ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.958 Поступило в редакцию 28.12.2020
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-2-135-138 Received 28.12.2020

Академик В. И. Корзюк[1], И. И. Столярчук[2]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Аннотация. В данном сообщении рассматривается первая смешанная задача для волнового уравнения в четырехмерной области (три пространственные и одна временная компоненты). С помощью операторов осреднения по сфере доказывается теорема о существовании единственного классического решения поставленной задачи. Метод осреднения по сфере ранее использовался для вывода формул Кирхгофа и Пуассона для решения задачи Коши для волнового уравнения в случае четырех и трех независимых переменных соответственно. Показывается, что этот метод может быть применен и для более сложной задачи. При использовании операторов осреднения по сфере исходная задача сводится к первой смешанной задаче для уравнения колебания струны, для которой уже доказан критерий корректной разрешимости. При этом требования на гладкость функций в критерии для разрешимости первой смешанной задачи для уравнения колебания струны необходимо усилить. Усиленный критерий можно доказать с помощью метода характеристик.

Ключевые слова: волновое уравнение, метод характеристик, оператор осреднения по сфере, классическое решение, смешанная задача, условия согласования

Для цитирования. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для волнового уравнения в цилиндрической области / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2021. – Т. 65, № 2. – С. 135–138. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-2-135-138

Academician Viktor I. Korzyuk[1], Ivan I. Stolyarchuk[2]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

CLASSICAL SOLUTION OF THE FIRST MIXED PROBLEM FOR THE WAVE EQUATION IN THE CYLYNDRICAL DOMAIN

Abstract. The first mixed problem for the wave equation in the four-dimensional area (three dimensions of space and one dimension of time) is considered. The theorem of existence of the unique classical solution of the given problem is proved with the help of averaging operators. The method of averaging operators was used for obtaining Kirchhoff's and Poisson's formulas for solving the Cauchy problem for the wave equation in the case of four and three independent variables respectively. Here it is shown that this approach can be used to solve a more complex problem. When using averaging operators, the initial problem is reduced to the first mixed problem for string oscillations, for which the correct solvability criterion has already been proved. However, the smoothness of the functions in the solvability criterion should be enhanced. The enhanced criterion can be proved by the method of characteristics.

Keywords: wave equation, characteristics method, sphere averaging operator, classical solution, mixed problem, matching conditions

For citation. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the first mixed problem for the wave equation in the cylyndrical domain. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2021, vol. 65, no. 2, pp. 135–138 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-2-135-138

Введение. Смешанные задачи для гиперболических уравнений используются в различных прикладных сферах современной науки. Много работ посвящено исследованию корректной постановки задач для гиперболических уравнений с двумя свободными переменными. Для этих задач доказаны критерии корректности или получены достаточные условия для существования единственного классического решения [1–7]. Однако для уравнений с большим числом независимых переменных таких исследований проведено достаточно мало. Например, для задачи Коши для волнового уравнения получены формулы Кирхгофа и Пауссона в случае четырех и трех независимых переменных. Возникает вопрос, можно ли получить достаточные условия существования единственного классического решения смешанных задач в случае пространств высоких размерностей.

В данном сообщении представлено исследование, в котором для простейшего случая первой смешанной задачи для волнового уравнения в случае четырех независимых переменных выводятся необходимые и достаточные условия согласования на значения этих функций и их производных до третьего порядка включительно для существования единственного классического решения поставленной задачи при заданной гладкости исходных функций. Стоит отметить, что в случае четырех независимых переменных для C^2 гладкости решения поставленной задачи требуется более высокая гладкость на исходные функции, чем для исходных функций первой смешанной задачи для уравнения колебания струны.

Постановка задачи. Задача рассматривается на множестве четырех независимых переменных $x=(x_0,\mathbf{x}')=(x_0,x_1,x_2,x_3)$. В области $Q=(0,+\infty)\times\Omega$, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, относительно неизвестной функции $u:\mathbb{R}^4\supset Q\to u(\mathbf{x})\subset\mathbb{R}$ задается волновое уравнение

$$\partial_{x_0}^2 u - a^2\Delta_{\mathbf{x}'}u=0, \tag{1}$$

где $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел; $\Delta_{\mathbf{x}'}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j^{\,2}}$ – оператор Лапласа.

К уравнению (1) присоединяются начальные условия

$$\begin{aligned} &u|_{x_0=0}=\varphi(\mathbf{x}'),\\ &\partial_{x_0}u|_{x_0=0}=\psi(\mathbf{x}'), \end{aligned} \tag{2}$$

и граничное условие на боковой поверхности $\Gamma=(0;+\infty)\times\partial\Omega$

$$u|_{\Gamma}=\mu(\mathbf{x}), \tag{3}$$

где $\mu:\mathbb{R}^4\supset\Gamma\ni\mathbf{x}\to\mu(\mathbf{x})\subset\mathbb{R}$, $\varphi:\mathbb{R}^3\supset\Omega\ni\mathbf{x}'\to\varphi(\mathbf{x}')\subset\mathbb{R}$, $\psi:\mathbb{R}^3\supset\Omega\ni\mathbf{x}'\to\psi(\mathbf{x}')\subset\mathbb{R}$ – заданные функции.

Операторы осреднения. Для задачи Коши (1)–(2) в области $Q=(0,+\infty)\times\mathbb{R}^3$ с помощью операторов осреднения доказывается теорема о существовании единственного классического решения $u(\mathbf{x})$ при достаточной гладкости исходных данных и выводится формула Кирхгофа, которая дает аналитическое выражение полученного решения.

Применим для первой смешанной задачи похожий подход. Рассмотрим оператор

$$J_u(\mathbf{x},r)=\frac{1}{4\pi}\int_{|\mathbf{y}|=1}u(\mathbf{x}+r\mathbf{y})ds_{\mathbf{y}}=\frac{1}{4\pi r^2}\int_{|\mathbf{y}|=r}u(\mathbf{x}+\mathbf{y})ds_{\mathbf{y}}=\frac{1}{4\pi r^2}\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=r}u(\mathbf{y})ds_{\mathbf{y}}. \tag{4}$$

Наряду с оператором (4) введем оператор $M_r u(\mathbf{x})=rJ_u(\mathbf{x},r)$ и рассмотрим точку $N(x_0,\mathbf{x}')$, для которой зафиксируем пространственные координаты $\mathbf{x}'$. Применим к задаче (1)–(3) в точке N оператор осреднения M_r по переменным $\mathbf{x}'$.

В результате задача (1)–(3) сведется к задаче

$$\partial_{x_0}^2 M_r u(x_0,\mathbf{x}')-a^2\partial_r^2 M_r u(x_0,\mathbf{x}')=0 \tag{5}$$

на области $\widetilde{Q}=\{(x_0,r)\,|\,x_0>0,\ r\in(0;r_N]\}$, где $r_N=d(N,\partial Q)$ – расстояние от точки N до границы ∂Q. К (5) присоединяются начальные условия

$$M_r u|_{x0=0} = M_r \varphi(\mathbf{x}') = \overline{\varphi}(r),$$
$$M_r \partial_{x0} u|_{x0=0} = M_r \psi(\mathbf{x}') = \overline{\psi}(r), \tag{6}$$

и граничные условия

$$M_r u(\mathbf{x})|_{r=r_N} = \overline{\mu}(\mathbf{z}),$$
$$M_r u|_{r\to 0} = 0, \tag{7}$$

где точка $\mathbf{z} \in \partial Q$ такая, в которой сфера радиусом r_N вокруг точки N касается границы ∂Q. Заметим, что оператор M_r является непрерывным, в том смысле, что $\lim\limits_{\substack{r\to\tilde{r}\\ \mathbf{z}\to\tilde{\mathbf{z}}}} M_r u(x_0, \mathbf{z}) = M_{\tilde{r}} u(x_0, \tilde{\mathbf{z}})$ для малых $r, \tilde{r}$, так как наша цель – найти $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{M_r u(\mathbf{x})}{r}$.

Задача (5)–(7) представляет собой первую смешанную задачу для одномерного волнового уравнения, заданную в полуполосе относительно функции $v(x_0, r; \mathbf{x}') = M_r u(\mathbf{x})$. При этом искомая функция из задачи (1)–(3) $u(\mathbf{x})$ выражается через решение $v(x_0, r; \mathbf{x}')$ задачи (5)–(7) по формуле

$$u(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial r} v(x_0, r; \mathbf{x}')\bigg|_{r=0} = \lim_{r\to 0} \frac{M_r u(\mathbf{x})}{r},$$

откуда следует, что решение u будет из класса C^2, если решение v задачи (5)–(7) будет из класса C^3.

Для задачи (5)–(7) в [8] уже доказан критерий существования единственного классического решения из класса C^2.

Т е о р е м а 1. *Классическое решение задачи (5)–(7) существует и единственно в классе* $C^2(\widetilde{Q})$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{\varphi}(r) \in C^2([0; r_N])$, $\overline{\psi}(r) \in C\ ([0; r\ \ ])$, $\overline{\mu}(x_0) \in C^2([0; +\infty))$ *и выполняются условия согласования*

$$\overline{\varphi}(0) = 0, \overline{\varphi}(r_N) = \overline{\mu}(0), \overline{\psi}(0) = 0, \overline{\psi}(r_N) = d\overline{\mu}(0),$$
$$d^2\overline{\varphi}(0) = 0, d^2\overline{\mu}(0) = a^2 d^2 \overline{\varphi}(0).$$

Можно сформулировать аналогичное утверждение для существования единственного классического решения задачи (5)–(7) в классе C^3, которое доказывается с помощью метода характеристик.

У т в е р ж д е н и е. *Классическое решение задачи (5)–(7) существует и единственно в классе* $C^3(\widetilde{Q})$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{\varphi}(r) \in C^3([0; r_N])$, $\overline{\psi}(r) \in C^2([0; r_N])$, $\overline{\mu}(x_0) \in C^3([0; +\infty))$ *и выполняются условия согласования*

$$\overline{\varphi}(0) = 0, \overline{\varphi}(r_N) = \overline{\mu}(0), \overline{\psi}(0) = 0, \overline{\psi}(r_N) = d\overline{\mu}(0),$$
$$d^2\overline{\varphi}(0) = 0, d^2\overline{\mu}(0) = a^2 d^2 \overline{\varphi}(0),$$
$$d^2\overline{\psi}(0) = 0, d^3\overline{\mu}(0) = a^2 d^2 \overline{\psi}(0).$$

Таким образом, для доказательства существования единственного классического решения исходной задачи необходимо вывести условия на функции задачи (1)–(3), при которых выполняются условия утверждения.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\varphi(\mathbf{x}') \in C^3(\overline{\Omega})$, $\psi(\mathbf{x}') \in C^2(\overline{\Omega})$, $\mu(\mathbf{x}) \in C^3(\Gamma)$. *Классическое решение задачи (1)–(3) существует и единственно в классе* $C^2(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования*

$$\mu(0, \mathbf{x}') = \varphi(\mathbf{x}'),\ \ \partial_{x0}\mu(0, \mathbf{x}') = \psi(\mathbf{x}'),$$
$$\partial^2_{x0}\mu(0, \mathbf{x}') = a^2 \Delta_{\mathbf{x}'}\varphi(\mathbf{x}'),\ \ \partial^3_{x0}\mu(0, \mathbf{x}') = a^2 \Delta_{\mathbf{x}'}\psi(\mathbf{x}').$$

Заключение. В данном сообщении представлены необходимые и достаточные условия согласования для существования единственного классического решения первой смешанной задачи для волнового уравнения в случае четырех независимых переменных, которое задано в цилиндрической области, при достаточной гладкости исходных данных.

Список использованных источников

1. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна–Гордона–Фока в полуполосе / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 8. – С. 1105–1117.

2. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи уравнения Клейна–Гордона–Фока с нелокальными условиями / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 6. – С. 20–27.

3. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения Клейна–Гордона–Фока с нелокальными условиями / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Тр. Ин-та математики. – 2018. – Т. 26, № 1. – С. 56–72.

4. Чернятин, В. А. О разрешимости смешанной задачи для неоднородного гиперболического уравнения / В. А. Чернятин // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, № 4. – С. 717–720.

5. Барановская, С. Н. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии / С. Н. Барановская, Н. И. Юрчук // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1188–1191.

6. Ильин, В. А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений / В. А. Ильин // Успехи математ. наук. – 1960. – Т. 15, № 2. – С. 97–154.

7. Шлапакова, Т. С. Смешанная задача для уравнения колебания ограниченной струны с производной в краевом условии, направленной не по характеристике / Т. С. Шлапакова, Н. И. Юрчук // Вестн. БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2013. – № 1. – С. 64–69.

8. Корзюк, В. И. Классические решения задач для гиперболических уравнений: курс лекций в 10 ч. / В. И. Корзюк, И. С. Козловская. – Минск, 2017. – Ч. 2. – 52 с.

References

1. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the first mixed problem for the Klein–Gordon–Fock equation in a half-strip. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 8, pp. 1098–1111. https://doi.org/10.1134/s0012266114080084

2. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the Klein–Gordon–Fock equation with nonlocal conditions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 6, pp. 20–27 (in Russian).

3. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the Klein–Gordon–Fock equation with the nonlocal conditions. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2018, vol. 26, no. 1, pp. 56–72 (in Russian).

4. Chernyatin V. A. About solvability of the mixed problem for the inhomogeneous hyperbolic equation. *Differentsialnye uravneniya = Differential Equations*, 1988, vol. 24, no. 4, pp. 717–720 (in Russian).

5. Baranovskaya S. N., Yurchuk N. I. Mixed problem for the string vibration equation with a time-dependent oblique derivative in the boundary condition. *Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 8, pp. 1212–1215. https://doi.org/10.1134/s0012266109080126

6. Il'in V. A. The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations. *Russian Mathematical Surveys*, 1960, vol. 15, no. 2, pp. 85–142. https://doi.org/10.1070/rm1960v015n02abeh004217

7. Shlapakova T. S., Yurchuk N. I. Mixed problem for the string oscillation equation with the off-characteristic oblique derivative. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika* [Proceedings of the Belarussian State University. Series 1. Physics. Mathematics. Informatics], 2013, no. 1, pp. 64–69 (in Russian).

8. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. Classical problem solutions for hyperbolic equations: A course of lectures in 10 parts. Minsk, 2017, part 2. 52 p. (in Russian).

Информация об авторах

Корзюк Виктор Иванович – академик, д-р физ.-мат. наук, профессор. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by.

Столярчук Иван Игоревич – канд. физ.-мат. наук. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: ivan.telkontar@gmail.com.

Information about the authors

Korzyuk Viktor I. – Academician, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by.

Stolyarchuk Ivan I. – Ph. D. (Physics and Mathematics). Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ivan.telkontar@gmail.com.