ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 511.42
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-4-397-403

Поступило в редакцию 29.04.2021
Received 29.04.2021

В. И. Берник, Д. В. Васильев, Е. В. Засимович

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ С ПОСТОЯННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ НЕРАВЕНСТВ НА КОРОТКИХ ИНТЕРВАЛАХ

(Представлено академиком В. И. Корзюком)

Аннотация. В метрической теории диофантовых приближений одной из основных задач, приводящих к точным характеристикам в классификациях Малера и Коксмы, является оценка меры Лебега множества точек $x \in B \subset I$ интервала I, для которых выполняется неравенство $|P(x)| < Q^{-w}$, $w > n$, $Q > 1$ для полиномов $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P \le n$, $H(P) \le Q$. В разных промежутках изменения w методы получения оценок разные. В данной работе при $w > n+1$ мы получаем оценку $\mu B < c_1(n)Q^{-\frac{w-1}{n}}$. Наилучшая к настоящему времени оценка имела вид $c_2(n)Q^{-\frac{w-n}{n}}$.

Ключевые слова: диофантовы приближения, короткие интервалы, гипотеза Малера, теорема Дирихле

Для цитирования. Берник, В. И. Диофантовы приближения с постоянной правой частью неравенств на коротких интервалах / В. И. Берник, Д. В. Васильев, Е. В. Засимович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2021. – Т. 65, № 4. – С. 397–403. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-4-397-403

Vasili I. Bernik, Denis V. Vasilyev, Elena V. Zasimovich

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

DIOPHANTINE APPROXIMATION WITH THE CONSTANT RIGHT-HAND SIDE OF INEQUALITIES ON SHORT INTERVALS

(Communicated by Academician Viktor I. Korzyuk)

Abstract. In the metric theory of Diophantine approximations, one of the main problems leading to exact characteristics in the classifications of Mahler and Koksma is to estimate the Lebesgue measure of the points $x \in B \subset I$ from the interval I such as the inequality $|P(x)| < Q^{-w}$, $w > n$, $Q > 1$ for the polynomials $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P \le n$, $H(P) \le Q$ is satisfied. The methods of obtaining estimates are different at different intervals of w change. In this article, at $w > n+1$ we get the estimate $\mu B < c_1(n)Q^{-\frac{w-1}{n}}$. The best estimate to date was $c_2(n)Q^{-\frac{w-n}{n}}$.

Keywords: Diophantine approximation, short intervals, Mahler's conjecture, Dirichlet's theorem

For citation. Bernik V. I., Vasilyev D. V., Zasimovich E. V. Diophantine approximation with the constant right-hand side of inequalities on short intervals. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2021, vol. 65, no. 4, pp. 397–403 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-4-397-403

В середине XIX в. Лиувилль и Дирихле [1] обратили внимание на естественную задачу о близости действительных и рациональных чисел. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, p и $q \ne 0$ − целые числа. Насколько малым может быть число

$$\delta = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$$

при изменяющихся p и q? Если q зафиксировать, то величина $\delta = \frac{1}{2q}$ является наилучшей из возможных, поскольку число α всегда можно заключить в интервал $I = \left[\frac{l}{q}, \frac{l+1}{q}\right]$, и взять $p = l$ или $p = l+1$, в зависимости от того, к какому из концов отрезка I число α ближе. Поэтому неравенство $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{2q}$ неулучшаемо, так как можно взять $\alpha = \frac{2p+1}{2q}$. Дирихле предложил не фиксировать q и доказал следующее утверждение.

Т е о р е м а Д и р и х л е. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{R}$, *а* $Q > 1$ *− натуральное число. Тогда существуют натуральное число* $1 \le q \le Q$ *и целое p, удовлетворяющие неравенству*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qQ}. \tag{1}$$

Из теоремы Дирихле следует неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}. \tag{2}$$

И если α − иррациональное число, то неравенство (2) имеет бесконечное число решений в целых числах p и q. Неравенство (2) практически неулучшаемо.

Т е о р е м а Г у р в и ц а [2; 3]. *Для любого иррационального числа* β *неравенство*

$$\left|\beta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$

имеет бесконечное число решений в целых p и q. Существуют числа $\beta_1 \in \mathbb{R}$ *такие, что* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists q_0(\varepsilon)$, $\forall q > q_0(\varepsilon)$, $p \in \mathbb{Z}$, *верно неравенство*

$$\left|\beta_1 - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q^2}.$$

В качестве числа β_1, *например, можно взять* $\beta_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Исследование разрешимости неравенств $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \varepsilon$ является одной из самых интересных и актуальных задач теории диофантовых приближений. Ознакомиться с ними можно по монографиям [2–6].

Т е о р е м а Л и у в и л л я. *Пусть* α *− алгебраическое число степени* $n \ge 2$. *Тогда при любых целых p и q справедливо неравенство*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{c(\alpha, n)}{q^n}. \tag{3}$$

При $n = 2$ неравенство (3) точное. При $n > 2$ ключевые задачи о неравенстве (3) не решены, хотя подвергались атакам многих выдающихся математиков [3–6].

Если переписать неравенство (1) в виде

$$|xq - p| < Q^{-1},$$

то теорема Дирихле показывает, что в каждой действительной точке x некоторый многочлен $P_1(x) = qx - p$ принимает значения, по модулю не превосходящие Q^{-1}.

Пусть μB − мера Лебега измеримого множества $B \subset \mathbb{R}$, $\Psi(x)$ − монотонно убывающая функция положительного аргумента x, $I \subset \mathbb{R}$ − интервал, μI − длина I. Почти все точки интервала – это все точки I без точек $x \in B \subset I$, $\mu B = 0$, а $\mathcal{L}_1(\Psi)$ − множество $x \in I$, для которых неравенство

$$|xq - p| < \Psi(q)$$

имеет бесконечное число решений в целых p и q.

Т е о р е м а Х и н ч и н а [7]. *Справедливы равенства*

$$\mu\mathcal{L}_1(\Psi) = \begin{cases} 0, & \sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q) < \infty, \\ \mu I, & \sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q) = \infty. \end{cases} \tag{4}$$

Сила теоремы Хинчина состоит в том, что различие между медленно сходящимися рядами и медленно расходящимися рядами порой несущественно для начальных членов ряда и сказывается только на членах с очень большими номерами.

Что изменится, если вместо $P_1(x) = qx - p$ поставить многочлен произвольной степени

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\,? \tag{5}$$

В (5) величина n − степень многочлена $P_n(x)$, а $H = \max\limits_{0\le j\le n} |a_j|$ − высота $P_n(x)$.

Задачи о значениях многочленов $P_n(x)$ в конкретных точках x − классические задачи теории чисел. Так, Эрмит доказал, что $P_n(e) \ne 0$ ни при каком $P_n(x) \not\equiv 0$, а Линдеман доказал, что $P_n(\pi) \ne 0$ ни при каком $P_n(x) \not\equiv 0$. Эти результаты стали крупными вехами в теории чисел.

Методом Дирихле нетрудно доказать, что для всех x верно неравенство

$$|P_n(x)| < c(n)H^{-n},\ x \in I. \tag{6}$$

Хинчин [8] доказал, что для почти всех $x \in I$ и любом $\varepsilon > 0$ неравенство

$$|P_n(x)| < \varepsilon H^{-n}$$

имеет бесконечно много решений в полиномах $P_n(x)$.

Обозначим через $\mathcal{L}_n(\Psi)$ множество $x \in I$, для которых неравенство

$$|P_n(x)| < H^{-n+1}\Psi(H) \tag{7}$$

имеет бесконечно много решений в полиномах $P_n(x)$. Следующее утверждение усиливает и обобщает теорему Хинчина (4) и при $\Psi(H) = H^{-v}$, $v > 1$, впервые доказана Спринджуком [4; 12].

Т е о р е м а 1. *Справедливы равенства*

$$\mu\mathcal{L}_n(\Psi) = \begin{cases} 0, & \sum\limits_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty, \\ \mu I, & \sum\limits_{H=1}^{\infty} \Psi(H) = \infty. \end{cases}$$

Случай сходимости в теореме 1 был доказан В. Берником [5], а случай расходимости – В. Бересневичем [9].

Теорема 1, как и другие теоремы в метрической теории диофантовых приближений находит приложения в уравнениях математической физики при разрешении проблемы малых знаменателей [5; 10]. В последние 10 лет метрические теоремы используются для теоретического обоснования антенных устройств [11].

Цель настоящей работы – получить метрические теоремы о разрешимости неравенств вида (6), (7), удобные для приложений.

Обозначим через $\mathcal{L}_n(Q, w)$ множество точек $x \in I$, для которых разрешимо неравенство

$$|P_n(x)| < Q^{-w},\ Q > 1,\ w > n, \tag{8}$$

в классе полиномов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x], \deg P \le n, H(P) \le Q\}.$$

Из предыдущих, уже доказанных, теорем можно получить, что $\mu\mathcal{L}_n(Q, w) < \varepsilon$ при $Q > Q_0(\varepsilon)$, однако скорость стремления величины $\mu\mathcal{L}_n(Q, w)$ к нулю была неизвестна. В [6] Н. Бударина доказала неравенство

$$\mu\mathcal{L}_n(Q, w) < Q^{-\frac{w-n}{n}},\ w > n.$$

В [6] также получено неравенство

$$\mu\mathcal{L}_n(Q, w) < c(n)Q^{-w+n},\ n < w < n+1. \tag{9}$$

В данной работе мы доказываем следующую теорему.

Теорема 2. *При* $w \ge n+1$ *справедливо неравенство*

$$\mu\mathcal{L}_n(Q,w) < c_1(n)Q^{-\frac{w-1}{n}}.$$

Заметим, что неравенства (8), (9) в некоторых диапазонах изменения w близки к окончательным. Далее через $c_1 = c_1(n), c_2, \ldots$ обозначаем величины, зависящие от n и не зависящие от H и Q.

Л е м м а 1 [4; 12]. *Пусть* α_1 – *ближайший к* x *корень полинома* $P(x)$, *тогда*

$$\left|x-\alpha_1\right| < 2^n \min_{1\le j\le n}\left(\left|P(x)\right|\left|P'(\alpha_1)\right|^{-1}\left|\alpha_1-\alpha_2\right|\ldots\left|\alpha_1-\alpha_j\right|\right)^{\frac{1}{j}}.$$

Корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ упорядочены следующим образом:

$$\left|\alpha_1-\alpha_2\right| \le \left|\alpha_1-\alpha_3\right| \le \ldots \le \left|\alpha_1-\alpha_n\right|.$$

Для фиксированного полинома $P(x)$ высоты H определим числа ρ_j, $2 \le j \le n$, из уравнений

$$\left|\alpha_1-\alpha_j\right| = H^{\rho_j}.$$

Для достаточно малой величины $\varepsilon > 0$ определим натуральное число $T = [\varepsilon^{-1}]+1$ так, что $T^{-1} < \varepsilon$.

Целые числа l_j однозначно найдем из неравенств

$$\frac{l_j-1}{T} \le \rho_j \le \frac{l_j}{T},$$

и положим $\rho_j = T^{-1}(l_{j+1}+\ldots+l_n)$.

Нетрудно доказать [4; 12], что в данной задаче количество векторов $\overline{l}\,(l_2, \ldots, l_n)$ конечно, зависит только от n, ε и не зависит от H и Q.

Положим

$$m = l_2T^{-1} + p_1 - 1 + \Delta,\ 0 < \Delta < 1-\varepsilon. \tag{10}$$

Если $m \notin \mathbb{Z}$, то будем рассматривать $m = [l_2T^{-1} + p_1 - 1 + \Delta] \in \mathbb{Z}$. Определим множества

$$\sigma_n(P) = \{x : \left|x-\alpha_1\right| < 2^n Q^{-w_n}\left|P'(\alpha_1)\right|^{-1}\},\ w_n = w \ge n+1, \tag{11}$$

$$\sigma_m(P) = \{x : \left|x-\alpha_1\right| < 2^m cQ^{-w_m}\left|P'(\alpha_1)\right|^{-1}\},\ 1 \le m < n. \tag{12}$$

Из (10), (11) следует, что

$$\mu\sigma_n(P) < 2^{n-m}cQ^{-w_n+w_m}\mu\sigma_m(P).$$

Зафиксируем вектор $\overline{b}(a_n, \ldots, a_{m+1})$, $0 \le m < n-2$, координаты которого являются коэффициентами многочлена $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$. Количество таких векторов $\overline{b}$ не превышает величины $(2Q+1)^{n-m} < 2^nQ^{n-m}$ при достаточно большом Q. Множество полиномов с одним и тем же вектором $\overline{b}$ будем обозначать $V(\overline{b})$. Интервалы $\sigma_m(P)$ поделим на существенные и несущественные:

а) интервал $\sigma_m(P_1)$, $P_1(x) \in B_1 = V(\overline{b}) \cap \mathcal{P}_n(Q)$ будем называть существенным, если для любого другого полинома $P_2(x) \in B_1$ выполняется неравенство

$$\mu(\sigma_m(P_1) \cap \sigma_m(P_2)) \le \frac{1}{2}\mu\sigma_m(P_1).$$

б) интервал $\sigma_m(P_1)$ будем называть несущественным, если найдется такой полином $P_2(x) \in B_1$, что

$$\mu(\sigma_m(P_1) \cap \sigma_m(P_2)) > \frac{1}{2}\mu\sigma_m(P_1).$$

Рассмотрим существенные интервалы $\sigma_m(P)$. Ясно, что

$$\sum_{P\in B_1}\mu\sigma_m(P)\le 2\mu I,$$

откуда из неравенства (12) имеем

$$\sum_{\bar b}\sum_{P\in B_1}\mu\sigma_m(P)<c\sum_{\bar b}Q^{-w_n+w_m}<cQ^{-w_n+w_m+n-m}.$$

В случае несущественных интервалов $\sigma_m(P)$ разложим полиномы $P(x)$ на $\sigma_m(P)$ в ряд Тейлора в окрестности корня $\alpha_1=\alpha_1(P)$:

$$P(x)+P'(\alpha_1)(x-\alpha_1)+\frac{1}{2}P''(\alpha_1)(x-\alpha_1)^2+\ldots+\frac{1}{n!}P^{(n)}(\alpha_1)(x-\alpha_1)^n.$$

Воспользуемся оценками $|x-\alpha_1|<\mu\sigma_m(P)<cQ^{-w_m}$, $|P'(\alpha_1)|<Q^{1-p_1}$, $|P''(\alpha_1)|<Q^{1-p_2}$, что приведет к неравенству

$$|P(x)|<cQ^{-w_m},\ x\in\sigma_m(P).$$

Если среди полиномов $R_j(x)=P_{j+1}(x)-P_1(x)$ окажутся хотя бы два полинома без общих корней, то применим к ним лемму 2.

Л е м м а 2 [8]. *Пусть на интервале I,* $\mu I=Q^{-\eta}$, $\eta>0$, *два полинома* $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\deg P_j(x)\le n$, $H(P_j(x))\le Q$, $j=1,2$, *удовлетворяют неравенству*

$$\max_{x\in I}(|P_1(x)|,|P_2(x)|)<Q^{-\tau},\ \tau>0.$$

Тогда $\forall\delta>0\ \exists Q_0(\delta)\ \forall Q>Q_0(\delta)$ *верно неравенство*

$$\tau+1+2\max(\tau+2-\eta,0)<2n+\delta.$$

Учитывая, что коэффициенты у полиномов $P(x)$ при $x^n,\ldots,x^{m+1}$ совпадают, имеем

$$|R_j(x)|<cQ^{-w_m},\ \deg R_j(x)\le m$$

и при

$$3w_m+3-2\eta>2m+\delta$$

получаем противоречие.

Если таких полиномов не найдется, то полиномы $R_j(x)$ приводимы. Запишем их в виде

$$R_j(x)=t_{1j}(x)\cdot t_{2j}(x).$$

Обозначим $\deg t_{1j}(x)=n_1\le m-1$, $H(t_{1j}(x))=Q^{\lambda}$. Ясно, что $\deg t_{2j}(x)\le m-n_1$, $H(t_{2j}(x))<cQ^{1-\lambda}$.
Неравенство

$$R_j(x)\ll Q^{-m}$$

справедливо для всех точек $x\in\sigma_m(P)$. Обозначим через a такое действительное число, для которого неравенство

$$|t_1(x)|<Q^{-a}$$

верно для всех точек $x\in B_2\subset\sigma_m(R)$, $\mu B_2>\frac{1}{2}\mu\sigma_m(R)$, но уже неравенство

$$|t_1(x)|<Q^{-a-\varepsilon_1},\ \varepsilon_1>0,$$

справедливо только на множестве $B_2\subset\sigma_m(R)$, $\mu B_2\le\frac{1}{2}\mu\sigma_m(R)$. Из введенных определений следует, что на всем интервале (12) справедливо неравенство

$$|t_1(x)|\ll Q^{-a},\ |t_1(x)|\ll Q_1^{-\frac{a}{\lambda}},\ Q_1=Q^{\lambda}. \tag{13}$$

На множестве $B_3 = \sigma_m(R) \setminus B_2$, $\mu B_3 > \frac{1}{2}\mu\sigma_m(R)$ верно неравенство $|t_1(x)| \gg Q^{-a-\varepsilon_1}$. Поэтому $|t_2(x)| \ll Q^{-m+a+\varepsilon_1}$ и для всех $x \in \sigma_m(R)$ верно неравенство

$$|t_2(x)| \ll Q^{-m+a+\varepsilon_1} \ll Q_2^{-\frac{m-a-\varepsilon_1}{1-\lambda}},\ Q_2 = Q^{1-\lambda}.$$

Обозначим через B_4 множество $x \in \sigma_m(R)$, для которых неравенство (13) разрешимо в полиномах $t_1(x)$ степени n_1 и высоты Q^λ. Данное множество может быть покрыто интервалами с суммарной мерой не более $cQ_1^{-\frac{\frac{a+\lambda}{\lambda}}{n_1}} \ll Q^{-\frac{a+\lambda}{n_1}}$, и если

$$Q^{-\frac{a+\lambda}{n_1}} \ll Q^{-\frac{w-1}{n}}, \tag{14}$$

то теорема 2 доказана. Перепишем неравенство, противоположное неравенству (14), в виде

$$a \le \lambda + \frac{\lambda n_1}{n}(w-1). \tag{15}$$

Аналогично поступим с многочленом $t_2(x)$ и докажем теорему 2, или придем к неравенству

$$w_{m-1} - a \le 1 - \lambda + \frac{(1-\lambda)n_1}{n}(w-1). \tag{16}$$

Выполнение неравенств (15) и (16) одновременно невозможно, что и доказывает теорему при $m = l_2T^{-1} + p_1 - 1 + \Delta$. Если $\Delta > \frac{1}{2}$, то поменяем интервал I, уменьшив его в $Q^{-\frac{1}{2}}$ раз, и повторим те же рассуждения, но уже при $m = l_2T^{-1} + p_1 - \frac{3}{2} + \Delta$.

Предложенный метод применим до $m = n - 1$ и $l_2T^{-1} + p_1 = n$. Если

$$l_2T^{-1} + p_1 > n, \tag{17}$$

то применяем метод Фолькмана–Спринджука [4; 12]. При этом оценка $|x - \alpha_1|$ с первой производной в знаменателе не является наилучшей. Возьмем оценку для $|x - \alpha_1|$ из леммы 2 при $j = 2$. В этом случае нет необходимости переходить от многочленов $P(x)$ степени n к многочленам меньших степеней. Для неприводимых полиномов воспользуемся леммой 2, а для приводимых сведем задачу к системе неравенств (15)–(16), которая является противоречивой. Окончание доказательства теоремы приведем в виде отдельного предложения.

П р е д л о ж е н и е. *Теорема 2 верна при выполнении неравенства (17).*

Список использованных источников

1. Khintchine, A. Einige Sätze über Kettenbrüche mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen / A. Khinchine // Mathematische Annalen. – 1924. – Vol. 92, N 1–2. – P. 115–125. https://doi.org/10.1007/bf01448437

2. Касселс, Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений / Дж. В. С. Касселс. – М., 1961. – 213 с.

3. Шмидт, В. Диофантовы приближения / В. Шмидт. – М., 1983. – 228 с.

4. Спринджук, В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск, 1967. – 181 с.

5. Bernik, V. I. Metric Diophantine Approximation on Manifolds / V. I. Bernik, M. M. Dodson. – Cambridge, 1999. https://doi.org/10.1017/cbo9780511565991

6. Budarina, N. On the rate of convergence to zero of the measure of extremal sets in metric theory of transcendental numbers / N. Budarina // Math. Z. – 2019. – Vol. 293, N 1–2. – P. 809–824. https://doi.org/10.1007/s00209-018-2211-1

7. Dirichlet, L. G. P. Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen / L. G. P. Dirichlet // G. Lejeune Dirichlet's Werke. – 1842. – P. 633–638. https://doi.org/10.1017/cbo9781139237338.037

8. Khintchine, A. Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen / A. Khintchine // Mathematische Zeitschrift. – 1926. – Vol. 24, N 1. – P. 706–714. https://doi.org/10.1007/bf01216806

9. Bernik, V. I. The exact order of approximating zero by values of integral polynomials / V. I. Bernik // Acta Arith. – 1989. – Vol. 53, N 1. – P. 17–28.

10. Арнольд, В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике / В. И. Арнольд // Успехи математ. наук. – 1963. – Т. 18, № 6(114). – С. 91–192.

11. Beresnevich, V. Sums of reciprocals of fractional parts and multiplicative Diophantine approximation / V. Beresnevich, A. Haynes, S. S. Velani // Memoirs of the American Mathematical Society. – 2020. – Vol. 263, N 1276. https://doi.org/10.1090/memo/1276

12. Спринджук, В. Г. Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел / В. Г. Спринджук // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1965. – Т. 29, № 2. – С. 379–436.

References

1. Khintchine A. Einige Sätze über Kettenbrüche mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen. *Mathematische Annalen*, 1924, vol. 92, no. 1–2, pp. 115–125 (in German). https://doi.org/10.1007/bf01448437

2. Kassels Dzh. V. S. *Introduction to the theory of Diophantine approximations*. Moscow, 1961. 213 p. (in Russian).

3. Shmidt V. *Diophantine approximations*. Moscow, 1983. 228 p. (in Russian).

4. Sprindzhuk V. G. *Mahler's problem in metric number theory*. Minsk, 1967. 181 p. (in Russian).

5. Bernik V. I., Dodson M. M. *Metric Diophantine Approximation on Manifolds*. Cambridge, 1999. https://doi.org/10.1017/cbo9780511565991

6. Budarina N. On the rate of convergence to zero of the measure of extremal sets in metric theory of transcendental numbers. *Mathematische Zeitschrift*, 2019, vol. 293, no. 1–2, pp. 809–824. https://doi.org/10.1007/s00209-018-2211-1

7. Dirichlet P. G. L. Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen. *G. Lejeune Dirichlet's Werke*, 1842, pp. 633–638 (in German). https://doi.org/10.1017/cbo9781139237338.037

8. Khintchine A. Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen. *Mathematische Zeitschrift*, 1926, vol. 24, no. 1, pp. 706–714 (in German). https://doi.org/10.1007/bf01216806

9. Bernik V. I. The exact order of approximating zero by values of integral polynomials. *Acta Arithmetica,* 1989, vol. 53, no. 1, pp. 17–28.

10. Arnol'd V. I. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics. *Russian Mathematical Surveys*, 1963, vol. 18, no. 6, pp. 85–191. https://doi.org/10.1070/rm1963v018n06abeh001143

11. Beresnevich V., Haynes A., Velani S. Sums of reciprocals of fractional parts and multiplicative Diophantine approximation. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 2020, vol. 263, no. 1276. https://doi.org/10.1090/memo/1276

12. Sprindzhuk V. G. A proof of Mahler's conjecture on the measure of the set of *S*-numbers. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya = Mathematics of the USSR – Izvestiya,* 1965, vol. 29, no. 2, pp. 379–436 (in Russian).

Информация об авторах

Берник Василий Иванович – д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: bernik.vasili@mail.ru.

Васильев Денис Владимирович – канд. физ.-мат. наук. Институт математики НАН (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vasilyev@im.bas-net.by.

Засимович Елена Васильевна – аспирант. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: elena.guseva.96@yandex.by.

Information about the author

Bernik Vasiliy I. – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: bernik.vasili@mail.ru.

Vasilyev Denis V. – Ph. D. (Physics and Mathematics). Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vasilyev@im.bas-net.by.

Zasimovich Elena V. – Postgraduate student. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: elena.guseva.96@yandex.by.