ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 514.142 Поступило в редакцию 21.12.2020
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-1-7-10 Received 21.12.2020

Академик В. И. Янчевский

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

О ПРИВЕДЕННЫХ АНИЗОТРОПНЫХ УНИТАРНЫХ ГРУППАХ УАЙТХЕДА ГЕНЗЕЛЕВЫХ НЕРАЗВЕТВЛЕННЫХ И СЛАБО РАЗВЕТВЛЕННЫХ АЛГЕБР С ДЕЛЕНИЕМ, АЛГЕБРЫ ВЫЧЕТОВ КОТОРЫХ КОММУТАТИВНЫ

Аннотация. Вычислены приведенные анизотропные унитарные группы Уайтхеда гензелевых неразветвленных или слабо разветвленных алгебр с делением, алгебры вычетов которых коммутативны.

Ключевые слова: гензелевы алгебры с делением, снабженные унитарной инволюцией, унитарные группы гензелевой алгебры с унитарными инволюциями, приведенная анизотропная унитарная группа Уайтхеда гензелевой алгебры с унитарной инволюцией

Для цитирования. Янчевский, В. И. О приведенных анизотропных унитарных группах Уайтхеда гензелевых неразветвленных и слабо разветвленных алгебр с делением, алгебры вычетов которых коммутативны / В. И. Янчевский // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2021. – Т. 65, № 1. – С. 7–10. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-1-7-10

Academician Vyacheslav I. Yanchevskii

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

ON REDUCED ANISOTROPIC UNITARY WHITEHEAD GROUPS OF HENSELIAN DIVISION ALGEBRAS WHICH ARE EITHER UNRAMIFIED OR TAMELY RAMIFIED WITH COMMUTATIVE RESIDUE ALGEBRAS

Abstract. Reduced anisotropic unitary Whitehead groups of henselian division algebras, which are either unramified or tamely ramified with commutative residue algebra, are computed.

Keywords: henselian division algebras endowed with unitary involution, unitary groups of henselian algebras with respect to unitary involutions, reduced anisotropic unitary Whitehead groups of henselian algebras with respect to unitary involution.

For citation. Yanchevskii V. I. On reduced anisotropic unitary Whitehead groups of henselian division algebras which are either unramified or tamely ramified with commutative residue algebras. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2021, vol. 65, no. 1, pp. 7–10 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-1-7-10

Пусть k – гензелево поле, K – квадратичное сепарабельное расширение поля k, D – центральная конечномерная алгебра с делением над K, τ – унитарная инволюция алгебры D, т. е. инволюция алгебры D с нетривиальным ограничением на K. Напомним, что индекс ветвления алгебры D над K равен $\lambda_D^2\, r$, где $r = [Z(\overline{D}) : \overline{K}\,]$, а $Z(\overline{D})$ – центр алгебры $\overline{D}$.

Целью сообщения является изучение некоторых факторгрупп мультипликативной группы D^* алгебры D. Пусть $\mathrm{U}(D, \tau) = \{u \in D^* \mid uu^\tau = 1\}$ – унитарная группа алгебры D относительно инволюции τ; специальная унитарная группа алгебры D относительно инволюции τ – $\mathrm{SU}(D, \tau) = \{u \in \mathrm{U}(D, \tau) \mid \mathrm{Nrd}_D(u) = 1\}$, где $\mathrm{Nrd}_D : D^* \to K^*$ – гомоморфизм приведенной нормы группы D^*

в группу K^*; коммутант $\mathrm{U}(D, \tau)'$ унитарной группы $\mathrm{U}(D, \tau)$. Приведенная анизотропная унитарная группа Уайтхеда алгебры D относительно τ определяется следующим образом $\mathrm{SUK}_1^{an}(D, \tau) = \mathrm{SU}(D, \tau) / \mathrm{U}(D, \tau)'$. Положим также $\mathrm{SU}^v(D, \tau) = \{d \in \mathrm{SU}(D, \tau) \mid N(\overline{d}) = 1\}$. Еще нам также потребуется группа $\mathrm{SUK}_1^v(D, \tau)$, которая определяется как факторгруппа $\overline{\mathrm{SU}^v(D,\tau)} / \mathrm{U}(D, \tau)'$. Пусть $E_\lambda = N|_{\overline{\mathrm{SU}(D,\tau)}}$, где $N = N_{\overline{Z}/\overline{K}}(\mathrm{Nrd}_{\overline{D}})$, $E = ((1 + M_D) \cap \mathrm{SU}(D, \tau))\mathrm{U}(D, \tau)' / \mathrm{U}(D, \tau)'$.

Конечно, группа $\mathrm{SUK}_1^{an}(D, \tau)$ может быть определена и в случае любой алгебры с делением и унитарной инволюции τ и играет важную роль при изучении анизотропных групп внешних форм групп серии A_n. Однако если в случае изотропных групп имеется развитая теория, описывающая их свойства, то в анизотропном случае проблема описания приведенных групп Уайтхеда остается, несмотря на более 30-летнюю историю ее существования и пристальное внимание к ней специалистов, мало приступной. К настоящему времени в литературе известны лишь три результата, связанных с конкретными алгебрами D [1–3]. Поэтому важным является рассмотрение классов специальных алгебр над гензелевыми полями k как полигона для получения новых гипотез о структуре и свойствах групп $\mathrm{SUK}_1^{an}(D, \tau)$.

Сообщение посвящено описанию групп $\mathrm{SUK}_1^{an}(D, \tau)$ в случае, когда алгебра D не разветвлена либо слабо разветвлена, а алгебра $\overline{D}$ коммутативна.

Для изложения результатов нам потребуются следующие определения и обозначения.

Обозначим через v единственное гензелево нормирование алгебры D, возникающее из гензелевого нормирования поля k. Пусть V_D – кольцо нормирования v алгебры D, M_D – идеал нормирования v (единственный двусторонний максимальный идеал кольца V_D), $\overline{D} = V_D / M_D$ – $\overline{K}$-алгебра вычетов алгебры D. Определим также редукцию $\overline{\tau}$ инволюции τ следующим образом: для всякого элемента $(d + M_D)$ положим $(d + M_D)^{\overline{\tau}} = d^\tau + M_D$.

О п р е д е л е н и е 1. *Алгебра D называется неразветвленной над K, если $[D:K] = [\overline{D}:\overline{K}] < \infty$ и центр $\overline{D}$ сепарабелен над $\overline{K}$.*

Если алгебра D неразветвлена, то $\lambda_D = r = 1$.

О п р е д е л е н и е 2. *Инволюция τ называется циклической, если в D имеется максимальное τ-инвариантное подполе L такое, что L_τ циклично над k, где L_τ – поле инвариантов τ в L.*

О п р е д е л е н и е 3. *Циклическая инволюция τ_L называется инволюцией вида $\tau_L(u)$, если существует такой элемент $u \in \mathrm{U}(D, \tau_L)$, что ограничение внутреннего автоморфизма i_u на поле L – образующая группы $\mathrm{Gal}(L / K)$.*

В этих обозначениях справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. *Пусть алгебра D неразветвлена над K. Тогда группы $\mathrm{SUK}_1^{an}(D, \tau)$ и $\mathrm{SUK}_1^{an}(\overline{D}, \overline{\tau})$ изоморфны при условии, что инволюция $\overline{\tau}$ имеет вид $\overline{\tau}_L(u), u \in \mathrm{U}(\overline{D}, \overline{\tau})$.*

В частности, последнее условие всегда выполнено, если D – алгебра кватернионов над K.

Опишем дальше группы $\mathrm{SUK}_1^{an}(D, \tau)$ для алгебр D с коммутативной алгеброй вычетов $\overline{D}$ в терминах специальных подгрупп группы $\overline{D}^*$. Для этого нам потребуется известный факт, который используется и при доказательстве теоремы 1.

Т е о р е м а 2. *Пусть алгебра D – слабо разветвленная алгебра над K с унитарной инволюцией τ и ветвящаяся над K, K / k – слабо разветвленное квадратичное расширение. Тогда во введенных выше обозначениях имеет место следующая коммутативная диаграмма с точными столбцом и строками*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
1 & \to & E & \to & \mathrm{SU}^v(D, \tau) / U(D, \tau)' & \to & \mathrm{SUK}_1^{an}(D, \tau) & \to & 1 \qquad (1)\\
 & & & & & & \downarrow & & \\
1 & \to & E & \to & \mathrm{SUK}_1^{an}(D, \tau) & \to & \overline{\mathrm{SU}(D, \tau)}/\mathrm{U}(\overline{D}, \overline{\tau})' & \to & 1 \qquad (2)\\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & E_\lambda & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & 1 & &
\end{array}$$

Помимо этого, точны также последовательности:

$$1 \to \mathrm{SUK}_1^{an}(\bar{D},\ \bar{\tau}) \to \mathrm{SUK}_1^{v}(D,\tau) \to \ \mathrm{Nrd}_{\bar{D}}(\overline{\mathrm{U}(D,\tau)}) \cap \mathrm{Nrd}_{\bar{D}}(\overline{SL^v(D)}) \ \to 1 \tag{3}$$

$$1 \to \mathrm{SUK}_1^{an}(\bar{D},\ \bar{\tau}) \to \overline{\mathrm{SU}(D,\tau)} \,/\, \mathrm{U}(\bar{D},\bar{\tau})' \ \to \overline{\mathrm{SU}(D,\tau)} \,/\, \mathrm{SU}(\bar{D},\bar{\tau}) \ \to 1 \tag{4}$$

З а м е ч а н и е. *Группа* $\mathrm{Nrd}_{\bar{D}}(\mathrm{U}(\bar{D},\bar{\tau})) \cap \mathrm{Nrd}_{\bar{D}}(\overline{SL^v(D)})$ *может быть вычислена с помощью следующих специальных подгрупп группы* $\bar{D}^*$: $\Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\bar{D}}} = \mathrm{Nrd}_{\bar{D}}(\bar{D}^*)_{\bar{\tau}}$, $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\bar{D}}} = \{z \in \mathrm{Nrd}_{\bar{D}}(\bar{D}^*) \mid N_{\bar{Z}/\bar{K}}(z) \in \bar{k}\}$, *где* $\bar{Z} = Z(\bar{D})$.

П р е д л о ж е н и е. *Если* char $\bar{k} \neq 2$, *то имеет место точная последовательность*

$$1 \to \Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\bar{D}}} \to \Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\bar{D}}} \xrightarrow{\bar{\tau}-1} (\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\bar{D}}})^{\bar{\tau}-1} \to 1.$$

Кроме того, $\mathrm{Nrd}_{\bar{D}}(\mathrm{U}(\bar{D},\bar{\tau})) \cap \mathrm{Nrd}_{\bar{D}}(\overline{SL^v(D)}) = (\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\bar{D}}})^{\bar{\tau}-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения получается из определения групп $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\bar{D}}}$ и $\Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\bar{D}}}$ и прямого вычисления факторгруппы $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\bar{D}}} / \Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\bar{D}}}$.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\bar{D}$ *– поле. Тогда для группы* $\mathrm{SUK}_1^{an}(D,\tau)$ *группа* E *тривиальна. Более того, имеет место следующая точная последовательность*

$$1 \to \{\bar{z} \in \bar{D} \mid N_{\bar{D}/\bar{K}}(\bar{z}) \in \bar{k}^*\} \,/\, \bar{D}^*_{\bar{\tau}} \to \mathrm{SUK}_1{}^{an}(D,\tau) \to E_\lambda \to 1,$$

где $\bar{D}^*_{\bar{\tau}}$ *– мультипликативная группа поля инвариантов* $\bar{\tau}$ *в* $\bar{D}$.

В частности, если $E_\lambda = 1$, *то группы* $\mathrm{SUK}_1^{an}(D,\tau)$ *и* $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\bar{D}}} / \Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\bar{D}}}$ *изоморфны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Ввиду неразветвленности алгебры D над K имеем $\lambda_D = 1$, а ввиду точности столбца диаграммы из теоремы 2 заключаем, что группы $\mathrm{SUK}_1^{v}(D,\tau)$ и $\overline{\mathrm{SU}(D,\tau)} \,/\, \overline{\mathrm{U}(D,\tau)}'$ изоморфны.

Заметим, что в нашем случае $\mathrm{Nrd}_{\bar{D}}(\overline{SL^v(D)}) = 1$, и потому точность последовательности (3) влечет изоморфизм групп $\mathrm{SUK}_1^{v}(D,\tau)$ и $\mathrm{SUK}_1^{an}(\bar{D},\ \bar{\tau})$, что влечет точность следующей последовательности

$$1 \to E \to \mathrm{SUK}_1^{an}(D,\tau) \to \mathrm{SUK}_1^{an}(\bar{D},\ \bar{\tau}) \to 1.$$

Таким образом, если инволюция $\bar{\tau}$ имеет вид $\bar{\tau}_L(u)$ для $u \in \mathrm{U}(\bar{D},\ \bar{\tau})$, то $E = 1$. Откуда следует, что $\mathrm{SUK}_1^{an}(D,\tau) \cong \mathrm{SUK}_1^{an}(\bar{D},\ \bar{\tau})$. В случае, когда D – алгебра кватернионов, условие об инволюции $\bar{\tau}$ выполнено ввиду одного результата Алберта [4].

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Известно, что для слабо разветвленных алгебр с коммутативными алгебрами вычетов группа E тривиальна.

Вначале заметим, что $\mathrm{SUK}_1^{an}(\bar{D},\ \bar{\tau}) = \mathrm{SU}(\bar{D},\ \bar{\tau}) = 1$, поскольку $\mathrm{Nrd}_{\bar{D}} = id_{\bar{D}}$. Значит, ввиду тривиальности группы $\mathrm{SUK}_1^{an}(\bar{D},\ \bar{\tau})$ из точности последовательности

$$1 \to \mathrm{SUK}_1^{an}(\bar{D},\ \bar{\tau}) \to \mathrm{SUK}_1^{v}(D,\tau) \to \ \Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\bar{D}}} / \Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\bar{D}}} \ \to 1$$

вытекает изоморфизм групп $\mathrm{SUK}_1^{v}(D,\ \tau)$ и $\Sigma'_{\mathrm{Nrd}_{\bar{D}}} / \Sigma_{\mathrm{Nrd}_{\bar{D}}}$. Ввиду последнего изоморфизма, с учетом последовательности

$$1 \to \mathrm{SUK}_1^{v}(D,\tau) \to \mathrm{SUK}_1^{an}(D,\tau) \to E_\lambda \to 1,$$

заключаем, что точна последовательность

$$1 \to \{\bar{z} \in \bar{D} \mid N_{\bar{D}/\bar{K}}(\bar{z}) \in \bar{k}^*\} \,/\, \bar{D}^*_{\bar{\tau}} \to \mathrm{SUK}_1{}^{an}(D,\tau) \to E_\lambda \to 1.$$

Благодарности. Работа поддержана Институтом математики НАН Беларуси в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция–2020».

Acknowledgment. The work is supported by the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus within the framework of the State Research Program “Convergence–2020”.

Список использованных источников

1. Sethuraman, B. A. A note on the special unitary group of a division algebra / B. A. Sethuraman, B. Sury // Proc. Amer. Math. Soc. – 2005. – Vol. 134, N 2. – P. 351–354. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-05-07985-2

2. Sury, B. On SU(1, *D*) / [U(1, *D*), U(1, *D*)] for a quaternion division algebra *D* / B. Sury // Archiv der Mathematik. – 2008. – Vol. 90, N 6. – P. 493–500. https://doi.org/10.1007/s00013-008-2438-x

3. Янчевский, В. И. Приведенные группы Уайтхеда и проблема сопряженности для специальных унитарных групп анизотропных эрмитовых форм / В. И. Янчевский // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2012. – Т. 400, № 23. – С. 222–245.

4. Albert, A. A. Involutorial simple algebras and real Riemann matrices / A. A. Albert // Annals of Mathematics. – 1935. – Vol. 36, N 4. – P. 886–964. https://doi.org/10.2307/1968595

References

1. Sethuraman B. A., Sury B. A note on the special unitary group of a division algebra. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2005, vol. 134, no. 2, pp. 351–354. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-05-07985-2

2. Sury B. On SU(1, *D*) / [U(1, *D*), U(1, *D*)] for a quaternion division algebra D. *Archiv der Mathematik*, 2008, vol. 90, no. 6, pp. 493–500. https://doi.org/10.1007/s00013-008-2438-x

3. Yanchevskii V. I. Reduced Whitehead groups and the conjugacy problem for special unitary groups of anisotropic Hermitian forms. *Journal of Mathematical Sciences*, 2013, vol. 192, no. 2, pp. 250–262. https://doi.org/10.1007/s10958-013-1391-9

4. Albert A. A. Involutorial simple algebras and real Riemann matrices. *Annals of Mathematics*, 1935, vol. 36, no. 4, pp. 886–964. https://doi.org/10.2307/1968595

Информация об авторе

Янчевский Вячеслав Иванович – академик, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий отделом. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: yanch@im.bas-net.by.

Information about the author

Yanchevskii Vyacheslav I. – Academician, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yanch@im.bas-net.by.