

ISSN 1561-8323 (Print)  
ISSN 2524-2431 (Online)

**ФИЗИКА**  
**PHYSICS**

УДК 535.23:621.374.825  
<https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-6-663-669>

Поступило в редакцию 12.06.2020  
Received 12.06.2020

**Е. В. Тимошенко, В. А. Юревич**

*Могилевский государственный университет им. А. Кулешова, Могилев, Республика Беларусь*

**ФОРМАЛИЗМ ВЕКТОРА БЛОХА В ЗАДАЧЕ О НЕЛИНЕЙНОМ РЕЗОНАНСНОМ  
ОТКЛИКЕ КВАЗИДВУМЕРНОГО СУПЕРКРИСТАЛЛА**

*(Представлено членом-корреспондентом В. П. Редько)*

**Аннотация.** С учетом представлений обобщенной двухуровневой схемы в рамках полуклассического подхода к рассмотрению резонансного взаимодействия светового поля с веществом получено аналитическое решение задачи об эволюции сверхизлучения в квазидвумерном суперкристалле, образованном квантовыми точками. Расчет проведен для физических параметров полупроводниковой структуры с квантоворазмерными эффектами при наличии резонансной нелинейности и внутризонной релаксации.

**Ключевые слова:** нелинейная динамика, резонансная оптика, коллективные эффекты излучения, суперкристаллы квантовых точек, диполь-дипольное взаимодействие

**Для цитирования.** Тимошенко, Е. В. Формализм вектора Блоха в задаче о нелинейном резонансном отклике квазидвумерного суперкристалла / Е. В. Тимошенко, В. А. Юревич // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2020. – Т. 64, № 6. – С. 663–669. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-6-663-669>

**Elena V. Timoshchenko, Vladimir A. Yurevich**

*Mogilev State A. Kuleshov University, Mogilev, Republic of Belarus*

**BLOCH VECTOR FORMALISM IN THE PROBLEM OF NONLINEAR RESONANT RESPONSE  
OF A QUASI-TWO-DIMENSIONAL SUPERCRYSTAL**

*(Communicated by Corresponding Member Vsevolod P. Red'ko)*

**Abstract.** Taking into account the ideas of the generalized two-level scheme, within the framework of the semiclassical approach to the consideration of the resonant interaction of the light field with matter, an analytical solution to the problem of the evolution of superradiance in a quasi-two-dimensional supercrystal formed by quantum dots is obtained. The calculation was carried out for the physical parameters of a semiconductor structure with quantum-well effects in the presence of resonant nonlinearity and intraband relaxation.

**Keywords:** nonlinear dynamics, resonant optics, collective effects of radiation, quantum dots supercrystals, dipole-dipole interaction

**For citation:** Timoshchenko E. V., Yurevich V. A. Bloch vector formalism in the problem of nonlinear resonant response of a quasi-two-dimensional supercrystal. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2020, vol. 64, no. 6, pp. 663–669 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-6-663-669>

**Введение.** В настоящее время интенсивно разрабатываются искусственные электромагнитные композитные среды с оптическими свойствами, отсутствующими у составляющих их исходных природных материалов. Эти заранее неочевидные оптические или, в более широком частотном диапазоне, электромагнитные свойства обусловлены субволновым размером элементарных дипольных излучателей при их плотной упаковке в среде и резонансным характером рассеяния внешнего электромагнитного излучения. Установлено, что двумерные суперкристаллы

из регулярно расположенных дипольных центров (в частности, квантовых точек) представляют собой один из примеров таких объектов, оптические свойства которых могут контролироваться изменением формы и химического состава образующих элементов, а также геометрией их структуры [1]. К подобным объектам относят и метаматериалы – также новый класс веществ, не существующих в природе [2]. Внутреннюю структуру многих квазикристаллов, среди которых ди-халькогениды переходных металлов (например,  $\text{MoSe}_2$ ,  $\text{WSe}_2$ ) [3], суперкристаллы полупроводниковых квантовых точек [4; 5], фосфорены [6] и органические полимеры [7] можно представить упорядоченным ансамблем квантовых точек (мета-атомов – образований, превышающих обычный размер атома, например, экситонов) с дискретными свойствами энергетического спектра.

В силу существования дополнительных степеней свободы в схеме резонансного взаимодействия с когерентным излучением (например, геометрии решетки и взаимодействия представляемых диполями квантовых точек) суперкристаллы, обладая наноразмерной толщиной, характеризуются уникальными транспортными и оптическими свойствами. Суперкристалл может практически полностью отразить световое поле в определенном спектральном диапазоне, т. е. является идеальным критичным по частоте зеркалом нанометровой толщины [8]. В дополнение к этому, его отражательная способность нелинейна и обнаруживает бистабильное поведение, т. е. возможно переключение отражения незначительным изменением интенсивности внешнего сигнала от конечной величины к режиму практически полной прозрачности. Определенное достоинство двумерных суперкристаллов выражено тем, что в подавляющем большинстве их материалы – полупроводники, энергетическая структура которых способна управляться внешним воздействием – это делает их в высшей степени перспективными в применении в устройствах нанопотоники. Квантовые переходы с участием экситонов характеризуются гигантскими силами осциллятора, что приводит к более яркому проявлению нелинейных оптических эффектов при умеренных уровнях интенсивности действующего в среде суперкристалла когерентного излучения. Подобные материалы характеризуются также относительно высокой концентрацией активных дипольных центров (их относят к плотным резонансным средам), при этом вероятно особая эффективность взаимного влияния собственных электрических полей. Поэтому изучение закономерностей нелинейной динамики резонансного отклика образованных квантовыми точками суперкристаллов представляется актуальным и целесообразным с практической позиции.

**Постановка задачи и основные уравнения.** В настоящей работе поставлена задача эволюции вынужденного излучения в структуре низкоразмерного суперкристалла при условии, что характерная длительность формируемых импульсов значительно меньше времени действия релаксационных механизмов в среде. При этом условии взаимодействие среды и светового поля когерентно (т. е. оказываются согласованными осцилляции поляризованности ансамбля активных центров и порождаемого им резонансного волнового поля с частотой  $\omega$ , совпадающей с частотой центра спектральной линии), и один из обусловленных этой корреляцией коллективных эффектов представлен сверхизлучением [9]. Испускание импульса сверхизлучения (СИ) ансамблем из большого числа  $N$  инвертированных активных центров со средним дипольным моментом  $\mu$  способно развиваться в течение времени  $\tau_r = \epsilon_0 \hbar c / \mu^2 N l \omega$  ( $l$  – толщина слоя), много меньшего характерного времени излучения изолированного атома  $T_1$ . Явление сверхизлучения происходит как следствие самопроизвольной фазовой корреляции (согласования фаз или фазировки) первоначально независимых активных центров, образующих суперкристалл. Появление фазовой корреляции объясняют двумя факторами – взаимодействием диполей через излучаемое ими электромагнитное поле и нелинейностью осцилляторных движений электронов внутри активных центров. Полупроводниковые структуры с квантоворазмерными эффектами используются как инверсные среды; в виде планарных слоев эти материалы применяются в качестве активных поверхностных пленок, способных модулировать резонансное излучение. В полупроводниковых средах СИ развивается как коллективная спонтанная рекомбинация [10]. В процессе формирования импульса СИ фазы отдельных экситонов, представляемых диполями, спонтанно синхронизируются, в результате чего в пределах суперкристалла формируется коллективный диполь с малым временем излучательной рекомбинации. Влиянием диполь-дипольного взаимодействия и реакцией на поле переходов, близких к основному, по мере резонансных вариаций населенно-

сти определяется смещение центра спектральной линии усиления и автомодуляционный дрейф частоты высвечиваемого поля. Этими особенностями, присущими резонансному взаимодействию ввиду относительно плотной упаковки активных центров в структуре суперкристалла и высоких значений дипольных моментов, может определяться самодефазировка ансамбля элементарных излучателей в ходе формирования импульса СИ.

В настоящей работе учтено влияние этих факторов нелинейной фазовой динамики на процесс сверхизлучения в квазидвумерном суперкристалле из квантовых точек. Фазовыми эффектами определена возможность возникновения динамической обратной связи, поэтому применительно к подобным низкоразмерным усиливающим элементам следует говорить именно о генерации с характерностью процесса СИ.

Квантоворазмерные структуры обладают свойствами материалов, образуемых активными центрами, реакция которых на электромагнитное поле излучения носит выражено дипольный характер. Поэтому к их расчетному анализу применимы представления двухуровневой схемы взаимодействия вещества с резонансным световым полем. Оптическое плосковолновое поле в слое суперкристалла, естественно, предполагается однородным в направлении его толщины  $l$ . В отличие от уже решенных аналитических задач по тематике СИ, в полученном решении наряду с фазовой релаксацией элементарных диполей учтено поляризующее влияние на диэлектрическую восприимчивость вещества ближних полей диполей в рамках представления действующего поля, включающего локальную поправку Лоренца. Такого рода нелинейный механизм взаимодействия среды и поля, приводящий к малоинерционному смещению спектральной линии, типичен именно для сред с относительно высокой плотностью активных центров [11]. Обобщение двухуровневой схемы в рассматриваемой далее задаче состоит в учете влияния на поляризуемость поглощения в квазирезонансных переходах. Обычно это выражено допущением различия (дефекта  $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ ) поляризуемостей дипольных частиц  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в основном и возбужденном состоянии. При перераспределении частиц по уровням перехода в ходе вынужденного излучения возможны нелинейные резонансные вариации преломления, что также существенно в полупроводниковых экситонных средах.

Задача об энергообмене среды суперкристалла и светового поля в процессе СИ может быть решена в допущении сверхтонкого граничного слоя резонансного материала, в сущности, для планарной пленки, излучающей с поверхности. При этом вместо волновых уравнений допускается использование граничных электродинамических условий в уравнениях Максвелла, записанных для действующего на атомы и отраженного слоем плосковолновых полей. Соотношения для условий содержат компоненты, учитывающие резонансную поляризацию в граничном слое, которые именуют сверхизлучательными [12], этими компонентами выражена связь действующего поля и резонансного отклика среды. Совместно с граничными соотношениями для световых полей принято рассматривать уравнения квантовомеханической двухуровневой матрицы плотности для вероятностных переменных резонансной поляризованности  $\rho$  и инверсной населенности  $n$ . Изменением сверхизлучательных компонентов принято характеризовать эволюцию поля в таких объектах, как квазидвумерные суперкристаллы [13], их величиной определяется динамика напряженности излучаемого поля  $E(t)$  [12; 13].

Квазистационарное приближение в схеме расчета с граничными соотношениями для системы Максвелла аналогично [14] приводит к модификации вытекающих из квантовомеханических уравнений оптических уравнений Блоха для материальных переменных резонансного отклика среды (амплитуды поляризованности  $\rho_m(t)$  и инверсии  $n(t)$ ) и амплитуды нормированного излучаемого поля  $e(t) = \mu T_2 E(t) / \hbar$ :

$$T_2 \frac{d\rho_m}{dt} = \left\{ \frac{\kappa n}{[1 - \beta\gamma(1-n)]^2 + \beta^2(1-n)^2} - 1 \right\} \rho_m + i \frac{\kappa n [\gamma - \beta(1 + \gamma^2)(1-n)]}{[1 - \beta\gamma(1-n)]^2 + \beta^2(1-n)^2} \rho_m, \quad (1)$$

$$T_2 \frac{dn}{dt} = - \frac{\kappa |\rho_m|^2}{[1 - \beta\gamma(1-n)]^2 + \beta^2(1-n)^2}, \quad e(t) = \frac{\kappa \rho_m}{1 - \beta(\gamma - i)(1-n)},$$

где  $T_2$  – время фазовой (поперечной или внутризонной) релаксации, характеризующее спектральную ширину линии усиления;  $\kappa$  – показатель усиления слоя, характеризующий уровень ненасы-

щенного усиления (иногда его называют также параметром резонансной нелинейности поглощения (усиления)), для оценки величины этого параметра считается верным соотношение  $\kappa = T_2 / \tau_R$  [9];  $\gamma$  – нормировочный коэффициент в составляющей фазовой отстройке, возникающей при учете локальной поправки Лоренца. В компоненте фазовой отстройки, обусловленной дефектом поляризуемостей, коэффициентом  $\beta = 2\pi\Delta\alpha Nl\omega / c$  характеризуется нелинейный дрейф частоты поля, который пропорционален резонансной вариации инверсии. Компонент, описывающий это следствие резонансной нелинейности, в отличие от [14], учитывается в представлении локальной поправки Лоренца.

**Решение задачи для координат вектора Блоха.** Динамика компонентов отклика среды суперкристалла определяет процесс усиления при достижении некоторой пороговой инверсии  $n(t=0) = n_0$ . Далее аналогично [9] предположим, что при «старте» СИ представляющий его дипольный ансамбль максимально инвертирован. Допустим, таким образом, что в начальный момент  $n(t=0) = 1$ , и корреляции в ансамбле отсутствуют –  $\rho_m(t=0) = 0$ .

Преобразуем далее систему (1), записав ее для квадрата модуля амплитуды поляризованности  $|\rho_m(t)|^2$  и инверсии, т. е. в схеме расчета перейдем к действительным переменным:

$$T_2 \frac{d|\rho_m|^2}{dt} = 2 \left\{ \frac{\kappa n}{[1 - \beta\gamma(1-n)]^2 + \beta^2(1-n)^2} - 1 \right\} |\rho_m|^2, \quad (2)$$

$$T_2 \frac{dn}{dt} = - \frac{\kappa |\rho_m|^2}{[1 - \beta\gamma(1-n)]^2 + \beta^2(1-n)^2}, \quad u(t) = \frac{\kappa^2 |\rho_m|^2}{[1 - \beta\gamma(1-n)]^2 + \beta^2(1-n)^2}.$$

Не имеющая размерности плотность поля СИ  $u(t)$  – в системе (2) определяется сверхизлучательной составляющей резонансной поляризованности – пропорциональна квадрату модуля амплитуды поляризованности.

Интеграл системы (2) определяется элементарно из уравнения

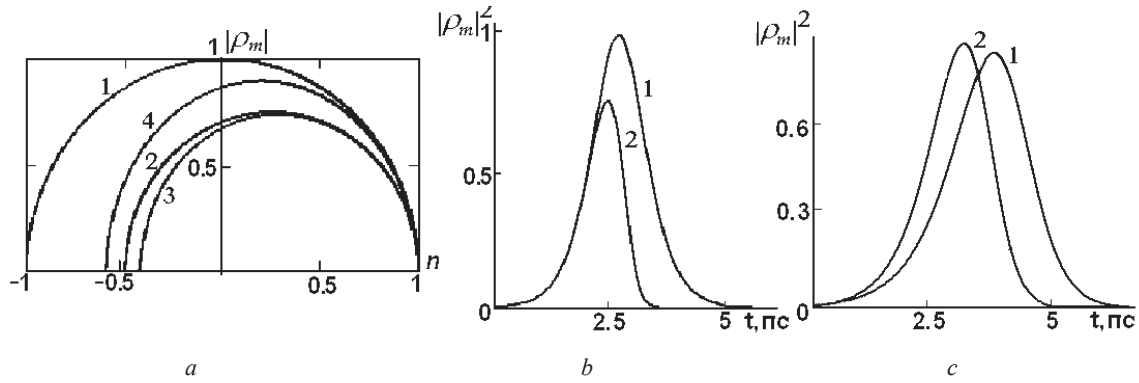
$$\frac{\kappa}{2} \frac{d|\rho_m|^2}{dn} = [1 - \beta\gamma(1-n)]^2 + \beta^2(1-n)^2 - \kappa n,$$

и можно установить, что решения (2) для  $|\rho_m(t)|^2$  и  $n$  с учетом принятых выше начальных условий удовлетворяют такому соотношению:

$$|\rho_m|^2 + n^2 = 1 - \frac{2}{\kappa}(1-n) + \frac{2}{\kappa}\beta(1-n)^2 \left[ \gamma - \frac{\beta}{3}(1+\gamma^2)(1-n) \right]. \quad (3)$$

В литературе, посвященной теоретическому анализу коллективных эффектов, считается удобным использовать формализм вектора Блоха. Переменные уравнений, подобных схеме расчета (1), тогда рассматриваются в виде координат (составляющих) вектора Блоха:  $X = \text{Re}\rho_m$ ,  $Y = \text{Im}\rho_m$ ,  $Z = n$ . В отсутствие эффектов, вызывающих нелинейную отстройку частоты («классический» случай – для протяженной среды), формулируется соотношение  $|\rho_m|^2 + n^2 = 1$ , известное как закон сохранения полярного угла вектора Блоха [9]. Отметим, что выражением (3) представлен, в сущности, аналог закона сохранения полярного угла вектора Блоха для более общего случая взаимодействия. Наряду с фазовой нелинейностью при формулировке (3) учитывается скорость разброса диполей в пределах ширины спектральной линии (т. е. конечность времени фазовой релаксации диполей). Общность формулировки (3), однако, ограничена предположением об однородном поле в суперкристалле.

**Результаты расчетов.** В выборе параметров, определяющих величины коэффициентов (1) для полупроводниковых квантоворазмерных структур, в основном, ориентировались по данным, известным, например, из [5; 10]. Примерный масштаб явлений соответствовал интенсивности порядка  $(1-5)10^6$  Вт/см<sup>2</sup>, концентрации активных центров  $N \sim (2-4)10^{18}$  см<sup>-3</sup>, длине волны оптического поля  $\sim 1,3 \cdot 10^{-6}$  м. На рисунке *a* иллюстрируются характерные траектории в фазовой плоскости переменных  $(|\rho_m|, n)$ , рассчитанные, следуя соотношению (3), для разных вариантов взаимодействия.



Форма фазовых траекторий в плоскости  $(|\rho_m|, n)$  (a) и примеры расчета временной развертки квадрата модуля поляризованности (b, c);  $\beta = 0$  (кривые 1, 2), 0,05 (3, 4),  $\kappa = 1,2$  (1–3),  $\gamma = 3,17$  (4) (a);  $\beta = 0$  (1), 0,1 (2),  $\kappa = 1,2$  (2) (b);  $\kappa = 1,1$  (1), 1,25 (2),  $\beta = 0,1$ ,  $\gamma = 3,17$  (c),  $T_2 = 1,0 \cdot 10^{-12}$  c

The shape of phase trajectories in the  $(|\rho_m|, n)$  plane (a) and examples of calculating the temporal dependence of the polarization square modulus (b, c);  $\beta = 0$  (curves 1, 2), 0,05 (3, 4),  $\kappa = 1,2$  (1–3),  $\gamma = 3,17$  (4) (a);  $\beta = 0$  (1), 0,1 (2),  $\kappa = 1,2$  (2) (b);  $\kappa = 1,1$  (1), 1,25 (2),  $\beta = 0,1$ ,  $\gamma = 3,17$  (c),  $T_2 = 1,0 \cdot 10^{-12}$  c

Закону сохранения вектора Блоха в традиционной формулировке соответствует траектория, описываемая кривой 1 на рисунке a. Естественно, траектория имеет форму полуокружности, такую же форму имеет кривая 2, соответствующая только учету фазовой релаксации. В этом варианте, однако, разность населенности в отрицательной части значений имеет меньшее по модулю значение – сброс инверсии в условиях дефазировки диполей, вызванной влиянием спонтанных процессов взаимодействия со средой, происходит не до максимального ( $n_{\text{мин}} = -1$ ) уровня. В этой мере неполный сброс инверсии ведет и к снижению мощности импульса СИ ( $|\rho_m|^2 < 1$ ). Влияние фазового эффекта, связанного с дефазировкой диполей из-за различия поляризуемостей ( $\beta \neq 0$ ), приводит к деформации траектории, описывающей закон сохранения (кривая 3) – в таком случае траектория принимает форму полуэллипса.

Фронты импульсов должны развиваться в условиях различного темпа изменения инверсии, поэтому формируемые «нелинейные» импульсы СИ становятся асимметричными. Еще большим различием фронтов должны характеризоваться импульсы СИ в случае возможности диполь-дипольного взаимодействия (кривая 4). Обусловившая асимметрию нелинейная дефазировка образующих суперкристалл элементарных излучателей тогда может происходить при одновременном действии двух автомодуляционных механизмов с частичной взаимной компенсацией.

Использование соотношения (3) дает возможность точного аналитического расчета временной развертки импульса СИ с учетом фазовой релаксации и фазовых нелинейностей. Из соотношения (3) следует выражение для  $|\rho_m|^2$ :

$$|\rho_m|^2 = (1 - n) \left\{ 1 + n - \frac{2}{\kappa} + \frac{2}{\kappa} \beta (1 - n) \left[ \gamma - \frac{\beta}{3} (1 + \gamma^2) (1 - n) \right] \right\}. \quad (4)$$

С учетом (4) уравнение для инверсии из системы (2) разрешимо в виде соотношения

$$2(\kappa - 1)(t - t_0) / T_2 = \ln(1 - n) + (3\kappa - 4) \ln \left\{ 1 + n - \frac{2}{\kappa} + \frac{2}{\kappa} \beta (1 - n) \left[ \gamma - \frac{\beta}{3} (1 + \gamma^2) (1 - n) \right] \right\} + \frac{(3\kappa - 4 + 2\beta\gamma)}{\sqrt{D}} \operatorname{Arth} \frac{\beta^2 (1 + \gamma^2) (1 - n) + 3(\kappa - 2\beta\gamma)}{\sqrt{D}}, \quad D = (\kappa - 2\beta\gamma)^2 + 16\beta^2 (\kappa - 1) (1 + \gamma^2) / 3. \quad (5)$$

Решение (5) допускает параметрический расчет – величина  $n$  используется тогда в качестве аргумента, линейно нарастающего в пределах диапазона его изменений, который определяется неотрицательными значениями выражения (4). Примеры расчетной оценки временной зависимости переменной  $|\rho_m(t)|^2$ , в основном, определяющей форму импульса СИ, с использованием выра-

жений (5) проиллюстрированы на рисунке *b* и *c*. Отмечается асимметрия импульсов, возрастающая в случае относительной значимости вкладов механизмов нелинейности – существования различия поляризуемостей на уровнях основного перехода (рисунок *b*), нарастания показателя усиления  $k$  (рисунок *c*). В расчетах предполагалось, что последнее должно происходить за счет увеличения концентрации активных центров  $N$ .

**Закключение.** В литературе предсказывалась возможность возникновения самовозбуждения генерации в тонких планарных инверсных слоях [15]. Режим самовозбуждения, который может реализоваться в форме сверхизлучения при рассмотренных условиях инверсии в суперкристалле, образованном квантовыми точками, представляется перспективным к использованию для получения импульсной генерации в лазерных устройствах, где усиливающий элемент представляет собой тонкий слой резонансной среды с относительно большой концентрацией активных центров при достижении высокого уровня инверсии. Проведенные оригинальные расчетные оценки временного хода процесса СИ с учетом типичных для резонансного отклика нелинейностей могут быть использованы при разработке методик получения и профилирования оптических импульсов в субпикосекундном диапазоне длительностей в современных устройствах нанофотоники.

### Список использованных источников

1. Alù, A. Prime time / A. Alù // *Nature Materials*. – 2016. – Vol. 15, N 12. – P. 1229–1231. <https://doi.org/10.1038/nmat4814>
2. Soukoulis, C. M. Optical Metamaterials – More Bulky and Less Lossy / C. M. Soukoulis, M. Wegener // *Science*. – 2010. – Vol. 330, N 6011. – P. 1633–1634. <https://doi.org/10.1126/science.1198858>
3. 2D transition metal dichalcogenides / S. Manzeli [et al.] // *Nature Review Materials*. – 2017. – Vol. 2, N 8. – Art. 17033. <https://doi.org/10.1038/natrevmats.2017.33>
4. Long-range orientation and atomic attachment of nanocrystals in 2D honeycomb superlattices / M. P. Boneschanscher [et al.] // *Science*. – 2014. – Vol. 344, N 6190. – P. 1377–1380. <https://doi.org/10.1126/science.1252642>
5. Low-Dimensional Semiconductor Superlattices Formed by Geometric Control over Nanocrystal Attachment / W. H. Evers [et al.] // *Nano Letters*. – 2013. – Vol. 13, N 6. – P. 2317–2323. <https://doi.org/10.1021/nl303322k>
6. Black phosphorus field-effect transistors / L. Li [at al.] // *Nature Nanotechnology*. – 2014. – Vol. 9, N 5. – P. 372–377. <https://doi.org/10.1038/nnano.2014.35>
7. A two-dimensional conjugated aromatic polymer via C–C coupling reaction / W. Liu [et al.] // *Nature Chemistry*. – 2017. – Vol. 9, N 6. – P. 563–570. <https://doi.org/10.1038/nchem.2696>
8. Large Excitonic Reflectivity of Monolayer MoSe<sub>2</sub> Encapsulated in Hexagonal Boron Nitride / G. Scuri [et al.] // *Physical Review Letters*. – 2018. – Vol. 120, N 3. – Art. 037402. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.120.037402>
9. Андреев, А. В. Кооперативные явления в оптике. Сверхизлучение. Бистабильность. Фазовые переходы / А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский. – М., 1988. – 288 с.
10. Формирование сверхизлучения в наногетероструктурах с квантовыми точками / А. В. Савельев [и др.] // *Физика и техника полупроводников*. – 2008. – Т. 42, № 6. – С. 730–735.
11. Маликов, Р. Ф. Оптическая бистабильность и гистерезис тонкого слоя резонансных излучателей: взаимное влияние неоднородного уширения линии поглощения и локального поля Лоренца / Р. Ф. Маликов, В. А. Малышев // *Оптика и спектроскопия*. – 2017. – Т. 122, № 6. – С. 1000–1009.
12. Рупасов, В. И. О граничных задачах в нелинейной оптике резонансных сред / В. И. Рупасов, В. И. Юдсон // *Квантовая электроника*. – 1982. – Т. 9, № 11. – С. 2179–2186.
13. Malikov, R. Nonlinear optical response of a 2D quantum dot supercrystal / R. Malikov, I. Ryzhov, V. Malyshev // *EPJ Web of Conferences*. – 2017. – Vol. 161. – P. 02014. <https://doi.org/10.1051/epjconf/201716102014>
14. Timoschenko, E. V. Resonance reflection of Light by a Thin Layer of Dense Nonlinear Medium / E. V. Timoschenko, V. A. Yurevich, Yu. V. Yurevich // *Technical Physics*. – 2013. – Vol. 58, N 2. – P. 251–254. <https://doi.org/10.1134/s1063784213020254>
15. Петров, Н. С. Лазерная генерация тонких инверсных слоев / Н. С. Петров, А. Б. Зимин // *Журн. прикл. спектр.* – 2010. – Т. 77, № 1. – С. 69–73.

### References

1. Alù A. Prime time. *Nature Materials*, 2016, vol. 15, no. 12, pp. 1229–1231. <https://doi.org/10.1038/nmat4814>
2. Soukoulis C. M., Wegener M. Optical Metamaterials – More Bulky and Less Lossy. *Science*, 2010, vol. 330, no. 6011, pp. 1633–1634. <https://doi.org/10.1126/science.1198858>
3. Manzeli S., Ovchinnikov D., Pasquier D., Yazyev O. V., Kis A. 2D transition metal dichalcogenides. *Nature Review Materials*, 2017, vol. 2, no. 8, art. 17033. <https://doi.org/10.1038/natrevmats.2017.33>

4. Boneschanscher M. P., Evers W. H., Geuchies J. J., Altantzis T., Goris B., Rabouw F. T., van Rossum S. A. P., van der Zant H. S. J., Siebbeles L. D. A., van Tendeloo G., Swart I., Hilhorst J., Petukhov A. V., Bals S., Vanmaekelbergh D. Long-range orientation and atomic attachment of nanocrystals in 2D honeycomb superlattices. *Science*, 2014, vol. 344, no. 6190, pp. 1377–1380. <https://doi.org/10.1126/science.1252642>

5. Evers W. H., Goris B., Bals S., Casavola M., de Graaf J., van Roij R., Dijkstra M., Vanmaekelbergh D. Low-Dimensional Semiconductor Superlattices Formed by Geometric Control over Nanocrystal Attachment. *Nano Letters*, 2013, vol. 13, no. 6, pp. 2317–2323. <https://doi.org/10.1021/nl303322k>

6. Li L., Yu Y., Ye G. J., Ge Q., Ou X., Wu H., Feng D., Chen X. H., Zhang Yu. Black phosphorus field-effect transistors. *Nature Nanotechnology*, 2014, vol. 9, no. 5, pp. 372–377. <https://doi.org/10.1038/nnano.2014.35>

7. Liu W., Luo X., Bao Y., Liu Y. P., Ning G.-H., Abdelwahab I., Li L., Nai Ch. T., Hu Zh. G., Zhao D., Liu B., Ying Q., Loh K. P. A two-dimensional conjugated aromatic polymer via C–C coupling reaction. *Nature Chemistry*, 2017, vol. 9, no. 6, pp. 563–570. <https://doi.org/10.1038/nchem.2696>

8. Scuri G., Zhou Y., High A. A., Wild D. S., Shu Chi, de Greve K., Jauregui L. A., Taniguchi T., Watanabe K., Kim Ph., Lukin M. D., Park H. Large Excitonic Reflectivity of Monolayer MoSe<sub>2</sub> Encapsulated in Hexagonal Boron Nitride. *Physical Review Letters*, 2018, vol. 120, no. 3, art. 037402. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.120.037402>

9. Andreev A. V., Emel'yanov V. I., Il'inskij Yu. A. *Cooperative effects in optics: Superradiation. Bistability. Phase transitions*. Moscow, 1988. 288 p. (in Russian).

10. Savelyev A. V., Karachinsky L. Ya., Novikov I. I., Gordeev N. Yu., Seisyan R. P., Zegrya G. G. Generation of superradiation in quantum dot nanoheterostructures. *Semiconductors*, 2008, vol. 42, no. 6, pp. 714–719. <https://doi.org/10.1134/s1063782608060134>

11. Malikov R. F., Malyshev V. A. Optical bistability and hysteresis of a thin layer of resonant emitters: interplay of inhomogeneous broadening of the absorption line and the Lorentz local field. *Optics and Spectroscopy*, 2017, vol. 122, no. 6, pp. 955–963. <https://doi.org/10.1134/s0030400x17060121>

12. Rupasov V. I., Yudson V. I. Boundary-value problems in nonlinear optics of resonant media. *Soviet Journal of Quantum Electronics*, 1982, vol. 12, no. 11, pp. 1415–1419. <https://doi.org/10.1070/qe1982v012n11label006090>

13. Malikov R., Ryzhov I., Malyshev V. Nonlinear optical response of a 2D quantum dot supercrystal. *EPJ Web of Conferences*, 2017, vol. 161, art. 02014. <https://doi.org/10.1051/epjconf/201716102014>

14. Timoshchenko E. V., Yurevich V. A., Yurevich Yu. V. Resonance reflection of light by a thin layer of a dense nonlinear medium. *Technical Physics*, 2013, vol. 58, no. 2, pp. 251–254. <https://doi.org/10.1134/s1063784213020254>

15. Petrov N. S., Zimin A. B. Laser generation in thin inverse layers. *Journal of Applied Spectroscopy*, 2010, vol. 77, no. 1, pp. 60–64. <https://doi.org/10.1007/s10812-010-9293-9>

### Информация об авторах

Тимощенко Елена Валерьевна – канд. физ.-мат. наук, профессор. Могилевский государственный университет им. А. А. Кулешова (ул. Космонавтов, 1, 212022, Могилев, Республика Беларусь). E-mail: [timoshchenko@msu.by](mailto:timoshchenko@msu.by).

Юревич Владимир Антонович – д-р физ.-мат. наук, профессор. Могилевский государственный университет им. А. А. Кулешова (ул. Космонавтов, 1, 212022, Могилев, Республика Беларусь). E-mail: [va\\_yurevich@mail.ru](mailto:va_yurevich@mail.ru).

### Information about the authors

Timoshchenko Elena V. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Professor. Mogilev State A. Kuleshov University (1, Kosmonavtov Str., 212022, Mogilev, Republic of Belarus). E-mail: [timoshchenko@msu.by](mailto:timoshchenko@msu.by).

Yurevich Vladimir A. – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. Mogilev State A. Kuleshov University (1, Kosmonavtov Str., 212022, Mogilev, Republic of Belarus). E-mail: [va\\_yurevich@mail.ru](mailto:va_yurevich@mail.ru).