ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.977 Поступило в редакцию 30.03.2021
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-3-263-268 Received 30.03.2021

А. К. Деменчук

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НИЖНЕТРЕУГОЛЬНЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ УСРЕДНЕНИЯ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Аннотация. Рассматривается линейная система управления с почти периодической матрицей коэффициентов и управлением в виде обратной связи, линейной по фазовым переменным. Предполагается, что коэффициент обратной связи является почти периодическим и модуль его частот, т. е. наименьшая аддитивная группа вещественных чисел, включающая все показатели Фурье этого коэффициента, содержится в частотном модуле матрицы коэффициентов. Изучается случай, когда матрица при управлении является вырожденной, а усреднение матрицы коэффициентов приводится к нижнетреугольному виду. Для описанного класса систем ставится задача управления асинхронным спектром с целевым множеством частот, которая заключается в построении такого управления из допустимого множества, чтобы у замкнутой этим управлением системы появились почти периодические решения, множество показателей Фурье которых содержит наперед заданное подмножество, а пересечение модулей частот решения и матрицы коэффициентов тривиально. В работе получены необходимые и достаточные условия разрешимости поставленной задачи.

Ключевые слова: почти периодические линейные системы, нулевое среднее значение, показатели Фурье, сильно нерегулярные колебания, асинхронный спектр

Для цитирования. Деменчук, А. К. Разрешимость задачи управления асинхронным спектром линейных почти периодических систем с нижнетреугольным представлением усреднения матрицы коэффициентов / А. К. Деменчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2021. – Т. 65, № 3. – С. 263–268. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-3-263-268

Aleksandr K. Demenchuk

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

SOLVABILITY OF THE CONTROL PROBLEM OF THE ASYNCHRONOUS SPECTRUM OF LINEAR ALMOST PERIODIC SYSTEMS WITH A LOWER TRIANGULAR REPRESENTATION OF THE AVERAGING OF THE COEFFICIENT MATRIX

(Communicated by Academician Nikolay A. Izobov)

Abstract. A linear control system with an almost periodic matrix of coefficients and control in the form of the feedback linear in phase variables is considered. It is assumed that the feedback coefficient is almost periodic and its frequency module, i. e. the smallest additive group of real numbers, including all the Fourier exponents of this coefficient, is contained in the frequency module of the coefficient matrix. The system under consideration is studied in the case of a triangular average value of the matrix of coefficients. For the described class of systems, the control problem of the asynchronous spectrum with a target set of frequencies is solved. This task is to construct such a control from an admissible set that the system closed by this control has almost periodic solutions, a set of the Fourier exponents of which contains a predetermined subset, and the intersection of the solution frequency modules and the coefficient matrix is trivial. The necessary and sufficient conditions for the solvability of this problem are obtained.

For citation. Demenchuk A. K. Solvability of the control problem of the asynchronous spectrum of linear almost periodic systems with a lower triangular representation of the averaging of coefficient matrix. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2021, vol. 65, no. 3, pp. 263–268 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-3-263-268

Введение. Различные аспекты теории управления для обыкновенных дифференциальных систем почти периодических уравнений изучались в целом ряде работ [1–3], существенной особенностью которых является рассмотрение так называемого регулярного случая, когда априори предполагается совпадение частот самой системы и ее решений. Вместе с тем, как известно [4], система обыкновенных дифференциальных почти периодических уравнений при выполнении определенных условий может иметь такие решения, что пересечение частотных модулей решения и самой системы является тривиальным. Впоследствии такого рода решения были названы сильно нерегулярными, а описываемые ими колебания – асинхронными с соответствующим спектром. Отметим, что в периодическом случае нерегулярность означает несоизмеримость частот решения и системы [5].

Задача синтеза линейных обыкновенных почти периодических дифференциальных систем, обладающих сильно нерегулярными решениями, была поставлена как задача управления асинхронным спектром в [6], где даны условия разрешимости для случая, когда среднее значение матрицы коэффициентов нулевое. В дополнение к этому в [7] изучен случай, когда усреднение коэффициентной матрицы является диагональным, а матрица при управлении имеет нулевые строки.

В настоящем сообщении исследуются вопросы разрешимости задачи управления асинхронным спектром линейных почти периодических систем, у которых среднее значение матрицы коэффициентов приводится к нижнетреугольному виду.

Постановка задачи. Будем рассматривать линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in R, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

где $x \in R^n$ – фазовый вектор; $u = u(t) \in R^n$ – вход; $A(t)$– непрерывная почти периодическая $(n \times n)$-матрица; B – постоянная $(n \times n)$-матрица при управлении. Считаем, что управление задается в виде линейной по фазовым переменным обратной связи

$$u = U(t)x$$

с непрерывной почти периодической $(n \times n)$-матрицей $U(t)$, модуль частот которой содержится в частотном модуле матрицы коэффициентов $A(t)$. Для системы (1) ставится задача выбора такой матрицы $U(t)$ (коэффициента обратной связи), чтобы замкнутая система

$$\dot{x} = (A(t) + BU(t))x \tag{2}$$

имела сильно нерегулярное почти периодическое решение с заданным спектром частот L (целевым множеством), т. е. задача управления спектром нерегулярных колебаний с целевым множеством L или задача управления асинхронным спектром. Такой подход, в отличие от регулярного случая, предполагает принципиальное различие множества частот коэффициента системы (2) и ее почти периодического решения, которое заключается в том, что никакая нетривиальная частота системы (2) не представима линейной кобинацией с рациональными коэффициентами частот решения.

Основной результат. Случай, когда матрица при управлении невырождена, изучен в [6]. Поэтому будем предполагать, что выполняется условие

$$\operatorname{rank} B = r < n, \quad (n - r = d). \tag{3}$$

В таком случае согласно [8, с. 110] найдется постоянная неособенная вещественная $(n \times n)$-матрица S такая, что у матрицы $D = SB$ первые d строк нулевые, в то время как остальные r строк линейно независимы.

Имеет место

Т е о р е м а 1. *Пусть для системы (1) выполняется условие (3) и матрица*

$$\hat{C} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T C(t)dt,$$

где $C(t) = S^{-1}A(t)S$,
имеет вид

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \hat{c}_{11} & 0 & 0\ldots & 0 \\ \hat{c}_{21} & \hat{c}_{22} & 0\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hat{c}_{n1} & \hat{c}_{n2} & \hat{c}_{n3}\ldots & \hat{c}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L системы (1) разрешима тогда и только тогда, когда левый верхний блок размера $d \times r$ *матрицы* $C(t)$ *имеет неполный столбцовый ранг, равный* r_1, *и мощность целевого множества частот ограничена величиной* $[(r - r_1)/2]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполнены условия теоремы и $L = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ – целевое множество частот. Введем в системе (2) замену фазовых переменных

$$y = Sx. \tag{4}$$

Тогда система (2) преобразуется в систему

$$\dot{y} = (C(t) + DV(t))y, \tag{5}$$

где

$$V(t) = U(t)S^{-1},\ D = QB,$$

и матрица D имеет описанный выше вид. Ввиду невырожденности преобразования (4) частотные спектры решений систем (2) и (5) совпадают.

Из [9] следует, что система (5) имеет сильно нерегулярное почти периодическое решение тогда и только тогда, когда это решение удовлетворяет системе

$$\dot{y} = (\hat{C} + D\hat{V})y,\ (\tilde{C}(t) + D\tilde{V}(t))y = 0, \tag{6}$$

где

$$\hat{V} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T V(s)ds,\ \tilde{C}(t) = C(t) - \hat{C},\ \tilde{V}(t) = V(t) - \hat{V}.$$

Обозначим матрицу, составленную из последних r строк матрицы D, через $D_{r,n}$. Из строения матрицы D следует, что выполняется условие

$$\operatorname{rank} D_{r,n} = r. \tag{7}$$

Ранговое условие (7) означает, что у матрицы $D_{r,n}$ строки линейно независимы. Поскольку их число меньше числа столбцов, то добавление в такой матрице произвольных столбцов не меняет ее ранг.

Представим матрицу коэффициентов $C(t)$ системы (5) в блочном виде, соответствующем структуре матрицы D. Пусть $C_{d,d}^{(11)}(t)$, $C_{r,d}^{(21)}(t)$ – ее левые верхний и нижний, а $C_{d,r}^{(12)}(t)$, $C_{r,r}^{(22)}(t)$ – правые верхний и нижний блоки (нижние индексы блоков указывают их размерность). Соответственно такому представлению усредненную матрицу $\hat{C}$ в свою очередь разобьем на четыре блока таких же размерностей $\hat{C}_{d,d}^{(11)}$, $\hat{C}_{r,d}^{(21)}$, $\hat{C}_{d,r}^{(12)}$, $\hat{C}_{r,r}^{(22)}$.

Принимая во внимание строение матрицы D и блочное представление усреднения матрицы коэффициентов $C(t)$, систему (6) запишем в виде

$$\begin{gathered}\dot{y}^{[d]}=\hat{C}^{(11)}_{d,d}y^{[d]}+\hat{C}^{(12)}_{d,r}y_{[r]},\\ \dot{y}_{[r]}=(\hat{C}^{(21)}_{r,d}+D_{r,n}\hat{V}_{n,d})y^{[d]}+(\hat{C}^{(22)}_{r,r}+D_{r,n}\hat{V}_{n,r})y_{[r]},\\ \tilde{C}^{(11)}_{d,d}(t)y^{[d]}+\tilde{C}^{(12)}_{d,r}(t)y_{[r]}=0,\\ (\tilde{C}^{(21)}_{r,d}(t)+D_{r,n}\tilde{V}_{n,d}(t))y^{[d]}+(\tilde{C}^{(22)}_{r,r}(t)+D_{r,n}\tilde{V}_{n,r}(t))y_{[r]}=0,\end{gathered}\tag{8}$$

где приняты следующие обозначения: $y=\text{col}\,(y_1,\ldots,y_n)=\text{col}\,(y^{[d]},y_{[r]})$, $y^{[d]}=\text{col}\,(y_1,\ldots,y_d)$, $y_{[r]}=\text{col}\,(y_{d+1},\ldots,y_n)$, $\hat{V}=\{\hat{V}_{n,d}\;\hat{V}_{n,r}\},\tilde{V}(t)=\{\tilde{V}_{n,d}(t)\;\tilde{V}_{n,r}(t)\}$ – соответствующее представление стационарной и осциллирующей компонент матрицы $V(t)$.

Заметим, что в силу вещественности матрицы S матрица $\hat{C}$ также будет вещественной. Поскольку матрица $\hat{C}$ является нижнетреугольной, то блок $\hat{C}^{(12)}_{d,r}$ будет нулевым, $\tilde{C}^{(12)}_{d,r}(t)=C^{(12)}_{d,r}(t)$, а блок $\hat{C}^{(11)}_{d,d}$ – нижнетреугольной вещественной матрицей, которая не имеет чисто мнимых собственных чисел. Поэтому систему (8) можно записать в виде

$$\begin{gathered}\dot{y}^{[d]}=\hat{C}^{(11)}_{d,d}y^{[d]},\\ \dot{y}_{[r]}=(\hat{C}^{(21)}_{r,d}+D_{r,n}\hat{V}_{n,d})y^{[d]}+(\hat{C}^{(22)}_{r,r}+D_{r,n}\hat{V}_{n,r})y_{[r]},\\ \tilde{C}^{(11)}_{d,d}(t)y^{[d]}+C^{(12)}_{d,r}(t)y_{[r]}=0,\\ (\tilde{C}^{(21)}_{r,d}(t)+D_{r,n}\tilde{V}_{n,d}(t))y^{[d]}+(\tilde{C}^{(22)}_{r,r}(t)+D_{r,n}\tilde{V}_{n,r}(t))y_{[r]}=0.\end{gathered}\tag{9}$$

Первое уравнение системы (9) имеет только тривиальное почти периодическое решение

$$y^{[d]}=y^{[d]}(t)\equiv 0,$$

что позволяет записать систему (9) в виде

$$\begin{gathered}\dot{y}_{[r]}=(\hat{C}^{(22)}_{r,r}+D_{r,n}\hat{V}_{n,r})y_{[r]},\\ C^{(12)}_{d,r}(t)y_{[r]}=0,\\ (\tilde{C}^{(22)}_{r,r}(t)+D_{r,n}\tilde{V}_{n,r}(t))y_{[r]}=0.\end{gathered}\tag{10}$$

Поскольку матрица $C^{(12)}_{d,r}(t)$ имеет неполный столбцовый ранг, то в силу [9] второе уравнение системы имеет $(r-r_1)$-параметрическое семейство почти периодических решений с требуемым свойством частот $y_{[r]}=y_{[r]}(t)$.

Условие (7) означает, что у матрицы $D_{r,n}$ строки линейно независимы. Поскольку их число меньше числа столбцов, то добавление в такой матрице произвольных столбцов не изменяет ее ранг. Поэтому найдется постоянная матрица $\hat{V}_{n,r}$ такая, что матрица коэффициентов певого уравнения из (10) приводится к любому наперед заданному виду, в том числе и такому, чтобы вектор-функция $y_{[r]}=y_{[r]}(t)$ удовлетворяла этому уравнению.

По той же причине найдется такая матрица $\tilde{V}=\tilde{V}_{n,r}(t)$ из допустимого множества, что выполняется тождество

$$\tilde{C}^{(22)}_{r,r}(t)+D_{r,n}\tilde{V}_{n,r}(t)\equiv 0.$$

Это означает, что вектор-функция $y_{[r]}=y_{[r]}(t)$ будет удовлетворять и третьему уравнению системы (10).

Тогда, принимая во внимание преобразование (4), заключаем, что система (2) будет иметь требуемое почти периодическое решение

$$x(t) = S^{-1}\mathrm{col}\,(y^{[d]}(t), y_{[r]}(t)) = S^{-1}\mathrm{col}\,(0, y_{[r]}(t)).$$

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть поставленная задача разрешима, т. е. система (2) имеет сильно нерегулярное почти периодическое решение $x = x(t)$ с множеством частот L. Тогда согласно [9] система (9) будет иметь решение $\mathrm{col}\,(0, y_{[r]}(t)) = Sx(t)$ с таким же множеством частот.

Пусть $\mathrm{rank}_{\mathrm{col}}\, C_{d,r}^{(12)} = r_1$. Из второго уравнения системы (10) следует, что нетривиальная вектор-функция $y_{[r]}(t)$ является его сильно нерегулярным почти периодическим решением. Поэтому столбцовый ранг ее матрицы коэффициентов меньше числа столбцов, т. е. выполняется неравенство

$$r_1 < r.$$

Значит, некоторые r_1 компонент решения $y_{[r]}(t)$ линейно выражаются через остальные $r - r_1$ компонент, которые обозначим как вектор $y_{[r-r_1]}(t)$. Следовательно, вектор $y_{[r-r_1]}(t)$ будет определять показатели Фурье как вектора $y_{[r]}(t)$, так и всего решения $y(t)$ системы (9). Кроме этого, как следует из первого уравнения системы (1), вектор $y_{[r-r_1]}(t)$ является решением линейной стационарной системы дифференциальных уравнений. Следовательно, число их показателей Фурье, а значит, и число показателей Фурье как вектора $y(t)$, так и вектора $x(t)$, ограничено размерностью системы, т. е. мощность целевого множества частот L не больше, чем $[(r - r_1)/2]$. Теорема доказана.

Благодарности. Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных иследований (проект № Ф20Р-005).

Acknowledgements. The work was carried out at the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus within the framework of the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project No. Ф20Р-005).

Список использованных источников

1. Иванов, А. Г. Оптимальное управление почти периодическими движениями / А. Г. Иванов // Прикл. матем. и мех. – 1992. – Т. 56, вып. 5. – С. 837–846.

2. Иванов, А. Г. Элементы математического аппарата задач почти периодической оптимизации. I / А. Г. Иванов // Изв. Ин-та матем. и информ. Удмуртского гос. ун-та. – 2002. – № 1. – С. 3–100.

3. Попова, С. Н. Управление асимптотическими инвариантами систем с почти периодическими коэффициентами / С. Н. Попова // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2008. – Вып. 2. – С. 117–118.

4. Курцвейль, Я. О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Я. Курцвейль, О. Вейвода // Чехосл. матем. журн. – 1955. – Т. 5, № 3. – С. 362–370. https://doi.org/10.21136/cmj.1955.100152

5. Massera, J. L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales / J. L. Massera // Bol. de la Facultad de Ingenieria Montevideo. – 1950. – Vol. 4, N 1. – P. 37–45.

6. Деменчук, А. К. Необходимое условие разрешимости задачи управления асинхронным спектром линейных почти периодических систем с нулевым средним матрицы коэффициентов / А. К. Деменчук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 2. – С. 176–181. https://doi.org/10.29235/1561-2430- 2019-55-2-176-181

7. Деменчук, А. К. Управление асинхронным спектром линейных почти периодических систем с диагональным усреднением матрицы коэффициентов / А. К. Деменчук // Дифференц. уравнения. – 2021. – Т. 57, № 4. – С. 466–472. https://doi.org/10.31857/s0374064121040026

8. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М., 1953. – 492 с.

9. Demenchuk, A. K. Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems / A. K. Demenchuk // Mathematica Bohemica. – 2001. – Vol. 126, N 1. – P. 221–228. https://doi.org/10.21136/mb.2001.133916

References

1. Ivanov A. G. Optimal control of almost-periodic motions. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1992, vol. 56, no. 5, pp. 737–746. https://doi.org/10.1016/0021-8928(92)90059-h

2. Ivanov A. G. Elements of the mathematical apparatus in the almost periodic optimization problems. *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Informatics at Udmurt State University], 2002, no. 1, pp. 3–100 (in Russian).

3. Popova S. N. Control over asymptotic invariants for the systems with almost periodic coefficients. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki* [Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science], 2008, no. 2, pp. 117–118 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm080238

4. Kurzweil J., Veivoda O. On the periodic and almost periodic solutions of a system of ordinary differential equations. *Czehoslovak Mathematical Journal*, 1955, vol. 5, no. 3, pp. 362–370 (in Russian). https://doi.org/10.21136/cmj.1955.100152

5. Massera J. L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales. *Bol. de la Facultad de Ingenieria Montevideo*, 1950, vol. 4, no. 1, pp. 37–45 (in Spanish).

6. Demenchuk A. K. Necessary condition for solvability of the control problem of an asynchronous spectrum of linear almost periodic systems with trivial averaging of the coefficient matrix. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 176–181 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-176-181

7. Demenchuk A. K. The control problem of the asynchronous spectrum of linear almost periodic systems with the diagonal averaging of the coefficient matrix. *Differentsial'nye uravneniya = Differention Equations*, 2021, vol. 57, no. 4, pp. 466–472 (in Russian). https://doi.org/10.31857/s0374064121040026

8. Gantmaher F. R. *The Matrix Theory*. Moscow, 1953. 396 p. (in Russian).

9. Demenchuk A. K. Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems. *Mathematica Bohemica*, 2001, vol. 126, no. 1, pp. 221–228. https://doi.org/10.21136/mb.2001.133916

Информация об авторе

Деменчук Александр Константинович – д-р физ.-мат. наук, доцент, гл. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: demenchuk@im.bas-net.by.

Information about the author

Aleksandr K. Demenchuk – D. Sc. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Chief Researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Science of Belarus (11, Surganov Str., Minsk, 220072, Republic of Belarus). E-mail: demenchuk@im.bas-net.by.