

ISSN 1561-8323 (Print)
 ISSN 2524-2431 (Online)
 УДК 519.63
<https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-5-526-533>

Поступило в редакцию 06.05.2020
 Received 06.05.2020

Член-корреспондент П. П. Матус^{1,2}, Х. Т. К. Ань³

¹Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

²Католический университет Люблина, Люблин, Польша

³Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются компактные разностные схемы четвертого порядка аппроксимации для линейных, полулинейных и квазилинейных уравнений Клейна–Гордона. Для линейных уравнений доказывается сильная устойчивость разностного решения по отношению к малому возмущению начальных условий, правой части и коэффициентов уравнений. На примере вычислительного эксперимента показывается, как использовать правило Рунге для определения разных порядков скорости сходимости разностной схемы в случае наличия двух независимых переменных.

Ключевые слова: компактная разностная схема, уравнение Клейна–Гордона, априорные оценки, устойчивость, сходимость

Для цитирования. Матус, П. П. Компактные разностные схемы для уравнения Клейна–Гордона / П. П. Матус, Х. Т. К. Ань // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2020. – Т. 64, № 5. – С. 526–533. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-5-526-533>

Corresponding Member Piotr P. Matus^{1,2}, Hoang T. K. Anh³

¹Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

²Institute of Mathematics and Computer Science The John Paul II Catholic University of Lublin, Lublin, Poland

³Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

COMPACT DIFFERENCE SCHEMES FOR KLEIN–GORDON EQUATION

Abstract. In this paper, we consider compact difference approximation of the fourth-order schemes for linear, semi-linear, and quasilinear Klein–Gordon equations. with respect to a small perturbation of initial conditions, right-hand side, and coefficients of the linear equations the strong stability of difference schemes is proved. The conducted numerical experiment shows how Runge rule is used to determine the orders of convergence of the difference scheme in the case of two independent variables.

Keywords: compact difference schemes, Klein–Gordon equation, priori estimates, stability, convergence

For citation: Matus P. P., Anh H. T. K. Compact difference schemes for Klein–Gordon equation. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2020, vol. 64, no. 5, pp. 526–533 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-5-526-533>

Введение. Компактными принято называть разностные схемы, которые имеют повышенный порядок аппроксимации, но пишутся на шаблоне, несущественно отличающемся от традиционного для данного уравнения [1]. основополагающей работой по этой тематике для классических уравнений математической физики с самосопряженным эллиптическим оператором является работа А. А. Самарского, опубликованная им более 50 лет назад [2]. Для других классов уравнений, включая уравнения типа конвекции диффузии и задачи аэрогидродинамики, компактные разностные схемы построены в [3] и [1]. Что же касается уравнения Клейна–Гордона, то оно играет важную роль в математической физике. Это уравнение, в частности, используется при изучении солитонов и в физике конденсированного вещества [4]. Компактные разностные схемы для такого уравнения строятся, например, в [5].

Постановка задачи и разностная схема. В области $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения Клейна–Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - mu + f(x, t), \quad m = \text{const} > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \overline{u_0}(x), \tag{2}$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t). \tag{3}$$

Отметим, что (1) является обобщением волнового уравнения и используется для описания быстро движущихся частиц, имеющих массу покоя. Здесь и далее относительно решения дифференциальной задачи будем предполагать, что оно существует, единственно и обладает всеми непрерывными в Q_T производными, необходимыми по ходу изложения.

На равномерной сетке узлов $\omega = \omega_h \times \omega_\tau = \{(x_i, t_n) \in Q_T\}$, $\omega_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N, h = l / N\}$, $\omega_\tau = \{t_n = n\tau, 0 \leq n \leq K, \tau = T / K\} = \omega_\tau \cup \{t_K = T\}$ дифференциальную задачу заменим разностной

$$y_{\bar{t}t} = y_{xx}^{(\sigma, \sigma)} - m \left(y + \frac{h^2}{12} y_{\bar{x}x} \right) + f + \frac{h^2}{12} f_{\bar{x}x}, \quad (x, t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \tag{4}$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \omega_h, \quad y_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \omega_h, \tag{5}$$

$$y(0, t + \tau) = \mu_1(t + \tau), \quad y(l, t + \tau) = \mu_2(t + \tau), \quad t \in \omega_\tau, \tag{6}$$

в которой

$$\begin{aligned} \sigma &= \bar{\sigma} - \frac{h^2}{12\tau^2}, \quad u_1(x) = \overline{u_0}(x) + \frac{\tau}{2}(u_0''(x) - mu_0(x) + f(x, 0)), \\ v^{(\sigma, \sigma)} &= v + \sigma\tau^2 v_{\bar{t}t} = \sigma\check{v} + (1 - 2\sigma)v + \sigma\check{v}, \\ \check{v} &= v^{n+1}, \quad v = v^{n-1}, \quad y = y_i^n = y(x_i, t_n). \end{aligned}$$

Далее будем использовать обычные нормы L_∞, L_2, W_1^2 в пространстве сеточных функций

$$\begin{aligned} \|y\|_{L_\infty} &= \max_{x \in \omega_h} |y(x, t)|, \quad t \in \omega_\tau, \quad \sqrt{(y, y)} = \|y\| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} h(y_i^n)^2 \right)^{1/2}, \\ \|y_{\bar{x}}\| &= (y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}})^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^N h(y_{x,i}^n)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

В соответствии с [1] нетрудно показать, что для невязки $\psi = -u_{\bar{t}t} + u_{xx}^{(\sigma, \sigma)} - mu^* + f^*, v^* = \frac{5}{6}v + \frac{1}{12}(v_{+1} + v_{-1}), v_{\pm 1} = v_{i\pm 1}^n$, имеет место априорная оценка

$$\|\psi\| \leq M(h^4 + \tau^2), \quad \psi_i^n = O(h^4 + \tau^2), \quad M > 0, \tag{7}$$

т. е. разностная схема (4)–(6) аппроксимирует исходную дифференциальную задачу с четвертым порядком по пространству и вторым по времени.

Устойчивость по начальным данным и правой части. Для исследования этих вопросов в линейном случае обычно применяют теорию трехслойных операторно-разностных схем, разработанную А. А. Самарским [6]. Требование самосопряженности основного пространственного оператора

$$(Ay)_i = -y_{\bar{x}x,i}, \quad y_0 = 0, \quad y_N = 0, \tag{8}$$

приводит к жестким ограничениям на однородность граничных условий. Чтобы избежать этого, рассмотрим возмущенное решение \tilde{y} , полученное по разностной схеме (4)–(6) с возмущенной правой частью \tilde{f} и возмущенными начальными условиями \tilde{u}_0, \tilde{u}_1 . Тогда задача для возмущения $\bar{y} = \tilde{y} - y$ может быть записана в операторном виде

$$D\bar{y}_{\bar{t}t} + A_1\bar{y} = \bar{\varphi}, \quad \bar{\sigma} = 1, \tag{9}$$

$$\bar{y}(0) = \bar{u}_0, \quad \bar{y}_t(0) = \bar{u}_1, \tag{10}$$

$$D = E + \sigma\tau^2 A, \quad A_1 = mE + \left(1 - \frac{mh^2}{12} \right) A,$$

$$\bar{\varphi} = \tilde{\varphi} - \varphi, \quad \varphi = f^*.$$

Так как оператор A , определенный соотношением (8), является постоянным, положительным и самосопряженным $0 < A^* = A : H \rightarrow H$, H – пространство сеточных функций, заданных на $\bar{\omega}_h$ и равных нулю при $x = 0$ и $x = l$, то операторы D и A_1 также являются положительными, постоянными и самосопряженными:

$$D = D^* > E, A_1 = A_1^* \geq mE,$$

при выполнении условия

$$h \leq h_0, h_0 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{m}}. \quad (11)$$

Нам понадобятся следующие хорошо изученные свойства оператора A [6]:

$$\lambda_1 E \leq A \leq \lambda_2 E, A^{-1} \leq \frac{1}{\delta} E, \delta = \frac{8}{l^2}, \quad (12)$$

$$\lambda_1 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2l} \geq \delta, \lambda_2 = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2l} < \frac{4}{h^2}. \quad (13)$$

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма об устойчивости трехслойных разностных схем.

Л е м м а [6, с. 373]. Пусть в канонической форме (9), (10) операторы D, A_1 являются постоянными, положительными и самосопряженными в H , выполнено неравенство

$$D \geq \frac{1+\varepsilon}{4} \tau^2 A_1, \varepsilon > 0 \text{ – любое число.} \quad (14)$$

Тогда для решения схемы (9), (10) имеет место априорная оценка

$$\|y^{n+1}\|_D \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \left(\|y(0)\|_D + \|Dy_t(0)\|_{A^{-1}} + \sum_{s=1}^n \tau \|\bar{\varphi}_s\|_{A^{-1}} \right), \quad (15)$$

В частности, для

$$\varepsilon = 1, D \geq E, A^{-1} \leq \frac{1}{\delta} E$$

оценка (15) примет вид

$$\|y^{n+1}\| \leq \sqrt{2} \left(\|y(0)\|_D + \frac{1}{\delta} \|Dy_t(0)\| + \frac{1}{\delta} \sum_{s=1}^n \tau \|\bar{\varphi}_s\| \right), \quad (16)$$

где как обычно H – конечномерное действительное гильбертово пространство; $\|v\|_D = (Dv, v)$, $v \in H$.

Применим оценку (16) к исследованию устойчивости компактной разностной схемы (4)–(6). Далее будем предполагать, что

$$\frac{h}{\sqrt{6}} \leq \tau \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m}}, \sigma = 1 - \frac{h^2}{12\tau^2}. \quad (17)$$

Тогда условие (14) выполнено. Действительно,

$$D - \frac{\tau^2}{2} A_1 = \left(1 - \frac{m\tau^2}{2} \right) E + \tau^2 \left(\sigma - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{mh^2}{12} \right) A \right) \geq \tau^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau^2} + \frac{mh^2}{24} \right) \geq 0.$$

Итак, имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. Пусть выполнены условия (11), (17). Тогда разностная схема с неоднородными граничными условиями (4)–(6) устойчива по начальным данным, правой части и для ее решения имеет место априорная оценка

$$\|\tilde{y}^{n+1} - y^{n+1}\| \leq \sqrt{2} \left(\|\tilde{u}_0 - u_0\|_D + \frac{1}{\delta} \|D(\tilde{u}_1 - u_1)\| + \frac{1}{\delta} \sum_{s=1}^n \tau \|(\tilde{\varphi}_s - \varphi_s)\| \right). \quad (18)$$

З а м е ч а н и е 1. В линейном случае после замены

$$u = v + \frac{x}{l} \mu_2(t) + \frac{l-x}{l} \mu_1(t),$$

исходную дифференциальную задачу можно свести к задаче для v с однородными граничными условиями. При этом устойчивость решения разностной схемы по граничным условиям и правой части будут эквивалентны. Однако для нелинейного уравнения Клейна–Гордона такая замена может не дать желаемого результата.

З а м е ч а н и е 2. Любопытно заметить, что лемма 1 справедлива и для операторного неравенства

$$\begin{aligned} Dy_{\bar{t}t} + A_1 y &= \varphi(t), \quad 0 < t \in \omega_\tau, \\ y(0) &= u_0, \quad y_t(0) = u_1. \end{aligned}$$

Сильная устойчивость. При исследовании корректности разностных схем основное внимание уделяется устойчивости решения по начальным данным и правой части [6; 7]. Однако при численном решении дифференциальной задачи может оказаться, что коэффициенты уравнения заданы не точно, а приближенно. Отсюда ясно, насколько важно изучение схем с возмущенными коэффициентами. Под сильной устойчивостью понимается устойчивость решения разностной задачи по отношению к малому возмущению начальных условий, правой части и коэффициентов уравнения [8]. Наряду с разностной схемой (4)–(6) рассмотрим соответствующую ей возмущенную задачу

$$\tilde{y}_{\bar{t}t} = \tilde{y}_{\bar{x}\bar{x}}^{(\sigma, \sigma)} - \tilde{m} \left(\tilde{y} + \frac{h^2}{12} \tilde{y}_{\bar{x}\bar{x}} \right) + \tilde{f} + \frac{h^2}{12} \tilde{f}_{\bar{x}\bar{x}}, \quad (x, t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \quad (19)$$

$$\tilde{y}(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad \tilde{y}_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \quad x \in \omega_h, \quad (20)$$

$$\tilde{y}(0, t + \tau) = \mu_1(t + \tau), \quad \tilde{y}(l, t + \tau) = \mu_2(t + \tau), \quad t \in \omega_\tau. \quad (21)$$

Вычитая из уравнений (19)–(21) соответствующие уравнения (4)–(6), получим задачу для возмущения $\bar{y} = \tilde{y} - y$, которую сразу запишем в операторном виде (9)–(10):

$$\begin{aligned} D\bar{y}_{\bar{t}t} + \tilde{A}_1 \bar{y} &= \bar{\varphi} - (\tilde{A}_1 - A_1)y, \\ \bar{y}(0) &= \bar{u}_0, \quad \bar{y}_t(0) = \bar{u}_1. \end{aligned}$$

Здесь $D = D^* > E$ и $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_1^* > 0$ – положительные, постоянные и самосопряженные операторы при

$$h \leq \tilde{h}_0, \quad \tilde{h}_0 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\tilde{m}}},$$

$$\tilde{A}_1 = \tilde{m}E + \left(1 - \frac{\tilde{m}h^2}{12} \right) A.$$

Заметим, что при $h/\sqrt{6} \leq \tau \leq \sqrt{2/\tilde{m}}$ выполнено условие (14) и на основании априорной оценки (16) для \bar{y} получаем неравенство

$$\|\bar{y}^{n+1}\| \leq \sqrt{2} \left(\|\bar{y}(0)\|_D + \frac{1}{\delta} \|D\bar{y}_t(0)\| + \frac{1}{\delta} \sum_{s=1}^n \tau \{ \|\bar{\varphi}_s\| + \|(\tilde{A}_1 - A_1)y_s\| \} \right).$$

В силу соотношений (12), (13) $\|A\| < 4/h^2$, и следовательно, из (16) находим

$$\|(\tilde{A}_1 - A_1)y_s\| = \left\| (\tilde{m} - m) \left(E - \frac{h^2}{12} A \right) y_s \right\| < \frac{4}{3} K_s |\tilde{m} - m|,$$

$$K_s = \sqrt{2} \left(\|u_0\|_D + \frac{1}{\delta} \|Du_1\| + \frac{1}{\delta} \sum_{r=1}^{s-1} \tau \|\varphi_r\| \right).$$

Итак, мы можем сформулировать теорему о сильной устойчивости.

Теорема 2. Пусть выполнены следующие соотношения на шаги сетки

$$h \leq \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\bar{m}}}, \quad \frac{h}{\sqrt{6}} \leq \tau \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\bar{m}}}, \quad \bar{m} = \max\{m, \tilde{m}\}.$$

Тогда решение разностной схемы (4)–(6) сильно устойчиво и для ее возмущения имеет место априорная оценка

$$\|\tilde{y}^{n+1} - y^{n+1}\| < \sqrt{2} \left\{ \|\tilde{u}_0 - u_0\|_D + \frac{1}{\delta} \|D(\tilde{u}_1 - u_1)\| + \frac{1}{\delta} \sum_{s=1}^n \tau \left(\|\tilde{\varphi}_s - \varphi_s\| + \frac{4}{3} K_s |\tilde{m} - m| \right) \right\}, \quad n = \overline{1, K-1}.$$

Теорема о сходимости. Пусть $z = y - u$ есть погрешность метода. Подставляя теперь $y = z + u$ в разностные уравнения (4)–(6), получим задачу для z

$$z_{\bar{t}t} = z_{xx}^{(\sigma, \sigma)} - m \left(z + \frac{h^2}{12} z_{\bar{x}\bar{x}} \right) + \psi, \quad (x, t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \quad (22)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad z_t(x, 0) = \overset{o}{\psi}, \quad x \in \omega_h, \quad \overset{o}{\psi} = O(\tau^2), \quad (23)$$

$$z(x, t) = 0, \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \omega_\tau, \quad \gamma_h = \{x_0 = 0, x_N = l\}. \quad (24)$$

Так как задачи (4)–(6) и (22)–(24) идентичны, то мы имеем право воспользоваться теоремой 1 для оценки погрешности метода.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда решение разностной задачи (4)–(6) сходится к точному решению дифференциальной задачи (1)–(3) в сеточной норме $L_2(\omega_h)$ и для ее решения для всех $n = 0, 1, \dots, K$ имеет место оценка точности вида

$$\|y^n - u^n\| \leq M_1(h^4 + \tau^2).$$

Доказательство. Действительно, из априорных оценок (7), (18) следует неравенство

$$\|z\| \leq \sqrt{2} \left(\frac{l^2}{8} \|D \overset{o}{\psi}\| + \frac{l^2 T}{8} \max_{t \in \omega_\tau} \|\psi(t)\| \right) \leq M_1(h^4 + \tau^2).$$

Следовательно, разностное решение сходится к точному решению с четвертым порядком по пространству и вторым по времени.

Квазилинейное уравнение Клейна–Гордона. Аналогичные компактные схемы четвертого порядка можно строить и для квазилинейных уравнений Клейна–Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(u) - m f_1(u) + f(x, t),$$

с условием $\varphi'_u = k(u) \geq k_1 > 0$. Разностная схема 4-го порядка аппроксимации будет иметь вид

$$y_{\bar{t}t} = (\varphi(y))_{xx}^{(\sigma, \sigma)} - m \bar{f}_1(y) + \bar{f} - \frac{h^2}{12} y_{\bar{t}\bar{t}\bar{x}\bar{x}},$$

$$\bar{v} = v + \frac{h^2}{12} v_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{5}{6} v + \frac{1}{12} (v_{+1} + v_{-1}).$$

Для реализации этой схемы необходимо будет использовать итерационный метод Ньютона.

Вычислительные эксперименты. В этом разделе мы представляем численные результаты для уравнения Клейна–Гордона (1). Целью данного вычислительного эксперимента является проверка скорости сходимости предложенной компактной разностной схемы.

Здесь порядок сходимости по временной и пространственной переменным в норме L_∞ определяется по следующим формулам:

$$p_\infty^h = \log_2 \frac{\|z(2h, \tau)\|_{L_\infty}}{\|z(h, \tau)\|_{L_\infty}}, \quad p_\infty^\tau = \log_2 \frac{\|z(h, 2\tau)\|_{L_\infty}}{\|z(h, \tau)\|_{L_\infty}}. \quad (25)$$

Так как разностное решение сходится к точному решению с четвертым порядком по пространству и вторым по времени, то для проверки скорости сходимости вдоль временного направления мы берем такие шаги h и τ , чтобы выполнялось неравенство $h^4 \leq \tau^2$. И тогда получается схема $O(\tau^2)$ и мы работаем со вторым правилом Рунге (25).

Однако в связи с теоремой 1 об устойчивости, при рассмотрении порядка по h , в расчетах следим, чтобы выполнялись одновременно два неравенства $h^4 \geq \tau^2$ и $\tau \geq h/\sqrt{6}$. Тогда можно применить первое правило Рунге (25).

Эксперимент проводился при следующих значениях параметров: $m = 8, l = 2\pi, T = 2$, начальные и граничные условия определялись из точного решения $u(x, t) = \sin(x)[A\cos(3t) + B\sin(3t)]$ с константами $A = B = 10$.

В табл. 1 отражен порядок сходимости $O(h^4)$ по пространственной переменной. Из результатов табл. 2 видно, что разностная схема имеет второй порядок точности во временной переменной. Эти результаты согласуются с проведенными теоретическими исследованиями (теорема 3).

Таблица 1. Скорость сходимости по пространственному направлению

Table 1. The spatial convergence rate

$h = 0,25$	$\tau = 0,625$	$\ z\ _{L^\infty}$	p_∞^h	$\ z\ _{L_2}$	$p_{L_2}^h$
h	τ	$5,34E-02$	–	$8,94E-02$	–
$h / 2^1$	$\tau / 4^1$	$3,38E-03$	3,97947	$5,94E-03$	3,98026
$h / 2^2$	$\tau / 4^2$	$2,12E-04$	3,99458	$3,72E-04$	3,99497
$h / 2^3$	$\tau / 4^3$	$1,33E-05$	3,99879	$2,33E-05$	3,99874
$h / 2^4$	$\tau / 4^4$	$8,24E-07$	4,00348	$1,46E-06$	4,0035

Таблица 2. Скорость сходимости по временному направлению

Table 2. The temporal convergence rate

h	$\tau = 0,05$	$\ z\ _{L^\infty}$	p_∞^τ	$\ z\ _{L_2}$	$p_{L_2}^\tau$
0,001	τ	$3,45E-03$	–	$6,12E-03$	–
0,001	$\tau / 2^1$	$8,64E-04$	1,99892	$1,53E-03$	1,99892
0,001	$\tau / 2^2$	$2,16E-04$	1,99943	$3,83E-04$	1,99943
0,001	$\tau / 2^3$	$5,40E-05$	2,00003	$9,58E-05$	2,00003
0,001	$\tau / 2^4$	$1,34E-05$	2,00747	$2,38E-05$	2,00747

Кроме того, на рис. 1–3 ниже по цветам и фигурам хорошо видна сходимость приближенного решения к точному решению после изменений пространственных и временных шагов. При разных значениях решений они имеют разные цвета и наоборот.

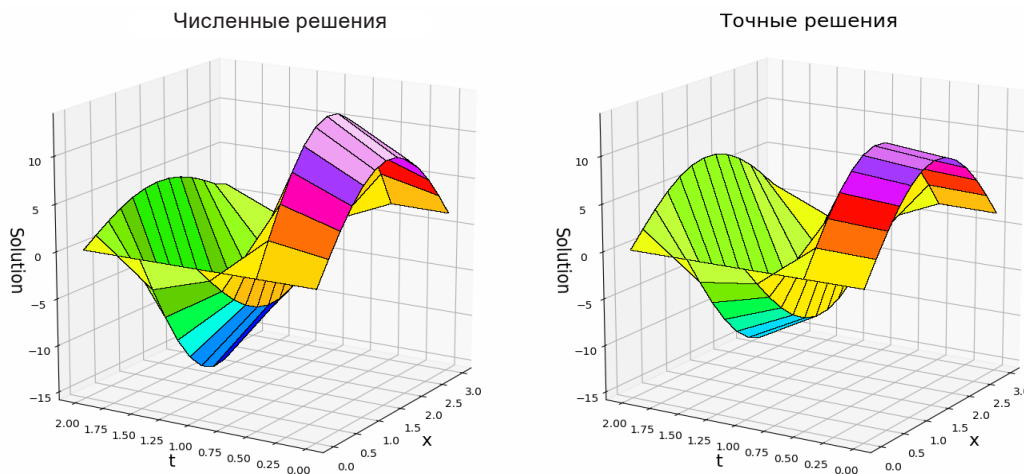


Рис. 1. Численные и точные решения при $T = 2, l = \pi, h = 0,25$ и $\tau = 0,5$

Fig. 1. The numerical and exact solutions at $T = 2, l = \pi, h = 0.25$, and $\tau = 0.5$

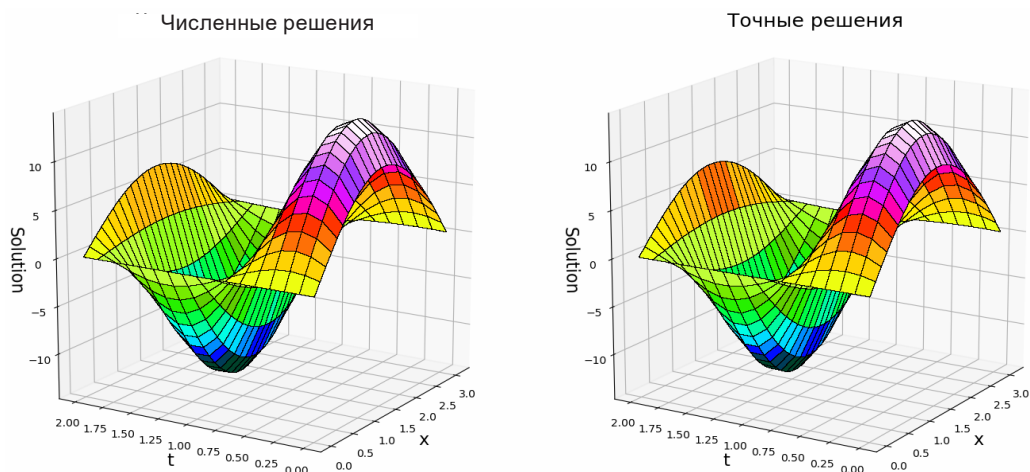


Рис. 2. Численные и точные решения при $T = 2$, $l = \pi$, $h = 0,125$ и $\tau = 0,125$

Fig. 2. The numerical and exact solutions at $T = 2$, $l = \pi$, $h = 0.125$ and $\tau = 0.125$

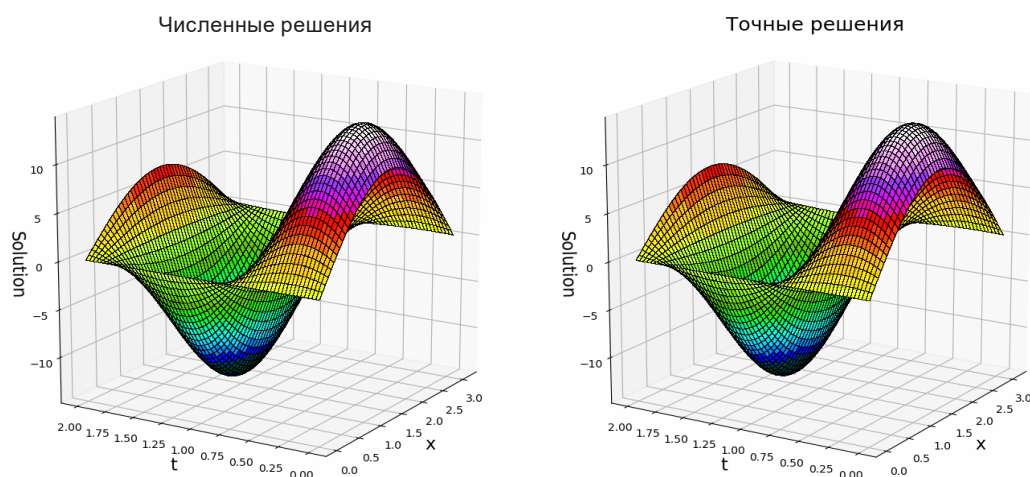


Рис. 3. Численные и точные решения при $T = 2$, $l = \pi$, $h = 0,0625$ и $\tau = 0,03125$

Fig. 3. The numerical and exact solutions at $T = 2$, $l = \pi$, $h = 0.0625$ and $\tau = 0.03125$

Из приведенных выше рисунков приближенного и точного решений, различающихся на грубых сетках, мы наблюдаем их быстрое сближение при уменьшении сеточных шагов (экспериментальная сходимость приближенного решения к точному).

Список использованных источников

1. Паасонен, В. И. Компактные схемы для систем уравнений второго порядка с конвективными членами / В. И. Паасонен // Численные методы механики сплошной среды. – 1998. – Т. 3, № 1. – С. 55–66.
2. Самарский, А. А. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности / А. А. Самарский // Журн. вычисл. математики и матем. физ. – 1963. – Т. 3, № 5. – С. 812–840.
3. Толстых, А. И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики / А. И. Толстых. – М., 1990. – 230 с.
4. Caudrey, P. J. The sine-Gordon equation as a model classical field theory / P. J. Caudrey, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon // Il Nuovo Cimento B Series 11. – 1975. – Vol. 25, N 2. – P. 497–512. <https://doi.org/10.1007/bf02724733>
5. Luo, Y. Fourth-order compact and energy conservative scheme for solving nonlinear Klein–Gordon equation / Y. Luo, X. Li, C. Guo // Numer. Methods Partial Differential Equations. – 2017. – Vol. 33, N 4. – P. 1283–1304. <https://doi.org/10.1002/num.22143>
6. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М., 1989. – 616 с.
7. Самарский, А. А. Разностные схемы с операторными множителями / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, П. П. Матус. – Минск, 1998. – 442 с.
8. Матус, П. П. Коэффициентная устойчивость трехслойных операторно-разностных схем / П. П. Матус, Й. Н. Панайотова // Журн. вычисл. математики и матем. физ. – 2001. – Т. 41, № 5. – С. 722–731.

References

1. Paasonen V. I. Compact schemes for systems of second-order equations without mixed derivatives. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 1998, vol. 13, no. 4. <https://doi.org/10.1515/rnam.1998.13.4.335>
2. Samarsky A. A. Schemes of high-order accuracy for the multi-dimensional heat conduction equation. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1963, vol. 3, no. 5, pp. 1107–1146. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(63\)90104-6](https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90104-6)
3. Tolstykh A. I. *Compact difference schemes and their application to problems of aerohydrodynamics*. Moscow, 1990. 230 p. (in Russian).
4. Caudrey P. J., Eilbeck J. C., Gibbon J. D. The sine-Gordon equation as a model classical field theory. *Il Nuovo Cimento B Series 11*, 1975, vol. 25, no. 2, pp. 497–512. <https://doi.org/10.1007/bf02724733>
5. Luo Y., Li X., Guo C. Fourth-order compact and energy conservative scheme for solving nonlinear Klein–Gordon equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2017, vol. 33, no. 4, pp. 1283–1304. <https://doi.org/10.1002/num.22143>
6. Samarskii A. A. *Theory of difference schemes*. Moscow, 1989. 616 p. (in Russian).
7. Samarskii A. A., Matus P. P., Vabishchevich P. N. *Difference schemes with operator factors*. Dordrecht, 2002. 384 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-9874-3>
8. Matus P. P., Panayotova I. N. Coefficient Stability of Three-Level Operator-Difference Schemes. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2001, vol. 41, no. 5, pp. 678–687.

Информация об авторах

Матус Петр Павлович – член-корреспондент, д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: piotr.p.matus@gmail.com.

Хоанг Тхи Киеу Ань – аспирант. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kieuanhhoang86@gmail.com.

Information about the authors

Matus Piotr P. – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: piotr.p.matus@gmail.com.

Hoang Thi Kieu Anh – Postgraduate student. Belarusian State University (4, Niezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kieuanhhoang86@gmail.com.