Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **май–июнь** **Том 59 № 3**

ФИЗИКА

УДК 539.12

В. В. КИСЕЛЬ[1], Е. М. ОВСИЮК[2], О. В. ВЕКО[2], В. М. РЕДЬКОВ[1]

НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ТЕОРИИ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 2

(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)

[1]*Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск*
[2]*Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина* *Поступило 27.04.2015*

Теория массивного и безмассового поля со спином 2, начиная с работ Паули и Фирца [1; 2], всегда присутствовала в литературе [3]. Большая часть работ выполнена в рамках формализма волновых уравнений второго порядка. По-видимому, первое систематическое исследование теории частицы со спином 2 в рамках теории релятивистских волновых уравнений первого порядка выполнено в работах Ф. И. Федорова и его учеников [4]. Оказалось, что частица со спином 2 требует в этом формализме для своего описания 30-компонентной волновой функции. Федоровым было инициировано развитие еще одной, 50-компонентной теории частицы со спином 2. В литературе специально исследовался вопрос о связях между двумя вариантами теории частицы со спином 2. Было показано, что 50-компонентное волновое уравнение для заряженной частицы со спином 2 во внешнем электромагнитном поле может быть сведено к виду 30-компонентного уравнения, но с дополнительным членом взаимодействия, интерпретируемым как аномальный магнитный момент.

Известно [5–8], что в релятивистской теории любой массивной частицы должен существовать нерелятивистский предел. Наиболее известными и разработанными [8] являются случаи полей спинов 1/2 и 1. До настоящего времени вопрос о паулиевском уравнении для частицы со спином 2 не исследовался. В настоящей работе соответствующее нерелятивистское волновое уравнение Паули для частицы со спином 2 найдено (реальными физическими частицами с таким спином являются короткоживущие мезоны). При этом использован формализм релятивистских волновых уравнений первого порядка, учтено присутствие внешнего электромагнитного поля.

Исходим из релятивистского волнового уравнения [5–7]

$$(\Gamma_\mu D_\mu + M)\Psi = 0 \tag{1}$$

($\hbar = c = 1$) для частицы массой M и спином $s = 2$, заданного относительно 30-компонентной функции Ψ, функция Ψ может быть представлена набором тензорных полей Ψ_0, Ψ_μ, $\Psi_{(\mu\nu)}$, $\Psi_{\rho[\sigma\eta]}$, где Ψ_0 – 4-скаляр; Ψ_μ – 4-вектор; $\Psi_{(\mu\nu)}$ – симметричный тензор второго ранга с нулевым следом, т. е. $\Psi_{(\mu\nu)} = \Psi_{(\nu\mu)}$, $\Psi_{(\mu\mu)} = 0$, $\Psi_{\rho(\sigma\eta)}$ – тензор третьего ранга, удовлетворяющий условиям

$$\Psi_{\mu[\nu\lambda]} = -\Psi_{\mu[\lambda\nu]}, \quad \Psi_{\mu[\mu\nu]} = 0, \quad \Psi_{\mu[\nu\lambda]} + \Psi_{\lambda[\mu\nu]} + \Psi_{\nu[\lambda\mu]} = 0. \tag{2}$$

В уравнении (1) Γ_μ – четверка постоянных 30×30-матриц, явный вид которых следующий (в пространстве Минковского используем метрику с мнимой единицей):

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{0,\mu} + e^{\mu,0}) - \sqrt{\frac{2}{3}}(e^{\nu,(\mu\nu)} - e^{(\mu\nu),\nu}) - \sqrt{2}(e^{(\nu\lambda),\nu[\mu\lambda]} + e^{\nu[\mu\lambda],(\nu\lambda)}). \tag{3}$$

В (3) $e^{A,B}$ – элементы полной матричной алгебры [5–7], определяемые соотношениями

$$(e^{A,B})_{CD} = \delta_{A,C}\delta_{BD}\,, \qquad e^{A,B}e^{C,D} = \delta_{B,C}e^{A,D}\,,$$

где $\delta_{A,B}$ – обобщенные символы Кронекера. Минимальные полиномы [5–7] приведенных матриц Γ_μ задаются в виде $(\Gamma_\mu)^3((\Gamma_\mu)^2 - 1) = 0$ (по μ нет суммирования). Уравнение (1) представим в форме системы тензорных уравнений. При этом удобно разбить составляющие волновой функции на три группы: Ψ_+, Ψ_- и Ψ_0:

$$\Psi_0 = P_0\Psi, \;\; \Psi_+ = P_+\Psi, \;\; \Psi_- = P_-\Psi,$$

где проективные операторы P_0, P_+ и P_- равны

$$P_0 = 1 - \Gamma_4^4, \quad P_+ = \frac{1}{2}\Gamma_4^3(\Gamma_4 + 1), \;\; P_- = \frac{1}{2}\Gamma_4^3(\Gamma_4 - 1). \tag{4}$$

Функции Ψ_0, Ψ_+ и Ψ_- в явной тензорной форме определяются так:

$$\Psi_0 = \begin{bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_k \\ \Psi_4 \\ -\frac{1}{3}\delta_{kn}\Psi_{(44)} \\ \Psi_{(4k)} \\ \Psi_{(44)} \\ \Psi_{r[kn]} \\ \Psi_{4[kn]} \\ \frac{1}{2}(\Psi_{r[k4]} - \Psi_{k[r4]}) \\ \Psi_{4[k4]} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$\Psi_{+(-)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\Psi_{(kn)} + \frac{1}{3}\delta_{kn}\Psi_{(44)}) + (-)\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{k[n4]} + \Psi_{n[k4]}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}[\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{k[n4]} + \Psi_{n[k4]}) + (-)(\Psi_{(kn)} + \frac{1}{3}\delta_{kn}\Psi_{(44)})] \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

При получении нерелятивистского уравнения для частицы со спином 2 будем исходить из предположения, что составляющие функции Ψ_+ являются большими, тогда как составляющие функции Ψ_- являются малыми [9]. В этом случае большими являются следующие комбинации функций:

$$(\Psi_{(kn)} + \frac{1}{3}\delta_{kn}\Psi_{(44)}) \;\text{ и }\; (\Psi_{k[n4]} + \Psi_{n[k4]}).$$

Малыми будем также полагать и составляющие функции Ψ_0. Обратимся к исходной системе тензорных уравнений, эквивалентной матричному уравнению (1):

$$\frac{1}{\sqrt{2}}D_\mu\Psi_\mu + M\Psi_0 = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}D_\mu\Psi_0 - \sqrt{\frac{2}{3}}D_\nu\Psi_{(\nu\mu)} + M\Psi_\mu = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(D_\rho\Psi_\sigma + D_\sigma\Psi_\rho - \frac{1}{2}\delta_{\rho\sigma}D_\nu\Psi_\nu) - \frac{1}{\sqrt{2}}(D_\nu\Psi_{\rho[\nu\sigma]} + D_\nu\Psi_{\sigma[\nu\rho]}) + M\Psi_{(\rho\sigma)} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(D_\beta\Psi_{(\eta\lambda)} - D_\lambda\Psi_{(\beta\eta)} + \frac{1}{3}\delta_{\eta\lambda}D_\rho\Psi_{(\rho\beta)} - \frac{1}{3}\delta_{\eta\beta}D_\rho\Psi_{(\rho\lambda)}) + M\Psi_{\eta[\lambda\beta]} = 0.$$

Произведем расщепление уравнений (7) по составляющим вида (4)–(6):

$$\frac{1}{\sqrt{2}}D_4\Psi_4 + \frac{1}{\sqrt{2}}D_c\Psi_c + M\Psi_0 = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}D_k\Psi_0 - \sqrt{\frac{2}{3}}D_b\Psi_{(bk)} - \sqrt{\frac{2}{3}}D_4\Psi_{(4k)} + M\Psi_k = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}D_4\Psi_0 - \sqrt{\frac{2}{3}}D_b\Psi_{(b4)} - \sqrt{\frac{2}{3}}D_4\Psi_{(44)} + M\Psi_4 = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\{D_a\Psi_b + D_b\Psi_a - \frac{1}{2}\delta_{ab}(D_4\Psi_4 + D_c\Psi_c)\} -$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}D_c(\Psi_{a[cb]} + \Psi_{b[ca]}) + \frac{1}{\sqrt{2}}D_4(\Psi_{a[b4]} + \Psi_{b[a4]}) + M\Psi_{(ab)} = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(D_4\Psi_a + D_a\Psi_4) - \frac{1}{\sqrt{2}}D_c(\Psi_{a[c4]} + \Psi_{4[ca]}) - \frac{1}{\sqrt{2}}D_4\Psi_{4[a4]} + M\Psi_{(a4)} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{6}}(3D_4\Psi_4 - D_b\Psi_b) - \sqrt{2}D_c\Psi_{4[c4]} + M\Psi_{(44)} = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\{D_r\Psi_{(kn)} - D_n\Psi_{(kr)} + \frac{1}{3}\delta_{kn}(D_c\Psi_{(cr)} + D_4\Psi_{(r4)}) -$$

$$\frac{1}{3}\delta_{kr}(D_c\Psi_{(cn)} + D_4\Psi_{(n4)})\} + M\Psi_{k[nr]} = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\{D_4\Psi_{(kn)} - D_n\Psi_{(k4)} + \frac{1}{3}\delta_{kn}(D_c\Psi_{(c4)} + D_4\Psi_{(44)})\} + M\Psi_{k[n4]} = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{2}{3}D_4\Psi_{(n4)} - D_n\Psi_{(44)} - \frac{1}{3}D_c\Psi_{(cn)}) + M\Psi_{4[n4]} = 0.$$

Отсюда комбинированием уравнений получаем

$$(M + D_4)\{(\Psi_{(kn)} + \frac{1}{3}\delta_{kn}\Psi_{(44)}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{k[n4]} + \Psi_{n[k4]})\} -$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(D_b\Psi_{k[bn]} + D_b\Psi_{n[bk]} + \frac{2}{3}\delta_{kn}D_b\Psi_{4[b4]}) + \quad (9)$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(D_k\Psi_n + D_n\Psi_k - \frac{2}{3}\delta_{kn}D_b\Psi_b) - \frac{1}{2}(D_k\Psi_{(n4)} + D_n\Psi_{(k4)} - \frac{2}{3}\delta_{kn}D_b\Psi_{(b4)}) = 0,$$

$$(M - D_4)\{(\Psi_{(kn)} + \frac{1}{3}\delta_{kn}\Psi_{(44)}) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{k[n4]} + \Psi_{n[k4]})\} -$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(D_b\Psi_{k[bn]} + D_b\Psi_{n[bk]} + \frac{2}{3}\delta_{kn}D_b\Psi_{4[b4]}) + \quad (10)$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(D_k\Psi_n + D_n\Psi_k - \frac{2}{3}\delta_{kn}D_b\Psi_b) + \frac{1}{2}(D_k\Psi_{(n4)} + D_n\Psi_{(k4)} - \frac{2}{3}\delta_{kn}D_b\Psi_{(b4)}) = 0.$$

Кроме того, имеем

$$M(\frac{1}{2}\Psi_0 - \frac{1}{\sqrt{3}}\Psi_{(44)}) + \sqrt{\frac{2}{3}}D_k(\frac{1}{\sqrt{3}}\Psi_k + \Psi_{4[k4]}) = 0, \tag{11}$$

$$\begin{gathered} M(\frac{1}{\sqrt{3}}\Psi_k + \Psi_{4[k4]}) + \\ \sqrt{\frac{2}{3}}D_k(\frac{1}{2}\Psi_0 - \frac{1}{\sqrt{3}}\Psi_{(44)}) - \frac{1}{\sqrt{3}}D_b(\Psi_{(bk)} + \frac{1}{3}\delta_{bk}\Psi_{(44)}) = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Выделим энергию покоя с помощью следующей подстановки: $\Psi_A = \exp(-Mx_4)\Phi_A$. При этом уравнения трансформируются в

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\sqrt{2}}D_4\Phi_4 + \frac{1}{\sqrt{2}}D_c\Phi_c + M(\Phi_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_4) = 0, \\
\frac{1}{\sqrt{2}}D_k\Phi_0 - \sqrt{\frac{2}{3}}D_b\Phi_{(bk)} - \sqrt{\frac{2}{3}}D_4\Phi_{(4k)} + M(\Phi_k + \sqrt{\frac{2}{3}}\Phi_{(4k)}) = 0, \\
\frac{1}{\sqrt{2}}D_4\Phi_0 - \sqrt{\frac{2}{3}}D_b\Phi_{(b4)} - \sqrt{\frac{2}{3}}D_4\Phi_{(44)} + M(\Phi_4 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_0 + \sqrt{\frac{2}{3}}\Phi_{(44)}) = 0, \\
\frac{1}{\sqrt{2}}D_c(\Phi_{a[cb]} + \Phi_{b[ca]}) + \frac{1}{\sqrt{2}}D_4(\Phi_{a[b4]} + \Phi_{b[a4]}) + M\{\Phi_{(ab)} + \frac{1}{2\sqrt{6}}\delta_{ab}\Phi_4 - \\
\frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{a[b4]} + \Phi_{b[a4]})\} = 0, \\
\frac{1}{\sqrt{6}}(D_4\Phi_a + D_a\Phi_4) - \frac{1}{\sqrt{2}}D_c(\Phi_{a[c4]} + \Phi_{4[ca]}) - \\
\frac{1}{\sqrt{2}}D_4\Phi_{4[a4]} + M\{\Phi_{(a4)} - \frac{1}{\sqrt{6}}\Phi_a + \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_{4[a4]}\} = 0, \\
\frac{1}{2\sqrt{6}}(3D_4\Phi_4 - D_b\Phi_b) - \sqrt{2}D_c\Phi_{4[c4]} + M\{\Psi_{(44)} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\Phi_4\} = 0, \\
\frac{1}{\sqrt{2}}\{D_r\Phi_{(kn)} - D_n\Phi_{(kr)} + \frac{1}{3}\delta_{kn}(D_c\Phi_{(cr)} + D_4\Phi_{(r4)}) - \\
\frac{1}{3}\delta_{kr}(D_c\Phi_{(cn)} + D_4\Phi_{(n4)})\} + M\{\Phi_{k[nr]} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\delta_{kn}\Phi_{(r4)} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\delta_{kr}\Phi_{(n4)}\} = 0, \\
\frac{1}{\sqrt{2}}(D_r\Phi_{(n4)} - D_n\Phi_{(r4)}) + M\Phi_{4[nr]} = 0, \\
\frac{1}{\sqrt{2}}\{D_4\Phi_{(kn)} - D_n\Phi_{(k4)} + \frac{1}{3}\delta_{kn}(D_c\Phi_{(c4)} + D_4\Psi_{(44)})\} + \\
M\{\Phi_{k[n4]} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{(kn)} + \frac{1}{3}\delta_{kn}\Psi_{(44)})\} = 0, \\
\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{2}{3}D_4\Phi_{(n4)} - D_n\Phi_{(44)} - \frac{1}{3}D_c\Phi_{(cn)}) + M\{\Phi_{4[n4]} - \frac{\sqrt{2}}{3}\Phi_{(n4)}\} = 0.
\end{gathered} \tag{13}$$

Сохраняются соотношения типа (11), (12):

$$M(\frac{1}{2}\Phi_0 - \frac{1}{\sqrt{3}}\Phi_{(44)}) + \sqrt{\frac{2}{3}}D_k(\frac{1}{\sqrt{3}}\Phi_k + \Phi_{4[k4]}) = 0,$$

$$M(\frac{1}{\sqrt{3}}\Phi_k + \Phi_{4[k4]}) + \sqrt{\frac{2}{3}}D_k(\frac{1}{2}\Phi_0 - \frac{1}{\sqrt{3}}\Phi_{(44)}) - \frac{1}{\sqrt{2}}D_b(\Phi_{(bk)} + \frac{1}{3}\delta_{bk}\Phi_{(44)}) = 0.$$

Из уравнений (9), (10) выводим

$$D_4\{(\Phi_{(kn)}+\frac{1}{3}\delta_{kn}\Phi_{(44)})+\frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{k[n4]}+\Phi_{n[k4]})\}-\frac{1}{\sqrt{2}}(D_b\Phi_{k[bn]}+D_b\Phi_{n[bk]}+$$
$$\frac{2}{3}\delta_{kn}D_b\Phi_{4[b4]})+\frac{1}{\sqrt{6}}(D_k\Phi_n+D_n\Phi_k-\frac{2}{3}\delta_{kn}D_b\Phi_b)-\qquad(14)$$
$$\frac{1}{2}(D_k\Phi_{(n4)}+D_n\Phi_{(k4)}-\frac{2}{3}\delta_{kn}D_b\Phi_{(b4)})=0,$$
$$(2M-D_4)\{(\Phi_{(kn)}+\frac{1}{3}\delta_{kn}\Phi_{(44)})-\frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{k[n4]}+\Phi_{n[k4]})\}-$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(D_b\Phi_{k[bn]}+D_b\Phi_{n[bk]}+\frac{2}{3}\delta_{kn}D_b\Phi_{4[b4]})+$$
$$\frac{1}{\sqrt{6}}(D_k\Phi_n+D_n\Psi_k-\frac{2}{3}\delta_{kn}D_b\Phi_b)+\frac{1}{2}(D_k\Phi_{(n4)}+D_n\Phi_{(k4)}-\frac{2}{3}\delta_{kn}D_b\Phi_{(b4)})=0.$$

Произведем нерелятивистское приближение в уравнении (14), записанном в форме

$$D_4\{(\Phi_{(kn)}+\frac{1}{3}\delta_{kn}\Phi_{(44)})+\frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{k[n4]}+\Phi_{n[k4]})\}+$$
$$\frac{1}{\sqrt{6}}\{D_k(\Phi_n+\sqrt{\frac{2}{3}}\Phi_{(n4)})+D_n(\Phi_k+\sqrt{\frac{2}{3}}\Phi_{(k4)})-\frac{2}{3}\delta_{kn}D_b(\Phi_b+\sqrt{\frac{2}{3}}\Phi_{(b4)})\}-$$
$$(D_k\Phi_{(n4)}+D_n\Phi_{(k4)}-\frac{2}{3}\delta_{kn}D_b\Phi_{(b4)})-\qquad(15)$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}D_b\{(\Phi_{k[bn]}+\frac{1}{3\sqrt{2}}\delta_{kn}\Phi_{(b4)}-\frac{1}{3\sqrt{2}}\delta_{kb}\Phi_{(n4)})+$$
$$(\Phi_{n[bk]}+\frac{1}{3\sqrt{2}}\delta_{kn}\Phi_{(b4)}-\frac{1}{3\sqrt{2}}\delta_{nb}\Phi_{(k4)})+\frac{2}{3}\delta_{kn}(-\Phi_{4[b4]}+\frac{\sqrt{2}}{3}\Phi_{(b4)})\}=0.$$

В силу принятых предположений о малости составляющих функций Ψ_0,Ψ_-, из уравнений (13) следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{k[n4]}+\Phi_{n[k4]})\approx(\Phi_{(kn)}+\frac{1}{3}\delta_{kn}\Phi_{(44)}),$$
$$\Phi_{k[n4]}\approx\Phi_{n[k4]},$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}}\Phi_k+\Phi_{4[k4]}\approx\frac{1}{M\sqrt{2}}D_b(\Phi_{(bk)}+\frac{1}{3}\delta_{bk}\Phi_{(44)}),\qquad(16)$$
$$\Phi_{k[nr]}-\frac{1}{3\sqrt{2}}\delta_{kn}\Phi_{(r4)}+\frac{1}{3\sqrt{2}}\delta_{kr}\Phi_{(n4)}\approx-\frac{1}{M\sqrt{2}}\{D_r(\Phi_{(kn)}+\frac{1}{3}\delta_{kn}\Phi_{(44)})-$$
$$D_n(\Phi_{(kr)}+\frac{1}{3}\delta_{kr}\Phi_{(44)})+\frac{1}{3}\delta_{kn}D_c(\Phi_{(cr)}+\frac{1}{3}\delta_{cr}\Phi_{(44)})-\frac{1}{3}\delta_{kr}D_c(\Phi_{(cn)}+\frac{1}{3}\delta_{cn}\Phi_{(44)})\},$$

а также

$$\Phi_k+\sqrt{\frac{2}{3}}\Phi_{(k4)}\approx\frac{1}{M}\sqrt{\frac{2}{3}}D_b(\Phi_{(bk)}+\frac{1}{3}\delta_{bk}\Phi_{(44)}),$$
$$\Phi_{4[n4]}-\frac{\sqrt{2}}{3}\Phi_{(n4)}\approx\frac{1}{M3\sqrt{2}}D_c(\Phi_{(cn)}+\frac{1}{3}\delta_{cn}\Phi_{(44)}),\qquad(17)$$

откуда в свою очередь имеем

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\Phi_k - \Phi_{4[k4]} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\Phi_{(k4)} \approx \frac{1}{M3\sqrt{2}} D_b(\Phi_{(bk)} + \frac{1}{3}\delta_{bk}\Phi_{(44)}). \qquad (18)$$

Кроме того,

$$\Phi_{(n4)} - \frac{1}{\sqrt{6}}\Phi_n - \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_{4[n4]} \approx \frac{1}{M\sqrt{2}} D_c\Phi_{n[c4]} \approx \frac{1}{M2\sqrt{2}} D_c(\Phi_{n[c4]} + \Phi_{c[n4]}) \approx$$
$$\frac{1}{2M} D_c(\Phi_{(cn)} + \frac{1}{3}\delta_{cn}\Phi_{(44)}), \qquad (19)$$

значит,

$$\Phi_{(n4)} \approx \frac{1}{M} D_c(\Phi_{(cn)} + \frac{1}{3}\delta_{cn}\Phi_{(44)}), \Phi_n \approx 0,$$

$$\Phi_{4(n4)} \approx \frac{1}{M\sqrt{2}} D_c(\Phi_{(cn)} + \frac{1}{3}\delta_{cn}\Phi_{(44)}). \qquad (20)$$

С учетом соотношений (16)–(20) нерелятивистское уравнение для частицы со спином 2 в приближении Паули, получаемое из (15), принимает вид

$$D_4(\Phi_{(kn)} + \frac{1}{3}\delta_{kn}\Phi_{(44)}) = \frac{1}{2M} D_b D_b(\Phi_{(kn)} + \frac{1}{3}\delta_{kn}\Phi_{(44)}) -$$
$$\frac{ie}{4M}\varepsilon_{kbc}B_c(\Phi_{(bn)} + \frac{1}{3}\delta_{bn}\Phi_{(44)}) - \frac{ie}{4M}\varepsilon_{nbc}B_c(\Phi_{(bk)} + \frac{1}{3}\delta_{bk}\Phi_{(44)}); \qquad (21)$$

$-ieF_{[\mu\nu]} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ – тензор электромагнитного поля; $F_{[ab]} = \varepsilon_{abc}B_c$. Учитывая, что $D_4 = \partial_4 - ieA_4$, $\partial_4 = \frac{1}{i}\partial_t$, $A_4 = i\varphi$ (φ – скалярный потенциал электромагнитного поля), уравнению (21) можно придать форму

$$(i\partial_t - e\varphi)\left(\Phi_{(kn)} + \frac{1}{3}\delta_{kn}\Phi_{(44)}\right) = -\frac{1}{2M} D_b D_b\left(\Phi_{(kn)} + \frac{1}{3}\delta_{kn}\Phi_{(44)}\right) -$$
$$\frac{ie}{4M}\varepsilon_{kcb}B_c\left(\Phi_{(bn)} + \frac{1}{3}\delta_{bn}\Phi_{(44)}\right) - \frac{ie}{4M}\varepsilon_{ncb}B_c\left(\Phi_{(bk)} + \frac{1}{3}\delta_{bk}\Phi_{(44)}\right).$$

В свою очередь, функция $(\Phi_{(kn)} + \frac{1}{3}\delta_{kn}\Phi_{(44)})$ представима в виде (для краткости круглые скобки как напоминание симметричности по двум индексам опускаем)

$$\Psi_{kn} = (\Phi_{kn} + \frac{1}{3}\delta_{kn}\Phi_{44}) = (\Phi_{kn} - \frac{1}{3}\delta_{kn}\Phi_{cc}).$$

Составляющие этого симметричного тензора можно перечислить:

$$\Psi_{kn} = (\Psi_j, \Psi'_j), \quad \Psi_1 = \Psi_{23}, \quad \Psi_2 = \Psi_{31}, \quad \Psi_3 = \Psi_{12},$$
$$\Psi'_1 = \Psi_{11}, \quad \Psi'_2 = \Psi_{22}, \quad \Psi'_3 = \Psi_{33}, \quad \Psi'_3 + \Psi'_2 + \Psi'_3 = 0.$$

Уравнение Паули для этих шести (фактически пяти независимых) компонент выглядит так:

$$(i\partial_t - e\varphi)\Psi_{kn} = -\frac{1}{2M} D_b D_b\Psi_{kn} - \frac{ie}{4M}(\varepsilon_{kcb}B_c\Psi_{bn} + \varepsilon_{ncb}B_c\Psi_{bk}); \qquad (22)$$

формально в (22) имеем 6 уравнений. Однако можно заметить, что суммируя эти шесть уравнений по k и n, получим ноль:

$$(i\partial_t - e\varphi)\Psi_{kk} = -\frac{1}{2M} D_b D_b\Psi_{kk} - \frac{ie}{4M}(\varepsilon_{kcb}B_c\Psi_{bk} + \varepsilon_{kcb}B_c\Psi_{bk}) \Rightarrow 0 = 0.$$

В более детальном виде систему уравнений можно переписать следующим образом:

$$(i\partial_t - e\varphi)\Psi'_1 = -\frac{1}{2M} D_b D_b\Psi'_1 - \frac{ie}{2M}(B_2\Psi_2 - B_3\Psi_3),$$

$$(i\partial_t - e\varphi)\Psi'_2 = -\frac{1}{2M} D_b D_b \Psi'_2 - \frac{ie}{2M}(B_3\Psi_3 - B_1\Psi_1),$$

$$(i\partial_t - e\varphi)\Psi'_3 = -\frac{1}{2M} D_b D_b \Psi'_3 - \frac{ie}{2M}(B_1\Psi_1 - B_2\Psi_2),$$

$$(i\partial_t - e\varphi)\Psi_1 = -\frac{1}{2M} D_b D_b \Psi_1 - \frac{ie}{4M}\big[B_1(\Psi'_2 - \Psi'_3) - (B_2\Psi_3 - B_3\Psi_2)\big],$$

$$(i\partial_t - e\varphi)\Psi_2 = -\frac{1}{2M} D_b D_b \Psi_2 - \frac{ie}{4M}\big[B_2(\Psi'_3 - \Psi'_1) - (B_3\Psi_1 - B_1\Psi_3)\big],$$

$$(i\partial_t - e\varphi)\Psi_3 = -\frac{1}{2M} D_b D_b \Psi_3 - \frac{ie}{4M}\big[B_3(\Psi'_1 - \Psi'_2) - (B_1\Psi_2 - B_2\Psi_1)\big].$$

Отмечаем, что существенное зацепление отдельных уравнений происходит только во внешнем магнитном поле. Можно показать, что если в явном виде оставить в уравнениях только пять независимых компонент, то дополнительный член взаимодействия для частицы с внешним магнитным полем представим в виде скалярного произведения вектора магнитного поля **B** и вектора спина **S** (последний реализуется при этом 5-мерными матрицами).

Работа выполнена при поддержке Белорусского фонда фундаментальных исследований (грант Ф13-146).

Литература

1. *Pauli W., Fierz M.* // Helv. Phys. Acta. 1939. Bd. 12. S. 297–300.
2. *Feirz M., Pauli W.* // Proc. Roy. Soc. London. A. 1939. Vol. 173. P. 211–232.
3. *De Broglie L.* // C. R. Acad. Sci. Paris. 1941. Vol. 212. P. 657–659; *Pauli W.* // Rev. Mod. Phys. 1941. Vol. 13. P. 203–232; *Гельфанд И. М., Яглом А. М.* // ЖЭТФ. 1948. Т. 18. С. 703–733; *Фрадкин Э. Е.* // ЖЭТФ. 1950. Т. 20, вып. 1. С. 27–38; *Файнберг В. Я.* // Тр. ФИАН СССР. 1955. Т. 6. С. 269–332; *Regge T.* // Nuovo Cim. 1957. Vol. 5, N 2. P. 325–326; *Buchdahl H. A.* // Nuovo Cim. 1958. Vol. 10. P. 96–103; *Buchdahl H. A.* // Nuovo Cim. 1962. Vol. 25. P. 486–496; *Velo G., Zwanziger D.* // Phys. Rev. 1969. Vol. 188, N 5. P. 2218–2222; *Velo G.* // Nucl. Phys. B. 1972. Vol. 43. P. 389–401; *Hagen C. R.* // Phys. Rev. D. 1972. Vol. 6, N 4. P. 984–987; *Hagen C. R.* // Phys. Rev. D. 1972. Vol. 5, N 2. P. 377–388; *Cox W.* // J. Phys. A. 1982. Vol. 15. P. 253–268; *Barut A. O., Xu B. W.* // J. Phys. A. 1982. Vol. 15, N 4. P. 207–210; *Loide R. K.* // J. Phys. A. 1986. Vol. 19, N 5. P. 827–829; *Vasiliev M. A.* // Phys. Lett. B. 1992. Vol. 285. P. 225–234; *Buchbinder I. L., Krykhtin V. A., Pershin V. D.* // Phys. Lett. B. 1999. Vol. 466. P. 216–226; *Buchbinder I. L.* et al. // Nucl. Phys. B. 2000. Vol. 584. P. 615–640.
4. *Федоров Ф. И.* // Уч. зап. БГУ. Сер. физ.-мат. 1951. Вып. 12. С. 156–173; *Крылов Б. В., Федоров Ф. И.* // ДАН БССР. 1967. Т. 11, № 8. С. 681–684; *Богуш А. А., Крылов Б. В., Федоров Ф. И.* // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1968. № 1. С. 74–81; *Федоров Ф. И.* // Докл. АН СССР. 1968. Т. 179, № 4. С. 802–805; *Крылов Б. В.* // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1972. № 6. С. 82–89; *Кисель В. В.* // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1986. № 5. С. 94–99; *Федоров Ф. И., Кирилов А. А.* // Acta Physica Polonica. B. 1976. Vol. 7, N 3. P. 161–167; *Богуш А. А., Кисель В. В.* // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28, № 8. С. 702–705; *Богуш А. А., Кисель В. В., Федоров Ф. И.* // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 2. С. 343–346; *Богуш А. А., Кисель В. В.* // Изв. вузов МВ и ССО СССР. Физика. 1988. Т. 31, № 3. С. 11–16; *Богуш А. А., Кисель В. В.* // Изв. вузов. Физика. 1984. № 1. С. 23–27; *Богуш А. А., Кисель В. В., Федоров Ф. И.* // Докл. Академии наук СССР. 1984. Т. 277, № 2. С. 343–346; *Кисель В. В., Овсиюк Е. М., Редьков В. М.* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2011. № 2. С. 18–26; *Богуш А. А., Кисель В. В., Токаревская Н. Г., Редьков В. М.* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2003. № 1. С. 62–67; *Кисель В. В., Редьков В. М.* // Весцi БДПУ iмя Максiма Танка. Сер. 3. 2010. № 1(63). С. 3–6; Весцi БДПУ iмя Максiма Танка. Сер. 3. 2010. № 2(64). С. 8–10; *Red'kov V. M., Tokarevskaya N. G., Kisel V. V.* // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2003. Vol. 6, N 3. P. 772–778.
5. *Федоров Ф. И.* Группа Лоренца. М.: Наука, 1979. – 384 с.
6. *Богуш А. А.* Введение в полевую теорию элементарных частиц. Минск: Наука и техника, 1981. – 390 с.
7. *Плетюхов В. А., Стражев В. И., Редьков В. М.* Группа Лоренца и теория релятивистских волновых уравнений. Минск: Беларус. навука, 2015. – 300 с.
8. *Редьков В. М.* Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца. Минск: Белорус. наука, 2009. – 495 с.

V. V. KISEL, E. M. OVSIYUK, O. V. VEKO, V. M. RED'KOV

v.redkov@dragon.bas-net.by

NON-RELATIVISTIC APPROXIMATION IN THE THEORY OF A SPIN 2 PARTICLE

Summary

In the 30-component first-order wave equation (Fedorov, 1951) for a massive spin 2 particle, a non-relativistic approximation is performed. The quantum-mechanical equation of Pauli type for a spin 2 particle in the presence of an external electromagnetic field is derived. The non-relativistic wave function is a symmetric irreducible 2-rank tensor with five independent components.