ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 517.956.3
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-6-657-662

Поступило в редакцию 27.10.2020
Received 27.10.2020

Академик В. И. Корзюк[1], Я. В. Рудько[2]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕГЛАДКИМ ВТОРЫМ УСЛОВИЕМ КОШИ

Аннотация. Изучается классическое решение смешанной задачи в четверти плоскости для одномерного волнового уравнения. На нижнем основании задаются условия Коши, причем второе из них имеет разрыв первого рода в точке. На боковой границе задается гладкое граничное условие. Решение строится методом характеристик в явном аналитическом виде. Доказывается единственность и устанавливаются условия, при которых существует кусочно-гладкое решение. Рассматривается задача с условиями сопряжения.

Ключевые слова: одномерное волновое уравнение, неоднородное уравнение, смешанная задача, негладкие начальные условия, метод характеристик

Для цитирования. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с негладким вторым условием Коши / В. И. Корзюк, Я. В. Рудько // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2020. – Т. 64, № 6. – С. 657–662. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-6-657-662

Academician Viktor I. Korzyuk[1], Jan V. Rudzko[2]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

CLASSICAL SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR THE ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION WITH THE NONSMOOTH SECOND INITIAL CONDITION

Abstract. In this article, we study the classical solution of the mixed problem in a quarter of a plane and a half-plane for a one-dimensional wave equation. On the bottom of the boundary, Cauchy conditions are specified, and the second of them has a discontinuity of the first kind at one point. Smooth boundary condition is set at the side boundary. The solution is built using the method of characteristics in an explicit analytical form. Uniqueness is proved and conditions are established under which a piecewise-smooth solution exists. The problem with linking conditions is considered.

Keywords: one-dimensional wave equation, nonhomogeneous equation, mixed problem, nonsmooth initial conditions, method of characteristics

For citation: Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solution of the mixed problem for the one-dimensional wave equation with the nonsmooth second initial condition. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2020, vol. 64, no. 6, pp. 657–662 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-6-657-662

Введение. Основное явление в теории механического удара – это распространение волн смещений в твердых телах. Экспериментальное изучение почти всех явлений удара весьма затруднительно. При аналитическом изучении вызванных ударом колебаний интерес представляют задачи, в которых груз после удара остается в соприкосновении с ударяемым телом, в котором рассматриваются и описываются колебательные процессы [1; 2]. Как правило, математическая модель подобных явлений представляет собой смешанные задачи для уравнений в частных производных с присутствием начальных функций, отличных от нуля на множестве нулевой меры [3–5].

Существование классических решений многих задач зависит не только от правильного выбора вида граничных условий для дифференциальных уравнений с частными производными, но и от выполнения условий согласования заданных функций в угловых точках области [4; 5]. Как показано в [6–10], от вида условий согласования зависят гладкость решений и постановка задач.

Как правило, условия согласования являются необходимыми и достаточными при доказательстве существования и единственности решения. Подобные условия согласования возникают при решении задач, для которых задаются граничные условия с помощью негладких функций.

Близкими к изучаемым задачам в данном сообщении в случае гладких функций в граничных условиях для волнового уравнения являются задачи, представленные в [6; 7; 10].

Постановка задачи. На замыкании $\overline{Q}=[0,\infty)\times[0,\infty)$ области $Q=(0,\infty)\times(0,\infty)$ двух независимых переменных $(t,x)\subset\overline{Q}\subset\Re^2$ рассмотрим волновое уравнение

$$\partial_t^2 u - a^2\partial_x^2 u = f(t,x), \tag{1}$$

где a^2 – положительное действительное число. К уравнению (1) на части границы ∂Q области Q присоединяются условия Коши

$$u(0,x)=\varphi(x),\, x\in[0,\infty),\, \partial_t u(0,x)=\psi(x)=\begin{cases}\psi_1, & x=0,\\ \psi_2(x), & x\in(0,\infty),\end{cases} \tag{2}$$

на другой части границы – граничное условие Дирихле

$$u(t,0)=\mu(t),\, t\in[0,\infty). \tag{3}$$

Будем полагать, что функции f, φ, ψ_1, ψ_2, μ достаточно гладкие, а именно: $f\in C^1(\overline{Q})$, $\varphi\in C^2([0,\infty))$, $\psi_2\in C^1([0,\infty))$, $\mu\in C^2([0,\infty))$.

Построение решения. Для построения решения задачи (1)–(3) рассмотрим вспомогательную задачу для волнового уравнения (1) на замыкании $\overline{Q}$ области Q. К (1) на части границы ∂Q области Q присоединяются условия Коши

$$u(0,x)=\varphi(x),\, x\in[0,\infty),\, \partial_t u(0,x)=\psi(x)=\begin{cases}\tilde\psi_1(x), & x\in[0,x^*),\, x^*>0,\\ \tilde\psi_2(x), & x\in(x^*,\infty),\end{cases} \tag{4}$$

и граничное условие (3). При этом полагаем, что $\tilde\psi_1\in C^1([0,x^*])$, $\tilde\psi_1\in C^1([0,x^*))$, $\tilde\psi_2(x)=\psi_2(x)$ для $x\in(x^*,\infty)$, $\tilde\psi_1(0)=\psi_1$.

Как известно, общее решение неоднородного уравнения представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного [6; 11]. Пусть $w:\overline{Q}\to\Re$ – частное решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее однородным условиям Коши $w(0,x)=\partial_t w(0,x)=0,\, \partial_t^2 w(0,x)=f(0,x)$. Такое решение w существует [12]. Если $f\in C^1(\overline{Q})$, то $w\in C^2(\overline{Q})$.

Тогда общее решение задачи (1), (3), (4) записывается в виде

$$u(t,x)=w(t,x)+g^{(1)}(x-at)+g^{(2)}(x+at), \tag{5}$$

где $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ некоторые дважды непрерывно-дифференцируемые функции. Для построения решения разделим область Q на шесть подобластей

$$\begin{aligned}
Q^{(1)} &= Q\cap\{(t,x)\,|\,x+at<x^*,\, x-at<x^*,\, x-at>0\},\\
Q^{(2)} &= Q\cap\{(t,x)\,|\,x+at>x^*,\, x-at>x^*,\, x-at>0\},\\
Q^{(3)} &= Q\cap\{(t,x)\,|\,x+at>x^*,\, x-at<x^*,\, x-at>0\},\\
Q^{(4)} &= Q\cap\{(t,x)\,|\,x+at<x^*,\, x-at<x^*,\, x-at<0\},\\
Q^{(5)} &= Q\cap\{(t,x)\,|\,x+at>x^*,\, x-at>-x^*,\, x-at<0\},\\
Q^{(6)} &= Q\cap\{(t,x)\,|\,x-at<-x^*\}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Введем функции $u^{(i)}$ как решения задачи (1), (3), (4) в подобласти $Q^{(i)}$, $i\in\{1,2,3,4,5,6\}$. Обозначим

$$u(t,x)=u^{(i)}(t,x),\ \text{если}\ (t,x)\in Q^{(i)},\ i\in\{1,2,3,4,5,6\}. \tag{7}$$

О п р е д е л е н и е. *Функцию* u, *определяемую (7) назовем решением задачи (1), (3), (4), если* $u^{(j)}\in C^2(\overline{Q^{(j)}})$, $j\in\{1,2,3,4,5,6\}$, *для каждого* $j\in\{1,2,3,4,5,6\}$ *функция* $u^{(j)}$ *удовлетворяет уравнению (1), функция u удовлетворяет первому из (4) условию* $u(0,x)=\varphi(x),\ x\in[0,\infty)$, *и граничному условию (3), функция* $u^{(1)}$ *удовлетворяет второму из (4) условию Коши на полуоткрытом отрезке* $[0,x^*)$, *функция* $u^{(2)}$ *удовлетворяет этому условию на полупрямой* (x^*,∞).

Удовлетворяя условиям Коши в подобластях $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$ получим

$$\begin{aligned} &u^{(1)}(t,x)=w(t,x)+\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\tilde\psi_1(\xi)d\xi,\quad (t,x)\in Q^{(1)},\\ &u^{(2)}(t,x)=w(t,x)+\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\tilde\psi_2(\xi)d\xi,\quad (t,x)\in Q^{(2)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Пользуясь граничным условием в подобластях $Q^{(4)}$ и $Q^{(6)}$, находим выражение для функций $u^{(3)}, u^{(4)}, u^{(5)}$ и $u^{(6)}$.

$$\begin{gathered} u^{(3)}(t,x)=w(t,x)+\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x^*}\tilde\psi_1(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x+at}\tilde\psi_2(\xi)d\xi+C,\\ (t,x)\in Q^{(3)},\\ u^{(4)}(t,x)=w(t,x)-w\left(t-\frac{x}{a},0\right)+\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)+\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\\ +\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x}\tilde\psi_1(\xi)d\xi,\ (t,x)\in Q^{(4)},\\ u^{(5)}(t,x)=w(t,x)-w\left(t-\frac{x}{a},0\right)+\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)+\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}-\frac{1}{2a}\int_{x^*}^{at-x}\tilde\psi_1(\xi)d\xi+\\ +\frac{1}{2a}\int_{x^*}^{at+x}\tilde\psi_2(\xi)d\xi+C,\ (t,x)\in Q^{(5)},\\ u^{(6)}(t,x)=w(t,x)-w\left(t-\frac{x}{a},0\right)+\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)+\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x}\tilde\psi_2(\xi)d\xi,\\ (t,x)\in Q^{(6)}. \end{gathered} \tag{9}$$

В (9) C – некоторая константа. Из [7] приходим к заключению, что $C=0$.

Если $f\in C^1(\overline{Q})$, $\varphi\in C^2([0,\infty))$, $\tilde\psi_1\in C^1([0,x^*])$, $\tilde\psi_2\in C^1([x^*,\infty))$, $\mu\in C^2([0,\infty))$, то из (8) и (12) следует, что $u^{(j)}\in C^2(\overline{Q^{(j)}})$, $j\in\{1,2,3,4,5,6\}$.

Т е о р е м а 1. *Если выполняются условия гладкости для заданных функций:* $f\in C^1(\overline{Q})$, $\varphi\in C^2([0,\infty))$, $\tilde\psi_1\in C^1([0,x^*])$, $\tilde\psi_2\in C^1([x^*,\infty))$, $\mu\in C^2([0,\infty))$, *то существует единственное классическое решение задачи (1), (3), (4) в смысле определения 1, и оно представляется формулами (8) и (9).*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из (8) и (9). Непосредственной проверкой убеждаемся, что функции удовлетворяют уравнению (1) и условиям (3), (4). Единственность доказывается методом от противного. Если предположить, что существует два решения. Тогда для их разности получаем однородное уравнение (1) и однородные условия (3), (4), из которых следует нулевое решение согласно (8) и (9).

Т е о р е м а 2. *Пусть выполняются условия* $f\in C^1(\overline{Q})$, $\varphi\in C^2([0,\infty))$, $\tilde\psi_1\in C^1([0,x^*])$, $\tilde\psi_2\in C^1([x^*,\infty))$, $\mu\in C^2([0,\infty))$. *Тогда решение задачи (1), (3), (4) в смысле определения, которое представлено формулами (8) и (9), принадлежит классу* $C(\overline{Q})$, *тогда и только тогда, когда* $\mu(0)=\varphi(0)$.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполняются условия* $f \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\tilde{\psi}_1 \in C^1([0,x^*])$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1([x^*,\infty))$, $\mu \in C^2([0,\infty))$. *Тогда решение задачи (1), (3), (4) в смысле определения, которое представлено формулами (8) и (9), принадлежит классу* $C^1(\overline{Q})$, *тогда и только тогда, когда* $\tilde{\psi}_1(x^*) = \tilde{\psi}_2(x^*)$, $\mu'(0) = \psi(0)$ *и* $\mu(0) = \varphi(0)$.

Т е о р е м а 4. *Пусть выполняются условия* $f \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\tilde{\psi}_1 \in C^1([0,x^*])$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1([x^*,\infty))$, $\mu \in C^2([0,\infty))$. *Тогда решение задачи (1), (3), (4) в смысле определения, которое представлено формулами (8) и (9), принадлежит классу* $C^2(\overline{Q})$, *тогда и только тогда, когда* $\tilde{\psi}'_1(x^*) = \tilde{\psi}'_2(x^*)$, $\tilde{\psi}_1(x^*) = \tilde{\psi}_2(x^*)$, $\mu''(0) = a^2\varphi''(0) + f(0,0)$, $\mu'(0) = \psi(0)$ *и* $\mu(0) = \varphi(0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теорем 2–4 проводится методом характеристик аналогично доказательствам, приведенным в [13–15].

Возвращаемся к исходной задаче (1)–(3). Ее решение может быть получено предельным переходом из решения задачи (1), (3), (4). Устремив x^* к нулю, получим, что области $Q^{(1)}$, $Q^{(3)}$, $Q^{(4)}$ и $Q^{(5)}$ уменьшаются и в пределе становятся пустыми множествами, но их значения будут влиять на значения решения на характеристике $x - at = 0$, поскольку замыкание множеств $Q^{(3)}$ и $Q^{(5)}$ станет характеристикой $x - at = 0$, а замыкание $Q^{(1)}$ и $Q^{(4)}$ станет точкой $(0,0)$. В то же время области $Q^{(2)}$ и $Q^{(6)}$ останутся, и решение будет иметь вид

$$u(t,x) = \begin{cases} u^{(2)}(t,x), & x - at > 0, \\ [u^{(3)} \text{ или } u^{(5)}](t,x), & x - at = 0, \\ u^{6)}(t,x), & x - at < 0, \end{cases} \tag{10}$$

где функции $u^{(2)}, u^{(3)}, u^{(5)}$ и $u^{(6)}$ определены формулами (8) и (9) при $x^* = 0$.

Для корректности предельного перехода необходимо, чтобы кусочно-заданная функция u была дважды непрерывно-дифференцируемой в $Q^{(i)}$, для каждого $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Это будет выполняться, если будут выполняться условия гладкости: $f \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\tilde{\psi}_1 \in C^1([0,x^*])$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1([x^*,\infty])$, $\mu \in C^2([0,\infty))$. Для единственности решения необходимы равенства функций $u^{(3)}$ и $u^{(5)}$, а также их частных производных до второго порядка включительно, на характеристике $x - at = 0$, что будет выполнено при выполнении условий $\mu''(0) = a^2\varphi''(0) + f(0,0)$, $\mu'(0) = \tilde{\psi}_1(0)$ и $\mu(0) = \varphi(0)$.

Такое решение u будет принадлежать классу $C(\overline{Q}) \cap C^2(Q_-) \cap C^2(Q_+) \cap C^2(Q_0)$, где

$$\begin{aligned} Q_- &= \{(t,x) \mid t > 0, x > 0, x - at > 0\}, \\ Q_+ &= \{(t,x) \mid t > 0, x > 0, x - at < 0\}, \\ Q_0 &= \{(t,x) \mid t > 0, x > 0, x - at = 0\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Сформулируем результат в виде теоремы.

Т е о р е м а 5. *Пусть выполняются условия* $f \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi_2 \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^2([0,\infty))$, *тогда решение задачи (1)–(3) в смысле определения при* $x^* = 0$, *представленное (10), является единственным тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования* $\mu''(0) = a^2\varphi''(0) + f(0,0)$, $\mu'(0) = \psi$ *и* $\mu(0) = \varphi(0)$. *Кроме того, оно принадлежит классу* $C(\overline{Q}) \cap C^2(Q_-) \cap C^2(Q_+) \cap C^2(Q_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из рассуждений выше.

Заключение. Были сформулированы условия согласования, при выполнении которых существует классическое решение задачи в случае достаточной гладкости условий Коши. Построены классические решения задачи Коши в полуплоскости двух независимых переменных и смешанной задачи в четверти плоскости двух независимых переменных, и показана зависимость от гладкости условий Коши. Одним из важнейших результатов является рассмотрение задачи, когда одна функция из условий Коши задается на множестве нулевой меры. В этом случае были получены не только условия существования решения, а доказаны необходимые и достаточные условия для единственности решения.

Список использованных источников

1. Лазарян, В. А. О динамических усилиях в упряжных приборах однородных поездов при сопротивлениях относительным перемещениям экипажей / В. А. Лазарян // Тр. Днепропетр. ин-та инженеров ж.-д. транспорта. – 1950. – Вып. 20. – С. 3–32.

2. Маврин, А. И. К теории ударного погружения свай / А. И. Маврин // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1967. – № 8. – С. 24–28.

3. Boussinesq, J. Du choc longitudinal d'une barre élastique prismatique fixée à un bout et heurtée à l'autre / J. Boussinesq // Comptes Rendus. – 1883. – Vol. 97, N 2. – P. 154–157.

4. Гайдук, С. И. О некоторых задачах, связанных с теорией поперечного удара по стержням / С. И. Гайдук // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 7. – С. 1233–1243.

5. Гайдук, С. И. О единственности решения одной задачи из волновой теории механического удара / С. И. Гайдук, Г. М. Заяц // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 5. – С. 833–839.

6. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики: учеб. пособие / В. И. Корзюк. – Минск, 2011. – 509 с.

7. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанных задач для одномерного волнового уравнения с негладкими условиями Коши / В. И. Корзюк, С. И. Пузырный // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 2. – С. 22–31.

8. Корзюк, В. И. Об условиях согласования в граничных задачах для гиперболических уравнений / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 5. – С. 37–42.

9. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши / В. И. Корзюк, И. С. Козловская, С. Н. Наумовец // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 1. – С. 7–21.

10. Корзюк, В. И. Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 5. – С. 700–709.

11. Корзюк, В. И. Классические решения задач для гиперболических уравнений: Курс лекций в 10 ч. / В. И. Корзюк, И. С. Козловская. – Минск, 2017. – Ч. 2. – 52 с.

12. Корзюк, В. И. Классическое решение в четверти плоскости смешанной задачи для волнового уравнения / В. И. Корзюк, И. С. Козловская, В. Ю. Соколович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 6. – С. 647–651. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-6-647-651

13. Столярчук, И. И. Решение смешанных задач методом характеристик для волнового уравнения с интегральным условием / И. И. Столярчук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 53–62.

14. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения типа Клейна–Гордона–Фока в полуполосе с косыми производными в граничных условиях / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 391–403. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-391-403

15. Корзюк, В. И. Смешанная задача для одномерного гиперболического уравнения четвертого порядка с периодическими условиями / В. И. Корзюк, Нгуен Ван Винь // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 135–148. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-135-148

References

1. Lazaryan V. A. On dynamic forces in harness devices of homogeneous trains with resistance to relative movements of carriages. *Trudy Dnepropetrovskogo instituta inzhenerov zheleznodorozhnogo transporta* [Proceedings of the Dnepropetrovsk Institute of Railway Engineers], 1950, no. 20, pp. 3–32 (in Russian).

2. Mavrin A. I. To the theory of shock piling. *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo i arkhitektura* [News of universities. Building and architecture], 1967, no. 8, pp. 24–28 (in Russian).

3. Boussinesq J. Du choc longitudinal d'une barre élastique prismatique fixée à un bout et heurtée à l'autre. *Comptes Rendus*, 1883, vol. 97, no. 2, pp. 154–157 (in Franch).

4. Gayduk S. I. On some problems related to the theory of transverse impact on rods. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 1977, vol. 13, no. 7, pp. 1233–1243 (in Russian).

5. Gayduk S. I., Zayats G. M. On the uniqueness of the solution of one problem from the wave theory of mechanical shock. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 1989, vol. 25, no. 5, pp. 592–597.

6. Korzyuk V. I. *Equations of mathematical physics*. Minsk, 2011. 509 p. (in Russian).

7. Korzyuk V. I., Puzyrnyi S. I. Classical solution of mixed problems for a one-dimensional wave equation with Cauchy nonsmooth conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2016, no. 2, pp. 22–31 (in Russian).

8. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. Fitting conditions in the boundary problems for hyperbolic equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2013, vol. 57, no. 5, pp. 37–42 (in Russian).

9. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Naumavets S. N. Classical solution to the first mixed problem for the one-dimensional wave equation with Cauchy-type conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2015, no. 1, pp. 7–21 (in Russian).

10. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. Solution of the Cauchy problem for a hyperbolic equation with constant coefficients in the case of two independent variables. *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 5, pp. 707–716. https://doi.org/10.1134/s0012266112050096

11. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. *Classical problem solutions for hyperbolic equations: A course of lectures in 10 parts*. Minsk, 2017, part 2. 52 p. (in Russian).

12. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Sokolovich V. Yu. Classical solution of the mixed problem in the quarter of the plane for the wave equation. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 6, pp. 647–651 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-6-647-651

13. Stolyarchuk I. I. Solution of the mixed problems by the method of characteristics for the wave equation with the integral condition. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2017, no. 1, pp. 53–62 (in Russian).

14. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the Klein–Gordon–Fock type equation in the half-strip with curve derivatives at boundary conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 391–403 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-391-403

15. Korzyuk V. I., Nguyen Van Vinh. A mixed problem for the four-order one-dimensional hyperbolic equation with periodic conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 135–148 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-135-148

Информация об авторах

Корзюк Виктор Иванович – академик, д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by.

Рудько Ян Вячеславович – магистрант. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: janycz@yahoo.com.

Information about the authors

Korzyuk Viktor I. – Academician, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by.

Rudzko Jan V. – Master student. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: janycz@yahoo.com.