ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 511.35, 511.48, 511.75, 519.218.5
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-5-519-525

Поступило в редакцию 14.07.2021
Received 14.07.2021

Д. В. Коледа

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОЧКАХ ФИКСИРОВАННОЙ СТЕПЕНИ И ОГРАНИЧЕННОЙ ВЫСОТЫ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Аннотация. Рассматривается пространственное распределение точек с алгебраическими сопряженными координатами фиксированной степени и ограниченной высоты. В сообщении основной результат недавней работы автора с Ф. Гётце и Д. Н. Запорожцем распространен на случай произвольных высотных функций. Доказана асимптотическая формула для количества таких алгебраических точек, лежащих в заданной пространственной области. Получено явное выражение для плотности распределения алгебраических точек при произвольной высотной функции.

Ключевые слова: алгебраические числа, алгебраические точки, распределение алгебраических чисел, n-точечная корреляционная функция, диофантовы приближения

Для цитирования. Коледа, Д. В. Об алгебраических точках фиксированной степени и ограниченной высоты / Д. В. Коледа // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2021. – Т. 65, № 5. – С. 519–525. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-5-519-525

Denis V. Koleda

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

ON ALGEBRAIC POINTS OF FIXED DEGREE AND BOUNDED HEIGHT

(Communicated by Academician Nikolay A. Izobov)

Abstract. We consider the spatial distribution of points, whose coordinates are conjugate algebraic numbers of fixed degree and bounded height. In the article the main result of a recent joint work by the author and F. Götze, and D. N. Zaporozhets is extended to the case of arbitrary height functions. We prove an asymptotic formula for the number of such algebraic points lying in a given spatial region. We obtain an explicit expression for the density function of algebraic points under an arbitrary height function.

Keywords: algebraic numbers, algebraic points, distribution of algebraic numbers, n-point correlation function, Diophantine approximation

For citation. Koleda D. V. On algebraic points of fixed degree and bounded height. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2021, vol. 65, no. 5, pp. 519–525 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-5-519-525

Введение. Рассмотрим совместное распределение сопряженных алгебраических чисел, т. е. корней целочисленных многочленов в пространстве. Это распределение естественно описывать в терминах распределения алгебраических точек – точек, координаты которых сопряженные алгебраические числа.

В [1–6] рассматривается асимптотика общего количества алгебраических чисел или точек при неограниченном возрастании верхней границы высот. В этих работах в качестве высотной функции в основном выступает мера Малера или родственная ей высота Вейля (мультипликативная или аддитивная). В [7] получена асимптотика количества алгебраических чисел при фиксированном ограничении на меру Малера, но с растущей к бесконечности степенью. Однако в [1–7] не исследован детально вопрос о том, как алгебраические числа распределены пространственно. Известен ряд результатов (см., напр., [8; 9]) о нижних оценках количества алгебраических точек фиксированной степени вблизи гладких поверхностей и кривых. В [10] была получена асимптотика количества алгебраических точек фиксированной степени и ограниченной высоты, лежащих в произвольной области достаточной большой меры с не слишком извилистой границей. Однако класс высотных функций, рассмотренных в [10], ограничен техническим условием сводимости задачи к случайным многочленам с независимыми одинаково распределенными коэффициентами. В частности, мера Малера не входит в число таких высотных функций.

В предлагаемом сообщении мы распространяем основной результат [10] на произвольные высотные функции, включая меру Малера. Мы явно выразим пространственную плотность распределения алгебраических точек с учетом высотной функции, по которой эти точки упорядочены.

Основные понятия и соглашения. В сообщении степень n алгебраических чисел и точек произвольна, но фиксирована. Кроме того, зафиксированы целые неотрицательные k, l, такие что $1 \le k + 2l \le n$. Верхняя граница Q высот алгебраических точек – большое положительное число. Асимптотические соотношения и пределы рассматриваются при $Q \to +\infty$. Комплексная плоскость $\mathbb{C}$ отождествляется с евклидовой плоскостью $\mathbb{R}^2$, в частности, пространство $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l$ мы будем отождествлять с $\mathbb{R}^{k+2l}$.

Чтобы в записях избежать путаницы между многочленом, рассматриваемым как функция или формальное выражение, и значением многочлена в точке, формальную переменную будем обозначать символом X.

Под высотой многочлена $q(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$ мы понимаем непрерывную функцию $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{n+1} \to [0, +\infty)$, удовлетворяющую двум условиям: (а) $\mathcal{H}[q] = 0$ тогда и только тогда, когда q есть тождественный нуль; (б) $\mathcal{H}[\omega q] = |\omega| \mathcal{H}[q]$ для всех вещественных ω. Саму функцию $\mathcal{H}$, как функцию коэффициентов многочлена, мы будем называть высотной функцией. Используемые в литературе другие понятия высоты, как правило, либо непосредственно подходят под определение выше, либо могут быть сведены к нему несложным преобразованием (возведением в степень или логарифмированием).

Примерами высот являются обычная высота и мера Малера, которые для многочлена $q(X) = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 = a_n (X - z_1) \ldots (X - z_n)$ определяются соответственно как

$$H[q] := \max_{0 \le i \le n} |a_i|, \qquad M[q] := |a_n| \prod_{j=1}^{n} \max\{1, |z_j|\}.$$

Под минимальным многочленом алгебраического числа $\alpha \in \mathbb{C}$ будем понимать ненулевой целочисленный многочлен q_α наименьшей степени со взаимно простыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом, такой что $q_\alpha(\alpha) = 0$.

Алгебраической (k, l)-точкой будем называть упорядоченный набор из $(k + l)$ чисел

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}_+^l,$$

такой, что его вещественные координаты $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ и комплексные координаты $\beta_1, \ldots, \beta_l$ – различные сопряженные (по Галуа) алгебраические числа, т. е. числа α_i и β_j имеют общий минимальный многочлен $q_{\boldsymbol{\alpha}}$. Степень и высоту алгебраической точки определим как степень и высоту минимального многочлена координат точки $\deg(\boldsymbol{\alpha}) := \deg(q_{\boldsymbol{\alpha}})$, $\mathcal{H}[\boldsymbol{\alpha}] := \mathcal{H}[q_{\boldsymbol{\alpha}}]$.

Обозначим через $\mathbb{A}_n(k, l)$ множество всех алгебраических (k, l)-точек степени n (над $\mathbb{Q}$). Для $Q \ge 1$ и множества $S \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l$ определим считающую функцию:

$$\Phi_{\mathcal{H};k,l}(Q, S) := \#\{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{A}_n(k, l) \cap S : \mathcal{H}[\boldsymbol{\alpha}] \le Q\}.$$

Основные результаты. Точная асимптотика функции $\Phi_{\mathcal{H};k,l}(Q, S)$ при $Q \to \infty$ была установлена в [10] для высот вида $\mathcal{H}[q] = \ell_{p,\mathbf{w}}[q] := \left(\sum_{i=0}^{n} |w_i a_i|^p \right)^{1/p}$, где $p \in (0, +\infty]$, $\mathbf{w} = (w_0, \ldots, w_n)$ – набор $n + 1$ положительных постоянных. Особенность таких высотных функций в том, что для них задача сводится к случайным многочленам с независимыми коэффициентами.

В сообщении мы покажем, что основные результаты [10] остаются справедливы для любых высотных функций. Ниже, опираясь на лемму, мы дополним рассуждения [10] и получим теоремы 1 и 2 и явное выражение плотности распределения алгебраических (k, l)-точек в случае произвольной высоты $\mathcal{H}$.

Т е о р е м а 1. *Пусть $B \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}_+^l$ – произвольная фиксированная область с границей ∂B лебеговой меры* 0. *Тогда*

$$\lim_{Q\to\infty} \frac{\Phi_{\mathcal{H};k,l}(Q,B)}{Q^{n+1}} = \frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})}{2\zeta(n+1)} \int_B \rho_{\mathcal{H};k,l}(\mathbf{x},\mathbf{z})d\mathbf{x}d\mathbf{z}, \tag{1}$$

где $\rho_{\mathcal{H};k,l} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l \to \mathbb{R}$ – непрерывная неотрицательная функция (явное выражение которой приведено ниже в (4)–(7)), $d\mathbf{x}d\mathbf{z}$ – элемент объема в пространстве $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l$, рассматриваемом как $\mathbb{R}^{k+2l}$, $\zeta(\cdot)$ – дзета-функция Римана, $\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})$ – объем (n + 1)-мерного «единичного шара»

$$\mathbb{B}_{\mathcal{H}} := \left\{ (a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathcal{H}\left[\sum_{j=0}^{n} a_j X^j \right] \le 1 \right\},$$

где в качестве нормы вектора взята высотная функция $\mathcal{H}$.

Если граница ∂B области B и граница $\partial\mathbb{B}_{\mathcal{H}}$ «единичного шара» $\mathbb{B}_{\mathcal{H}}$ не слишком извилистые, в (1) можно оценить скорость сходимости. Например, будем считать, что $\mathcal{H}$ – алгебраическая или липшицева функция коэффициентов $(a_0,\dots,a_n)$.

Т е о р е м а 2. *Пусть граница ∂B содержится в конечном объединении алгебраических поверхностей или липшицевых отображений куба $[0,1]^{k+2l-1}$. Тогда выполняется неравенство*

$$\left| \frac{\Phi_{\mathcal{H};k,l}(Q,B)}{Q^{n+1}} - \frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})}{2\zeta(n+1)} \int_B \rho_{\mathcal{H};k,l}(\mathbf{x},\mathbf{z})d\mathbf{x}d\mathbf{z} \right| \le \begin{cases} CQ^{-1}\log Q, & n = 2 \text{ и } l = 0, \\ CQ^{-1}, & \text{иначе}, \end{cases} \tag{2}$$

где C – положительная постоянная, зависящая только от степени n и от параметров границы ∂B. Этими параметрами являются количество и степень алгебраических поверхностей, в которых содержится ∂B, либо количество соответствующих отображений и их липшицевы постоянные, если ∂B содержится в объединении липшицевых образов $(k+2l-1)$-мерного куба.

Отметим, что благодаря тому, что постоянная C зависит не от самой границы ∂B, а от конечного набора числовых параметров, характеризующих границу ∂B, оценка (2) остается верной и для областей B, которые сами могут зависеть от Q. Это особенно интересно, когда область B стягивается ко множеству нулевой меры при $Q \to \infty$ (см., напр., [8; 9]).

Функции $\rho_{\mathcal{H};k,l}$ по своему происхождению являются смешанными (k,l)-корреляционными функциями нулей вещественного случайного многочлена, вектор коэффициентов которого равномерно распределен в «единичном шаре» $\mathbb{B}_{\mathcal{H}}$. Строгое определение смешанных (k,l)-корреляционных функций можно найти в [11, раздел 1.3; 10, раздел 4].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно показать [10, раздел 6.2], что в условиях теоремы 1

$$\lim_{Q\to\infty} \frac{\Phi_{\mathcal{H};k,l}(Q,B)}{Q^{n+1}} = \frac{1}{2\zeta(n+1)} \int_{\mathbb{B}_{\mathcal{H}}} \mu_{k,l}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j X^j ; B \right) da_0\, da_1 \dots da_n, \tag{3}$$

где символ $\mu_{k,l}(g;B)$ для многочлена $g \in \mathbb{R}[X]$ и множества $B \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}_+^l$ обозначает количество точек $(x_1,\dots,x_k,z_1,\dots,z_l) \in B$, все координаты которых $x_i \in \mathbb{R}$ и $z_j \in \mathbb{C}_+$ попарно различны и являются нулями многочлена g:

$$g(x_1) = \dots = g(x_k) = g(z_1) = \dots = g(z_l) = 0.$$

Заметим, что в условиях теоремы 2 скорость сходимости в (3) точно такая, как в (2) (доказательство см. в [10] там же).

Сделаем в интеграле в (3) замену переменных, описанную в лемме ниже. Заметим, что любой вещественный многочлен $g(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$ может быть записан в виде

$$g(X)=\sum_{j=0}^{n-m} b_j X^j \prod_{r=1}^{k}(X-x_r)\prod_{s=1}^{l}(X-z_s)(X-z_s^*),$$

где $(x_1,\ldots,x_k,z_1,\ldots,z_l)\in B$, в точности $\mu_{k,l}(g;B)$ различными способами. Благодаря этому при переходе от переменных a_j к новым переменным x_r, $u_s=\operatorname{Re} z_s$, $v_s=\operatorname{Im} z_s$, b_j под интегралом останется только якобиан (10). В итоге, сведя кратный интеграл к повторному, получаем

$$\int_{\mathbb{B}_{\mathcal{H}}} \mu_{k,l}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j X^j; B\right) da_0\, da_1 \ldots da_n = \operatorname{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}}) \int_B \rho_{\mathcal{H};k,l}(\mathbf{x},\mathbf{z})\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{z},$$

где $\rho_{\mathcal{H};k,l}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ выражается формулой

$$\rho_{\mathcal{H};k,l}(x_1,\ldots,x_k,z_1,\ldots,z_l)=2^l \rho_{\mathcal{H};k+2l}(x_1,\ldots,x_k,z_1,\ldots,z_l,z_1^*,\ldots,z_l^*), \tag{4}$$

а $\rho_{\mathcal{H};m}(z_1,\ldots,z_m)$ есть симметричная функция переменных $\mathbf{z}=(z_1,\ldots,z_m)$, имеющая вид

$$\rho_{\mathcal{H};m}(\mathbf{z})=\frac{1}{\operatorname{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})}\prod_{1\le i<j\le m}|z_i-z_j| \times \int_{D_{\mathcal{H};m}(\mathbf{z})} \prod_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=0}^{n-m} t_j z_i^j\right| dt_0 \ldots dt_{n-m}, \tag{5}$$

$$D_{\mathcal{H};m}(\mathbf{z}) := \left\{(t_0,\ldots,t_{n-m})\in\mathbb{R}^{n-m+1} : \mathcal{H}\left[\prod_{i=1}^{m}(X-z_i)\sum_{j=0}^{n-m} t_j X^j\right]\le 1\right\}. \tag{6}$$

В частности, при $m=n$ имеем

$$\rho_{\mathcal{H};n}(\mathbf{z})=\frac{2}{(n+1)\operatorname{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})}\left(\prod_{1\le i<j\le n}|z_i-z_j|\right)\left(\mathcal{H}\left[\prod_{i=1}^{n}(X-z_i)\right]\right)^{-n-1}. \tag{7}$$

Отметим, что область интегрирования (6) в общем случае зависит от переменных $z_1,\ldots,z_m$.

Вспомогательная лемма. Основным усовершенствованием по сравнению с [10], позволяющим получить более общий результат, является следующая лемма, в доказательстве которой, в отличие от рассуждений в [10], нигде не используется сведение к случайным многочленам с независимыми коэффициентами.

Л е м м а. *Пусть $n\ge 2$ и $k,l\ge 0$ такие целые, что $1\le m := k+2l\le n$. Пусть отображение*

$$(x_1,\ldots,x_k;u_1,v_1,\ldots,u_l,v_l;b_0,\ldots,b_{n-m}) \overset{\phi}{\mapsto} (a_0,\ldots,a_n) \tag{8}$$

действует согласно тождеству

$$\prod_{r=1}^{m}(X-z_r)\sum_{j=0}^{n-m} b_j X^j = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j,$$

где $z_1,\ldots,z_m$ выражаются через $x_1,\ldots,x_k,u_1,v_1,\ldots,u_l,v_l$ как

$$\begin{aligned} &z_r = x_r && \text{при} \quad 1\le r\le k,\\ &z_{k+2s-1}=z_{k+2s}^* = u_s+iv_s && \text{при} \quad 1\le s\le l. \end{aligned} \tag{9}$$

Тогда модуль якобиана этого отображения равен

$$\left|\frac{\partial(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_k;u_1,v_1,\ldots,u_l,v_l;b_0,\ldots,b_{n-m})}\right| = 2^l \prod_{1\le r<j\le m}|z_r-z_j| \prod_{r=1}^{m}\left|\sum_{j=0}^{n-m} b_j z_r^j\right|, \tag{10}$$

где z_j выражаются через x_r, u_s, v_s согласно (9). В частности, при $m=1$ имеем

$$\left|\frac{\partial(a_0,a_1,\ldots,a_n)}{\partial(x_1;b_0,\ldots,b_{n-1})}\right| = \left|\sum_{j=0}^{n-1} b_j x_1^j\right|. \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для удобства рассуждений все переменные пока полагаем комплексными. При этом, поскольку все рассматриваемые функции аналитичны, дифференцирование определено корректно, и нужный нам вещественный якобиан получится при подстановке $x_j, u_s, v_s \in \mathbb{R}$.

Матрица Якоби отображения $(x_1,\dots,u_l,v_l)\overset{\sigma}{\mapsto}(z_1,\dots,z_m)$ блочно-диагональна

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial u_l} & \frac{\partial z_1}{\partial v_l} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial z_m}{\partial \zeta_1} & \cdots & \frac{\partial z_m}{\partial u_l} & \frac{\partial z_m}{\partial v_l} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}[\underbrace{1,\dots,1}_{k}, \underbrace{A,\dots,A}_{l}], \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$J_\sigma = \frac{\partial(z_1,\dots,z_m)}{\partial(x_1,\dots,x_k;u_1,v_1,\dots,u_l,v_l)} = (\det A)^l = (-2i)^l.$$

Сначала докажем (11), а затем выведем (10). Итак, пусть $m=1$ и отображение ϕ определено как

$$(z_1;b_0,\dots,b_{n-1})\overset{\phi}{\mapsto}(a_0,\dots,a_n), \tag{12}$$

где $(X-z_1)\sum_{j=0}^{n-1} b_j X^j = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$.

Якобиан отображения ϕ равен

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a_0}{\partial z_1} & \frac{\partial a_0}{\partial b_0} & \cdots & \frac{\partial a_0}{\partial b_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial a_n}{\partial z_1} & \frac{\partial a_n}{\partial b_0} & \cdots & \frac{\partial a_n}{\partial b_{n-1}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -b_0 & -z_1 & & & \\ -b_1 & 1 & -z_1 & & \\ \vdots & & 1 & \ddots & \\ -b_{n-1} & & & \ddots & -z_1 \\ 0 & & & & 1 \end{vmatrix} = -\sum_{j=0}^{n-1} b_j z_1^j.$$

Здесь в определителе посередине на незаполненных местах стоят нули. Этот определитель можно вычислить, приведя его к нижнетреугольному виду. Равенство (11) доказано.

Пусть $m\ge 2$. Отображение (8) представим как композицию отображения σ и «поштучных присоединений корней», т. е. $\phi=\phi_1\circ\phi_2\circ\ldots\circ\phi_m\circ\sigma$, где каждое ϕ_r действует как

$$(z_1,\dots,z_r;b_{r,0},\dots,b_{r,n-r})\overset{\phi_r}{\mapsto}(z_1,\dots,z_{r-1};b_{r-1,0},\dots,b_{r-1,n-r+1}),$$

согласно тождеству

$$(X-z_r)\sum_{j=0}^{n-r} b_{r,j}X^j = \sum_{j=0}^{n-r+1} b_{r-1,j}X^j.$$

Для удобства мы обозначили $b_{m,j}:=b_j$ и $b_{0,j}:=a_j$. Каждое из отображений ϕ_r устроено по принципу (12). Поэтому согласно (11) получаем якобиан отображения ϕ_r

$$J_{\phi_r} = -g_r(z_r),$$

где $g_r(X):=\sum_{j=0}^{n-r} b_{r,j}X^j = g_m(X)\prod_{r+1\le j\le m}(X-z_j)$.

Якобиан композиции отображений равен произведению якобианов этих отображений. Следовательно,

$$J_\phi = J_{\phi_1}J_{\phi_2}\ldots J_{\phi_m}J_\sigma = (-2i)^l(-1)^m\prod_{r=1}^m g_r(z_r) = (-1)^m\left(\frac{2}{i}\right)^l \prod_{1\le r<j\le m}(z_r-z_j)\prod_{r=1}^m\sum_{j=0}^{n-m} b_j z_r^j.$$

Заметим, что последнее выражение вещественно при $x_j,u_s,v_s\in\mathbb{R}$. Лемма доказана.

Заключение. Основной результат [10], изначально полученный для высот вида $\mathcal{H}\left[\sum_{j=0}^n a_jX^j\right] = \left(\sum_{i=0}^n |w_i a_i|^p\right)^{1/p}$, обобщен на произвольные высотные функции $\mathcal{H}$. Доказана асимптотическая формула для количества алгебраических точек фиксированной степени и ограниченной растущим параметром высоты, лежащих в заданной области. Получено явное выражение плотности распределения алгебраических точек фиксированной степени при произвольной высотной функции.

Список использованных источников

1. Chern, S.-J. The distribution of values of Mahler's measure / S.-J. Chern, J. D. Vaaler // J. Reine Angew. Math. – 2001. – Vol. 540. – P. 1–47. https://doi.org/10.1515/crll.2001.084

2. Masser, D. Counting algebraic numbers with large height. I / D. Masser, J. D. Vaaler // Diophantine approximation. – Vienna, 2008. – Vol. 16. – P. 237–243. https://doi.org/10.1007/978-3-211-74280-8_14

3. Masser, D. Counting algebraic numbers with large height. II / D. Masser, J. D. Vaaler // Trans. Amer. Math. Soc. – 2007. – Vol. 359, N 1. – P. 427–445. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-06-04115-8

4. Widmer, M. Counting points of fixed degree and bounded height / M. Widmer // Acta Arith. – 2009. – Vol. 140, N 2. – P. 145–168. https://doi.org/10.4064/aa140-2-4

5. Barroero, F. Counting algebraic integers of fixed degree and bounded height / F. Barroero // Monatsh. Math. – 2014. – Vol. 175, N 1. – P. 25–41. https://doi.org/10.1007/s00605-013-0599-6

6. Grizzard, R. Slicing the stars: counting algebraic numbers, integers, and units by degree and height / R. Grizzard, J. Gunther // Algebra and Number Theory. – 2017. – Vol. 11, N 6. – P. 1385–1436. https://doi.org/10.2140/ant.2017.11.1385

7. Dubickas, A. Algebraic numbers with bounded degree and Weil height / A. Dubickas // Bull. Aust. Math. Soc. – 2018. – Vol. 98, N 2. – P. 212–220. https://doi.org/10.1017/s0004972718000497

8. Bernik, V. I. On the distribution of points with algebraically conjugate coordinates in a neighborhood of smooth curves / V. I. Bernik, F. Götze, A. G. Gusakova // Зап. научн. сем. ПОМИ. – СПб., 2016. – Т. 448. – С. 14–47.

9. Бударина, Н. В. Оценки снизу для количества векторов с алгебраическими координатами вблизи гладких поверхностей / Н. В. Бударина, Д. Диккинсон, В. И. Берник // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2020. – Т. 64, № 1. – С. 7–12. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-1-7-12

10. Götze, F. Joint distribution of conjugate algebraic numbers: a random polynomial approach / F. Götze, D. Koleda, D. Zaporozhets // Adv. Math. – 2020. – Vol. 359. – Art. 106849. https://doi.org/10.1016/j.aim.2019.106849

11. Tao, T. Local universality of zeroes of random polynomials / T. Tao, V. Vu // Int. Math. Res. Not. – 2015. – Vol. 2015, N 13. – P. 5053–5139. https://doi.org/10.1093/imrn/rnu084

References

1. Chern S.-J., Vaaler J. D. The distribution of values of Mahler's measure. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2001, vol. 540, pp. 1–47. https://doi.org/10.1515/crll.2001.084

2. Masser D., Vaaler J. D. Counting algebraic numbers with large height. I. *Diophantine approximation*. Vienna, 2008, vol. 16, pp. 237–243. https://doi.org/10.1007/978-3-211-74280-8_14

3. Masser D., Vaaler J. D. Counting algebraic numbers with large height. II. *Transactions of the American Mathematical Society*, 2007, vol. 359, no. 1, pp. 427–445. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-06-04115-8

4. Widmer M. Counting points of fixed degree and bounded height. *Acta Arithmetica*, 2009, vol. 140, no. 2, pp. 145–168. https://doi.org/10.4064/aa140-2-4

5. Barroero F. Counting algebraic integers of fixed degree and bounded height. *Monatshefte für Mathematik*, 2014, vol. 175, no. 1, pp. 25–41. https://doi.org/10.1007/s00605-013-0599-6

6. Grizzard R., Gunther J. Slicing the stars: counting algebraic numbers, integers, and units by degree and height. *Algebra and Number Theory*, 2017, vol. 11, no. 6, pp. 1385–1436. https://doi.org/10.2140/ant.2017.11.1385

7. Dubickas A. Algebraic numbers with bounded degree and Weil height. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 2018, vol. 98, no. 2, pp. 212–220. https://doi.org/10.1017/s0004972718000497

8. Bernik V., Götze F., Gusakova A. On the distribution of points with algebraically conjugate coordinates in a neighborhood of smooth curves. *Journal of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 224, no. 2, pp. 176–198. https://doi.org/10.1007/s10958-017-3404-6

9. Budarina N. V., Dickinson D., Bernik V. I. Lower bounds for the number of vectors with algebraic coordinates near smooth surfaces. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2020, vol. 64, no. 1, pp. 7–12 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-1-7-12

10. Götze F., Koleda D., Zaporozhets D. Joint distribution of conjugate algebraic numbers: a random polynomial approach. *Advances in Mathematics*, 2020, vol. 359, art. 106849. https://doi.org/10.1016/j.aim.2019.106849

11. Tao T., Vu V. Local universality of zeroes of random polynomials. *International Mathematics Research Notices*, 2015, vol. 2015, no. 13, pp. 5053–5139. https://doi.org/10.1093/imrn/rnu084

Информация об авторе

Коледа Денис Владимирович – канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: koledad@rambler.ru.

Information about the author

Koleda Denis V. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: koledad@rambler.ru.