Отметим, что процедура аппроксимации задачи (8) задачей (10) (построение матриц P_1, Q_1, значений α^k) может оказаться достаточно трудоемкой. В то же время этот этап является подготовительным и не зависит от начального состояния x_0. Это означает, что в алгоритме управления по прогнозирующей модели трудоемкость решения зависит только от трудоемкости решения задачи линейного программирования (11).

Заключение. В сообщении исследована задача построения оптимальной стратегии с одним моментом замыкания в задаче минимизации гарантированного значения критерия качества вида [6] на траекториях линейной дискретной системой с неизвестными ограниченными возмущениями. Показано, как рассматриваемая задача сводится к задаче линейного программирования, что делает метод построения оптимальной стратегии сравнимым по трудоемкости с вычислением оптимальной гарантирующей программы.

Список использованных источников

1. Witsenhausen, H. A minimax control problem for sampled linear systems / H. Witsenhausen // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1968. – Vol. 13, N 1. – P. 5–21. https://doi.org/10.1109/tac.1968.1098788

2. Куржанский, А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А. Б. Куржанский. – М., 1977. – 392 с.

3. Красовский, Н. Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата / Н. Н. Красовский. – М., 1985. – 518 с.

4. Rawlings, J. B. Model Predictive Control: Theory and Design / J. B. Rawlings, D. Q. Mayne. – Madison, 2009. – 576 p.

5. Goulart, P. J. Optimization over state feedback policies for robust control with constraints / P. J. Goulart, E. C. Kerrigan, J. M. Maciejowski // Automatica. – 2006. – Vol. 42, N 4. – P. 523–533. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2005.08.023

6. Bemporad, A. Min-max control of constrained uncertain discrete-time linear systems / A. Bemporad, F. Borrelli, M. Morari // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2003. – Vol. 48, N 9. – P. 1600–1606. https://doi.org/10.1109/tac.2003.816984

7. Балашевич, Н. В. Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью / Н. В. Балашевич, Р. Габасов, Ф. М. Кириллова // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2004. – Т. 44, № 2. – С. 265–286.

8. Kostyukova, O. Robust optimal feedback for terminal linear-quadratic control problems under disturbances / O. Kostyukova, E. Kostina // Mathematical programming. – 2006. – Vol. 107, N 1–2. – P. 131–153. https://doi.org/10.1007/s10107-005-0682-4

9. Дмитрук, Н. М. Оптимальная стратегия с одним моментом замыкания в линейной задаче оптимального гарантированного управления / Н.М. Дмитрук // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2018. – Т. 58, № 5. – С. 664–681. https://doi.org/10.7868/s0044466918050010

10. Boyd, S. Convex Optimization / S. Boyd, L. Vandenberghe. – Cambridge, 2004. https://doi.org/10.1017/cbo9780511804441

11. Gal, T. Postoptimal analyses, parametric programming and related topics / T. Gal. – Berlin, 1994. https://doi.org/10.1515/9783110871203

12. Multi-Parametric Toolbox 3.0 / M. Herceg [et al.] // European Control Conference, Zurich, Switzerland, July 17–19, 2013. – Zurich, 2013. – P. 502–510. https://doi.org/10.23919/ecc.2013.6669862

References

1. Witsenhausen H. A minimax control problem for sampled linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1968, vol. 13, no. 1, pp. 5–21. https://doi.org/10.1109/tac.1968.1098788

2. Kurzhanski A. B. *Control and observation under uncertainty conditions*. Moscow, 1977. 392 p. (in Russian).

3. Krasovskii N. N. *Control of a dynamical system*. Moscow, 1985. 518 p. (in Russian).

4. Rawlings J. B., Mayne D. Q. *Model Predictive Control: Theory and Design*. Madison, 2009. 576 p.

5. Goulart P. J., Kerrigan E. C., Maciejowski J. M. Optimization over state feedback policies for robust control with constraints. *Automatica*, 2006, vol. 42, no. 4, pp. 523–533. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2005.08.023

6. Bemporad A., Borrelli F., Morari M. Min-max control of constrained uncertain discrete-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, vol. 48, no. 9, pp. 1600–1606. https://doi.org/10.1109/tac.2003.816984

7. Balashevich N. V., Gabasov R., Kirillova F. M. The construction of optimal feedback from mathematical models with uncertainty. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2004, vol. 44, no. 2, pp. 247–267 (in Russian).

8. Kostyukova O., Kostina E. Robust optimal feedback for terminal linear-quadratic control problems under disturbances. *Mathematical programming*, 2006, vol. 107, no. 1–2, pp. 131–153. https://doi.org/10.1007/s10107-005-0682-4

9. Dmitruk N. M. Optimal strategy with one closing instant for a linear optimal guaranteed control problem. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2018, vol. 58, no. 5, pp. 642–658. https://doi.org/10.1134/s096554251805007x

10. Boyd S., Vandenberghe L. *Convex Optimization*. Cambridge, 2004. https://doi.org/10.1017/cbo9780511804441

11. Gal T. *Postoptimal analyses, parametric programming and related topics*. Berlin, 1994. https://doi.org/10.1515/9783110871203

12. Herceg M., Kvasnica M., Jones C. N., Morari M. Multi-Parametric Toolbox 3.0. *European Control Conference, Zurich, Switzerland, July 17–19, 2013*. Zurich, 2013, pp. 502–510. https://doi.org/10.23919/ecc.2013.6669862

Информация об авторах

Костюкевич Дмитрий Аркадьевич – магистр физ.-мат. наук, аспирант. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kostukDA@bsu.by.

Дмитрук Наталия Михайловна – канд. физ.-мат. наук, доцент. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: dmitrukn@bsu.by.

Information about the authors

Kastsiukevich Dzmitry A. – Master (Physics and Mathematics), Postgraduate student. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kostukDA@bsu.by.

Dmitruk Natalia M. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate professor. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: dmitrukn@bsu.by.