ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 517.9+519.71
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-1-18-24

Поступило в редакцию 04.12.2020
Received 04.12.2020

А. И. Астровский

Белорусский государственный экономический университет, Минск, Республика Беларусь

СТАЦИОНАРНЫЕ ОРБИТЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ НАБЛЮДЕНИЯ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Аннотация. Для линейных нестационарных систем наблюдения со скалярным выходом доказаны необходимые и достаточные условия, при выполнении которых исходную систему наблюдения можно преобразовать к стационарному виду с помощью группы линейных нестационарных дифференцируемых преобразований. Указан полный инвариант действия группы преобразований на множестве равномерно наблюдаемых систем. Описан конструктивный алгоритм построения эквивалентной стационарной системы для заданной линейной нестационарной системы наблюдения.

Ключевые слова: линейная нестационарная система наблюдения, равномерная наблюдаемость, группа преобразований, стационарная система, приводимость, полные инварианты

Для цитирования. Астровский, А. И. Стационарные орбиты линейных нестационарных систем наблюдения / А. И. Астровский // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2021. – Т. 65, № 1. – С. 18–24. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-1-18-24

Anatoly I. Astrovskii

Belarus State Economic University, Minsk, Republic of Belarus

STATIONARY ORBITS OF LINEAR TIME-VARYING OBSERVATION SYSTEMS

(Communicated by Academician Nikolay A. Izobov)

Abstract. In terms of matrix observability, the necessary and sufficient conditions are obtained for the linear time-varying observation system to have stationary orbits with respect to the linear time-varying transformation group of class C^1. The full invariant of the action of a transformation group is described. It is proved that for any matrix function $A \in C(T, R^{n\times n})$, there exists such an n-vector function $c(t)$, $t \in T$, that the pair (A, c) is uniformly observable. The algorithm for constructing a stationary system is described.

Keywords: linear time-varying observation system, uniform observability, transformation group, stationary system, reducible system, full invariants

For citation. Astrovskii A. I. Stationary orbits of linear time-varying observation systems. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2021, vol. 65, no. 1, pp. 18–24 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-1-18-24

Введение. Один из известных методов исследования структурных свойств динамических систем основан на классической идее А. М. Ляпунова [1] о преобразовании системы с помощью подходящей группы преобразований к простейшей (канонической) форме, что в ряде случаев позволяет полностью изучить ее основные свойства. Этот метод успешно применяется при изучении устойчивости линейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Н. П. Еругин указал необходимые и достаточные условия приводимости линейных нестационарных систем [2], однако конструктивных методов приводимости для общих классов систем до сих пор не разработано. Общая концепция исследования линейных дифференциальных систем, основанная на классификации их относительно действия различных групп преобразований, изложена в работах Ю. С. Богданова [3; 4] и И. В. Гайшуна [5]. В [6; 7] исследован вопрос приводимости к кусочно-постоянным системам и глобальная ляпуновская приводимость. Отметим, что задачи классификации нестационарных систем с точки зрения действий различных групп преобразований исследовались, например в [5–8].

Для систем управления-наблюдения реализация идей А. М. Ляпунова заключается в приведении исходной системы к каноническому виду с помощью подходящей группы линейных преобразований. В качестве канонических систем обычно рассматриваются системы с матрицами в форме Фробениуса или Шварца, что объясняется тем, что для них основные задачи математической теории систем решаются сравнительно просто. В [5; 8−10] дано систематическое применение канонических форм Фробениуса к классическим проблемам синтеза нерезонансных систем, управления спектром, стабилизации, асимптотического оценивания состояний и др. К настоящему времени теория канонических форм Фробениуса для линейных нестационарных систем управления и наблюдения достаточно полно разработана в случае систем со скалярным выходом (управлением) [5; 8].

В данной работе изучается вопрос о преобразовании нестационарной системы наблюдения со скалярным выходом при помощи группы нестационарных преобразований к стационарному виду.

Постановка задачи. Рассмотрим на отрезке $T=[t_0,t_1]$ линейную нестационарную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t), \tag{1}$$

у которой $x(t)$ – n-вектор столбец состояния в момент t, а $(n\times n)$-матричная функция $A(t)$ непрерывна на T. Пусть выходная функция $y(t),\ t\in T,$ системы (1) связана с состоянием $x(t)$ формулой

$$y(t)=c(t)x(t),\quad t\in T, \tag{2}$$

где $c(t)$ – n-вектор строка с непрерывными элементами.

Отождествим систему наблюдения (1), (2) с парой матричных функций (A,c), а совокупность всех таких пар с непрерывными элементами обозначим $\Sigma_n=C(T,\mathbb{R}^{n\times n})\times C(T,\mathbb{R}^n)$. Здесь $C(T,\mathbb{R}^{n\times n})$ – множество $(n\times n)$-матричных функций с непрерывными элементами, а $C(T,\mathbb{R}^n)$ – множество n-вектор-функций строк с непрерывными компонентами.

Пусть $\mathcal{G}_n$ – группа, состоящая из невырожденных при каждом $t\in T$ $(n\times n)$-матричных функций с непрерывно дифференцируемыми элементами. Действие группы $\mathcal{G}_n$ на множестве Σ_n определим стандартным образом:

$$G*(A,c)=(G^{-1}AG-G^{-1}\dot{G},cG),\quad G\in G,\quad (A,c)\in\Sigma_n.$$

Обозначим через $\Sigma_n/\mathcal{G}_n$ множество орбит действия группы $\mathcal{G}_n$ на Σ_n, т. е. множество классов эквивалентных систем из Σ_n по отношению эквивалентности: $(A,c)\sim(B,d)$, если и только если существует такое $G\in\mathcal{G}_n$, что $G*(A,c)=(B,d)$. Символом $\mathcal{O}(A,c)$ будем обозначать орбиту действия группы $\mathcal{G}_n$, на паре (A,c), т. е. множество систем из Σ_n, эквивалентных паре (A,c). Орбиту, в которой существует стационарная система (т. е. система с постоянными коэффициентами), будем называть стационарной. Найдем условия на матрицы системы (1), (2), при выполнении которых ее орбита будет стационарной или, другими словами, при каких условиях нестационарная пара (A,c) может быть преобразована с помощью действия группы $\mathcal{G}_n$ к стационарному виду.

Отметим, что в отличие от классического понятия приводимости для системы (1) на бесконечном промежутке времени, свойство приводимости для систем наблюдения (1), (2) означает возможность одновременного преобразования матричных функций $A(t)$ и $c(t)$ к стационарным (постоянным) матрицам на конечном промежутке T.

Для решения поставленной задачи полезными окажутся полные инварианты, описание которых приведено ниже.

Свойства матрицы наблюдаемости. Обозначим через $\mathcal{Y}_T(A,c)$ множество всех выходных функций системы (1), (2), т. е.

$$\mathcal{Y}_T(A,c)=\{y\in C(T,\mathbb{R}): y(t)=c(t)F_A(t,t_0)x_0,\, t\in T,\, x_0\in\mathbb{R}^n\},$$

где $F_A(t,t_0)$ – фундаментальная матрица системы (1), т. е. матричное решение уравнения

$$\dot F_A(t,t_0)=A(t)F_A(t,t_0)\quad (t\in T),\quad F_A(t_0,t_0)=E_n.$$

Здесь E_n – единичная $(n\times n)$-матрица.

Л е м м а. *Две системы (A,c) и (B,d) из Σ_n принадлежат одной и той же орбите относительно действия группы $\mathcal{G}_n$ тогда и только тогда, когда их множества выходов $\mathcal{Y}_T(A,c)$ и $\mathcal{Y}_T(B,d)$ совпадают.*

Доказательство леммы см. в [8, с. 42–44].

Из леммы следует, что задаваемое системой (A,c) отображение

$$H:\mathbb{R}^n\to\mathcal{Y}_T(A,c),\quad H(x_0)=y=(y(t)=c(t)F_A(t,t_0)x_0,\, t\in T)$$

инвариантно относительно действия группы $\mathcal{G}_n$. Однако построение этого отображения непосредственно по параметрам исходной системы представляет собой довольно сложную задачу. Укажем полный инвариант действия группы $\mathcal{G}_n$ на множестве равномерно наблюдаемых систем.

Пусть орбите $\mathcal{O}(A,c)$ пары $(A,c)\in\Sigma_n$ принадлежит стационарная система (A^s,c^s). Тогда каждая выходная функция из множества $\mathcal{Y}_T(A,c)$ бесконечно дифференцируема (по терминологии из [5, с. 191] пара (A,c) имеет класс $k=\infty$). Следовательно [8, с. 32–33], для этой пары (A,c) можно по рекуррентным правилам определить n-вектор-функции строки

$$s_0(t)=c(t),\quad s_i(t)=s_{i-1}(t)A(t)+\dot s_{i-1}(t)\quad (i=1,2,\ldots,\infty).\tag{3}$$

С л е д с т в и е 1. *Если для пары $(A,c)\in\Sigma_n$ нельзя определить хотя бы при одном k $(1\le k<\infty)$ по (3) строку $s_k(t)$ (т. е. строка $s_{k-1}(t)$ не дифференцируема), то орбита этой пары не является стационарной.*

Обозначим через $S(A,c)(t)$ матрицу наблюдаемости пары (A,c):

$$S(A,c)(t)=\begin{pmatrix} s_0(t)\\ s_1(t)\\ \cdots\\ s_{n-1}(t)\end{pmatrix},\quad t\in T.$$

Т е о р е м а 1. *Если пара (A,c) имеет стационарную орбиту, то ранг матрицы наблюдаемости $S(A,c)(t)$ для любого $t\in T$ принимает одно и то же значение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1 основано на возможности построения матрицы наблюдаемости для систем (A,c), обладающих стационарной орбитой (так как в этом случае множество $\mathcal{Y}_T(A,c)$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций и по лемме 2.1 из [8, с. 32] матрица наблюдаемости существует), и том факте, что матрицы наблюдаемости $S(A,c)(t)$ и $S(B,d)(t)$ систем (A,c) и (B,d) из одной орбиты связаны соотношением $S(B,d)(t)=S(A,c)(t)G(t)$ для некоторой матрицы $G\in\mathcal{G}_n$.

С л е д с т в и е 2. *Если для пары $(A,c)\in\Sigma_n$ существует матрица наблюдаемости $S(A,c)(t)$ и для каких-то моментов времени τ_1 и τ_2 из T ранги матриц $S(A,c)(\tau_1)$ и $S(A,c)(\tau_2)$ различны, то пару (A,c) нельзя преобразовать к стационарному виду.*

Полные инварианты для равномерно наблюдаемых систем. Пусть $\mathcal{R}_n$ – множество равномерно наблюдаемых систем класса n [11]. Доказано [5, с. 226], что для каждой пары $(A,c)\in\mathcal{R}_n$ ранг матрицы наблюдаемости $S(A,c)(t)$ равен n для любого $t\in T$. Нетрудно заметить, что преобразование $G(t)$, связывающее две равномерно наблюдаемые системы (A,c) и (B,d) из одной орбиты, имеет вид $G(t)=(S(A,c)(t))^{-1}S(B,d)(t)$. Доказано [8, с. 66], что отображение

$$f:\mathcal{R}_n\to C(T,\mathbb{R}^n),\quad f(A,c)(t)=s_n(t)(S(A,c)(t))^{-1} \tag{4}$$

является полным инвариантом действия группы $\mathcal{G}_n$ на множестве $\mathcal{R}_n$. Другими словами, отображение f, определенное соотношением (4), принимает одно и то же значение на орбите $\mathcal{O}(A,c)$ пары $(A,c)\in\mathcal{R}_n$: $f(G*(A,c))=f(A,c)\quad\forall\, G,\quad G\in\mathcal{G}_n$, и имеет разные значения на различных орбитах.

Отсюда следует, что между множествами $f(\mathcal{R}_n)$ и $\mathcal{R}_n/\mathcal{G}_n$ существует взаимно однозначное соответствие, т. е. отображение $f(A,c)(t)$ различает орбиты неэквивалентных систем.

Простые вычисления показывают, что любая заданная непрерывная n-вектор функция $\beta(t)=(\beta_1(t),\beta_2(t),\dots,\beta_n(t))$ является значением полного инварианта для системы наблюдения

$$A^f(t)=\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ \beta_1(t) & \beta_2(t) & \cdots & \beta_n(t)\end{pmatrix},\quad c^f=(1\quad 0\quad \dots\quad 0\quad 0), \tag{5}$$

т. е. $\beta(t)=f(A^f,c^f)(t)$, причем $S(A^f,c^f)(t)=E_n$ и $s_n(t)=\beta(t)$. Здесь n-вектор строка $s_n(t)$ построена по формулам (3) для пары (A^f,c^f).

Введем в рассмотрение подмножество $\mathcal{R}_n^c$ множества $\mathcal{R}_n$, для каждой системы (A,c) которого полный инвариант $f(A,c)(t)$ является неизменяющейся по времени функцией, т. е.

$$\mathcal{R}_n^c=\{(A,c)\in\mathcal{R}_n: f_j(A,c)(t)\equiv\gamma_j,\ \gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)\in\mathbb{R}^n\}.$$

Понятно, что множество стационарных наблюдаемых систем (1), (2) является подмножеством $\mathcal{R}_n^c$, и для таких систем (B,d) $f(B,d)=dB^n(S(B,d))^{-1}=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-1},\alpha_n)$, где α_i – коэффициенты характеристического многочлена матрицы B: $\det(\lambda E-B)=\lambda^n-\alpha_n\lambda^{n-1}-\dots-\alpha_{n-1}\lambda-\alpha_1$.

Вышеизложенное доказывает следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. *Равномерно наблюдаемая пара $(A,c)\in\Sigma_n$ обладает стационарной орбитой относительно группы $\mathcal{G}_n$ тогда и только тогда, когда она принадлежит множеству $\mathcal{R}_n^c$.*

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия наличия в орбите пары (A,c) стационарной системы наблюдения в форме Фробениуса (A^0,c^0) [8, с. 57].

Т е о р е м а 3. *В орбите $\mathcal{O}(A,c)$ пары $(A,c)\in\Sigma_n$ имеется стационарная система в форме Фробениуса (A^0,c^0) тогда и только тогда, когда пара (A,c) принадлежит классу $k=\infty$, является равномерно наблюдаемой и существуют такие действительные числа $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$, что для всех $t\in T$ выполняется равенство $s_n(t)=\alpha_1 s_0(t)+\alpha_2 s_1(t)+\dots+\alpha_n s_{n-1}(t)$,* где n – вектор строки $s_i(t)$, $i=0,1,\dots,n$, построены по рекуррентным формулам (3).

С л е д с т в и е 3. *Система $(A,c)\in\Sigma_n$ приводима к паре (A^f,c^f) с коэффициентами $\beta_i(t)=0$, $i=1,2,\dots,n$, тогда и только тогда, когда система (A,c) равномерно наблюдаема, принадлежит классу $k=\infty$ и $s_n(t)\equiv 0$, $t\in T$.*

Предположим, что матричная функция $A\in C(T,\mathbb{R}^{n\times n})$ задана. Изучим вопрос о существовании такой n-вектор функции $c(t)$, $t\in T$, что пара (A,c) имеет класс n и является равномерно наблюдаемой, т. е. принадлежит множеству $\mathcal{R}_n^c$.

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 4. *Для любой матричной функции* $A \in C(T, \mathbb{R}^{n\times n})$ *существует такая n-вектор функция* $c \in C^1(T, \mathbb{R}^n)$, *что пара* (A, c) *имеет класс n и является равномерно наблюдаемой, т. е. принадлежит множеству* $\mathcal{R}_n$.

Теорема 4 следует из теоремы 16.1 [5, с. 244]. Из теоремы 4 вытекает, что минимальное число выходов, при котором система равномерно наблюдаема, равно единице для линейной нестационарной системы наблюдения. Например, если матрица A постоянна, то всегда существует такая n-вектор функция строка $c \in C(T, R^n)$, что пара (A, c) равномерно наблюдаема. Если требовать, чтобы матрица C была постоянной, то минимальное число выходов равно числу нетривиальных инвариантных многочленов матрицы A.

Алгоритм построения стационарной системы для равномерно наблюдаемой пары.

1. Для заданной системы $(A, c) \in \Sigma_n$ по рекуррентным формулам (3) находим n-вектор строки $s_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Если их нельзя построить, то стационарной пары в орбите $\mathcal{O}(A, c)$ нет.

2. Формируем матрицу наблюдаемости $S(A, c)(t)$ и проверяем ее невырожденность при каждом $t \in T$. Если ранги матрицы $S(A, c)(t)$ при разных $t \in T$ не совпадают, то стационарной системы в орбите $\mathcal{O}(A, c)$ нет. Далее алгоритм работает для случая равномерно наблюдаемой пары, т. е. когда $\operatorname{rang} S(A, c)(t) = n$ для всех $t \in T$.

3. Вычисляем полный инвариант $f(A, c)(t)$ по формуле (4). Если его значение равно некоторому постоянному n-вектору β, то пара (A, c) преобразуется к стационарной системе вида (5) при помощи преобразования $G(t) = (S(A, c)(t))^{-1}$. Если значения полного инварианта зависят от переменной t, то стационарной системы в орбите $\mathcal{O}(A, c)$ нет.

Примеры.

1. Рассмотрим на отрезке $T = [1, 5]$ систему наблюдения второго порядка с матрицами $A(t) = \begin{pmatrix} t^2+1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c(t) = (1, \ \ 1)$. Для этой системы значение полного инварианта $f(A, c)(t)$ равно $\left(-\dfrac{t^4+4t-1}{t^2-1}, \ \ \dfrac{t^4+t^2+2t-2}{t^2-1}\right)$. Следовательно, данную пару (A, c) с помощью группы $\mathcal{G}_2$ нельзя преобразовать к стационарному виду.

2. Пусть вещественная функция $\gamma(t)$ непрерывно дифференцируема, но ее производная $\varphi(t) = \dot{\gamma}(t)$ не дифференцируема ни в одной точке $t \in T$. Рассмотрим систему наблюдения третьего порядка с матрицами

$$A(t) = \begin{pmatrix} \gamma^2(t)+\gamma(t)+1 & -\gamma(t) & -\gamma(t)-1 \\ \gamma^2(t)-\gamma(t)\varphi(t)+2\gamma(t)+3 & \varphi(t)-\gamma(t)-1 & \varphi(t)-\gamma(t)-1 \\ \gamma^3(t)+\gamma(t)\varphi(t)+\varphi(t)-2 & -\gamma^2(t)+\gamma(t)-\varphi(t) & -\gamma^2(t)-\varphi(t) \end{pmatrix},$$

$$c(t) = (-\gamma(t), \ \ 1, \ \ 1).$$

Отметим, что для этой системы не выполняются классические требования для построения матрицы наблюдаемости, а именно условия дифференцируемости: матрица $A(t)$ только один раз дифференцируема. Тем не менее для нее существует невырожденная для всех $t \in T$ классическая матрица наблюдаемости $S(t) = \begin{pmatrix} -\gamma(t) & 1 & 1 \\ \gamma(t)+1 & -1 & -1 \\ \gamma(t)^2 & 1-\gamma(t) & -\gamma(t) \end{pmatrix}$ и значение полного инварианта $f(A, c)(t)$ равно $(2 \ \ 3 \ \ 0)$. Следовательно, эта система с помощью группы $\mathcal{G}_3$ преобразуется к стационарной системе $A^s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $c^s = (1 \ \ 0 \ \ 0)$.

Полученные в данной работе результаты для линейных систем наблюдения можно перенести на линейные нестационарные системы управления. Отметим также, что вопросы приводимости линейных нестационарных систем управления-наблюдения изучались в [12; 13] в предположении, что фундаментальная матрица системы (1) может быть найдена в аналитической форме.

Список использованных источников

1. Ляпунов, А. М. Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. – М., 1950. – 472 с.

2. Еругин, Н. П. Приводимые системы / Н. П. Еругин. – М., 1946. – Т. 13. – 96 с.

3. Богданов, Ю. С. О матрицах, коммутирующих со своей производной / Ю. С. Богданов, Г. Н. Чеботарев // Изв. вузов. Математика. – 1959. – № 4(11). – С. 27–37.

4. Богданов, Ю. С. Асимптотические характеристики решений линейных дифференциальных систем / Ю. С. Богданов // Тр. четвертого Всесоюзн. матем. съезда. – Л., 1964. – Т. 2. – С. 424–432.

5. Гайшун, И. В. Введение в теорию линейных нестационарных систем / И. В. Гайшун. – М., 2004. – 409 с.

6. Izobov, N. A. Lyapunov Exponents and Stability / N. A. Izobov. – Cambridge, 2012. – 353 p.

7. Макаров, Е. К. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем / Е. К. Макаров, С. Н. Попова. – Минск, 2012. – 407 с.

8. Астровский, А. И. Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений / А. И. Астровский, И. В. Гайшун. – Минск, 2013. – 213 с.

9. Астровский, А. И. Оценивание состояний линейных нестационарных систем наблюдения / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 370–379. https://doi.org/10.1134/S0374064119030117

10. Astrovskii, A. I. Observability of Linear Time-Varying Systems with Quasiderivative Coefficients / A. I. Astrovskii, I. V. Gaishun // SIAM J. Control and Optimization. – 2019. – Vol. 57, N 3. – P. 1710–1729. https://doi.org/10.1137/18m1167115

11. Гайшун, И. В. Описание множества равномерно наблюдаемых линейных нестационарных систем / И. В. Гайшун, А. И. Астровский // Докл. акад. наук Беларуси. – 1996. – Т. 40, № 5. – С. 5–8.

12. Морозов, В. М. Оценивание и управление в нестационарных линейных системах / В. М. Морозов, В. И. Каленова. – М., 1988. – 144 с.

13. Калёнова, В. И. Приводимость линейных нестационарных систем второго порядка с управлением и наблюдением / В. И. Калёнова, В. М. Морозов // Прикладная математика и механика. – 2012. – Т. 76, вып. 4. – С. 574–586.

References

1. Lyapunov A. M. *On general problem of stability motion*. Moscow, 1950. 472 p. (in Russian).

2. Erugin N. P. *Reducible systems*. Moscow, 1946, vol. 13. 96 p. (in Russian).

3. Bogdanov U. S., Chebotarev G. N. About commuting matrices with its derivative. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Proceedings of Universities. Mathematics], 1959, no. 4(11), pp. 27–37 (in Russian).

4. Bogdanov U. S. Asymptotic characteristic of solutions of linear differential systems. *Trudy chetvertogo Vsesoyuznogo matematicheskogo s'ezda* [Proceedings of the Fourth All-Union Mathematical Congress]. Leningrad, 1964, vol. 2, pp. 424–432 (in Russian).

5. Gaishun I. V. *Introduction to the theory of linear nonstationary systems*. Moscow, 2004. 409 p. (in Russian).

6. Izobov N. A. *Lyapunov Exponents and Stability*. Cambridge, 2012. 353 p.

7. Makarov E. K., Popova S. N. *Controllability of asymptotic invariants of time-varying linear systems*. Minsk, 2012. 407 p. (in Russian).

8. Astrovskii A. I., Gaishun I. V. *Linear systems with quasidifferential coefficients: controllability and observability of motion*. Minsk, 2013. 213 p. (in Russian).

9. Astrovskii A. I., Gaishun I. V. State Estimation for Linear Time-Varying Observation Systems. *Differential Equations,* 2019, vol. 55, no. 3, pp. 363–373. https://doi.org/10.1134/s0012266119030108

10. Astrovskii A. I., Gaishun I. V. Observability of Linear Time-Varying Systems with Quasiderivative Coefficients. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2019, vol. 57, no. 3, pp. 1710–1729. https://doi.org/10.1137/18m1167115

11. Gaishun I. V., Astrovskii A. I. Description of the set of uniformly observable linear time-varying systems. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 1996, vol. 40, no. 5, pp. 5–8 (in Russian).

12. Morozov V. M., Kalenova V. I. *Estimation and control of time-varying linear systems*. Moscow, 1988. 144 p. (in Russian).

13. Kalenova V. I., Morozov V. M. The reducibility of linear second-order time-varying systems with control and observation. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 76, no. 4, pp. 413–422. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.09.008

Информация об авторе

Астровский Анатолий Иванович – д-р физ.-мат. наук, профессор. Белорусский государственный экономический университет (Партизанский пр., 26, 220070, Минск, Республика Беларусь). E-mail: aastrov@tut.by.

Information about the author

Astrovskii Anatoly I. – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. Belarus State Economic Univesity (26, Partizanskii Ave., 220070, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: aastrov@tut.by.