ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 519.63 Поступило в редакцию 17.12.2020
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-1-25-32 Received 17.12.2020

Член-корреспондент П. П. Матус[1,2], Х. Т. К. Ань[3]

[1]*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь*
[2]*Католический университет Люблина, Люблин, Польша*
[3]*Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь*

КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аннотация. В настоящей работе на трехточечном шаблоне рассматриваются компактные разностные схемы 4 + 2 порядка аппроксимации для уравнения Клейна–Гордона с переменными коэффициентами. Несмотря на линейность дифференциальной и разностной задач в этом случае не удается применить известные результаты по теории устойчивости трехслойных операторно-разностных схем А. А. Самарского. Основной целью работы является доказательство устойчивости компактной разностной схемы по начальным данным и правой части в сеточных нормах $L_2(\omega_h), W_2^1(\omega_h), C(\overline{\omega}_h)$. Используя метод энергетических неравенств в работе получены соответствующие априорные оценки, выражающие устойчивость и сходимость решения разностной задачи при предположении $h \le h_0,\, h_0 = \text{const},\, \tau \ge h.$ На примере вычислительного эксперимента показывается как использовать правило Рунге для определения разных порядков скорости сходимости решения разностной схемы в случае двух независимых переменных.

Ключевые слова: компактная разностная схема, уравнение Клейна–Гордона, априорные оценки, устойчивость, сходимость

Для цитирования. Матус, П. П. Компактные разностные схемы для уравнения Клейна–Гордона с переменными коэффициентами / П. П. Матус, Х. Т. К. Ань // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2021. – Т. 65, № 1. – С. 25–32. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-1-25-32

Corresponding Member Piotr P. Matus[1,2], Hoang T. K. Anh[3]

[1]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*
[2]*Institute of Mathematics and Computer Science The John Paul II Catholic University of Lublin, Lublin, Poland*
[3]*Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus*

COMPACT DIFFERENCE SCHEMES FOR KLEIN–GORDON EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Abstract. In this paper, we consider the compact difference approximation of the fourth and second-order schemes on a three-point stencil for Klein–Gordon equations with variable coefficients. Despite the linearity of the differential and difference problems, it is not possible in this case to apply the well-known results on the theory of stability of three-layer operator-difference schemes by A. A. Samarskii. The main purpose is to prove the stability with respect to the initial data and the right-hand side of compact difference schemes in the grid norms $L_2(\omega_h), W_2^1(\omega_h), C(\overline{\omega}_h)$. Using the method of energy inequalities, the corresponding a priori estimates, expressing the stability and convergence of the solution to the difference problem with the assumption $h \le h_0,\, h_0 = \text{const},\, \tau \ge h$, is obtained. The conducted numerical experiment shows how Runge rule is used to determine the different orders of the convergence rate of the difference scheme in the case of two independent variables.

Keywords: compact difference schemes, Klein–Gordon equation, priori estimates, stability, convergence

For citation. Matus P. P., Anh H. T. K. Compact difference schemes for Klein–Gordon equation with variable coefficients. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2021, vol. 65, no. 1, pp. 25–32 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-1-25-32

Введение. В отличие от работ [1; 2] под компактными будем понимать разностные схемы, которые пишутся на стандартных шаблонах. В одномерном случае для нахождения неизвестного сеточного решения можно применить экономичный метод прогонки. Основополагающей работой по этой тематике для классических уравнений математической физики с самосопряженным эллиптическим оператором являются работы А. А. Самарского [3; 4]. Построению компактных разностных схем для волнового уравнения посвящены работы [5; 6]. В настоящей работе на трехточечном шаблоне рассматриваются компактные разностные схемы 4 + 2 порядка аппроксимации для уравнения Клейна–Гордона с переменными коэффициентами. Несмотря на линейность дифференциальной и разностной задач в этом случае не удается применить известные результаты по теории устойчивости трехслойных операторно-разностных схем А. А. Самарского [4]. Основной целью работы является доказательство устойчивости компактной разностной схемы по начальным данным и правой части в сеточных нормах $L_2(\omega_h), W_2^1(\omega_h), C(\overline{\omega}_h)$. Используя метод энергетических неравенств в работе получены соответствующие априорные оценки, выражающие устойчивость и сходимость решения разностной задачи при предположении $h \le h_0, h_0 = \text{const}, \tau \ge h$. На примере вычислительного эксперимента показывается как использовать правило Рунге для определения разных порядков скорости сходимости решения разностной схемы в случае двух независимых переменных.

Постановка задачи и разностная схема. В области $\overline{Q}_T = \{(x,t): \ \ 0 \le x \le l, \ \ 0 \le t \le T\}$ рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения Клейна–Гордона с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - mu + f(x,t), \quad m = \text{const} > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \overline{v}_0(x), \tag{2}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \tag{3}$$

где $0 < k_1 \le k(x,t) \le k_2$, $u(x,t) \in C^{4,6}(\overline{Q}_T)$, $p \in C^{0,1}(\overline{Q}_T)$, $f \in C^{0,2}(\overline{Q}_T)$.

В заданной области построим равномерную сетку узлов $\overline{\omega} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(x_i, t_n) \in \overline{Q}_T\}$, $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih, 0 \le i \le N, h = l/N\}$, $\overline{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, 0 \le n \le K, \tau = T/K\}$, $\overline{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup T$.

На построенной сетке $\overline{\omega}$ исходную дифференциальную задачу аппроксимируем разностной схемой вида:

$$y_{\overline{t}t} = \Lambda y^{(\sigma,\sigma)} - \frac{h^2}{12}\Lambda(py_{\overline{t}t}) - m\left[y^{(\sigma,\sigma)} + \frac{h^2}{12}\Lambda(py^{(\sigma,\sigma)})\right] + \varphi, \quad (x,t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \tag{4}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad y_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \omega_h, \tag{5}$$

$$y(0,t) = \mu_1(t), \quad y(l,t) = \mu_2(t), \quad t \in \omega_\tau. \tag{6}$$

Здесь

$$y^{(\sigma_1,\sigma_2)} = \sigma_1 \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y + \sigma_2 \check{y}, \quad \hat{y} = y^{n+1}, \quad \check{y} = y^{n-1}, \quad y_i^n = y(x_i, t_n),$$

$$\Lambda y = (a(x,t_n) y_{\overline{x}})_x, \quad \sigma = 0{,}5, \quad \varphi = f + \frac{h^2}{12}\Lambda(pf), \quad p(x,t) = \frac{1}{k(x,t)},$$

$$a(x,t) = 6\left[p(x-h,t) + 4p\left(x - \frac{h}{2}, t\right) + p(x,t)\right]^{-1}, \quad 0 < c_1 \le a(x,t) \le c_2,$$

$$u_1(x) = \overline{v}_0(x) + \frac{\tau}{2}\left[\left(k(x,0)u'(x,0)\right)' - mu(x,0) + f(x,0)\right], \quad x \in \omega_h.$$

В соответствии с работами В. И. Паасонена и А. А. Самарского [2; 3; 5] нетрудно показать, что разностная схема (4)–(6) аппроксимирует исходную задачу (1)–(3) с четвертым порядком по пространству и вторым по времени, т. е. для ее невязки $\psi = -u_{\overline{t}t} + \Lambda u^{(\sigma,\sigma)} - \frac{h^2}{12}\Lambda(pu_{\overline{t}t}) - m\left[u^{(\sigma,\sigma)} + \frac{h^2}{12}\Lambda(pu^{(\sigma,\sigma)})\right] + \varphi$ и второго начального условия имеют место априорные оценки:

$$\|\psi\| \le M(h^4 + \tau^2), \quad M = \text{const} > 0,$$

$$\|\overset{\circ}{\psi}\| = \| u_1 - u_t{}^0 \| \le M_1 \tau^2, \quad M_1 = \text{const} > 0.$$

В работе используются обозначения из [4; 7].

Устойчивость. Для избежания громоздких выкладок ограничимся случаем зависимости коэффициента $k = k(x)$ только от пространственной переменной. В силу неоднородности граничных условий оператор

$$(Ay)_i = -y_{\bar{x}x,i}$$

не является самосопряженным, что не позволяет получить соответствующие априорные оценки для разностного решения, из которых следует устойчивость разностной схемы по входным данным. Для избежания данных проблем рассмотрим возмущенное решение $\tilde{y}$, полученное по разностной схеме (4)–(6) с возмущенной правой частью $\tilde{f}$ и возмущенными начальными условиями $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$. Тогда задача для возмущения $\bar{y} = \tilde{y} - y$ примет вид:

$$\bar{y}_{\bar{t}t} = \Lambda \bar{y}^{(\sigma,\sigma)} - \frac{h^2}{12}\Lambda(p\bar{y}_{\bar{t}t}) - m\left[\bar{y}^{(\sigma,\sigma)} + \frac{h^2}{12}\Lambda(p\bar{y}^{(\sigma,\sigma)})\right] + \bar{\varphi}, \quad (x,t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \tag{7}$$

$$\bar{y}(x,0) = \bar{u}_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad \bar{y}_t(x,0) = \bar{u}_1(x), \quad x \in \omega_h, \tag{8}$$

$$\bar{y}(0,t) = 0, \quad \bar{y}(l,t) = 0, \quad t \in \omega_\tau. \tag{9}$$

Здесь

$$\bar{u}_0 = \tilde{u}_0 - u_0, \ \bar{u}_1 = \tilde{u}_1 - u_1, \ \bar{\varphi} = \tilde{\varphi} - \varphi.$$

К сожалению, несмотря на линейность разностной задачи, к ней неприменима теория трехслойных операторно-разностных схем А. А. Самарского [4]. При использовании метода энергетических неравенств в дальнейшем нам понадобятся некоторые известные факты из теории разностных схем.

Л е м м а 1 [4, с. 101]. *Неравенство Коши–Буняковского с* ε

$$|(u,v)| \le \|u\|\|v\| \le \varepsilon\|u\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|v\|^2, \tag{10}$$

где $(u,v) = \sum_{i=1}^{N-1} hu_i v_i$ *– скалярное произведение в* $L_2(\omega_h)$.

Л е м м а 2 [8, с. 159]. Разностный аналог леммы Гронуолла. *Пусть* Q_n *и* f_n *– неотрицательные функции, определенные на сетке* $\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \ldots\}$, *и* $\rho > 0$ *– число. Тогда, если выполняются неравенства*

$$Q_{n+1} \le \rho Q_n + f_n, \ n = 0, 1, \ldots,$$

то справедлива оценка

$$Q_{n+1} \le \rho^{n+1} Q_0 + \sum_{k=0}^{n} \rho^{n-k} f_k.$$

Л е м м а 3 [4, с. 99]. *При* $z_0 = z_N = 0$ *первая разностная формула Грина имеет вид*

$$(z, \Lambda y) = -(ay_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}], \quad (u,v] = \sum_{i=1}^{N} hu_i v_i. \tag{11}$$

Л е м м а 4. *Рассмотрим энергетическое соотношение*

$$Q^n = \|\bar{y}_{\bar{t}}\|^2 + \frac{1}{2}\left(a, \bar{y}_{\bar{x}}^2 + \check{\bar{y}}_{\bar{x}}^2\right] + \frac{m}{2}\left(\|\bar{y}\|^2 + \|\check{\bar{y}}\|^2\right) - \frac{h^2}{12}(ap_{(-1)}, \bar{y}_{\bar{x}\bar{t}}^2] - \frac{mh^2}{24}\left(ap_{(-1)}, \bar{y}_{\bar{x}}^2 + \check{\bar{y}}_{\bar{x}}^2\right],$$

где $p_{(-1)} = p_{i-1}$. *Тогда при выполнении условий*

$$h \le h_0, \quad h_0 = \sqrt{\frac{3k_1}{m}}, \quad \tau \ge \frac{2h}{\sqrt{3k_1}} \tag{12}$$

выражение $Q^n \ge 0$ *неотрицательно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для получения желаемого результаты достаточно показать, что выражение

$$I_1 = \frac{1}{4}\left(a, \bar{y}_{\bar{x}}^2 + \overset{\vee}{y}{}_{\bar{x}}^2\right] - \frac{h^2}{12}(ap_{(-1)}, \bar{y}_{\bar{x}t}^2] - \frac{mh^2}{24}\left(ap_{(-1)}, \bar{y}_{\bar{x}}^2 + \overset{\vee}{y}{}_{\bar{x}}^2\right] \ge 0. \tag{13}$$

С учетом очевидных неравенств

$$-\frac{h^2}{12}(ap_{(-1)}, \bar{y}_{\bar{x}t}^2] \ge -\frac{h^2}{6k_1\tau^2}\left(a, \bar{y}_{\bar{x}}^2 + \overset{\vee}{y}{}_{\bar{x}}^2\right],$$

$$-\frac{mh^2}{24}\left(ap_{(-1)}, \bar{y}_{\bar{x}}^2 + \overset{\vee}{y}{}_{\bar{x}}^2\right] \ge -\frac{mh^2}{24k_1}\left(a, \bar{y}_{\bar{x}}^2 + \overset{\vee}{y}{}_{\bar{x}}^2\right]$$

энергетическое соотношение (13) можно переписать в виде

$$I_1 \ge c_3\left(a, \bar{y}_{\bar{x}}^2 + \overset{\vee}{y}{}_{\bar{x}}^2\right], \quad c_3 = \frac{1}{4} - \frac{h^2}{6k_1\tau^2} - \frac{mh^2}{24k_1}.$$

При первом из условий (12) выполнено неравенство

$$\frac{1}{4} - \frac{mh^2}{24k_1} \ge \frac{1}{8}.$$

Следовательно,

$$c_3 \ge -\frac{h^2}{6k_1\tau^2} + \frac{1}{8} \ge 0$$

при выполнении второго из условий (12).

Лемма доказана.

Для получения априорной оценки для $\bar{y}$ умножим разностное уравнение (7) скалярно на $2\tau y_{\overset{\circ}{t}}$ и применим первую разностную формулу Грина (11). Получим следующее энергетическое соотношение

$$Q^{n+1} - \frac{h^2}{12}(ap_{\bar{x}}(\bar{y}_t - \bar{y}_{\bar{t}}), \bar{y}_{\bar{x}t} + \bar{y}_{\bar{x}\bar{t}}] = Q^n + \frac{m\tau h^2}{12}\left(ap_{\bar{x}}(\hat{y} + \overset{\vee}{y}), \bar{y}_{\overset{\circ}{t}\bar{x}}\right] + 2\tau(\bar{\varphi}, \bar{y}_{\overset{\circ}{t}}). \tag{14}$$

Рассмотрим в (14) слагаемые, не входящие в нормы Q^n, Q^{n+1}. Применяя неравенство Коши–Буняковского с ε (10), легко получить следующие оценки:

$$-\frac{h^2}{12}(ap_{\bar{x}}(\bar{y}_t - \bar{y}_{\bar{t}}), \bar{y}_{\bar{x}t} + \bar{y}_{\bar{x}\bar{t}}] \ge -ch(\|\bar{y}_t\|^2 + \|\bar{y}_{\bar{t}}\|^2), \tag{15}$$

$$\frac{m\tau h^2}{12}\left(ap_{\bar{x}}(\hat{y} + \overset{\vee}{y}), \bar{y}_{\overset{\circ}{t}\bar{x}}\right] \le ch\left[\frac{m}{2}\left(\left\|\hat{y}\right\|^2 + \|\bar{y}\|^2\right) + \frac{m}{2}\left(\|\bar{y}\|^2 + \left\|\overset{\vee}{y}\right\|^2\right)\right], \tag{16}$$

$$2\tau(\bar{\varphi}, \bar{y}_{\overset{\circ}{t}}) \le \varepsilon\tau\|\bar{\varphi}\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}(\|\bar{y}_t\|^2 + \|\bar{y}_{\bar{t}}\|^2), \tag{17}$$

где $c > 0$ константа, зависящая от m, ε, $\max\limits_{x \in \bar{\omega}_h} |p_{\bar{x}}(x)|$ и в каждом конкретном случае своя.

Учитывая неравенства (15)–(17) в (14), при выполнении условий (12) приходим к рекуррентному соотношению

$$Q^{n+1} \le (1+\tau c)Q^n + \tau c \|\overline{\varphi}\|^2 \le e^{c\tau}Q^n + \tau c \|\overline{\varphi}\|^2 . \tag{18}$$

Итак, имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнено следующее условие*

$$\tau \ge \max\left\{1, \sqrt{\frac{2}{3k_1}}\right\} h.$$

Тогда имеет место оценка

$$Q^{n+1} \le e^{ctn}\left(Q^1 + c\sum_{k=1}^{n} \tau \|\overline{\varphi}^k\|^2\right), \tag{19}$$

выражающая ρ*-устойчивость решения разностной схемы (4)–(6) по начальным данным, правой части в сеточных нормах* $L_2(\omega_h), W_2^1(\omega_h), C(\overline{\omega}_h)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство теоремы следует из неравенства (18), леммы Гроноулла и вложения [4, с. 107]

$$\|\tilde{y} - y\|_C \le \frac{\sqrt{l}}{2} \|\tilde{y}_{\overline{x}} - y_{\overline{x}}]|.$$

Теорема о сходимости. Поставляя $y = z + u$ в разностные уравнения (4)–(6), где u – решение задачи (1)–(3), получим для погрешности z задачу

$$z_{\overline{t}t} = \Lambda z^{(\sigma,\sigma)} - \frac{h^2}{12}\Lambda(pz_{\overline{t}t}) - m\left[z^{(\sigma,\sigma)} + \frac{h^2}{12}\Lambda(pz^{(\sigma,\sigma)})\right] + \psi, \quad (x,t)\in\omega_h\times\omega_\tau, \tag{20}$$

$$z(x,0) = 0, \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad z_t(x,0) = \overset{\circ}{\psi}, \quad x \in \omega_h, \quad \overset{o}{\psi} = O(\tau^2), \tag{21}$$

$$z(0,t) = 0, \quad z(l,t) = 0, \quad t \in \omega_\tau. \tag{22}$$

Задачи (20)–(22) и (7)–(9) идентичны. Поэтому можно применить теорему 1 для оценки погрешности метода. Тогда в соответствии с неравенством (19) получаем оценку

$$\|z\|_C^2 \le M_1\{\|\overset{\circ}{\psi}\|^2 + \frac{4c_2}{c^2}\|\overset{\circ}{\psi}_{\overline{x}}]|^2 + \frac{4m}{c^2}\|\overset{\circ}{\psi}\|^2 + cT\max_{t\in\omega_\tau}\|\psi(t)\|^2\},$$

где $M_1 = \text{const} > 0$.

Итак, мы можем сформулировать теорему о сходимости.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда решение разностной схемы (4)–(6) сходится к точному решению дифференциальной задачи (1)–(3) в сеточных нормах* $L_2(\omega_h), W_2^1(\omega_h), C(\overline{\omega}_h)$ *и для ее решения имеет место оценка точности*

$$\|y^n - u^n\|_C \le M_2(h^4 + \tau^2), \quad \forall n = 0, 1, ..., K,$$

здесь $M_2 = \text{const} > 0$.

Вычислительные эксперименты. В этом пункте приводятся результаты численных расчетов при решении начально-краевой задачи с коэффициентом $k(x) = 2x + 3$, правой частью $f(x,t) = -5e^{\sqrt{2}x}(\cos 2t + \sin 2t)(4x + 7 + 2\sqrt{2})$ и выбранными параметрами: $m = 3,\ l = 2,\ T = 10$. Начальные и краевые условия определяются из точного решения $u(x,t) = 5e^{\sqrt{2}x}(\cos 2t + \sin 2t)$.

Здесь порядок сходимости по временной и пространственной переменным в норме L_∞ определяется по следующим формулам:

$$p_\infty^h = \log_2 \frac{\|z(2h,\tau)\|_{L\infty}}{\|z(h,\tau)\|_{L\infty}}, \quad p_\infty^\tau = \log_2 \frac{\|z(h,2\tau)\|_{L\infty}}{\|z(h,\tau)\|_{L\infty}}. \tag{23}$$

Так как разностное решение сходится к точному решению с четвертым порядком по пространству и вторым по времени, то для проверки скорости сходимости вдоль временного направления мы берем такие шаги h и τ, чтобы выполнялось неравенство $h^4 \le \tau^2$. И тогда получается схема $O(\tau^2)$ и мы работаем со вторым правилом Рунге (23).

Однако в связи с теоремой 1 об устойчивости при рассмотрении порядка по h, в расчетах следим, чтобы выполнялись одновременно два неравенства $h^4 \ge \tau^2$ и $\tau \ge \max\left\{1, \sqrt{\frac{2}{3k_1}}\right\}h$. Тогда можно применить первое правило Рунге (23).

В табл. 1, 2 отражена скорость сходимости приближенного решения к точному.

Т а б л и ц а 1. **Скорость сходимости по пространственному направлению**

T a b l e 1. **The spatial convergence rate**

h	τ	$\|z\|_{L\infty}$	$p^h_{L\infty}$	$\|z\|_{L2}$	p^h_{L2}
$h_0 = 0,25$	$\tau_0 = 0,0625$	9,40E-02	–	8,19E-02	–
$h_0/2^1$	τ0/41	5,49E-03	4,09707	3,94E-03	4,37543
$h_0/2^2$	τ0/42	3,65E-04	3,91055	2,74E-04	3,84501
$h_0/2^3$	τ0/43	2,31E-05	3,98547	1,73E-05	3,98513
$h_0/2^4$	τ0/44	1,45E-06	3,99283	1,09E-06	3,99744

Т а б л и ц а 2. **Скорость сходимости по временному направлению**

T a b l e 2. **The temporal convergence rate**

h	τ	$\|z\|_{L\infty}$	p^τ_{∞}	$\|z\|_{L2}$	p^τ_{L2}
$h_0 = 0,015625$	$\tau_0 = 0,015625$	5,73E-03	–	3,88E-03	–
h_0	$\tau_0/2^1$	1,42E-03	2,00689	1,06E-03	1,87484
h_0	$\tau_0/2^2$	3,63E-04	1,97285	2,70E-04	1,9671
h_0	$\tau_0/2^3$	9,10E-05	1,99606	6,81E-05	1,98902
h_0	$\tau_0/2^4$	2,28E-05	1,99651	1,71E-05	1,99493

Отсюда видно, что построенная разностная схема имеет четвертый порядок точности по пространственной переменной и второй – по временной (рис. 1, 2).

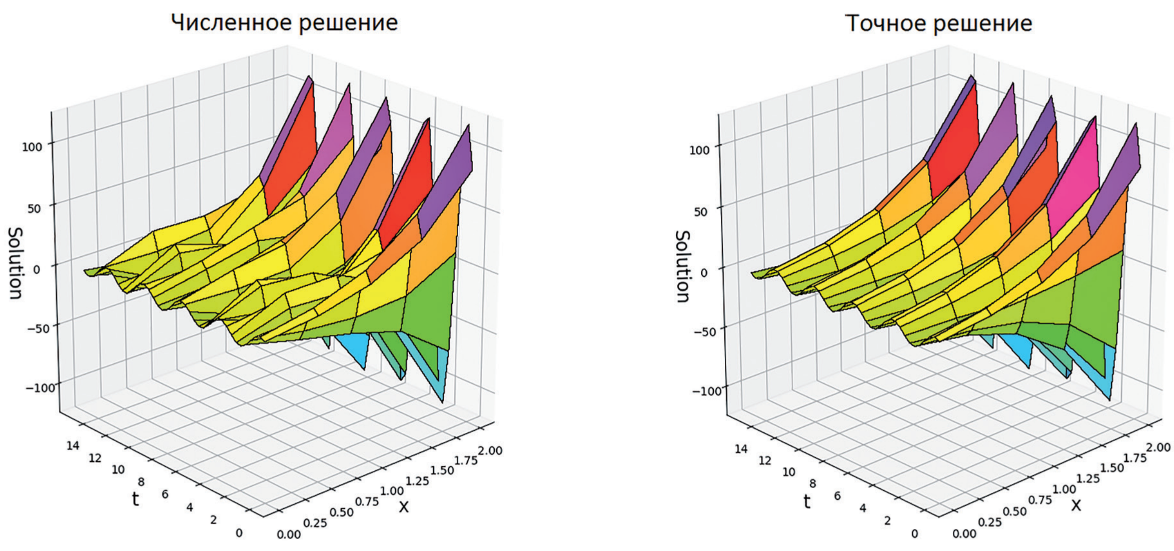

Рис. 1. Решения при $T = 15$, $x = 2$, $h = 0{,}5$, $\tau = 0{,}375$

Fig. 1. Solutions with $T = 15$, $x = 2$, $h = 0.5$, $\tau = 0.375$

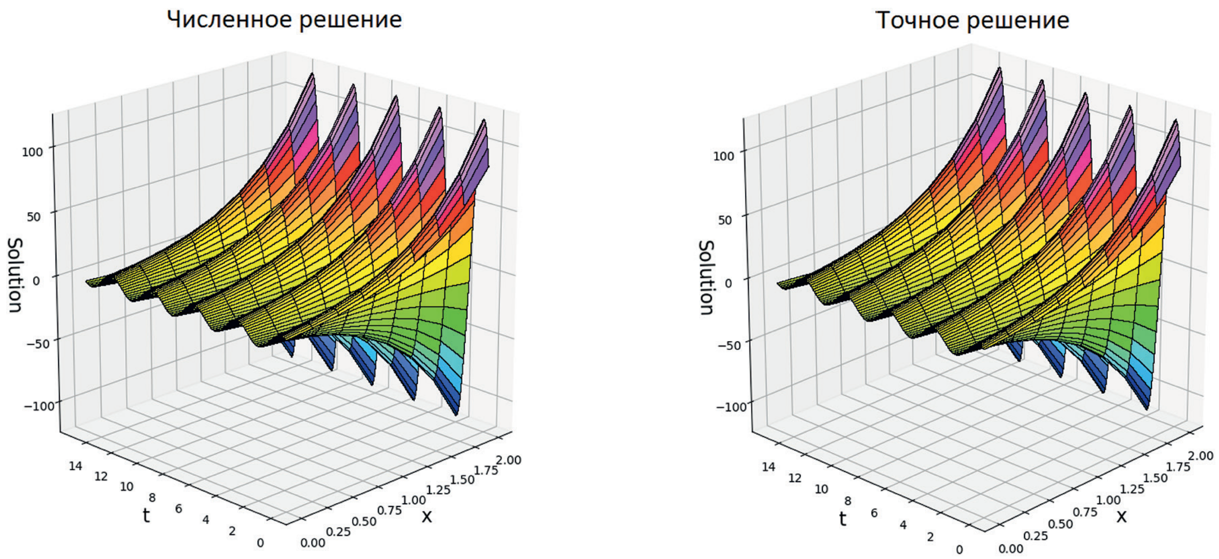

Рис. 2. Решения при $T = 15$, $x = 2$, $h = 0{,}25$, $\tau = 0{,}09375$

Fig. 2. Solutions with $T = 15$, $x = 2$, $h = 0.25$, $\tau = 0.09375$

Данный вычислительный эксперимент подтверждает наши теоретические выводы.

Список использованных источников

1. Матус, П. П. Компактные разностные схемы для уравнения Клейна–Гордона / П. П. Матус, Х. Т. К. Ань // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2020. – Т. 64, № 5. – С. 526–533. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020- 64-5-526-533

2. Паасонен, В. И. Обобщение методов повышенной точности для нелинейных уравнений 2-го порядка в ортогональных системах координат / В. И. Паасонен // Численные методы механики сплошной среды. – 1977. – Т. 8, № 2. – С. 94–99.

3. Самарский, А. А. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности / А. А. Самарский // Журн. вычисл. математики и матем. физ. – 1963. – Т. 3, № 5. – С. 812–840.

4. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М., 1989. – 616 с.

5. Паасонен, В. И. Компактные схемы для систем уравнений второго порядка с конвективными членами / В. И. Паасонен // Численные методы механики сплошной среды. – 1998. – Т. 3, № 1. – С. 55–66.

6. Паасонен, В. И. Диссипативные асимметричные компактные схемы для уравнения колебаний // Вычислительные технологии. Специальный выпуск. – 2001. – Т. 6, № 2. – С. 475–479.

7. Самарский, А. А. Разностные схемы с операторными множителями / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, П. П. Матус. – Минск, 1998. – 442 с.

8. Самарский, А. А. Устойчивость разностных схем / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М., 1973. – 415 с.

References

1. Matus P. P., Anh H. T. K. Compact difference schemes for Klein–Gordon equation. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2020, vol. 64, no. 5, pp. 526–533 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-5-526-533

2. Paasonen V. I. Generalization of high-precision methods for second-order nonlinear equations in orthogonal coordinate systems. *Chislennye metody mekhaniki sploshnoi sredy* [Numerical Methods of Continuum Mechanics], 1977, vol. 8, no. 2, pp. 94–99 (in Russian).

3. Samarsky A. A. Schemes of high-order accuracy for the multi-dimensional heat conduction equation. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics,* 1963, vol. 3, no. 5, pp. 1107–1146. https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90104-6

4. Samarskii A. A. *Theory of difference schemes*. Moscow, 1989. 616 p. (in Russian).

5. Paasonen V. I. Compact schemes for systems of second-order equations without mixed derivatives. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 1998, vol. 13, no. 4. https://doi.org/10.1515/rnam.1998.13.4.335

6. Paasonen V. I. Dissipative asymmetric compact schemes for the equation of oscillations. *Vychislitelnye technologii. Specialnyi vypusk* [Computational technologies. Special issue], 2001, vol. 6, no. 2, pp. 475–479 (in Russian).

7. Samarskii A. A., Matus P. P., Vabishchevich P. N. *Difference schemes with operator factors*. Dordrecht, 2002. 384 p. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9874-3

8. Samarskii A. A., Gulin A. V. *Stability of difference schemes*. Moscow, 1973. 415 p. (in Russian).

Информация об авторах

Матус Петр Павлович – член-корреспондент, д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: piotr.p.matus@gmail.com.

Хоанг Тхи Киеу Ань – соискатель. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kieuanhhoang86@gmail.com.

Information about the authors

Matus Piotr P. – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: piotr.p.matus@gmail.com.

Hoang Thi Kieu Anh – Postgraduate student. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kieuanhhoang86@gmail.com.