ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

ФИЗИКА

PHYSICS

УДК 539.1
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-2-146-157

Поступило в редакцию 14.09.2020
Received 14.09.2020

Е. М. Овсиюк, А. Д. Коральков

Мозырский государственный педагогический университет имени И. П. Шамякина, Мозырь, Республика Беларусь

ДИРАКОВСКАЯ ЧАСТИЦА ВО ВНЕШНЕМ КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ НА ФОНЕ ПРОСТРАНСТВ ЛОБАЧЕВСКОГО–РИМАНА

(Представлено членом-корреспондентом Д. С. Могилевцевым)

Аннотация. Исследованы известные системы радиальных уравнений, описывающие атом водорода на основе уравнения Дирака в пространствах постоянной кривизны Лобачевского–Римана. В обеих геометрических моделях выведены дифференциальные уравнения второго порядка с шестью регулярными особыми точками, построены их точные решения фробениусовского типа. Для получения правила квантования для значений энергии используется известное условие, выделяющее трансцендентные решения Фробениуса. Это позволяет найти в явном виде спектры энергий, которые интерпретируются физически и похожи на спектры, возникающие из анализа скалярных уравнений Клейна–Фока–Гордона в этих пространственных моделях. Спектры с похожей структурой возникали ранее из анализа этих же систем уравнений на основе применения квазиклассического приближения.

Ключевые слова: дираковская частица, кулоновское поле, пространства постоянной кривизны, решения Фробениуса, условие трансцендентности, спектр энергии

Для цитирования. Овсиюк, Е. М. Дираковская частица во внешнем кулоновском поле на фоне пространств Лобачевского–Римана / Е. М. Овсиюк, А. Д. Коральков // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2021. – Т. 65, № 2. – С. 146–157. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-2-146-157

Elena M. Ovsiyuk, Artem D. Koral'kov

Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Republic of Belarus

DIRAC PARTICLE IN THE EXTERNAL COULOMB FIELD ON THE BACKGROUND OF THE LOBACHEVSKY–RIEMANN SPACE MODELS

(Communicated by Corresponding Member Dmitry S. Mogilevtsev)

Abstract. The known systems of the radial equations describing the hydrogen atom on the basis of the Dirac equation in the Lobachevsky–Riemann spaces of constant curvature are investigated. In the both geometrical models, the differential equations of second order with six regular singular points are found, and their exact solutions of Frobenius type are constructed. To produce the quantization rule for energy values we use the known condition which separates the transcendental Frobenius solutions. This provides us with the energy spectra that are physically interpretable and are similar to those for the Klein–Fock–Gordon particle in these space models. These spectra are similar to those that previously have appeared in studying the same systems of the equations with the use of the semi-classical approximation.

Keywords: Dirac particle, Coulomb field, spaces of constant curvature, Frobenius solutions, transcendency conditions, energy spectrum

For citation. Ovsiyuk E. M., Koral'kov A. D. Dirac particle in the external Coulomb field on the background of the Lobachevsky–Riemann space models. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2021, vol. 65, no. 2, pp. 146–157 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-2-146-157

Введение. Исследованию квантово-механического описания атома водорода на фоне пространств постоянной кривизны Лобачевского–Римана посвящено достаточно много работ [1–15]. Основоположником этих исследований был Э. Шрёдингер [1]. В частности, большой интерес вызвал вопрос об описании скрытой симметрии этой системы в нерелятивистском случае [5–8].

Наиболее трудным и до настоящего времени все еще до конца не решенным оказался случай частицы со спином 1/2. Получаемое для этой системы итоговое радиальное дифференциальное уравнение 2-го порядка оказывается очень сложным: оно имеет 6 регулярных особых точек, с использованием специального приема задачу удается преобразовать к уравнению с 5 особыми точками (см. [14]). Однако в настоящее время надежного метода получить точные решения для этой задачи вместе с точным спектром энергии не существует. В [10; 11] были найдены спектры энергии на основе применения ВКБ-анализа, они представляются вполне удовлетворительными с физической точки зрения и оказываются очень похожими на точные спектры, возникающие при решении уравнения Клейна–Фока–Гордона в этих геометрических моделях.

В настоящей работе для случая частицы со спином 1/2 мы обращаемся к формально точным решениям фробениусовского типа, которые можно построить для возникающих уравнений, и выделяем из этих решений класс так называемых трансцендентных решений Фробениуса. Оказалось, что этот прием позволяет вывести формулы для спектров энергии, которые фактически совпадают с найденными ранее из ВКБ-анализа [10; 11]. Кроме того, для случая сферического пространства Римана такого же вида спектр был получен в [4], при этом, с нашей точки зрения, ошибочно утверждалось, что этому спектру соответствует возможность построить решения системы радиальных уравнений в квазиполиномах.

Атом водорода в пространстве Лобачевского. В пространстве Лобачевского H_3 уравнение Дирака с учетом кулоновского потенциала приводит к системе двух уравнений (придерживаемся обозначений из [14; 15]; радиальная координата обезразмерена делением на радиус кривизны ρ, $r \in (0, \infty)$; $\nu = j + 1/2$):

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{\sinh r}\right) f + \left(E + \frac{e}{\tanh r} + m\right) g = 0, \quad \left(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{\sinh r}\right) g - \left(E + \frac{e}{\tanh r} - m\right) f = 0. \tag{1}$$

Преобразуем систему (1) к новой переменной $\tanh\frac{r}{2} = z,\ z \in (0, 1)$, в результате получим

$$\frac{d}{dz} f + \frac{\nu}{z} f + \left[\frac{e}{z} + \frac{-E - e - m}{z - 1} + \frac{E - e + m}{z + 1}\right] g = 0,$$

$$\frac{d}{dz} g - \frac{\nu}{z} g - \left[\frac{e}{z} + \frac{-E - e + m}{z - 1} + \frac{E - e - m}{z + 1}\right] f = 0.$$

Отсюда следует уравнение 2-го порядка для функции $f(z)$

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \left[\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} - 2\frac{ez + E + m}{ez^2 + 2(E+m)z + e}\right]\frac{df}{dz} +$$

$$+\left[2\frac{2Ee^2 - (E+m)\nu}{ez} + \frac{-(E+e)^2 + m^2 + \nu}{z-1} + \frac{(E-e)^2 - m^2 - \nu}{z+1} + \frac{e^2 - \nu^2}{z^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(E+e)^2 - m^2}{(z-1)^2} + \frac{(E-e)^2 - m^2}{(z+1)^2} + \frac{2\nu[ez(E+m) + 2(E+m)^2 - e^2]}{e[ez^2 + 2(E+m)z + e]}\right] f = 0\,; \tag{2}$$

оно имеет 6 особых точек (вводим обозначение $\frac{E+m}{e} = \sigma > 0$):

$$0\,,\ \infty\,,\ \pm 1,\ z_{1,2} = -\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 1} \quad (z_1 z_2 = 1\,,\ z_1 + z_2 = -2\sigma)\,.$$

Уравнение (2) может быть записано следующим образом:

$$\frac{d^2 f}{dz^2}+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}\right)\frac{df}{dz}+$$

$$+\left(\frac{C-D-2\sigma\nu}{z}-\frac{C-\nu}{z-1}+\frac{D-\nu}{z+1}+\frac{e^2-\nu^2}{z^2}+\frac{C}{(z-1)^2}+\frac{D}{(z+1)^2}+\frac{A}{z-z_1}+\frac{B}{z-z_2}\right)f=0,$$

где

$$A=2\nu\frac{\sigma z_1+2\sigma^2-1}{z_1-z_2},\quad B=2\nu\frac{\sigma z_2+2\sigma^2-1}{z_2-z_1},$$

$$C=(E+e)^2-m^2,\ D=(E-e)^2-m^2,\ 4Ee=C-D.$$

Около сингулярных точек $0,+1,-1$ решения ведут себя так:

$$f\sim(z-1)^{\alpha},\ \alpha=\pm\sqrt{-C};\quad f\sim(z+1)^{\beta},\ \beta=\pm\sqrt{-D};\quad f\sim z^M,\ M=\pm\sqrt{\nu^2-e^2}.$$

Строим решения в виде $f(z)=x^M(z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta}\varphi(z);$ для функции $\varphi(z)$ имеем уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\left[\frac{2M+1}{z}+\frac{2\alpha+1}{z-1}+\frac{2\beta+1}{z+1}-\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}\right]\frac{d\varphi}{dz}+$$

$$+\left[\frac{M^2+e^2-\nu^2}{z^2}+\frac{\alpha^2+C}{(z-1)^2}+\frac{\beta^2+D}{(z+1)^2}+\right.$$

$$+\frac{C-D-(\alpha-\beta)(2M+1)-2\sigma(\nu+M)}{z}+\frac{M(z_1+2\sigma z_1 z_2+z_2)}{z z_2 z_1}+$$

$$+\frac{M+\alpha/2+\beta/2-C+\nu+2M\alpha+\alpha\beta}{z-1}-\frac{\alpha(1-z_1 z_2)}{(z-1)(z_1-1)(z_2-1)}-$$

$$-\frac{M+\alpha/2+\beta/2-D+\nu+2M\beta+\alpha\beta}{z+1}+\frac{\beta(1-z_1 z_2)}{(z+1)(z_1+1)(z_2+1)}+$$

$$\left.+\frac{1}{z-z_1}\left(A-\frac{\alpha}{z_1-1}-\frac{\beta}{z_1+1}-\frac{M}{z_1}\right)+\frac{1}{z-z_2}\left(B-\frac{\alpha}{z_2-1}-\frac{\beta}{z_2+1}-\frac{M}{z_2}\right)\right]\varphi=0.$$

Требуем

$$M=\pm\sqrt{\nu^2-e^2},\quad \alpha=\pm\sqrt{-C}=\pm\sqrt{m^2-(E+e)^2},\quad \beta=\pm\sqrt{-D}=\pm\sqrt{m^2-(E-e)^2},$$

связанным состояниям могут соответствовать значения

$$M=+\sqrt{\nu^2-e^2},\quad \alpha=+\sqrt{m^2-(E+e)^2},\quad \beta=\pm\sqrt{m^2-(E-e)^2}.$$

В результате для функции $\varphi(z)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\left[\frac{2M+1}{z}+\frac{2\alpha+1}{z-1}+\frac{2\beta+1}{z+1}-\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}\right]\frac{d\varphi}{dz}+$$

$$+\left[\frac{C-D-(\alpha-\beta)(2M+1)-2\sigma(\nu+M)}{z}+\frac{M(z_1+2\sigma z_1 z_2+z_2)}{z z_2 z_1}+\right.$$

$$+\frac{M+\alpha/2+\beta/2-C+\nu+2M\alpha+\alpha\beta}{z-1}-\frac{\alpha(1-z_1z_2)}{(z-1)(z_1-1)(z_2-1)}-$$

$$-\frac{M+\alpha/2+\beta/2-D+\nu+2M\beta+\alpha\beta}{z+1}+\frac{\beta(1-z_1z_2)}{(z+1)(z_1+1)(z_2+1)}+$$

$$+\frac{1}{z-z_1}\left(A-\frac{\alpha}{z_1-1}-\frac{\beta}{z_1+1}-\frac{M}{z_1}\right)+\frac{1}{z-z_2}\left(B-\frac{\alpha}{z_2-1}-\frac{\beta}{z_2+1}-\frac{M}{z_2}\right)\Bigg]\varphi=0.$$

Удобно воспользоваться сокращающими формулы обозначениями:

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\left(\frac{P_1}{z}+\frac{P_2}{z-1}+\frac{P_3}{z+1}-\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}\right)\frac{d\varphi}{dz}+\left(\frac{Q_1}{z}+\frac{Q_2}{z-1}+\frac{Q_3}{z+1}+\frac{Q_4}{z-z_1}+\frac{Q_5}{z-z_2}\right)\varphi=0.$$

Решения для $\varphi(z)$ строим в виде степенных рядов $\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}d_nz^n$, находим 6-членные рекуррентные соотношения:

$$k\geq 4,\qquad (Q_1+Q_2+Q_3+Q_4+Q_5)\,d_{k-4}+[(k-3)(k-4)+(P_1+P_2+P_3-2)(k-3)+$$

$$+(-Q_1-Q_2-Q_3-Q_5)z_1+(-Q_1-Q_2-Q_3-Q_4)z_2+Q_2-Q_3]\,d_{k-3}+$$

$$+[(-z_1-z_2)(k-2)(k-3)+\{(1-P_1-P_2-P_3)z_1+(1-P_1-P_2-P_3)z_2+P_2-P_3\}(k-2)+$$

$$+Q_3z_1z_2+Q_2z_1z_2+Q_3z_2-Q_1-Q_4-Q_5+Q_1z_1z_2+Q_3z_1-Q_2z_2-Q_2z_1]\,d_{k-2}+$$

$$+[(z_1z_2-1)(k-1)(k-2)+(2-P_1-P_2z_1+P_3z_2+P_2z_1z_2+P_1z_1z_2+P_3z_1z_2+P_3z_1-P_2z_2)(k-1)+$$

$$+Q_1z_2+Q_2z_1z_2+Q_5z_1+Q_1z_1-Q_3z_1z_2+Q_4z_2]\,d_{k-1}+$$

$$+[(z_1+z_2)k(k-1)+(-z_1-z_2+P_1z_1-P_3z_1z_2+P_1z_2+P_2z_1z_2)k-Q_1z_1z_2]\,d_k+$$

$$+[-z_1z_2(k+1)k-P_1z_1z_2(k+1)]\,d_{k+1}=0. \tag{3}$$

Для анализа вопроса о радиусе сходимости ряда применяем метод Пуанкаре–Перрона. Для этого разделим последнее соотношение на d_{k-4}

$$(Q_1+Q_2+Q_3+Q_4+Q_5)+[(k-3)(k-4)+(P_1+P_2+P_3-2)(k-3)+$$

$$+(-Q_1-Q_2-Q_3-Q_5)z_1+(-Q_1-Q_2-Q_3-Q_4)z_2+Q_2-Q_3]\frac{d_{k-3}}{d_{k-4}}+$$

$$+[(-z_1-z_2)(k-2)(k-3)+\{(1-P_1-P_2-P_3)z_1+(1-P_1-P_2-P_3)z_2+P_2-P_3\}(k-2)+$$

$$+Q_3z_1z_2+Q_2z_1z_2+Q_3z_2-Q_1-Q_4-Q_5+Q_1z_1z_2+Q_3z_1-Q_2z_2-Q_2z_1]\frac{d_{k-2}}{d_{k-3}}\frac{d_{k-3}}{d_{k-4}}+$$

$$+[(z_1z_2-1)(k-1)(k-2)+(2-P_1-P_2z_1+P_3z_2+P_2z_1z_2+P_1z_1z_2+P_3z_1z_2+P_3z_1-P_2z_2)(k-1)+$$

$$+Q_1z_2+Q_2z_1z_2+Q_5z_1+Q_1z_1-Q_3z_1z_2+Q_4z_2]\frac{d_{k-1}}{d_{k-2}}\frac{d_{k-2}}{d_{k-3}}\frac{d_{k-3}}{d_{k-4}}+$$

$$+[(z_1+z_2)k(k-1)+(-z_1-z_2+P_1z_1-P_3z_1z_2+P_1z_2+P_2z_1z_2)k-Q_1z_1z_2]\frac{d_k}{d_{k-1}}\frac{d_{k-1}}{d_{k-2}}\frac{d_{k-2}}{d_{k-3}}\frac{d_{k-3}}{d_{k-4}}+$$

$$+[-z_1z_2(k+1)k-P_1z_1z_2(k+1)]\frac{d_{k+1}}{d_k}\frac{d_k}{d_{k-1}}\frac{d_{k-1}}{d_{k-2}}\frac{d_{k-2}}{d_{k-3}}\frac{d_{k-3}}{d_{k-4}}=0.$$

Делим это уравнение на k^2 и устремляем $k \to \infty$. Для параметра $R = \lim_{k\to\infty}(d_{k-3} / d_{k-4})$ получаем алгебраическое уравнение

$$R - (z_1 + z_2)R^2 + (z_1 z_2 - 1)R^3 + (z_1 + z_2)R^4 - z_1 z_2 R^5 = 0 \quad \Rightarrow \quad R = 0,\ \pm 1,\ \frac{1}{z_1},\ \frac{1}{z_2}.$$

Следовательно, возможны следующие радиусы сходимости:

$$R_{\text{conv}} = \left|\frac{1}{R}\right| = +1, +\infty, |z_1|, |z_2|.$$

Обращаясь к рекуррентным соотношениям (3), убеждаемся, что коэффициент при d_{k-4} обращается в нуль: $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 = 0$, это означает, что в (3) имеем фактически 5-членное рекуррентное соотношение

$$S_{k-3}d_{k-3} + S_{k-2}d_{k-2} + S_{k-1}d_{k-1} + S_k d_k + S_{k+1}d_{k+1} = 0. \tag{4}$$

В качестве правила квантования пробуем условие трансцендентности построенных решений Фробениуса, это дает

$$S_{k-3} = 0, \quad k \ge 3, \qquad (k-3)(k-4) + (P_1 + P_2 + P_3 - 2)(k-3) +$$

$$+ (-Q_1 - Q_2 - Q_3 - Q_5)z_1 + (-Q_1 - Q_2 - Q_3 - Q_4)z_2 + Q_2 - Q_3 = 0,$$

что с учетом явного вида коэффициентов можно записать как

$$k \ge 3, \qquad k^2 + 2(M + \alpha + \beta - 3)k + 2\sigma\nu(z_1 + z_2) +$$

$$+ 2(M + \beta - 3)\alpha + 2(M - 3)\beta + 9 - 6M + 2m^2 + 4\sigma^2\nu - 2e^2 - 2E^2 = 0. \tag{5}$$

Теперь учтем равенства

$$\alpha = +\sqrt{m^2 - (E+e)^2}, \quad \beta = \pm\sqrt{m^2 - (E-e)^2},$$

$$M = \sqrt{\nu^2 - e^2}, \quad z_1 z_2 = 1, \quad z_1 + z_2 = -2\sigma = -2\frac{E+m}{e},$$

тогда (5) принимает вид (разный в зависимости от выбора β):

$$\beta = +\sqrt{m^2 - (E-e)^2},$$

$$\left(\sqrt{m^2 - (E+e)^2} + \sqrt{m^2 - (E-e)^2} + k - 3 + \sqrt{\nu^2 - e^2}\right)^2 - (\nu^2 - e^2) = 0;$$

$$\beta = -\sqrt{m^2 - (E-e)^2},$$

$$\left(\sqrt{m^2 - (E+e)^2} - \sqrt{m^2 - (E-e)^2} + k - 3 + \sqrt{\nu^2 - e^2}\right)^2 - (\nu^2 - e^2) = 0.$$

Будем следить сразу за обоими вариантами. Выражение слева можно разложить в произведение двух множителей (пусть $k - 3 = n,\ n = 0, 1, \ldots$):

$$\left(\sqrt{m^2 - (E+e)^2} \pm \sqrt{m^2 - (E-e)^2} + n\right) \times$$

$$\times \left(\sqrt{m^2 - (E+e)^2} \pm \sqrt{m^2 - (E-e)^2} + n + \sqrt{\nu^2 - e^2} + \sqrt{\nu^2 - e^2}\right) = 0.$$

При верхнем знаке (когда $\beta > 0$) первый сомножитель положительный и не может быть равен нулю, в этом случае остается только уравнение

$$\beta > 0, \quad \left(\sqrt{m^2-(E+e)^2}+\sqrt{m^2-(E-e)^2}+n+\sqrt{\nu^2-e^2}+\sqrt{\nu^2-e^2}\right)=0;$$

но оно не имеет решений в физической области параметров, поскольку слева все слагаемые положительные. Теперь рассматриваем случай нижнего знака (когда $\beta < 0$)

$$\left(\sqrt{m^2-(E+e)^2}-\sqrt{m^2-(E-e)^2}+n\right)\times$$

$$\times\left(\sqrt{m^2-(E+e)^2}-\sqrt{m^2-(E-e)^2}+n+\sqrt{\nu^2-e^2}+\sqrt{\nu^2-e^2}\right)=0.$$

Возникают два альтернативных уравнения:

$$\sqrt{m^2-(E+e)^2}-\sqrt{m^2-(E-e)^2}+n=0; \tag{6}$$

$$\sqrt{m^2-(E+e)^2}-\sqrt{m^2-(E-e)^2}+n+\sqrt{\nu^2-e^2}+\sqrt{\nu^2-e^2}=0. \tag{7}$$

В первое уравнение (6) не входит параметр $\nu = j+1/2,$ наиболее интересный случай (7):

$$\sqrt{m^2-E^2-e^2+2eE}-\sqrt{m^2-E^2-e^2-2eE}=n+2\sqrt{\nu^2-e^2}=2N>0.$$

Отсюда следует формула для уровней энергии

$$E = m\sqrt{\frac{1-(e^2+N^2)/m^2}{1+\dfrac{e^2}{N^2}}}, \quad N=\frac{n}{2}+\sqrt{\nu^2-e^2}. \tag{8}$$

Найденный спектр похож на спектр, известный из построенного в гипергеометрических функциях точного решения уравнения Клейна–Фока–Гордона с учетом кулоновского поля на фоне пространства Лобачевского. Существует ограничение: выражение под корнем в (8) должно быть положительным, это дает

$$1 > \frac{e^2+N^2}{m^2}.$$

Выясним, нельзя ли получить решения с этим спектром на основе полиномов. Для этого следует обратиться к рекуррентным формулам (4)

$$S_{k-3}d_{k-3}+S_{k-2}d_{k-2}+S_{k-1}d_{k-1}+S_k d_k+S_{k+1}d_{k+1}=0.$$

Пусть $S_{k-3}=0,$ отсюда следует спектр (8). Если при этом выполняются еще три равенства, то в силу рекуррентных формул ряд оборвется до полиномов:

$$d_{k-2}=0, \quad d_{k-1}=0, \quad d_k=0 \quad \Rightarrow \quad d_{k+1}=0, \quad d_{k+2}=0, \ldots$$

Легко можно убедиться с использованием численных методов, что при значениях энергии, следующих из условия трансцендентности, степенные ряды не обрываются. Например, пусть $n=5,$ тогда при

$$e=\frac{1}{137}, \quad m=2\cdot 10^3, \quad \nu=1, \quad n=5, \quad \varepsilon=1999{,}99258815142177581;$$

при сохранении 20 членов ряда убеждаемся, что он не превращается в полином:

$$\varphi(z)=1+730657{,}434z-4{,}57148738\cdot 10^6 z^2+5{,}274935\cdot 10^6 z^3-602972{,}6478z^4+$$

$$+591399{,}332z^5+586542{,}255z^6+634277{,}967z^7+680299{,}381272z^8+$$

$$+\,723806{,}99277z^9+764600{,}05174z^{10}+802779{,}5976z^{11}+838564{,}1712z^{12}+\ldots;$$

напоминаем, что $z=\tanh(r/2)=\tanh\dfrac{R}{2\rho}$, ρ – радиус кривизны пространства.

Атом водорода в сферическом пространстве Римана. В сферическом пространстве Римана S_3 уравнение Дирака с учетом кулоновского потенциала приводит к системе двух уравнений:

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{\nu}{\sin r}\right)f+\left(E+\frac{e}{\tan r}+m\right)g=0,\quad \left(\frac{d}{dr}-\frac{\nu}{\sin r}\right)g-\left(E+\frac{e}{\tan r}-m\right)f=0;$$

$r\in[0,\pi]$ – безразмерная радиальная координата. Преобразуем систему уравнений к новой переменной

$$z=i\tan\frac{r}{2},\quad \cos r=\frac{1+z^2}{1-z^2},\quad \sin r=\frac{-2iz}{1-z^2},\quad z\in[0,+i\infty);$$

в результате получим

$$\frac{df}{dz}+\frac{\nu}{z}f+\left(\frac{e}{z}+\frac{iE-e+im}{z-1}+\frac{-iE-e-im}{z+1}\right)g=0,$$

$$\frac{dg}{dz}-\frac{\nu}{z}g+\left(-\frac{e}{z}+\frac{-iE+e+im}{z-1}+\frac{iE+e-im}{z+1}\right)f=0.$$

Отсюда следует уравнение 2-го порядка для функции $f(z)$:

$$\frac{d^2f}{dz^2}+\left[\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}+2\frac{-ez+iE+im}{ez^2-2i(E+m)z+e}\right]\frac{df}{dz}+$$

$$+\left[-2i\frac{2Ee^2-(E+m)\nu}{ez}+\frac{e^2-\nu^2}{z^2}+\frac{(E+ie)^2-m^2+\nu}{z-1}+\frac{-(E+ie)^2+m^2}{(z-1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{-(E-ie)^2+m^2-\nu}{z+1}+\frac{-(E-ie)^2+m^2}{(z+1)^2}+\frac{2\nu[iez(E+m)+2(E+m)^2+e^2]}{e[-ez^2+2i(E+m)z-e]}\right]f=0. \tag{9}$$

Используем обозначение $\dfrac{E+m}{e}=\sigma>0$, уравнение (9) имеет 6 особых точек:

$$0,\infty,\pm1,\ z_{1,2}=i\left(\sigma\pm\sqrt{\sigma^2+1}\right);$$

физической областью изменения переменной является интервал $z\in[0,+i\infty)$. Уравнение (9) может быть записано короче:

$$\frac{d^2f}{dz^2}+\left[\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}\right]\frac{df}{dz}+$$

$$+\left[\frac{C-D+2i\sigma\nu}{z}+\frac{e^2-\nu^2}{z^2}-\frac{C-\nu}{z-1}+\frac{C}{(z-1)^2}+\frac{D-\nu}{z+1}+\frac{D}{(z+1)^2}+\frac{A}{z-z_1}+\frac{B}{z-z_2}\right]f=0,$$

где

$$A=-\frac{2\nu\left(iz_1\sigma+1+2\sigma^2\right)}{z_1-z_2},\quad B=-\frac{2\nu\left(iz_2\sigma+1+2\sigma^2\right)}{z_2-z_1},$$

$$C=-(E+ie)^2+m^2,\quad D=-(E-ie)^2+m^2,\quad -4iEe=C-D.$$

Строим решения Фробениуса в виде $f(z) = z^{M}(z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta}\,\varphi(z)$; для функции $\varphi(z)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \left[\frac{2M+1}{z} + \frac{2\alpha+1}{z-1} + \frac{2\beta+1}{z+1} - \frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2}\right]\frac{d\varphi}{dz} +$$

$$+\left[\frac{M^2+e^2-\nu^2}{z^2} + \frac{\alpha^2+C}{(z-1)^2} + \frac{\beta^2+D}{(z+1)^2} +\right.$$

$$+\frac{C-D-(\alpha-\beta)(2M+1)+2i\sigma(\nu+M)}{z} + \frac{M(z_1-2i\sigma z_1 z_2+z_2)}{z z_2 z_1} +$$

$$+\frac{M+\alpha/2+\beta/2-C+\nu+2M\alpha+\alpha\beta}{z-1} - \frac{\alpha(1-z_1 z_2)}{(z-1)(z_1-1)(z_2-1)} -$$

$$-\frac{M+\alpha/2+\beta/2-D+\nu+2M\beta+\alpha\beta}{z+1} + \frac{\beta(1-z_1 z_2)}{(z+1)(z_1+1)(z_2+1)} +$$

$$\left.+\frac{1}{z-z_1}\left(A-\frac{\alpha}{z_1-1}-\frac{\beta}{z_1+1}-\frac{M}{z_1}\right)+\frac{1}{z-z_2}\left(B-\frac{\alpha}{z_2-1}-\frac{\beta}{z_2+1}-\frac{M}{z_2}\right)\right]\varphi = 0.$$

Требуем

$$M = \pm\sqrt{\nu^2-e^2}\,,$$

$$\alpha = \pm\sqrt{-C} = \pm\sqrt{(E+ie)^2-m^2} = \pm\sqrt{E^2-m^2-e^2+2ieE},$$

$$\beta = \pm\sqrt{-D} = \pm\sqrt{(E-ie)^2-m^2} = \pm\sqrt{E^2-m^2-e^2-2ieE}.$$

Чтобы решения обращались в нуль около точки $z = 0\ (r = 0)$, нужно использовать положительное значение для параметра M: $M = +\sqrt{\nu^2-e^2}$; около точки $z = +\infty\ (r = \pi)$ множитель перед $\varphi(z)$ ведет себя так:

$$z^{M}(z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta} \sim x^{\sqrt{\nu^2-e^2}+(\alpha+\beta)},$$

в зависимости от знаков при α, β имеем 4 возможности:

$$(-,-) \qquad \alpha+\beta = -\sqrt{E^2-m^2-e^2+2ieE} - \sqrt{E^2-m^2-e^2-2ieE} < 0;$$

$$(+,+) \qquad \alpha+\beta = \sqrt{E^2-m^2-e^2+2ieE} + \sqrt{E^2-m^2-e^2-2ieE} > 0;$$

$$(+,-) \qquad \alpha+\beta = \sqrt{E^2-m^2-e^2+2ieE} - \sqrt{E^2-m^2-e^2-2ieE} - \text{мнимое};$$

$$(-,+) \qquad \alpha+\beta = -\sqrt{E^2-m^2-e^2+2ieE} + \sqrt{E^2-m^2-e^2-2ieE} - \text{мнимое};$$

только две первые возможности могут дать стремящийся к нулю множитель перед $\varphi(z)$.

В результате для функции $\varphi(z)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \left[\frac{2M+1}{z} + \frac{2\alpha+1}{z-1} + \frac{2\beta+1}{z+1} - \frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2}\right]\frac{d\varphi}{dz} +$$

$$+\left[\frac{C-D-(\alpha-\beta)(2M+1)+2i\sigma(\nu+M)}{z} + \frac{M(z_1-2i\sigma z_1 z_2+z_2)}{z z_2 z_1} +\right.$$

$$+\frac{M+\alpha/2+\beta/2-C+\nu+2M\alpha+\alpha\beta}{z-1}-\frac{\alpha(1-z_1 z_2)}{(z-1)(z_1-1)(z_2-1)}-$$

$$-\frac{M+\alpha/2+\beta/2-D+\nu+2M\beta+\alpha\beta}{z+1}+\frac{\beta(1-z_1 z_2)}{(z+1)(z_1+1)(z_2+1)}+$$

$$+\frac{1}{z-z_1}\left(A-\frac{\alpha}{z_1-1}-\frac{\beta}{z_1+1}-\frac{M}{z_1}\right)+\frac{1}{z-z_2}\left(B-\frac{\alpha}{z_2-1}-\frac{\beta}{z_2+1}-\frac{M}{z_2}\right)\Bigg]\varphi=0.$$

Представим его в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\left(\frac{P_1}{z}+\frac{P_2}{z-1}+\frac{P_3}{z+1}-\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}\right)\frac{d\varphi}{dz}+\left(\frac{Q_1}{z}+\frac{Q_2}{z-1}+\frac{Q_3}{z+1}+\frac{Q_4}{z-z_1}+\frac{Q_5}{z-z_2}\right)\varphi=0.$$

Решения для $\varphi(z)$ строим в виде степенных рядов, приходим к 6-членным соотношениям:

$$k\geq 4,\qquad (Q_1+Q_2+Q_3+Q_4+Q_5)\,d_{k-4}+[(k-3)(k-4)+\big(P_1+P_2+P_3-2\big)(k-3)+$$

$$+(-Q_1-Q_2-Q_3-Q_5)z_1+(-Q_1-Q_2-Q_3-Q_4)z_2+Q_2-Q_3]d_{k-3}+$$

$$+[(-z_1-z_2)(k-2)(k-3)+\{(1-P_1-P_2-P_3)z_1+(1-P_1-P_2-P_3)z_2+P_2-P_3\}(k-2)+$$

$$+Q_3 z_1 z_2+Q_2 z_1 z_2+Q_3 z_2-Q_1-Q_4-Q_5+Q_1 z_1 z_2+Q_3 z_1-Q_2 z_2-Q_2 z_1]d_{k-2}+$$

$$+[(z_1z_2-1)(k-1)(k-2)+(2-P_1-P_2z_1+P_3z_2+P_2z_1z_2+P_1z_1z_2+P_3z_1z_2+P_3z_1-P_2z_2)(k-1)+$$

$$+Q_1 z_2+Q_2 z_1 z_2+Q_5 z_1+Q_1 z_1-Q_3 z_1 z_2+Q_4 z_2]d_{k-1}+$$

$$+[(z_1+z_2)\,k\,(k-1)+(-z_1-z_2+P_1 z_1-P_3 z_1 z_2+P_1 z_2+P_2 z_1 z_2)k-Q_1 z_1 z_2]\,d_k+$$

$$+[-z_1 z_2\,(k+1)k-P_1 z_1 z_2\,(k+1)]\,d_{k+1}=0. \tag{10}$$

Для анализа вопроса о радиусе сходимости ряда применим метод Пуанкаре–Перрона. Так, находим возможные радиусы сходимости

$$R_{\text{conv}}=\left|\frac{1}{R}\right|=+1,+\infty,|\,z_1\,|,|\,z_2\,|.$$

Убеждаемся, что коэффициент при d_{k-4} в (10) обращается тождественно в нуль, это означает, что в (10) имеем 5-членное рекуррентное соотношение

$$k\geq 4,\quad S_{k-3}d_{k-3}+S_{k-2}d_{k-2}+S_{k-1}d_{k-1}+S_k d_k+S_{k+1}d_{k+1}=0.$$

Используем условие трансцендентности решений, что дает уравнение

$$S_{k-3}=0,\quad k\geq 3,\quad (k-3)(k-4)+(P_1+P_2+P_3-2)(k-3)+$$

$$+(-Q_1-Q_2-Q_3-Q_5)z_1+(-Q_1-Q_2-Q_3-Q_4)z_2+Q_2-Q_3=0,$$

которое с учетом явного вида коэффициентов можно записать следующим образом:

$$k^2+(2M+2\alpha+2\beta-6)k-(B+2i\sigma\nu)z_1-(A+2i\sigma\nu)z_2+$$

$$+(2M+2\beta-6)\alpha+(2M-6)\beta-6M-C-D+2\nu+9=0.$$

Учтем выражения для A, B, C, D:

$$A=-\frac{2\nu(iz_1\sigma+1+2\sigma^2)}{z_1-z_2},\quad B=-\frac{2\nu(iz_2\sigma+1+2\sigma^2)}{z_2-z_1},$$

$$C = -(E+ie)^2 + m^2, \quad D = -(E-ie)^2 + m^2, \quad -4iEe = C - D,$$

в результате условие трансцендентности примет вид

$$k^2 + 2k(M+\alpha+\beta-3) - 2i\sigma\nu(z_1+z_2) + 2(M+\beta-3)\alpha + 2(M-3)\beta +$$
$$+9 - 6M - 2m^2 - 4\nu\sigma^2 - 2e^2 + 2E^2 = 0. \quad (11)$$

Проследим за двумя возможностями. Пусть

$$M = \sqrt{\nu^2 - e^2}, \quad \alpha = +\sqrt{(E+ie)^2 - m^2}, \quad \beta = +\sqrt{(E-ie)^2 - m^2},$$

тогда (11) дает

$$\left(\sqrt{(E+ie)^2 - m^2} + \sqrt{(E-ie)^2 - m^2} + k - 3 + \sqrt{\nu^2 - e^2}\right)^2 - (\nu^2 - e^2) = 0;$$

левую часть можно разложить в произведение двух сомножителей

$$\left(\sqrt{(E+ie)^2 - m^2} + \sqrt{(E-ie)^2 - m^2} + k - 3\right)\times$$
$$\times\left(\sqrt{(E+ie)^2 - m^2} + \sqrt{(E-ie)^2 - m^2} + k - 3 + 2\sqrt{\nu^2 - e^2}\right) = 0,$$

т. е. возникают два уравнения (пусть $n = k - 3$)

$$\sqrt{(E+ie)^2 - m^2} + \sqrt{(E-ie)^2 - m^2} + n = 0,$$
$$\sqrt{(E+ie)^2 - m^2} + \sqrt{(E-ie)^2 - m^2} + n + 2\sqrt{\nu^2 - e^2} = 0.$$

Теперь пусть

$$M = \sqrt{\nu^2 - e^2}, \quad \alpha = -\sqrt{(E+ie)^2 - m^2}, \quad \beta = -\sqrt{(E-ie)^2 - m^2},$$

тогда

$$\left(\sqrt{(E+ie)^2 - m^2} + \sqrt{(E-ie)^2 - m^2} - (k-3) - \sqrt{\nu^2 - e^2}\right)^2 - (\nu^2 - e^2) = 0.$$

Левую часть последнего уравнения можно разложить в произведение двух сомножителей

$$\left(\sqrt{(E+ie)^2 - m^2} + \sqrt{(E-ie)^2 - m^2} - (k-3)\right)\times$$
$$\times\left(\sqrt{(E+ie)^2 - m^2} + \sqrt{(E-ie)^2 - m^2} - (k-3) - 2\sqrt{\nu^2 - e^2}\right) = 0,$$

т. е. возникают два уравнения

$$\sqrt{(E+ie)^2 - m^2} + \sqrt{(E-ie)^2 - m^2} - n = 0, \quad (12)$$
$$\sqrt{(E+ie)^2 - m^2} + \sqrt{(E-ie)^2 - m^2} - n - 2\sqrt{\nu^2 - e^2} = 0.$$

Приводящим к физическому спектру энергии является уравнение (12):

$$\sqrt{(E+ie)^2 - m^2} = 2N - \sqrt{(E-ie)^2 - m^2}, \quad N = n/2 + \sqrt{\nu^2 - e^2}.$$

Отсюда устанавливаем следующий спектр энергий:

$$E = m\sqrt{\frac{1 + (e^2 + N^2)/m^2}{1 + e^2/N^2}}, \quad N = \frac{n}{2} + \sqrt{\nu^2 - e^2}, \quad m = \frac{Mc\rho}{\hbar}.$$

Аналогично случаю пространства Лобачевского можно убедиться, что соответствующие этому спектру энергии решения не могут быть построены на основе полиномов.

Заключение. В работе показано, что воспользовавшись условием трансцендентности решений Фробениуса для частицы в кулоновском поле на фоне пространств Лобачевского–Римана, можно получить спектры энергий, которые интерпретируются физически; вместе со спектрами построены и точные решения. Отметим, что пока нельзя утверждать, что полученные спектры являются полностью корректными, поскольку не доказанной является квадратичная интегрируемость найденных решений, хотя есть возможность тестировать квадратичную интегрируемость численными методами.

Список использованных источников

1. Schrödinger, E. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions / E. Schrödinger // Proceedings of the Royal Irish Academy. – 1940. – Vol. 46, N 1. – P. 9–16.

2. Infeld, L. A note on the Kepler problem in a space of constant negative curvature / L. Infeld, A. Schild // Physical Review. – 1945. – Vol. 67, N 3–4. – P. 121–122. https://doi.org/10.1103/physrev.67.121

3. Bessis, N. Electronic wave functions in a space of constant curvature / N. Bessis, G. Bessis // Journal of Physics A. – 1979. – Vol. 12, N 11. – P. 1991–1997. https://doi.org/10.1088/0305-4470/12/11/012

4. Shamseddine, R. On the resolution of the wave equations of electron in a space of constant curvature / R. Shamseddine // Canadian Journal of Physics. – 1997. – Vol. 75, N 11. – P. 805–811. https://doi.org/10.1139/p97-025

5. Higgs, P. W. Dynamical symmetries in a spherical geometry. I / P. W. Higgs // Journal of Physics A. – 1979. – Vol. 12, N 3. – P. 309–323. https://doi.org/10.1088/0305-4470/12/3/006

6. Leemon, H. I. Dynamical symmetries in a spherical geometry. II / H. I. Leemon // Journal of Physics A. – 1979. – Vol. 12, N 4. – P. 489–501. https://doi.org/10.1088/0305-4470/12/4/009

7. Курочкин, Ю. А. Аналог вектора Рунге–Ленца и спектр энергий в задаче Кеплера на трехмерной сфере / Ю. А. Курочкин, В. С. Отчик // Докл. АН БССР. – 1979. – Т. 23, № 11. – С. 987–990.

8. Bogush, A. A. Coulomb scattering in the Lobachevsky space / A. A. Bogush, Yu. A. Kurochkin, V. S. Otchik // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2003. – Vol. 6. – P. 894–897.

9. Bessis, N. Space-curvature effects in atomic fine- and hyperfine-structure calculations / N. Bessis, G. Bessis, R. Shamseddine // Physical Review A. – 1984. – Vol. 29, N 5. – P. 2375–2388. https://doi.org/10.1103/physreva.29.2375

10. Отчик, В. С. Квантовомеханическая задача Кеплера в пространствах постоянной кривизны / В. С. Отчик, В. М. Редьков. – Минск, 1986. – 49 с. (Препринт / ИФ АН БССР № 298).

11. Red'kov, V. M. On WKB-quantization in Lobachevsky and Riemann 3-spaces / V. M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2003. – Vol. 6, N 2. – P. 654–668.

12. Red'kov, V. M. Parabolic coordinates and the hydrogen atom in spaces H_3 and S_3 / V. M. Red'kov, E. M. Ovsiyuk // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2011. – Vol. 14, N 2. – P. 1–20.

13. Kurochkin, Yu. A. Magnetic field in the Lobachevsky space and related integrable systems / Yu. A. Kurochkin, V. S. Otchik, E. M. Ovsiyuk // Ядерная физика. – 2012. – Т. 75, № 10. – С. 1316–1320.

14. Red'kov, V. M. Quantum mechanics in spaces of constant curvature / V. M. Red'kov, E. M. Ovsiyuk. – New York, 2012. – 434 p.

15. Овсиюк, Е. М. Точно решаемые задачи квантовой механики и классической теории поля в пространствах с неевклидовой геометрией / Е. М. Овсиюк. – Минск, 2013. – 406 с.

References

1. Schrödinger E. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions. *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 1940, vol. 46, no. 1, pp. 9–16.

2. Infeld L., Schild A. A note on the Kepler problem in a space of constant negative curvature. *Physical Review*, 1945, vol. 67, no. 3–4, pp. 121–122. https://doi.org/10.1103/physrev.67.121

3. Bessis N., Bessis G. Electronic wave functions in a space of constant curvature. *Journal of Physics A*, 1979, vol. 12, no. 11, pp. 1991–1997. https://doi.org/10.1088/0305-4470/12/11/012

4. Shamseddine R. On the resolution of the wave equations of electron in a space of constant curvature. *Canadian Journal of Physics*, 1997, vol. 75, no. 11, pp. 805–811. https://doi.org/10.1139/p97-025

5. Higgs P. W. Dynamical symmetries in a spherical geometry. I. *Journal of Physics A*, 1979, vol. 12, no. 3, pp. 309–323. https://doi.org/10.1088/0305-4470/12/3/006

6. Leemon H. I. Dynamical symmetries in a spherical geometry. II. *Journal of Physics A*, 1979, vol. 12, no. 4, pp. 489–501. https://doi.org/10.1088/0305-4470/12/4/009

7. Kurochkin Yu. A., Otchik V. S. An analogue of the Runge–Lenz vector and the energy spectrum in the Kepler problem on a three-dimensional sphere. *Doklady Akademii nauk BSSR = Doklady of the Academy of Sciences of the BSSR*, 1979, vol. 23, no. 11, pp. 987–990 (in Russian).

8. Bogush A. A., Kurochkin Yu. A., Otchik V. S. Coulomb scattering in the Lobachevsky space. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2003, vol. 6, pp. 894–897.

9. Bessis N., Bessis G., Shamseddine R. Space-curvature effects in atomic fine- and hyperfine-structure calculations. *Physical Review A*, 1984, vol. 29, no. 5, pp. 2375–2388. https://doi.org/10.1103/physreva.29.2375

10. Otchik V. S., Red'kov V. M. *Kepler's quantum-mechanical problem in spaces of constant curvature*. Minsk, 1986. 49 p. (in Russian).

11. Red'kov V. M. On WKB-quantization in Lobachevsky and Riemann 3-spaces. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2003, vol. 6, no. 2, pp. 654–668.

12. Red'kov V. M., Ovsiyuk E. M. Parabolic coordinates and the hydrogen atom in spaces H_3 and S_3. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2011, vol. 14, no. 2, pp. 1–20.

13. Kurochkin Yu. A., Otchik V. S., Ovsiyuk E. M. Magnetic field in the Lobachevsky space and related integrable systems. *Physics of Atomic Nuclei*, 2012, vol. 75, no. 10, pp. 1245–1249. https://doi.org/10.1134/s1063778812100122

14. Red'kov V. M., Ovsiyuk E. M. *Quantum mechanics in spaces of constant curvature*. New York, 2012. 434 p.

15. Ovsiyuk E. M. *Exactly solvable problems of quantum mechanics and classical field theory in spaces with non-Euclidean geometry*. Minsk, 2013. 406 p. (in Russian).

Информация об авторах

Овсиюк Елена Михайловна – канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой. Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина (ул. Студенческая, 28, 247760, Мозырь, Гомельская обл., Республика Беларусь). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru.

Коральков Артем Дмитриевич – магистрант. Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина (ул. Студенческая, 28, 247760, Мозырь, Гомельская обл., Республика Беларусь). E-mail: artemkoralkov@gmail.com.

Information about the authors

Ovsiyuk Elena M. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Head of the Department. Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin (28, Studencheskaya Str., 247760, Mozyr, Gomel region, Republic of Belarus). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru.

Koral'kov Artem D. – Undergraduate. Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin (28, Studencheskaya Str., 247760, Mozyr, Gomel region, Republic of Belarus). E-mail: artemkoralkov@gmail.com.