ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 519.63 Поступило в редакцию 05.04.2021
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-4-391-396 Received 05.04.2021

Член-корреспондент П. П. Матус

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
Католический университет Люблина, Люблин, Польша

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЛАКСА–РЯБЕНЬКОГО–ФИЛИППОВА НА НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ

Аннотация. Теорема эквивалентности Лакса, утверждающая, что при наличии аппроксимации разностной схемы устойчивость является необходимым и достаточным условием ее сходимости, обобщается на абстрактные нелинейные разностные задачи с операторами, действующими в конечномерных банаховых пространствах. В отличие от линейных конечно-разностных методов, такой критерий в нелинейном случае удается установить лишь для безусловно устойчивых вычислительных методов, когда соответствующие априорные оценки имеют место при достаточно малом $|h| \le h_0$. При этом величина h_0 зависит как от согласованности дискретных и непрерывных норм в банаховых пространствах, так и от величины возмущения входных данных задачи. Доказанный критерий сходимости применяется для исследования устойчивости по начальным данным разностных схем, аппроксимирующих квазилинейные параболические уравнения с нелинейностями неограниченного роста.

Ключевые слова: аппроксимация, устойчивость, сходимость, разностная схема

Для цитирования. Матус, П. П. Обобщение теоремы Лакса–Рябенького–Филиппова на нелинейные задачи / П. П. Матус // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2021. – Т. 65, № 4. – С. 391–396. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-4-391-396

Corresponding Member Piotr P. Matus

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
Institute of Mathematics and Computer Science the John Paul II Catholic University of Lublin, Lublin, Poland

GENERALIZATION OF THE LAX–RYABENKY–PHILIPPOV THEOREM TO NONLINEAR PROBLEMS

Abstract. In this paper, Lax's equivalence theorem, which states that stability is a necessary and sufficient condition for its convergence in the presence of an approximation of a difference scheme, is generalized to abstract nonlinear difference problems with operators acting in finite dimensional Banach spaces. In contrast to linear finite-difference methods, such a criterion in the nonlinear case can be established only for unconditionally stable computational methods, when the corresponding a priori estimates take place for sufficiently small $|h| \le h_0$. In this case, the value of h_0 depends both on the consistency of discrete and continuous norms in Banach spaces, and on the magnitude of the perturbation of the input data of the problem. The proven convergence criterion is used to study the stability of difference schemes approximating quasilinear parabolic equations with nonlinearities of unbounded growth with respect to the initial data.

Keywords: approximation, stability, convergence, difference scheme

For citation. Matus P. P. Generalization of the Lax–Ryabenky–Philippov theorem to nonlinear problems. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2021, vol. 65, no. 4, pp. 391–396 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-4-391-396

Введение. Фундаментальными понятиями теории разностных схем являются аппроксимация, устойчивость и следующая из них сходимость (теорема Филиппова–Рябенького [1]). Это утверждение имеет место как для линейных, так и нелинейных разностных задач [2]. В западной литературе подобный результат известен как теорема эквивалентности Лакса [3], утверждающая, что для согласованного конечно-разностного метода для корректно поставленной линейной начально-краевой задачи для уравнений в частных производных разностный метод сходится тогда и только тогда, когда он устойчив. Как известно, согласованность – это требование аппроксимации корректно поставленной дифференциальной задачи. В нелинейном случае из сходимости, вообще говоря, не следует устойчивость [4].

Многими авторами была предпринята попытка о расширении результатов Лакса на нелинейные разностные задачи. Обзор этих подходов представлен в [5] и связан в основном с другими определениями устойчивости типа слабой устойчивости или слабой обобщенной устойчивости.

В настоящей работе теорема эквивалентности Лакса обобщается на абстрактные нелинейные разностные задачи с операторами, действующими в конечномерных банаховых пространствах. В отличие от линейных конечно-разностных методов, такой критерий в нелинейном случае удается установить лишь для безусловно устойчивых вычислительных методов, когда соответствующие априорные оценки имеют место при достаточно малом $|h| \le h_0$. При этом величина h_0 зависит как от согласованности дискретных и непрерывных норм в банаховых пространствах, так и от величины возмущения входных данных задачи. В работе подчеркивается тесная и неразрывная связь понятий устойчивости в дискретном и непрерывном случаях.

Постановка задачи и основные определения. Пусть H_k банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_k$, $k = 1, 2$. $L : H_1 \to H_2$ – нелинейный неограниченный дифференциальный оператор, отображающий $u \in H_1$ в H_2 и $f \in H_2$ – задано. Рассмотрим следующее операторное уравнение:

$$Lu = f. \tag{1}$$

Далее предполагаем, что задача (1) поставлена корректно по Адамару, т. е.

решение существует и единственно при всех входных данных $f \in H_2$;

решение непрерывно зависит от входных данных, т. е. существует такая положительная постоянная $c_0 > 0$, удовлетворяющая следующему неравенству:

$$\|\tilde{u} - u\|_1 \le c_0 \left\|\tilde{f} - f\right\|_2, \tag{2}$$

где $\tilde{u} \in H_1$ решение задачи (1) с возмущенными входными данными $\tilde{f} \in H_2, c_k > 0,$– положительная постоянная и в каждом конкретном случае своя, $k = 0, 1, \ldots$.

Свойство решения дифференциальной задачи (1), выраженное неравенством (2), и называется устойчивостью решения *u* по отношению к малому возмущению входных данных *f*.

Для приближенного решения задачи (1) будем использовать разностную схему (абстрактная запись)

$$L_h y = \varphi_h. \tag{3}$$

Здесь $L_h : H_{1h} \to H_{2h}, \varphi_h \in H_{2h}$, аппроксимируют *L* и *f* соответственно, $H_{kh}, k = 1, 2$, конечномерные банаховы пространства, зависящие от положительного параметра *h*, являющегося вектором некоторого нормированного пространства с нормой $|h|$.

В работе будем придерживаться основных определений теории разностных схем, данных в [2; 5].

Под аппроксимацией разностной схемы (3) на решении дифференциальной задачи (1) будем понимать невязку

$$\psi_h = L_h u_h - \varphi_h = L_h u_h - (Lu)_h + f_h - \varphi_h,$$

для которой

$$\|\psi_h\|_{2h} \le M h^{k_3}, \quad k_3 = \text{const} > 0. \tag{4}$$

Мы говорим, что разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу, если

$$\left\|L_h u_h - (Lu)_h\right\|_{2h} \to 0 \text{ и } \|f_h - \varphi_h\|_{2h} \to 0 \text{ при } |h| \to 0. \tag{5}$$

Для всех элементов из H_m и H_{mh} полагаем, что $\Pi_{mh} g = g_h$, где Π_{mh} – проектор. В случае непрерывных функций Π_{mh} – идентичный оператор, т. е.

$$g_{mh}(x) = \Pi_{mh} g_m(x) = g_m(x), \quad m = 1, 2; \quad x \in \overline{\omega}_h.$$

Будем предполагать также, что введенные в H_{kh} сеточные нормы $\|\cdot\|_{kh}$ согласованы с соответствующими нормами $\|\cdot\|$ в пространствах H_k, $k = 1, 2$:

$$\left| \|g_h\|_{mh} - \|g\|_m \right| \le c_m |h|^{k_m}, \; m = 1, 2,$$

для всех $g_h \in H_{mh}$, $g \in H_m$, $k_m > 0$.

Кроме того, будем предполагать, что разностная схема (3) аппроксимирует корректно поставленную задачу (1) в смысле выполнения соотношений (4), (5).

Напомним также, что решение разностной схемы сходится к решению дифференциальной задачи со скоростью $O(|h|^{k_3})$, если выполнено неравенство

$$\|y - u_h\|_{1h} \le c_3 |h|^{k_3}.$$

Критерий сходимости. Сформулируем и докажем теперь основной результат данной работы.

Т е о р е м а 1. *Пусть дана корректно поставленная задача (1) и пусть ее конечно-разностная аппроксимация удовлетворяет условию согласованности. Тогда безусловная устойчивость необходима и достаточна для сходимости разностной схемы.*

Необходимость была доказана ранее (см., напр., [2]). Для полноты изложения мы повторим здесь это доказательство. Итак, пусть разностная схема (3) является безусловно устойчивой. Это означает, что существует такая постоянная c_4, не зависящая от $h, y, \tilde{y}$, что при всех достаточно малых $|h| \le h_0$, имеет место априорная оценка

$$\|\tilde{y} - y\|_{1h} \le c_4 \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{2h}, \tag{6}$$

где $\tilde{y}$ – решение задачи (3) с входными данными $\tilde{\varphi}_h \in H_{2h}$.

Напомним также, что если неравенство (6) выполнено для произвольных $|h|$, то такая схема называется абсолютно устойчивой [2].

Рассмотрим невязку ψ и выразим отсюда

$$L_h u_h = \psi_h + \varphi_h = \tilde{\varphi}_h. \tag{7}$$

В силу определения устойчивости имеем исходя из (4), (6), (7)

$$\|y - u_h\|_{1h} \le c_4 \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{2h} = c_4 \|\psi_h\|_{2h} \to 0 \quad \text{при} \quad |h| \to 0.$$

Итак, необходимость доказана.

Докажем теперь, что из сходимости следует безусловная устойчивость схемы, т. е. существует такая положительная константа c_4, что при достаточно малом

$$|h| \le h_0, \;\; h_0 = c_5 \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{2h}^{1/k_4}, \;\; k_4 = \min\{k_1, k_2, k_3\}, \tag{8}$$

имеет место оценка (6).

Используя сделанные выше предположения и пользуясь неравенством треугольника для норм, приходим к неравенству

$$\begin{gathered} \|\tilde{y} - y\|_{1h} = \|\tilde{y} - \tilde{u}_h - (y - u_h) + (\tilde{u}_h - u_h)\|_{1h} \le \\ \le \|\tilde{y} - \tilde{u}\|_{1h} + \|y - u_h\|_{1h} + \|\tilde{u}_h - u_h\|_{1h} \le c_5 |h|^{k_3} + c_1 |h|^{k_1} + \|\tilde{u} - u\|_1 \le \\ \le c_5 |h|^{k_3} + c_1 |h|^{k_1} + c_0 \|\tilde{f} - f\|_2 \le c_5 |h|^{k_3} + c_1 |h|^{k_1} + c_0 c_2 |h|^{k_2} + c_0 \|\tilde{f}_h - f_h\|_{2h}. \end{gathered} \tag{9}$$

В последнем выражении рассмотрим слагаемое

$$\begin{gathered} \|\tilde{f}_h - f_h\|_{2h} = \|\tilde{f}_h - \tilde{\varphi}_h - (f_h - \varphi_h) + \tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{2h} \le \\ \le \|\psi_h\|_{2h} + \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{2h} \le M |h|^{k_3} + \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{2h}. \end{gathered}$$

Учитывая последнее неравенство в (9), приходим к оценке (6), выражающей безусловную устойчивость разностной схемы (3) в предположении (8).

Теорема доказана.

Устойчивость разностных схем, аппроксимирующих квазилинейные параболические уравнения. Теория разностных схем для нелинейных уравнений математической физики с неограниченной нелинейностью является одной из наиболее сложных и актуальных областей вычислительной математики. Вопросы сходимости разностных схем для данного класса задач исследовалась многими авторами [6–8].

Несмотря на полученные оценки точности решений разностных схем, аппроксимирующих квазилинейные и нелинейные уравнения математической физики, вопрос об их устойчивости оставался долгое время открытым. На наш взгляд, главная причина отсутствия научных результатов в этом направлении связана с необходимостью предварительного получения априорных оценок не только для разностного решения в задаче для возмущения $\delta y = \tilde{y} - y$, но и для его производных в сильной равномерной метрике.

Доказанный в данной работе критерий сходимости нелинейных разностных схем позволяет без особых трудностей доказать безусловную устойчивость разностных методов, для которых уже доказана сходимость.

В качестве примера в области

$$\bar{Q}_T = \bar{\Omega}\times[0 \le t \le T], \ \ \bar{\Omega} = \{x : 0 \le x \le l\},$$

рассмотрим первую краевую задачу для квазилинейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad (x,t)\in Q_T, \tag{10}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ \ x\in\bar{\Omega}; \ \ u(0,t) = \mu_1(t), \ \ u(l,t) = \mu_2(t), \ \ t > 0. \tag{11}$$

Введем область значений точного решения

$$\bar{D}_u = \{u : \bar{u}_0 \le u \le M, \bar{u}_0 > 0, (x,t)\in\bar{Q}_T\}$$

и определим ее окрестность

$$\bar{D}_{\tilde{u}} = \{\tilde{u} : |\tilde{u} - u| < r, u\in\bar{D}_u, r > 0\}.$$

В задачах с неограниченной нелинейностью предполагается, что

$$k(u) \ge r_0, \ r_0 > 0, \ \text{для всех } u\in\bar{D}_u,$$

$k(\tilde{u})$ имеет все ограниченные производные в $\bar{D}_{\tilde{u}}$.

Будем предполагать дальше, что задача (10), (11) корректно поставлена в следующем смысле:

А) существует единственное решение $u(x,t)\in C^{2+\lambda,1+\beta}(\bar{Q}_T)$, $0{,}5 < \lambda, \beta < 1$, причем $\partial^2 u/\partial x^2$ липщиц-непрерывна по переменной *t*. Здесь $C^{m_1+\lambda, m_2+\beta}(\bar{Q}_T)$ – класс функций, имеющих в $\bar{Q}_T$ непрерывные производные по *x* до порядка m_1 включительно и по *t* до порядка m_2, которые удовлетворяют условию Гельдера с показателями λ, β соответственно;

Б) решение устойчиво в равномерной норме для всех $u, \tilde{u}\in C^{2+\lambda,1+\beta}(\bar{Q}_T)$ по отношению к малому возмущению начальных данных

$$\|\tilde{u} - u\|_{C(\bar{Q}_T)} \le c_0 \|\tilde{u}_0 - u_0\|_{C(\bar{\Omega})},$$

где $\|\cdot\|_{C(\bar{Q}_T)} = \max\limits_{(x,t)\in\bar{Q}_T}|\cdot|$, $\|\cdot\|_{C(\bar{\Omega})} = \max\limits_{x\in\bar{\Omega}}|\cdot|$, $\tilde{u}$ – решение задачи (10), (11) с возмущенным начальным условием $\tilde{u}_0$.

На равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = \overline{0, N},\ hN = l\}$, $\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = \overline{0, N_0},\ \tau N_0 = T\}$ исходную дифференциальную задачу аппроксимируем консервативной чисто неявной разностной схемой

$$y_t = (k(\hat{y}_{(0,5)}\hat{y}_{\bar{x}}))_x, \quad y_{(0,5)} = (y_{i-1} + y_i)/2, \tag{12}$$

$$y_i^0 = u_{0i}, \quad i = 0, 1, ..., N; \quad y_0^{n+1} = \mu_1^{n+1}, \quad y_N^{n+1} = \mu_2^{n+1}. \tag{13}$$

Здесь использованы стандартные обозначения теории разностных схем [2]:

$$y = y_i^n = y(x_i, t_n), \quad y_t = (\hat{y} - y)/\tau, \quad \hat{y} = y_i^{n+1}, \quad y_{\bar{x}} = (y_i - y_{i-1})/h,$$

$$y_x = (y_{i+1} - y_i)/h, \quad (ay_{\bar{x}})_x = (a_{i+1}y_{\bar{x},i+1} - a_i y_{\bar{x},i})/h.$$

Вопросы точности разностной схемы (12), (13) подробно изучались в [8]. В частности, для погрешности аппроксимации $\psi = -u_t + (k(\hat{u}_{(0,5)})\hat{u}_{\bar{x}})_x$ на решении дифференциальной задачи была получена оценка

$$\|\psi\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})} \le M(h^\lambda + \tau^\beta), \quad M = \text{const} > 0,$$

и доказана следующая оценка точности

$$\|y - u\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})} \le c_3(h^{\lambda-0,5} + \tau^{\beta-0,5}),$$

где как обычно $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_h)} = \max\limits_{x\in\bar{\omega}_h}|\cdot|$, $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})} = \max\limits_{(x,t)\in\bar{\omega}_{h\tau}}|\cdot|$.

Очевидно, что и для возмущенной разностной схемы может быть доказана аналогичная оценка

$$\|\tilde{y} - \tilde{u}\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})} \le c_3(h^{\lambda-0,5} + \tau^{\beta-0,5}); \quad 0,5 < \lambda, \ \beta < 1.$$

На основании изложенного заключаем, что

$$\|\tilde{y} - y\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})} \le \|y - u\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})} + \|\tilde{y} - \tilde{u}\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})} + \|\tilde{u} - u\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})} \le 2c_3(h^{\lambda-0,5} + \tau^{\beta-0,5}) + \|\tilde{u}_0 - u_0\|_{C(\bar{\Omega})}.$$

Очевидно, что при достаточно малых $h \le h_0$, $\tau \le \tau_0$, удовлетворяющих неравенству

$$2c_3(h^{\lambda-0,5} + \tau^{\beta-0,5}) \le \|\tilde{u}_0 - u_0\|_{C(\bar{\Omega})},$$

разностная схема (12), (13) безусловно устойчива в C-норме по начальным данным и имеет место неравенство

$$\|\tilde{y} - y\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})} \le 2\|\tilde{u}_0 - u_0\|_{C(\bar{\Omega})}.$$

З а м е ч а н и е. Аналогично исследуется безусловная устойчивость разностных схем, аппроксимирующих начально-краевую задачу для квазилинейного параболического уравнения с обобщенными решениями [9]. Более детально этот вопрос будет обсуждаться в отдельной работе.

Список использованных источников

1. Рябенький, В. С. Об устойчивости разностных схем / В. С. Рябенький, А. Ф. Филиппов. – М., 1956.

2. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М., 1977. – 656 с.

3. Рихтмайер, Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон. – М., 1960. – 418 с.

4. Guo, Ben-Yu (Kuo Pen-Yu). Generalized stability of discretization and its applications to numerical solutions of non-linear partial differential equations / Ben-Yu Guo // Zh. Vychisl. Mat. Mat.-Fiz. – 1992. – Vol. 32, N 4. – P. 530–541.

5. Самарский, А. А. Разностные схемы с операторными множителями / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, П. П. Матус. – Минск, 1998. – 442 с.

6. Абрашин, В. Н. Разностные схемы для нелинейных гиперболических уравнений. I / В. Н. Абрашин // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9, № 11. – С. 2029–2040.

7. Ляшко, А. Д. Исследование нелинейных двухслойных операторно-разностных схем с весами / А. Д. Ляшко, Е. М. Федотов // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 7. – С. 1217–1227.

8. Матус, П. П. О безусловной сходимости разностных схем для нестационарных квазилинейных уравнений математической физики / П. П. Матус, Л. В. Станишевская // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 7. – С. 1203–1219.

9. Matus, P. On Convergence of Difference Schemes for IBVP for Quasilinear Parabolic Equations with Generalized Solutions // Comp. Meth. Appl. Math. – 2014. – Vol. 14, N 3. – P. 361–371. https://doi.org/10.1515/cmam-2014-0008

References

1. Riabenkii V. S. *On the stability of difference schemes*. Moscow, 1956 (in Russian).

2. Samarskii A. A. *Theory of difference schemes.* New York, 2001.

3. Rychtmyer R. D., Morton K. W. Difference Methods for Initial-Value Problems. New York, 1967.

4. Guo Ben-Yu (Kuo Pen-Yu). Generalized stability of discretization and its applications to numerical solutions of nonlinear partial differential equations. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoj Fiziki*, 1992, vol. 32, no. 4, pp. 530–541.

5. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N., Matus P. P. *Difference schemes with operator factors*. Minsk, 1998. 432 p. (in Russian).

6. Abrashin V. N. Difference schemes for nonlinear hyperbolic equations. *Differential equations*, 1973, vol. 9, no. 11, pp. 2029–2040 (in Russian).

7. Lyashko A. D., Fedotov E. M. Investigation of nonlinear two-layer operator-difference schemes with weights. *Differential equations*, 1985, vol. 21, no. 7, pp. 1217–1227 (in Russian).

8. Matus P. P., Stanishevskaya L. V. Unconditional convergence of difference schemes for nonstationary quasilinear equations of mathematical physics. *Differential equations*, 1991, vol. 27, no. 7, pp. 847–859.

9. Matus P. On Convergence of Difference Schemes for IBVP for Quasilinear Parabolic Equations with Generalized Solutions. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2014, vol. 14, no. 3, pp. 361–371. https://doi.org/10.1515/cmam-2014-0008

Информация об авторе

Матус Петр Павлович – член-корреспондент, д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: piotr.p.matus@gmail.com.

Information about the author

Matus Piotr P. – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: piotr.p.matus@gmail.com.