ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 517.5
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-1-11-17

Поступило в редакцию 11.01.2021
Received 11.01.2021

Н. Ю. Казлоўская, Я. А. Роўба

Гродзенскі дзяржаўны ўніверсітэт імя Янкі Купалы, Гродна, Рэспубліка Беларусь

АБ АПРАКСІМАЦЫІ ФУНКЦЫІ $|\sin x|^s$ ЧАСТКОВЫМІ СУМАМІ ТРЫГАНАМЕТРЫЧНЫХ РАЦЫЯНАЛЬНЫХ ШЭРАГАЎ ФУР'Е

(Прадстаўлена членам-карэспандэнтам Л. А. Яновічам)

Аннотация. В работе исследуются приближения функции $|\sin x|^s$ частичными суммами рациональных тригонометрических рядов Фурье. Для рассматриваемых приближений получены интегральное представление и поточечная и равномерная оценки. На их основе рассмотрены некоторые случаи специального выбора полюсов. Получено асимптотическое соотношение для приближений частичными суммами полиномиальных тригонометрических рядов Фурье. Подробно исследуется случай фиксированного числа геометрически различных полюсов.

Ключевые слова: рациональные тригонометрические ряды Фурье, рациональная аппроксимация, функция со степенной особенностью

Для цитирования. Козловская, Н. Ю. Об аппроксимации функции $|\sin x|^s$ частичными суммами тригонометрических рациональных рядов Фурье (на бел. яз.) / Н. Ю. Козловская, Е. А. Ровба // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2021. – Т. 65, № 1. – С. 11–17. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-1-11-17

Natallia Yu. Kazlouskaya, Yaugeni A. Rovba

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Republic of Belarus

APPROXIMATION OF THE FUNCTION $|\sin x|^s$ BY THE PARTIAL SUMS OF THE TRIGONMOMETRIC RATIONAL FOURIER SERIES

(Communicated by Corresponding Member Leonid A. Yanovich)

Abstract. In the present article, the approximation of the function $|\sin x|^s$ by the partial sums of the rational trigonometric Fourier series is considered. An integral representation, uniform and point estimates for the above-mentioned approximation were obtained. Based on them, several special cases of the selection of poles were studied. In the case of the approximation by the partial sums of the polynomial trigonometric Fourier series, an asymptotic equality was found. A detailed study is made of a fixed number of geometrically different poles.

Keywords: rational trigonometric Fourier series, rational approximation, function with power singularity

For citation. Kazlouskaya N. Yu., Rouba Ya. A. Approximation of the function $|\sin x|^s$ by the partial sums of the trigonmometric rational fourier series. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2021, vol. 65, no. 1, pp. 11–17 (in Belarussian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-1-11-17

Уводзіны. Трыганаметрычныя шэрагі з'яўляюцца істотнай часткай тэорыі набліжэнняў. Іх тэорыя выкладзена ў некалькіх манаграфіях [1; 2] і ў шматлікіх часопісных публікацыях. Безумоўна, гаворка ідзе пра палінаміяльныя трыганаметрычныя шэрагі.

Рацыянальныя трыганаметрычныя шэрагі такой увагай даследчыкаў, відаць, не карысталіся. Артаганальныя на адзінкавай акружнасці сістэмы рацыянальных функцый, якія абагульняюць асноўную трыганаметрычную сістэму, увялі С. Такенака [3] і Ф. Мальмквіст [4] у 1925–1926 гг. Толькі ў 1956 г. М. М. Джрбашан на іх аснове пабудаваў трыганаметрычныя рацыянальныя шэрагі Фур'е [5]. Найважнейшым вынікам вышэйназванай работы М. М. Джрбашана было прадстаўленне ядра Дзірыхле ў кампактным выглядзе. Карыстаючыся гэтым прадстаўленнем, В. М. Русак [6] пабудаваў рацыянальныя аператары тыпу Феера, Джэксана, Вале Пусэна, якія ўзыходзяць да вядомых метадаў сумавання трыганаметрычных палінаміяльных шэрагаў Фур'е. Гэтыя аператары знайшлі прымяненне ў шэрагу часопісных артыкулаў В. М. Русака і яго вучняў як метады рацыянальнай апраксімацыі, а таксама былі адлюстраваны ў вядомых манаграфіях па тэорыі рацыянальнай апраксімацыі [7].

У тэорыі як палінаміяльнай, так і рацыянальнай апраксімацыі істотнае значэнне маюць пытанні набліжэння элементарных функцый з алгебраічнымі асаблівасцямі: функцыі x^s на адрэзку $[0, 1]$ ці функцыі $|x|^s$ на адрэзку $[-1, 1]$ [8; 9]. Аналагам апошняй функцыі ў перыядычным выпадку з'яўляецца функцыя $|\sin x|^s$, $s > 0$. У дадзенай рабоце даследуюцца набліжэнні гэтай функцыі частковымі сумамі трыганаметрычных рацыянальных шэрагаў Фур'е.

Няхай

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0, \quad r = \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil; \quad \alpha_k \in [0, 1), \quad \alpha_k = -\alpha_{n+k}, k = 1, 2, \ldots, n, n > r \tag{1}$$

(тут і далей $\lceil x \rceil$ – найменшы цэлы лік, не меншы за x).

Абазначым

$$\lambda_{2n}(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k| \cos(u - \arg \alpha_k) + |\alpha_k|^2}.$$

Відавочна, што пры азначаным вышэй выбары параметраў

$$\lambda_{2n}(u) = \frac{1}{2} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1 - \alpha_k^4}{1 - 2\alpha_k^2 \cos 2u + \alpha_k^4}.$$

Для функцыі $f(x) = |\sin x|^s$, $s > 0$, $x \in \mathbb{R}$, разгледзім частковыя сумы яе трыганаметрычнага рацыянальнага шэрагу Фур'е [6]

$$S_{2n}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin t|^s \, D_n(t, x) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

дзе

$$D_{2n}(t, x) = \frac{\sin \lambda_{2n}(x, t)}{\sin \frac{t - x}{2}}, \quad \lambda_{2n}(x, t) = \int_x^t \lambda_{2n}(u) du.$$

Увядзем абазначэнні:

$$\varepsilon_{2n}(x, \alpha) = |\sin x|^s - S_{2n}(x), \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\varepsilon_{2n}(\alpha) = \left\| \varepsilon_{2n}(x, \alpha) \right\|_{C_{2\pi}}.$$

Т э а р э м а 1. *Для набліжэння функцыі* $|\sin x|^s$ *частковымі сумамі трыганаметрычных рацыянальных шэрагаў Фур'е праўдзіцца наступная роўнасць:*

$$\varepsilon_{2n}(x, \alpha) = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi s}{2} \int_{-1}^{1} \frac{\chi_{2n}(t)}{t^2 - 2t \cos x + 1} \left(\frac{1 - t^2}{2t} \right)^s (t \cos \lambda_{2n}^{-}(0, x) - \cos \lambda_{2n}^{+}(0, x)) dt, \tag{2}$$

дзе

$$\lambda_{2n}^{\pm}(t, x) = \int_t^x \left(\lambda_{2n}(u) \pm \frac{1}{2} \right) du,$$

$$\chi_{2n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \frac{t^2 - \alpha_k^2}{1 - \alpha_k^2 t^2} -$$

здабытак Бляшке парадку $2n$.

Тэарэма 1 даказваецца з дапамогай пераходу ў камплексную плоскасць [10].

На аснове знойдзенага ў тэарэме 1 прадстаўлення атрымоўваем наступныя ацэнкі для набліжэнняў функцыі $|\sin x|^s$ частковымі сумамі трыганаметрычных рацыянальных шэрагаў Фур'е.

Т э а р э м а 2. *Для набліжэння функцыі $|\sin x|^s$ частковымі сумамі трыганаметрычных рацыянальных шэрагаў Фур'е праўдзяцца наступныя ацэнкі:*

а) $$|\varepsilon_{2n}(x,\alpha)| \le \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\int_{-1}^{1}\left|\frac{1-t^2}{2t}\right|^s \frac{|\chi_{2n}(t)|}{\sqrt{1-2t\cos x+t^2}}dt, \quad x\in\mathbb{R}; \tag{3}$$

б) $$\varepsilon_{2n}(\alpha) \le \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\int_{0}^{1}\frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{(s+1)/2}}|\tau_n(u)|du, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{4}$$

дзе

$$\tau_n(u)=\prod_{k=1}^{n}\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k},\ \beta_k=\frac{1-\alpha_k^2}{1+\alpha_k^2}, \quad k=1,2,...,n.$$

Пры гэтым ацэнкі (3), (4) з'яўляюцца дакладнымі ў тым сэнсе, што (3) ператвараецца ў роўнасць пры $x = 0$, а ў (4) мае месца знак роўнасці ў выпадку, калі функцыя $\tau_n(u)$ не змяняе знак на [0, 1].

Карыстаючыся ацэнкай (4), можна атрымаць наступны вынік.

В ы н і к 1. *Калі лікі $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$, якія задавальняюць умовам (1), такія, што шэраг $\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|\alpha_k|)$ разбягаецца, то рацыянальны трыганаметрычны шэраг Фур'е для функцыі $|\sin x|^s$ збягаецца раўнамерна на $\mathbb{R}$.*

Разгледзім некаторыя выпадкі спецыяльнага выбару полюсаў.

Палінаміяльны выпадак.

Т э а р э м а 3. *Для набліжэнняў функцыі $|\sin x|^s$ трыганаметрычнымі палінаміальнымі шэрагамі Фур'е праўдзіцца наступнае асімптатычнае судачыненне*

$$\left\| |\sin x|^s - S_n(x)\right\|_{C_{2\pi}} = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\frac{\Gamma(s)}{(2n)^s}+o\left(\frac{1}{n^s}\right), \quad n\to\infty.$$

Д о к а з. У палінаміяльным выпадку $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$, $|\tau_n(u)|=\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n$, і значыць, як вынікае з тэарэмы 2, ацэнка (4) з'яўляецца дакладнай, г. зн.:

$$\varepsilon_{2n}(0)=\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\int_{0}^{1}\frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{(s+1)/2}}|\tau_n(u)|du. \tag{5}$$

Даследуем асімптатычныя паводзіны інтэграла справа ў гэтай роўнасці. Прадставім яго ў выглядзе

$$J_n=\int_{0}^{1}\frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{(s+1)/2}}e^{n\ln\frac{1-u}{1+u}}du. \tag{6}$$

Для атрымання асімптатычнай ацэнкі скарыстаемся метадам Лапласа. Менавіта, прыменім тэарэму Эрдэі [11, с. 49]. Прывядзем яе фармулёўку.

Т э а р э м а Э р д э і. *Няхай $I(x)$ – інтэграл віду*

$$I(x)=\int_{a}^{b}q(t)e^{xp(t)}dt,$$

дзе $p(t)$ – рэчаісная функцыя рэчаіснай зменнай; функцыя $q(t)$ можа быць як камплексназначнай, так і рэчаісназначнай; a – канечны лік; b можа быць як канечным, так і бясконцым.

Акрамя таго, няхай выконваюцца ўмовы:

1) функцыя $p(t)$ мае максімум пры $t = a$, прычым $p(t) < p(a)$ пры $a < t \le b$;

2) функцыі $p'(t)$ і $q(t)$ непарыўныя ў некаторым наваколлі пункту a, за выключэннем, магчыма, самога пункту a;

3) інтэграл $I(x)$ абсалютна збягаецца ва ўсім абсягу інтэгравання пры ўсіх досыць вялікіх x;

4) выконваюцца асімптатычныя роўнасці

$$p(t) \sim p(a) - P(t-a)^{\mu}, \quad t \to a+0,$$

$$q(t) \sim Q(t-a)^{\lambda-1}, \quad t \to a+0,$$

дзе P, μ, λ – дадатныя пастаянныя, а $Q \neq 0$ – рэчаісная або комплексная пастаянная.

Тады

$$I(x) \sim \frac{Q}{\mu}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{e^{-xp(a)}}{(Px)^{\frac{\lambda}{\mu}}}, \quad x \to +\infty. \tag{7}$$

Праверым выкананне ўмоў указанай тэарэмы.

1) Знойдзем максімум функцыі

$$p(u) = \ln\frac{1-u}{1+u}.$$

Так як

$$p'(u) = -\frac{2}{1-u^2} < 0, \quad u \in [0, 1),$$

то функцыя $p(u)$ меньшае на [0, 1), і значыць, мае максімум толькі ў пункце $u = 0$.

2) Функцыі $p'(u)$ і $q(u) = \dfrac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{(s+1)/2}}$ непарыўныя ў досыць малым наваколлі пункту $u = 0$ (фукцыя $q(u)$ – за выключэннем самога пункту $u = 0$ пры $s < 1$).

3) Інтэграл J_n збягаецца пры $n \ge \dfrac{s+1}{2}$, бо пры такіх n падынтэгральная функцыя непарыўная пры $u \in [0, 1]$.

4) Выконваюцца асімптатычныя роўнасці

$$p(u) = \ln\frac{1-u}{1+u} \sim -2u, \quad u \to 0,$$

$$q(u) = \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{(s+1)/2}} \sim u^{s-1}, \quad u \to 0,$$

адкуль $P = 2$, $\mu = 1$, $Q = 1$, $\lambda = s$.

Тады паводле формулы (7) атрымаем

$$I(n) \sim \frac{\Gamma(s)}{(2n)^s}, \quad n \to \infty,$$

і, значыць,

$$\varepsilon_{2n}(0) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\frac{\Gamma(s)}{(2n)^s} + o\left(\frac{1}{n^s}\right), \quad n \to \infty.$$

Заўважым, што пры $s = 1$ будзем мець

$$\varepsilon_{2n}(0) = \frac{1}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Гэта ацэнка была атрымана намі раней у [12].

Выпадак фіксаванай колькасці геаметрычна розных полюсаў. У гэтым выпадку на полюсы апраксімацыйнай частковай суммы шэрага Фур'е $S_n(x)$ будзем накладваць некаторыя абмежаванні.

Прытрымліваючыся [13], увядзём наступныя абазначэнні.

Няхай A_{2n} – мноства пунктаў $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$, якія задавальняюць умовам (1). Пакладзем $n > r$, $r = \left\lceil \frac{s+1}{2} \right\rceil$, $n_1 = n - r$ і q – адвольны фіксаваны цэлы лік, $0 \le q \le n_1$; $A_{2n.2q}$ – мноства пунктаў $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}) \in A_{2n}$ такіх, што сярод лікаў $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ не больш за q розных, не роўных нулю лікаў, і кратнасць кожнага пункта роўная $m = \left[\frac{n_1}{q+1} \right]$. Іншымі словамі, у гэтым выпадку апраксімацыйная рацыянальная функцыя мае $2q$ геаметрычна розных полюсаў у адкрытай комплекснай плоскасці і яшчэ полюс на бясконцасці.

Абазначым таксама

$$\varepsilon_{2n} = \inf_{\alpha \in A_{2n}} \varepsilon_{2n}(\alpha), \ \ \varepsilon_{2n,2q} = \inf_{\alpha \in A_{2n,2q}} \varepsilon_{2n}(\alpha).$$

На аснове тэарэмы 2 атрымаем адпаведныя вынікі.

Т э а р э м а 4. *Пры адвольных цэлых n і q, $0 \le q < n$, $n > r$, мае месца наступная ацэнка набліжэнняў функцыі $|\sin x|^s$ частковымі сумамі трыганаметрычнага рацыянальнага шэрагу Фур'е з зададзенай колькасцю $2q$ геаметрычна розных полюсаў у адкрытай комплекснай плоскасці:*

$$\varepsilon_{2n,2q} \le \left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| C(s) \inf_{1<t<\infty}\left(e^{-\frac{n}{t}} + \left(\frac{q+1}{n}\right)^s \left(1+\frac{t}{q+1}\right)^{-2qs} \right), \tag{8}$$

дзе $C(s)$ – некаторая дадатная пастаянная, якая залежыць толькі ад s.

В ы н і к 2. *Калі $q = \left[\sqrt{n}\right]$, то*

$$\varepsilon_{2n,2\left[\sqrt{n}\right]} \le \left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| C_1(s) e^{-C_2(s)\sqrt{n}},$$

дзе $C_1(s)$ – некаторая дадатная пастаянная, якая залежыць толькі ад s.

В ы н і к 3. *Калі q – фіксаваны цэлы лік, то пры $n > q$*

$$\varepsilon_{2n,2q} \le C(s,q)\frac{\ln^{2sq} n}{n^{(2q+1)s}}, \quad n > 1,$$

дзе $C(s, q)$ – дадатная пастаянная, якая залежыць толькі ад параметраў s і q.

Для атрымання вынікаў 2 і 3 дастаткова ў ацэнцы (8) пакласці, напрыклад, $t = \frac{\sqrt{n}}{s}$ і $t = \frac{n}{2(2q+1)s\ln n}$, $n > n_0$ (n_0 – некаторы натуральны лік, залежны толькі ад q і s) адпаведна.

У выпадку, калі апраксімацыйная рацыянальная функцыя мае толькі $2q$ геаметрычна розных полюсаў у пашыранай комплекснай плоскасці, для адпаведных набліжэнняў $\overline{\varepsilon_{2n,2q}}$ праўдзіцца наступная тэарэма.

Т э а р э м а 5. *Для набліжэнняў функцыі $|\sin x|^s$, $s > 0$, частковымі сумамі трыганаметрычнага рацыянальнага шэрагу Фур'е з $2q$ геаметрычна рознымі полюсамі ў пашыранай комплекснай плоскасці праўдзіцца судачыненне*

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n^{2q}}{\ln^{2q-1} n}\right)^s \overline{\varepsilon_{2n,2q}} = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \Gamma(s)\left(q^{2q+1}\left(\frac{s}{2}\right)^{2q-1}\right)^s ((q-1)!)^{2s},$$

прычым супрэмум дасягаецца ў выпадку, калі $n = mq$, m – цотны натуральны лік.

Гэты вынік атрымоўваецца з тэарэмы 2 (гл. (4)) і тэарэмы 5 работы [14]. Зрэшты, варта адзначыць, што такая ж ацэнка атрымана ў [14] для набліжэнняў функцыі $|\sin x|^s$, $s > 0$, пераўтворанымі аператарамі Фур'е–Чабышова.

Агульны выпадак

Т э а р э м а 6. *Для набліжэнняў функцыі* $|\sin x|^s$, $s > 0$, *частковымі сумамі трыганаметрычнага рацыянальнага шэрагу Фур'е праўдзіцца няроўнасць*

$$\varepsilon_{2n} \le C_1(s)\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\sqrt{n}e^{-\pi\sqrt{ns}}. \tag{9}$$

Заключэнне. Атрыманыя вынікі пацвярджаюць, што роля перыядычнай функцыі $|\sin x|^s$, $s > 0$, у тэорыі набліжэнняў аналагічна ролі функцыі $|x|^s$ на адрэзку [–1, 1] у алгебраічным выпадку.

Спіс выкарыстаных крыніц

1. Бари, Н. К. Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. – М., 1961. – 937 с.
2. Edwards, R. E. Fourier series: a modern introduction: in 2 vol. / R. E. Edwards. – New York, 1967. – Vol. 2.
3. Takenaka, S. On the orthogonal functions and a new formula of interpolations / S. Takenaka // Japanese Journal of Mathematics. – 1925. – Vol. 2. – P. 129–145. https://doi.org/10.4099/jjm1924.2.0_129
4. Malmquist, F. Sur la determination d'une classe functions analytiques par leurs dans un ensemble donne de points / F. Malmquist // Compte Rendus: Six. Cong. math. scand. – 1925. – P. 253–259.
5. Джрбашян, М. М. К теории рядов Фурье по рациональным функциям / М. М. Джрбашян // Изв. Академии наук Армянской ССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1956. – Т. 9, № 7. – С. 3–28.
6. Русак, В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения / В. Н. Русак. – Минск, 1979. – 178 с.
7. Lorentz, G. G. Constructive Approximation. Advanced Problems / G. G. Lorentz, M. V. Golitschek, Y. Makovoz. – Berlin, 1996. – 651 p.
8. Бернштейн, С. Н. О наилучшем приближении $|x|^p$ при помощи многочленов весьма высокой степени / С. Н. Бернштейн // Изв. Академии наук СССР. Сер. математ. – 1938. – Т. 2, № 2. – С. 169–190.
9. Stahl, H. Best uniform rational approximation of $|x|^\alpha$ on [0, 1] / H. Stahl // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1993. – Vol. 28, N 1. – P. 116–123. https://doi.org/10.1090/s0273-0979-1993-00351-3
10. Роўба, Я. А. Аб набліжэнні функцыі $|\sin x|$ рацыянальнымі аператарамі Феера / Я. А. Роўба, Н. Ю. Казлоўская // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 3. – С. 27–39.
11. Эрдэйи, А. Асимптотические разложения / А. Эрдэйи. – М., 1962. – 128 с.
12. Казлоўская, Н. Ю. Дакладныя ацэнкі набліжэння функцыі $|\sin x|$ некаторымі метадамі / Н. Ю. Казлоўская // Наука–2015. – Гродно, 2015. – Ч. 1. – С. 163–166.
13. Ровба, Е. А. О рациональной интерполяции функции $|x|^\alpha$ по расширенной системе узлов Чебышева–Маркова / Е. А. Ровба, В. Ю. Медведева // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 4. – С. 391–405. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-391-405
14. Поцейко, П. Г. Об одном рациональном интегральном операторе типа Фурье–Чебышёва и аппроксимации функций Маркова / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба, К. А. Смотрицкий // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2020. – № 2. – С. 6–27. https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-6-27

References

1. Bari N. K. *Trigonometric series*. Moscow, 1961. 937 p. (in Russian).
2. Edwards R. E. *Fourier series: a modern introduction: in 2 vol*. New York, 1967, vol. 2.
3. Takenaka S. On the orthogonal functions and a new formula of interpolations. *Japanese Journal of Mathematics*, 1925, vol. 2, pp. 129–145. https://doi.org/10.4099/jjm1924.2.0_129
4. Malmquist F. Sur la determination d'une classe functions analytiques par leurs dans un ensemble donne de points. Compte *Rendus: Six. Cong. math. scand*. Kopenhagen, 1925, pp. 253–259 (in French).
5. Dzhrbashian M. M. To Fourier series theory about rational functions. *Izvestiya Akademii nauk Armyanskoi SSR. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk = Proceedings of the Academy of Sciences of the Armenian SSR. Series of Physical and Mathematical Sciencies*, 1956, vol. 9, no. 7, pp. 3–28 (in Russian).
6. Rusak V. N. *Rational functions as approximation apparatus*. Minsk, 1979. 178 p. (in Russian).
7. Lorentz G. G., Golitschek M. V., Makovoz Y. *Constructive Approximation. Advanced Problems.* Berlin, 1996. 651 p.
8. Bernshtein S. N. On the approximation of $|x|^p$ by polynomials of the very high degree. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya mathematicheskaya = Proceedings of the Academy of Sciencies of the USSR. Mathematical series*,1938, vol. 2, no. 2, pp. 169–190 (in Russian).
9. Stahl H. Best uniform rational approximation of $|x|^\alpha$ on [0, 1]. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1993, vol. 28, no. 1, pp. 116–123. https://doi.org/10.1090/s0273-0979-1993-00351-3
10. Rovba E. A., Kozlovskaya N. Yu. Approximation of $|\sin|^x$ by rational operators of Fejér type. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2017, no. 3, pp. 27–39 (in Belarussian).

11. Erdélyi A. *Asymptotic expansions*. Moscow, 1962. 128 p. (in Russian).

12. Kazlouskaya N. Ju. Sharp estimates for the approximation of the function $|\sin x|$ by some methods. *Nauka–2015* [Science–2015]. Grodno, 2015, vol. 1, pp. 163–166 (in Belarusian).

13. Rovba Y. A., Medvedeva V. Ju. Rational interpolation of the function $|x|^\alpha$ by an extended system of Chebyshev–Markov nodes. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 4, pp. 391–405 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-391-405

14. Patseika P. G., Rouba Y. A., Smatrytski K. A. On one rational integral operator of Fourier–Chebyshev type and approximation of Markov functions. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2020, no. 2, pp. 6–27. https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-6-27

Информация об авторах

Козловская Наталья Юрьевна – аспирант. Гродненский государственный университет им. Янки Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, Гродно, Республика Беларусь). E-mail: kozlowskaya_natalya@tut.by.

Ровба Евгений Алексеевич – д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой. Гродненский государственный университет им. Янки Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, Гродно, Республика Беларусь). E-mail: rovba.ea@gmail.com.

Information about the authors

Kazlouskaya Natallia Yu. – Postgraduate student. Yanka Kupala State University of Grodno (22, Azheshka Str., 230023, Grodna, Republic of Belarus). E-mail: kozlowskaya_natalya@tut.by.

Rovba Yaugeni A. – D. Sc (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department. Yanka Kupala State University of Grodno (22, Azheshka Str., 230023, Grodna, Republic of Belarus). E-mail: rovba.ea@gmail.com.