ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.938
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-3-263-267

Поступило в редакцию 11.03.2020
Received 11.03.2020

В. И. Бахтин[1], Б. Садок[2]

[1]Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь
[2]Люблинский Католический Университет Иоанна Павла II, Люблин, Республика Польша

УПАКОВОЧНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ БАССЕЙНОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Аннотация. Рассматривается пространство бесконечных сигналов, составленных из букв конечного алфавита. Каждый сигнал порождает последовательность эмпирических мер на алфавите и отвечающее этой последовательности предельное множество. Все пространство сигналов разбивается на узкие бассейны, состоящие из сигналов с одинаковыми предельными множествами для эмпирических мер, и для каждого узкого бассейна вычисляется упаковочная размерность.

Ключевые слова: упаковочная размерность, хаусдорфова размерность, эмпирическая мера, бассейн вероятностной меры

Для цитирования: Бахтин, В. И. Упаковочные размерности бассейнов в пространстве последовательностей / В. И. Бахтин, Б. Садок // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2020. – Т. 64, № 3. – С. 263–267. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-3-263-267

Victor I. Bakhtin[1], Bruno Sadok[2]

[1]Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus
[2]The John Paul II Catholic University of Lublin, Lublin, Republic of Poland

PACKING DIMENSIONS OF BASINS IN THE SPACE OF SEQUENCES

(Communicated by Corresponding Member Valentin V. Gorohovik)

Abstract. We consider a space of infinite signals composed of finite-alphabet letters. Each signal generates a sequence of empirical measures on the alphabet and a limit set corresponding to this sequence. The space of signals is partitioned into narrow basins consisting of signals with identical limit sets for the empirical measures, and the packing dimension is computed for each narrow basin.

Keywords: packing dimension, Hausdorff dimension, empirical measure, basin of a probability measure

For citation: Bakhtin V. I., Sadok B. Packing dimensions of basins in the space of sequences. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2020, vol. 64, no. 3, pp. 263–267 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-3-263-267

Введение. Пусть на конечном множестве X задано распределение вероятностей μ. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $x=(x_1, x_2, \ldots)$, принимающих значения в X и имеющих распределение μ. По усиленному закону больших чисел для каждого $y \in X$ с единичной вероятностью

$$\delta_{x,n}(y) := \frac{\operatorname{card}\{i \le n \mid x_i = y\}}{n} \longrightarrow \mu(y). \tag{1}$$

Определим бассейн $B(\mu)$ как множество последовательностей $x=(x_1, x_2, \ldots) \in X^{\mathbb{N}}$, для которых имеет место сходимость (1). Из усиленного закона больших чисел вытекает, что $\mu^{\mathbb{N}}(B(\mu))=1$ и $\mu^{\mathbb{N}}(B(\nu))=0$ для всех распределений $\nu \neq \mu$ (другими словами, последовательности из $B(\mu)$ наблюдаются с единичной вероятностью по отношению к распределению Бернулли $\mu^{\mathbb{N}}$, а последовательности из других бассейнов $B(\nu)$ наблюдаются с нулевой вероятностью).

Более тонкой характеристикой бассейнов (по сравнению с вероятностью) является размерность. В частности, хаусдорфовы размерности бассейнов были вычислены в работах Биллингсли [1; 2].

Очевидно, в пространстве $X^{\mathbb{N}}$ существуют иррегулярные последовательности, не принадлежащие ни одному из бассейнов $B(\nu)$. Множество таких иррегулярных последовательностей имеет нулевую вероятность по отношению к любому распределению Бернулли $\nu^{\mathbb{N}}$. Данное сообщение посвящено тонкой классификации множества иррегулярных последовательностей. Это множество разбивается на так называемые узкие бассейны, определяемые множествами предельных точек последовательностей эмпирических мер $\delta_{x,n}$ из (1). Хаусдорфовы размерности узких бассейнов были вычислены в [3]. В этом сообщении находятся их упаковочные размерности.

Упаковочные размерности множеств и локальные размерности мер. Напомним определения упаковочных мер и размерностей. *Упаковкой* множества A в метрическом пространстве M называется любой конечный или счетный набор шаров $B(x_i, r_i)$ с центрами $x_i \in A$ и радиусами r_i, для которых выполняется условие $\rho(x_i, x_j) > r_i + r_j$ при $i \neq j$. Упаковку, состоящую из шаров радиуса не больше ε, будем называть ε-*упаковкой*.

Для всякого $s > 0$ положим

$$C_\varepsilon^s(A) = \sup\left\{ \sum_i r_i^s \;\middle|\; \text{шары } B(x_i, r_i) \text{ образуют } \varepsilon\text{-упаковку } A \right\}.$$

Очевидно, $C_\varepsilon^s(A)$ не возрастает при уменьшении ε, и потому существует предел

$$C^s(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} C_\varepsilon^s(A).$$

Мы будем называть его емкостью множества A размерности s.

Упаковочной мерой размерности s множества A называется число

$$P^s(A) = \inf\left\{ \sum_i C^s(A_i) \;\middle|\; \text{множества } A_i \text{ образуют счетное покрытие } A \right\},$$

а его *упаковочная размерность* определяется как

$$\dim_P A = \inf\left\{ s > 0 \;\middle|\; P^s(A) = 0 \right\}.$$

Пусть на метрическом пространстве M задана борелевская мера μ. Функция

$$D_\mu(x) = \limsup_{r \to 0+0} \frac{\ln \mu(B(x,r))}{\ln r}, \quad x \in M,$$

называется *верхней локальной размерностью* меры μ.

Следующая теорема позволяет вычислять упаковочные размерности множеств с помощью локальных размерностей мер.

Т е о р е м а 1 [4, Proposition 2.3]. *Если для подмножества $A \subset M$ найдется такая конечная борелевская мера μ на M, что $D_\mu(x) \le s$ для всех точек $x \in A$, то тогда $\dim_P A \le s$. А если $D_\mu(x) \ge s$ для всех $x \in A$ и при этом внешняя мера $\mu^*(A)$ положительна, то в таком случае $\dim_P A \ge s$.*

Бассейны в пространстве последовательностей. Рассмотрим конечное множество $X = \{1, \ldots, r\}$. Ниже оно будет называться алфавитом, а его элементы буквами. Всякие последовательности букв (конечные и бесконечные) мы будем назвать сигналами. Совокупность конечных сигналов длины n естественно обозначить как X^n, а множество всех бесконечных сигналов как

$$X^{\mathbb{N}} = \{x = (x_1, x_2, \ldots) \mid x_i \in X\}.$$

Любую начальную часть сигнала будем называть его префиксом.

Пусть $M(X)$ – совокупность всех вероятностных мер на X:

$$M(X)=\left\{\mu=(\mu(1),\ldots,\mu(r))\in\mathbb{R}^r \,\middle|\, \sum\mu(i)=1,\ \mu(i)\geq 0\right\}.$$

Очевидно, множество $M(X)$ выпукло и компактно. Для каждой буквы $i\in X$ обозначим через δ_i единичную меру, сосредоточенную в i, т. е.

$$\delta_i(j)=\begin{cases}1, & \text{если } j=i,\\ 0, & \text{если } j\neq i.\end{cases}$$

Каждый бесконечный сигнал $x=(x_1,x_2,\ldots)\in X^{\mathbb{N}}$ определяет последовательность эмпирических мер $\delta_{x,n}\in M(X)$, порожденных его префиксами длины n:

$$\delta_{x,n}=\frac{\delta_{x_1}+\cdots+\delta_{x_n}}{n}$$

(иначе говоря, $\delta_{x,n}(y)$ – это средняя частота буквы y среди $x_1,\ldots,x_n$).

Для каждого бесконечного сигнала x обозначим через $V(x)$ множество всех предельных точек последовательности $\delta_{x,n}\in M(X)$. В силу компактности $M(X)$ это множество непусто. Более того, в [3, лемма 3] доказано, что оно компактно и связно.

Для всякого подмножества $W\subset M(X)$ определим в $X^{\mathbb{N}}$ следующие множества: *бассейн* $B(W)$, *узкий бассейн* $NB(W)$ и *широкий бассейн* $WB(W)$ формулами

$$B(W)=\left\{x\in X^{\mathbb{N}} \,\middle|\, V(x)\subset W\right\},$$

$$NB(W)=\left\{x\in X^{\mathbb{N}} \,\middle|\, V(x)=W\right\},$$

$$WB(W)=\left\{x\in X^{\mathbb{N}} \,\middle|\, V(x)\cap W\neq\varnothing\right\}.$$

Иначе говоря, $B(W)$ – это совокупность таких бесконечных сигналов x, для которых множество предельных точек последовательности эмпирических мер $\delta_{x,n}$ содержится в W, $NB(W)$ – это совокупность таких бесконечных сигналов x, для которых множество предельных точек последовательности $\delta_{x,n}$ совпадает с W, а $WB(W)$ – это совокупность таких бесконечных сигналов x, для которых последовательность $\delta_{x,n}$ имеет хотя бы одну предельную точку в W. При этом, очевидно,

$$NB(W)\subset B(W)\subset WB(W).$$

Из вышеупомянутой компактности и связности $V(x)$ следует, что узкий бассейн может быть непуст только тогда, когда множество W непусто, компактно и связно. С другой стороны, в [3, лемма 6] доказано, что для любого непустого связного компакта $W\subset M(X)$ соответствующий узкий бассейн $NB(W)$ действительно непуст. Что касается бассейнов $B(W)$ и $WB(W)$, то они непусты для всех $W\neq\varnothing$.

Всякий бесконечный сигнал x однозначно определяет множество $V(x)$. Поэтому узкие бассейны, отвечающие разным множествам W, не пересекаются между собой. Таким образом, все пространство бесконечных сигналов $X^{\mathbb{N}}$ оказывается разбито на узкие бассейны, отвечающие всевозможным связным компактам $W\subset M(X)$. Однако бассейны двух других типов могут иметь непустые пересечения.

Упаковочные размерности бассейнов. Зафиксируем набор чисел $\theta=(\theta(1),\ldots,\theta(r))$, где $\theta(i)\in(0,1)$ для каждой буквы $i\in X$. Определим с его помощью метрику ρ на $X^{\mathbb{N}}$ следующим образом:

$$\rho(x,y)=\prod_{t=1}^{n}\theta(x_t),\quad \text{где } n=\inf\{t\mid x_t\neq y_t\}-1 \tag{2}$$

(здесь n – длина наибольшего общего префикса x и y).

Рассмотрим функцию

$$S(\mu, \theta) = \frac{\sum_{i=1}^{r} \mu(i) \ln \mu(i)}{\sum_{i=1}^{r} \mu(i) \ln \theta(i)}, \quad \mu \in M(X).$$

Легко видеть, что она непрерывно зависит от μ (если положить $0 \ln 0 = 0$).

Основным результатом сообщения являются следующие две теоремы, которые могут быть доказаны при помощи теоремы 1.

Т е о р е м а 2. *Пусть на пространстве $X^{\mathbb{N}}$ задана метрика (2). Тогда для любого непустого связного компакта $W \subset M(X)$*

$$\dim_P NB(W) = \sup_{\mu \in W} S(\mu, \theta),$$

где $\dim_P$ обозначает упаковочную размерность.

Т е о р е м а 3. *Для любого непустого подмножества $W \subset M(X)$*

$$\dim_P B(W) = \sup_{\mu \in W} S(\mu, \theta),$$

$$\dim_P WB(W) = \dim_P X^{\mathbb{N}} = \sup_{\mu \in M(X)} S(\mu, \theta).$$

З а м е ч а н и е. Хаусдорфовы размерности бассейнов $B(W)$ вычислены в [1; 2] (при дополнительном условии $\sum \theta(i) = 1,$ которое на самом деле можно отбросить), а размерности широких бассейнов были вычислены в [5]. Они имеют вид

$$\dim_H B(W) = \dim_H WB(W) = \sup_{\mu \in W} S(\mu, \theta).$$

Хаусдорфовы размерности узких бассейнов были вычислены в [3]:

$$\dim_H NB(W) = \inf_{\mu \in W} S(\mu, \theta).$$

Что касается упаковочных размерностей бассейнов, то, насколько нам известно, до сих пор они никем не изучались.

Список использованных источников

1. Billingsley, P. Hausdorff dimension in probability theory / P. Billingsley // Ill. J. Math. – 1960. – Vol. 4, N 2. – P. 187–209. https://doi.org/10.1215/ijm/1255455863

2. Billingsley, P. Hausdorff dimension in probability theory II / P. Billingsley // Ill. J. Math. – 1961. – Vol. 5, N 2. – P. 291–298. https://doi.org/10.1215/ijm/1255629826

3. Бахтин, В. И. Хаусдорфовы размерности узких бассейнов в пространстве последовательностей / В. И. Бахтин, Б. М. Садок // Тр. Ин-та математики. – 2019. – Т. 27, № 1–2. – С. 3–12.

4. Falconer, K. Techniques in Fractal Geometry / K. Falconer. – Chichester, New York, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto: John Wiley & Sons, 1997. – 256 p.

5. Bakhtin, V. The McMillan theorem for colored branching processes and dimensions of random fractals / V. Bakhtin // Entropy. – 2014. – Vol. 16, N 12. – P. 6624–6653. https://doi.org/10.3390/e16126624

References

1. Billingsley P. Hausdorff dimension in probability theory. *Illinois Journal of Mathematics*, 1960, vol. 4, no. 2, pp. 187–209. https://doi.org/10.1215/ijm/1255455863

2. Billingsley P. Hausdorff dimension in probability theory II. *Illinois Journal of Mathematics*, 1961, vol. 5, no. 2, pp. 291–298. https://doi.org/10.1215/ijm/1255629826

3. Bakhtin V. I., Sadok B. M. Hausdorff dimensions of narrow basins in the space of sequences. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2019, vol. 27, no. 1–2, pp. 3–12 (in Russian).

4. Falconer K. *Techniques in Fractal Geometry*. Chichester, New York, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto, John Wiley & Sons, 1997. 256 p.

5. Bakhtin V. The McMillan theorem for colored branching processes and dimensions of random fractals. *Entropy*, 2014, vol. 16, no. 12, pp. 6624–6653. https://doi.org/10.3390/e16126624

Информация об авторах

Бахтин Виктор Иванович – д-р физ.-мат. наук, профессор. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: bakhtin@tut.by.

Садок Бруно – магистр. Люблинский Католический Университет Иоанна Павла II (ул. Константинув, 1 H, 20-708, Люблин, Республика Польша). E-mail: bruno.bonitas@gmail.com.

Information about the authors

Bakhtin Victor I. – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: bakhtin@tut.by.

Sadok Bruno – Master. John Paul II Catholic University of Lublin (1 H, Konstantynov Str., 20-708, Lublin, Republic of Poland). E-mail: bruno.bonitas@gmail.com.