

ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

Выходит шесть номеров в год

Журнал основан в июле 1957 года

МИНСК, БЕЛОРУССКАЯ НАУКА, 2014, ТОМ 58, № 1

Учредитель – Национальная академия наук Беларуси

Редакционная коллегия:

М. В. Мясникович (главный редактор),
А. М. Русецкий (заместитель главного редактора),
С. Я. Килин (заместитель главного редактора),
И. М. Богдевич, Н. А. Борисевич, Г. А. Василевич, П. А. Витязь,
И. Д. Волоотовский, И. В. Гайшун, В. Г. Гусаков, И. В. Залуцкий, О. А. Ивашкевич,
Н. А. Изобов, А. Ф. Ильющенко, Н. С. Казак, А. А. Коваленя,
Ф. Ф. Комаров, И. В. Котляров, В. А. Лабунов, Ф. А. Лахвич, О. Н. Левко,
А. И. Лесникович, В. Ф. Логинов, А. А. Махнач, А. А. Михалевич, П. Г. Никитенко,
О. Г. Пенязьков, Ю. М. Плескачевский, А. Ф. Смянович, Л. М. Томильчик,
В. М. Федосюк, Л. В. Хотылева, С. А. Чижик, И. П. Шейко

Адрес редакции:

220072, Минск, ул. Академическая, 1, к. 119,
тел. 284-19-19

<http://nasb.gov.by/rus/publications/dan/>

E-mail: doklady@open.by

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Мурашко В. И. Свойства класса конечных групп с P -субнормальными циклическими примарными подгруппами	5
Милованов М. В., Медведева О. Г. Применение методов группового анализа к изучению обобщенных цепочек Тоды с двумя экспонентами	9
Картынник Ю. А., Орлович Ю. Л. Доминантно-треугольные графы и графы верхних границ	16
Бударина Н. В., Бересневич В. В., Берник В. И. Совместные диофантовы приближения с немонотонной правой частью	26
Гайшун И. В. Дифференциальные уравнения над кольцом функций на множестве гомоморфизмов дифференциального кольца в кольцо констант	31

ФИЗИКА

Томильчик Л. М. Масштабная неинвариантность в конформной геометрии и ее возможные наблюдаемые проявления	34
---	----

Степанов В. П., Могилевцев Д. С., Малоштан А. С., Килин С. Я. Классический разделитель пучка для одиночных фотонов и управление спонтанным излучением с помощью перепутывания	43
Сытова С. Н. Влияние внешних условий на хаос в объемных лазерах на свободных электронах	47

ХИМИЯ

Сыса А. Г., Панибрат О. В., Бабенко А. С., Шабуня П. С., Фатыхова С. А., Киселев П. А. Комплексный характер влияния полициклических ароматических углеводородов на метаболические процессы как важный фактор, определяющий особенности их канцерогенной активации	53
Алмодарресне Х. А., Шахаб С. Н., Филиппович Л. Н., Арико Н. Г., Агабеков В. Е. Получение и оптические свойства широкополосных поливинилспиртовых пленок, окрашенных смесью дихроичных красителей	57
Рахманько Е. М., Слепцова Н. Н., Гулевич А. Л., Цыганов А. Р. Бромидная функция пленочного электрода на основе тринилоктадециламмония тетрабромокадмиата	62
Гарбуз О. С., Дубовская Л. В., Свиридов О. В. Новый реагент для мечения белков ионами редкоземельных металлов	68
Боборико Н. Е., Бобриков И. А., Мычко Д. И., Каркоцкий Г. Ф. Синтез и структура газочувствительных композитных материалов TiO_2-MoO_3	75
Башкиров Л. А., Кандидатова И. Н., Першукевич П. П. Сенсibiliзирующее воздействие ионов хрома (III) на фотолуминесценцию активированного ионами празеодима люминофора на основе инданта лантана	81

БИОЛОГИЯ

Семенченко В. П., Сушеня Л. М. Влияние нагонных явлений и перемешивания водных масс на содержание биогенных элементов в литоральной зоне слабоэвтрофного озера	85
Валентович Л. Н., Лозюк С. К., Коломиец Э. И., Титок М. А. Молекулярно-генетическая идентификация биотехнологически значимых бактерий рода <i>Bacillus</i>	89
Панкратов В. С., Кушнеревич Е. И., Давыденко О. Г. Полиморфизм маркеров Y-хромосомы в популяции белорусских татар	94

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Витязь П. А., Хейфец М. Л., Колмаков А. Г., Зверев А. А., Кобелева Л. И. Мультифрактальный анализ строения структур и вейвлет-анализ рельефа поверхности трения композиционного материала	101
--	-----

СОЦИАЛЬНО-ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ

Бабосов Е. М. Взаимосвязь фундаментальных и прикладных исследований в сфере гуманитарного знания как условие формирования перспективных направлений	109
Віцязь С. П. Праблема арэала прусаў: гістарыяграфічны вызначэнні	114

ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ. 2014. Т. 58, № 1

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,
свидетельство о регистрации № 387 от 18.05.2009.

Редактор Т. П. Петрович
Компьютерная верстка Н. И. Кашуба

Сдано в набор 12.02.2014. Выпуск в свет 25.02.2014. Формат 60×84¹/₈. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 16,4. Тираж 138 экз. Заказ 27.

Цена номера: индивидуальная подписка – 48 650 руб.; ведомственная подписка – 117 945 руб.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/18 от 02.08.2013. ЛП № 02330/455 от 30.12.2013. Ул. Ф. Скорины, 40, 220141, г. Минск.

© «Издательский дом «Беларуская навука».
Доклады НАН Беларуси, 2014

DOKLADY OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

Published bimonthly

The journal has been published since July, 1957

MINSK, BELORUSSKAYA NAUKA, 2014, Vol. 58, N 1

Founder – National Academy of Sciences of Belarus

Editorial Board:

M. V. Miasnikovich (Editor-in-Chief),

A. M. Rusetsky (Associate Editor-in-Chief),

S. Ya. Kilin (Associate Editor-in-Chief),

**I. M. Bogdevich, N. A. Borisevich, S. A. Chizhik, V. M. Fedosyuk, I. V. Gaishun,
V. G. Gusakov, O. A. Ivashkevich, N. A. Izobov, A. F. Ilyushchanka, N. S. Kazak,
L. V. Khotyleva, A. A. Kovalenya, F. F. Komarov, I. V. Kotlyarov, V. A. Labunov,
F. A. Lakhvich, O. N. Levko, A. I. Lesnikovich, V. F. Loginov, A. A. Makhnach,
A. A. Mikhalevich, P. G. Nikitenko, O. G. Penyazkov, Yu. M. Pleskachevsky,
I. P. Sheiko, A. F. Smeyanovich, L. M. Tomilchik, G. A. Vasilevich, P. A. Vitiaz,
I. D. Volotovskii, I. V. Zalutsky**

Address of the Editorial Office:

220072, Minsk, 1 Akademicheskaya Str., room 119

telephone: 284-19-19

<http://nasb.gov.by/eng/publications/dan/>

E-mail: doklady@open.by

CONTENTS

MATHEMATICS

Murashka V. I. Properties of the class of finite groups with P-subnormal cyclic primary subgroups	5
Milovanov M. V., Medvedeva O. G. An application of group analysis methods to the study of generalized Toda lattices with two exponents	9
Kartynnik Yu. A., Orlovich Yu. L. Domination triangle graphs and upper bound graphs.	16
Budarina N. V., Beresnevich V. V., Bernik V. I. Simultaneous diophantine approximations with the non-monotonic right-hand side	26
Gaishun I. V. Differential equations over the ring of functions on a set of homomorphisms of the differential ring to the ring of constants	31

PHYSICS

Tomilchik L. M. Space-time scale noninvariance of the conformal geometry and its possible observable manifestations	34
--	----

Stepanov V. P., Morilevtsev D. S., Maloshtan A. S., Kilin S. Ya. Classical beam-splitter for single photons and control of spontaneous emission by entanglement	43
Sytova S. N. Effect of external conditions on the chaos in volume free electron lasers	47
<i>CHEMISTRY</i>	
Sysa A. G., Panibrat O. V., Babenko A. S., Shabunya P. S., Fatykhova S. A., Kiselev P. A. Complex nature of the influence of polycyclic aromatic hydrocarbons on the metabolic processes as an important determinant of their carcinogenic activation.	53
Almodarresiyeh H. Al., Shahab S. N., Filippovich L. N., Ariko N. G., Agabekov V. E. Preparation and optical properties of wide-band polyvinyl alcohol films colored with a mixture of dichroic dyes.	57
Rakhmanko E. M., Sleptsova N. N., Gulevich A. L., Tsyganov A. R. Bromide function of the film ion-selective electrode based on trianonilactadecylammonium tetrabromocadmium	62
Garbuz O. S., Dubovskaya L. V., Sviridov O. V. New reagent for labeling proteins with rare earth metal ions	68
Boboriko N. E., Bobrikov I. A., Mychko D. I., Karkotsky G. F. Synthesis and the structure of TiO ₂ :MoO ₃ gas sensing composite materials	75
Bashkirov L. A., Kandidatova I. N., Pershukevich P. P. Chromium (III) ion as a sensitizer of photoluminescence of ion-activated praseodymium of phosphor based on lanthanum indate	81
<i>BIOLOGY</i>	
Semenchenko V. P., Suschenya L. M. Influence of the pileup and mixing of water on the concentration of biogenic elements in the littoral zone of the eutrophic lake.	85
Valentovich L. N., Laziuk S. K., Kolomiets E. I., Titok M. A. Molecular-genetic identification of biotechnologically relevant bacteria of the genus <i>Bacillus</i>	89
Pankratov V. S., Kushniarevich A. I., Davydenko O. G. Genetic polymorphism of Y-chromosome markers in the population of Byelorussian tatars	94
<i>TECHNICAL SCIENCES</i>	
Vitiaz P. A., Kheifetz M. L., Kolmakov A. G., Zverev A. A., Kobeleva L. I. Multifractal analysis of the structure and the wavelet analysis of the friction surface relief for composite materials.	101
<i>SOCIAL SCIENCES AND HUMANITIES</i>	
Babosov Ye. M. Interaction of fundamental and applied research in the sphere of human knowledge as the condition for perspective developments	109
Vitsiaz S. P. Prussians areal problem: historiografic decisions.	114

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

В. И. МУРАШКО

СВОЙСТВА КЛАССА КОНЕЧНЫХ ГРУПП С \mathbf{P} -СУБНОРМАЛЬНЫМИ ЦИКЛИЧЕСКИМИ ПРИМАРНЫМИ ПОДГРУППАМИ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

Поступило 11.11.2013

Рассматриваются только конечные группы. Напомним [1], что подгруппа H группы G называется \mathbf{P} -субнормальной, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ является простым числом для $i = 1, \dots, n$. Из известной теоремы Хупперта следует, что группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая ее подгруппа \mathbf{P} -субнормальна. В [1–4] исследовались группы с различными системами \mathbf{P} -субнормальных подгрупп. В частности, в [1] изучался класс $w\mathbf{U}$ всех групп, у которых каждая силовская подгруппа \mathbf{P} -субнормальна. Было установлено, что $w\mathbf{U}$ является разрешимой насыщенной наследственной формацией, отличной от формации \mathbf{U} всех сверхразрешимых групп. Группы из класса $w\mathbf{U}$ называются w -сверхразрешимыми. В работе [3] изучался класс \mathbf{X} всех групп, у которых каждая циклическая примарная подгруппа \mathbf{P} -субнормальна и была доказана

Т е о р е м а 1 [3]. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *Класс \mathbf{X} является насыщенной наследственной формацией;*
 (2) *Группа G принадлежит \mathbf{X} тогда и только тогда, когда она обладает силовской башней сверхразрешимого типа (дисперсивна по Оре) и каждая бипримарная подгруппа G с циклической силовской подгруппой сверхразрешима;*

(3) *Всякая минимальная не \mathbf{X} -группа является минимальной несверхразрешимой бипримарной группой, у которой все силовские подгруппы, не являющиеся нормальными, циклические.*

Как показано [1; 3], $\mathbf{U} \subset w\mathbf{U} \subset \mathbf{X}$.

Так как \mathbf{X} является насыщенной формацией, то из теоремы Гашюца, Любезедер, Шмида [5, с. 368] следует, что \mathbf{X} – локальна. Напомним определение локальной формации. Пусть \mathbf{P} – множество всех простых чисел. Функция $f : \mathbf{P} \rightarrow \{\text{формации}\}$ называется локальным экраном. Формация \mathbf{F} называется локальной, если ее можно задать следующим образом: $\mathbf{F} = \langle f \rangle = (G \mid \text{если } H/K \text{ является главным фактором группы } G, \text{ то } G/C_G(H/K) \in f(p) \text{ для любого простого } p, \text{ делящего } |H/K|)$, где f – локальный экран. В этом случае говорят, что f является локальным экраном формации \mathbf{F} .

В [1] был найден локальный экран формации $w\mathbf{U}$. Однако вопрос о нахождении локального экрана формации \mathbf{X} оставался открытым. Ответ на этот вопрос дает

Т е о р е м а 2. *Формация \mathbf{X} имеет локальный экран f такой, что $f(p)$ состоит из всех тех разрешимых групп, у которых все циклические примарные подгруппы имеют экспоненту, делящую $p - 1$.*

Согласно [1], обобщенным коммутантом группы G называется наименьшая нормальная подгруппа N группы G такая, что факторгруппа G/N имеет абелевы силовские подгруппы. В [1] было показано, что всякая w -сверхразрешимая группа имеет нильпотентный обобщенный коммутант.

С л е д с т в и е 1. *Группа G w -сверхразрешима тогда и только тогда, когда G имеет нильпотентный обобщенный коммутант и всякая ее циклическая примарная подгруппа \mathbf{P} -субнормальна.*

С л е д с т в и е 2. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда G имеет нильпотентный коммутант и всякая ее циклическая примарная подгруппа \mathbf{P} -субнормальна.*

Полученный в теореме 2 локальный экран f формации \mathbf{X} не является внутренним, так как существует такое простое число p , что $f(p)$ не содержится в \mathbf{X} . Действительно, пусть A_4 – знакопеременная группа степени 4 и $p = 73$. Заметим, что $A_4 \in f(73)$. Так как любая циклическая 3-подгруппа из A_4 не является \mathbf{P} -субнормальной в ней, то $A_4 \notin \mathbf{X}$.

Если \mathbf{N}_p – формация всех p -групп, то по предложению 3.8 [5, с. 360] формация \mathbf{X} имеет единственный максимальный внутренний локальный экран F такой, что $F(p) = \mathbf{N}_p(f(p) \cap \mathbf{X})$ для любого простого числа p .

Пусть F – максимальный внутренний локальный экран формации \mathbf{H} и N – нормальная подгруппа группы G . Говорят, что N – \mathbf{H} -гиперцентральная подгруппа в G , если для любого главного фактора H/K группы G , содержащегося в N , выполняется $G/C_G(H/K) \in F(p)$ для любого простого p , делящего $|H/K|$.

Следующая теорема аналогична результату Бэра [7, с. 39] о строении \mathbf{U} -гиперцентральной (сверхразрешимо вложенной в терминологию Бэра) подгруппе.

Т е о р е м а 3. *Пусть N – нормальная подгруппа группы G и $R_q = N_G(Q)/C_G(Q)$, где Q – силовская q -подгруппа N . Следующие условия эквивалентны:*

1) N – \mathbf{X} -гиперцентральная подгруппа G ;

2) N обладает силовской баишей сверхразрешимого типа, все циклические примарные подгруппы группы $R_q/O_q(R_q)$ имеют экспоненту, делящую $q-1$, и \mathbf{P} -субнормальны в $R_q/O_q(R_q)$ для любого простого q , делящего $|N|$.

С л е д с т в и е 3. *Группа G принадлежит \mathbf{X} тогда и только тогда, когда G обладает силовской баишей сверхразрешимого типа, все циклические примарные подгруппы группы $R_q/O_q(R_q)$ имеют экспоненту, делящую $q-1$, и \mathbf{P} -субнормальны в $R_q/O_q(R_q)$ для любого простого q , делящего $|G|$, где $R_q = N_G(Q)/C_G(Q)$ и Q – силовская q -подгруппа G .*

Формация \mathbf{X} не является радикальной. Пусть F – максимальный внутренний локальный экран формации \mathbf{X} и $p = 3$. Рассмотрим $G = \langle (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3) \rangle$. Заметим, что $G \notin F(3)$, но G содержит нормальные подгруппы $A = \langle (1\ 3)(2\ 4), (1\ 3) \rangle$ и $B = \langle (1\ 3)(2\ 4), (1\ 2)(3\ 4) \rangle$, которые принадлежат $F(3)$. Заметим, что $G = AB$. Следовательно, формация $F(3)$ не радикальна. Тогда по предложению 4.10 [6, с. 43] формация \mathbf{X} не радикальна.

Т е о р е м а 4. *Пусть группа $G = AB$ есть произведение своих \mathbf{P} -субнормальных \mathbf{X} -подгрупп A и B . Если $(|G:A|, |G:B|) = 1$, то группа G принадлежит \mathbf{X} .*

В работе используются стандартные определения и обозначения из [5; 6]. Напомним, некоторые из них. Через $F_p(G)$ обозначается пересечение централизаторов всех главных факторов группы G , порядки которых делятся на p . Известно [6, с. 34], что $F_p(G)$ является p -нильпотентным радикалом группы G . Пусть $\mathbf{F} = \langle f \rangle$. Тогда группа G принадлежит \mathbf{F} тогда и только тогда, когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого простого p , делящего $|G|$ (см. лемма 4.5 [6, с. 38]). Если \mathbf{F} – класс групп, то группа G называется минимальной не \mathbf{F} -группой, если G не принадлежит \mathbf{F} , а всякая собственная подгруппа G принадлежит \mathbf{F} .

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Вначале установим, что класс $f(p)$ – формация для любого простого p . Пусть p – простое число, группа $G \in f(p)$ и $N \triangleleft G$. Покажем, что $G/N \in f(p)$. Так как G разрешима, то и G/N разрешима. Пусть $A/N = \langle xN \rangle$ – циклическая q -подгруппа в G/N для некоторого простого числа q и Q – силовская q -подгруппа $\langle x \rangle$. Очевидно, что Q – циклическая подгруппа и $A = QN$. По условию Q имеет экспоненту, делящую $p-1$. Откуда $QN/N = A/N$ имеет экспоненту, делящую $p-1$. Следовательно, класс $f(p)$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов.

Покажем, что класс $f(p)$ замкнут относительно подпрямых произведений. Достаточно показать, что если в группе G найдутся нормальные подгруппы N_1 и N_2 такие, что $G/N_i \in f(p)$ для $i = 1, 2$ и $N_1 \cap N_2 = 1$, то $G \in f(p)$. Очевидно, что в этом случае группа G разрешима. Пусть A – циклическая примарная подгруппа группы G . Заметим, что в A имеется единственная мини-

мальная нормальная подгруппа. Из $N_1 \cap N_2 = 1$ следует, что хотя бы одна из подгрупп N_1 или N_2 имеет с A единичное пересечение. Без ограничения общности предположим, что $N_2 \cap A = 1$. Тогда $AN_2 / N_2 \cong A$ имеет экспоненту, делящую $p - 1$. Значит, $G \in f(p)$. Следовательно, класс $f(p)$ является формацией.

Пусть $\mathbf{F} = \langle f \rangle$. Так как $f(p)$ – наследственная формация для любого простого p , то по предположению 3.14 [5, с. 364] \mathbf{F} – наследственная формация. Пусть h – локальный экран такой, что $h(p)$ есть формация всех абелевых групп экспоненты, делящей $p - 1$, для любого простого числа p . Хорошо известно, что h – локальный экран формации \mathbf{U} всех сверхразрешимых групп. Так как $h(p) \subseteq f(p)$ для любого простого p , то $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{F}$.

Докажем, что $\mathbf{F} = \mathbf{X}$. Предположим, что \mathbf{X} не содержится в \mathbf{F} . Выберем группу G наименьшего порядка из класса $\mathbf{X} \setminus \mathbf{F}$. Заметим, что G разрешима. Так как обе формации \mathbf{X} и \mathbf{F} насыщены, то $\Phi(G) = 1$. Из наследственности формации \mathbf{X} следует, что G является минимальной не \mathbf{F} -группой. Так как \mathbf{F} – формация, то G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N . В этом случае N – абелева p -подгруппа и $N = C_G(N)$. Пусть M – максимальная подгруппа G , не содержащая N . Тогда $G = NM$. В силу абелевости N , имеем $N \cap M = 1$. Так как группа G обладает силовской башней сверхразрешимого типа по утверждению (2) теоремы 1, то p является наибольшим простым делителем $|G|$ и $(p, |M|) = 1$. Пусть H – собственная подгруппа в M . Заметим, что $O_p(NH) = 1$, так как $N = C_G(N)$. Следовательно, $F_p(NH) = N$. Так как по условию $NH \in \mathbf{F}$, то $H \cong NH / F_p(NH) \in f(p)$. Значит, M – минимальная не $f(p)$ -группа. Если M не является циклической примарной группой, то $M \in f(p)$, что противоречит тому, что M – не $f(p)$ -группа. Следовательно, M – циклическая примарная подгруппа. Но тогда по утверждению (2) теоремы 1 группа G сверхразрешима. Получили противоречие. Значит, $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{F}$.

Предположим, что \mathbf{F} не содержится в \mathbf{X} . Выберем группу G наименьшего порядка из $\mathbf{F} \setminus \mathbf{X}$. Так как обе формации \mathbf{X} и \mathbf{F} насыщены, то $\Phi(G) = 1$. Из наследственности формации \mathbf{F} следует, что G является минимальной не \mathbf{X} -группой. Из утверждения (3) теоремы 1 следует, что в этом случае G является минимальной несверхразрешимой бипримарной группой, у которой единственная минимальная нормальная подгруппа N совпадает со сверхразрешимым корадикалом группы G и является силовской p -подгруппой, а силовская q -подгруппа Q группы G является циклической. Заметим, что $N = C_G(N)$. Так как $G \in \mathbf{F}$, то $G/C_G(N) \cong Q \in f(p)$. Так как $Q \in f(p)$ и циклическая, то Q – абелева группа экспоненты, делящей $p - 1$, и $Q \in h(p)$. Следовательно, G сверхразрешима. Но тогда $G \in \mathbf{X}$. Противоречие. Значит, $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{X}$. Следовательно, $\mathbf{F} = \mathbf{X}$. Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о с л е д с т в и я 1. Обозначим через \mathbf{NA} класс групп с нильпотентным обобщенным коммутантом. Заметим, что следствие 1 эквивалентно утверждению, что $w\mathbf{U} = \mathbf{NA} \cap \mathbf{X}$. Согласно 10 [6, с. 36], класс групп с обобщенным нильпотентным коммутантом является локальной формацией с локальным экраном h таким, что $h(p)$ – формация всех групп с абелевыми силовскими подгруппами для любого простого p . Как было показано в теореме 2, формация \mathbf{X} имеет локальный экран f , где $f(p)$ – класс разрешимых групп с циклическими примарными подгруппами экспоненты, делящей $p - 1$. Очевидно, что $\mathbf{NA} \cap \mathbf{X}$ – локальная формация, имеющая локальный экран t такой, что $t(p) = f(p) \cap h(p)$ для любого простого p . Из строения формаций $f(p)$ и $h(p)$ следует, что $t(p)$ есть формация всех групп с абелевыми силовскими подгруппами экспоненты, делящей $p - 1$. Как было показано в [1], t – локальный экран формации $w\mathbf{U}$.

Следствие 2 доказывается аналогично следствию 1.

Л е м м а. Пусть P – p -подгруппа группы G и R – нормальная r -подгруппа G , где $r \neq p$ – простые числа. Тогда справедливы равенства $N_G(P)R / R = N_{G/R}(PR / R)$ и $C_G(P)R / R = C_{G/R}(PR / R)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство $N_G(P)R / R = N_{G/R}(PR / R)$ следует из леммы 1.68 [8, с. 56]. Докажем, что $C_G(P)R / R = C_{G/R}(PR / R)$. Очевидно, что $C_{G/R}(PR / R) \leq N_{G/R}(PR / R) = N_G(P)R / R$. Пусть $C / R = C_{G/R}(PR / R)$. Тогда каждый элемент $c \in C$ представим в виде xy , где $x \in N_G(P)$ и $y \in R$, и для любого $p \in P$ выполняется $[p, c] \in R$. Если предположить, что $C_G(P)R / R \neq C_{G/R}(PR / R)$, то найдутся элементы $x \in N_G(P) \setminus C_G(P)$ и $y \in R$ такие, что $c = xy \in C$. Заметим, что существует элемент $p \in P$ такой, что $p^x = p_1 \neq p$ и $p_1 \in P$. Тогда $[p, c] = p^{-1}p_1^y = p^{-1}p_1[p_1, y] \in R$. Так как $R \triangleleft G$, то $[p_1, y] \in R$. Значит $1 \neq p^{-1}p_1 \in R$. Но $p^{-1}p_1 \in P$ и $P \cap R = 1$. Значит, $p_1 = p$. Полученное противоречие доказывает равенство $C_G(P)R / R = C_{G/R}(PR / R)$.

Доказательство теоремы 3. Покажем, что из 1) следует 2). Пусть F – максимальный внутренний локальный экран формации \mathbf{X} и N – \mathbf{X} -гиперцентральная нормальная подгруппа группы G . Ввиду наследственности формации $F(p)$ для всех простых p , получаем $N \in \mathbf{X}$. Из утверждения (2) теоремы 1 следует, что N обладает силовой башней сверхразрешимого типа. Значит, в N имеется нормальная силовая q -подгруппа Q . Заметим, что $Q \triangleleft G$. Значит, подгруппа Q является \mathbf{X} -гиперцентральной в G . Пусть $1 = Q_0 \leq Q_1 \leq \dots \leq Q_n = Q$ – участок главного ряда группы G от 1 до Q . Тогда из \mathbf{X} -гиперцентральности Q следует, что $G / C_G(Q_i / Q_{i-1}) \in F(q)$ для $i = 1, \dots, n$. Пусть $L = \bigcap C_G(Q_i / Q_{i-1})$, где $i = 1, \dots, n$. Тогда $G / L \in F(q)$ и $C_G(Q) \leq L$. Предположим, что $L / C_G(Q)$ не является q -группой. Пусть порядок $x C_G(Q)$ из $L / C_G(Q)$ взаимно прост с q и α – автоморфизм Q , индуцированный x . Тогда по лемме 3.10 [6, с. 27] следует, что α – тождественный автоморфизм. Противоречие. Значит $L / C_G(Q)$ – q -группа. Так как формация $F(q) = \mathbf{N}_q F(q)$, то $N_G(Q) / C_G(Q) \in F(q)$. Если $Q = N$, то утверждение 2 доказано.

Пусть $Q < N$. Заметим, что N / Q \mathbf{X} -гиперцентральна в G / Q . Используя индукцию по порядку G , можно считать, ввиду строения $F(q)$, что $N_{G/Q}(PQ / Q) / C_{G/Q}(PQ / Q) \in F(p)$ для любой силовой p -подгруппы P группы N , где $p \neq q$. По лемме 1 имеем $N_{G/Q}(PQ / Q) / C_{G/Q}(PQ / Q) \cong N_G(P)Q / C_G(P)Q = N_G(P)(C_G(P)Q) / C_G(P)Q \cong N_G(P) / (N_G(P) \cap C_G(P)Q)$. Так как порядки P и Q взаимно просты и $Q \triangleleft G$, то $C_G(P)Q \cap N_G(P) = C_G(P)$. Следовательно, $N_{G/Q}(PQ / Q) / C_{G/Q}(PQ / Q) \cong N_G(P) / C_G(P) \in F(p)$. Из свойств $F(p)$ следует утверждение 2).

Докажем, что из 2) следует 1). Заметим, что условия 2) теоремы сохраняются при гомоморфизмах. Пусть G – группа наименьшего порядка, имеющая нормальную не \mathbf{X} -гиперцентральную подгруппу N , удовлетворяющую 2), и пусть p – наибольший простой делитель порядка N . Тогда силовая p -подгруппа P группы N нормальна в G . Пусть H / K – главный фактор G и $H \leq P$. Так как $C_G(P) \leq C_G(H / K)$ и $G / C_G(P) = N_G(P) / C_G(P) \in F(p)$, то $G / C_G(H / K) \in F(p)$ и P – \mathbf{X} -гиперцентральная подгруппа G . Согласно предположению, N / P \mathbf{X} -гиперцентральна в G / P . Так как подгруппа P является \mathbf{X} -гиперцентральной в G , то подгруппа N является \mathbf{X} -гиперцентральной в G . Полученное противоречие показывает, что из 2) следует 1). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть Z – произвольная циклическая примарная подгруппа G . Достаточно показать, что подгруппа Z^x является \mathbf{P} -субнормальной в G для некоторого элемента $x \in G$. Так как Z примарна, то найдется силовая подгруппа P в G такая, что $Z \leq P$. Ввиду $(|G : A|, |G : B|) = 1$ существует элемент $x \in G$ такой, что $P^x \leq A$ или $P^x \leq B$. Пусть $P^x \leq A$. Так как $A \in \mathbf{X}$, то подгруппа Z^x является \mathbf{P} -субнормальной в A . По условию подгруппа A является \mathbf{P} -субнормальной в G . Следовательно, Z^x – \mathbf{P} -субнормальная подгруппа в G . Теорема доказана.

Литература

1. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.
2. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 59–67.
3. Monakhov V. S., Kniashina V. N. // Ricerche di Matematica. 2013. Vol. 62. P. 307–322.
4. Kniashina V. N., Monakhov V. S. // IGJT. 2013. Vol. 2, N 4. P. 21–29.
5. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin, 1992.
6. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М., 1978.
7. Between nilpotent and solvable / ed. by M. Weinstein. Passaic, 1982.
8. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск, 2006.

V. I. MURASHKA

mvimath@yandex.by

PROPERTIES OF THE CLASS OF FINITE GROUPS WITH \mathbf{P} -SUBNORMAL CYCLIC PRIMARY SUBGROUPS

Summary

The canonical local definition of the hereditary saturated formation \mathbf{X} of all finite groups with \mathbf{P} -subnormal cyclic primary subgroups was found in the article. The new criterion of the normal subgroup to be \mathbf{X} -hypercentral was obtained using this definition. It was shown that the class \mathbf{X} is closed under taking the products of \mathbf{P} -subnormal subgroups with coprime indices.

УДК 517.933

М. В. МИЛОВАНОВ, О. Г. МЕДВЕДЕВА

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА
К ИЗУЧЕНИЮ ОБОБЩЕННЫХ ЦЕПОЧЕК ТОДЫ С ДВУМЯ ЭКСПОНЕНТАМИ**

(Представлено членом-корреспондентом В. И. Янчевским)

Белорусский государственный педагогический университет, Минск

Поступило 30.09.2013

1. Если $H = H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ – произвольная гладкая функция $2n$ переменных, то система дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

называется уравнениями Гамильтона. Система эта полностью зависит от выбора функции H , которая называется ее гамильтонианом.

Обобщенная цепочка Тоды с двумя экспонентами – это гамильтонова система с гамильтонианом вида

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + \dots + p_n^2) + c_1^2 e^{\alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_n q_n} + c_2^2 e^{\beta_1 q_1 + \dots + \beta_n q_n}. \quad (1)$$

Стандартная цепочка Тоды с двумя экспонентами задается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + c^2 (e^{2(q_1 - q_2)} + e^{2(q_2 - q_3)}). \quad (2)$$

Обобщенные цепочки Тоды возникают при решении многих физических задач [1; 2].

В работе [3] показано, что любая обобщенная цепочка Тоды с двумя экспонентами либо интегрируется в квадратурах, либо сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = \left(\lambda - \frac{1}{k} y'^2 \right) \left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1 - x^2 - y^2} \right) \quad (3)$$

в полукруге $1 - x^2 - y^2 > 0$, $y > 0$, с ненулевыми коэффициентами k и λ одного знака.

Для стандартной цепочки Тоды (2) $k = -1$, $\lambda = -\frac{1}{27}$.

Скорее всего, уравнение (3) в общем случае не интегрируется. Тем не менее, с его помощью можно получать важную информацию о решениях цепочек Тоды с двумя экспонентами.

2. Пусть цепочка Тоды с гамильтонианом (1) приводится к уравнению (3). Как показано в [3], каждое частное решение (3) позволяет найти решение исходной гамильтоновой системы, зависящее от $2n - 2$ произвольных постоянных.

Очевидно, уравнение (3) имеет следующие два однопараметрических семейства линейных решений

$$y = \pm \sqrt{k\lambda} x + C. \quad (4)$$

Это позволяет указать два $(2n - 1)$ -параметрических семейства решений системы с гамильтонианом (1), которые, в отличие от (4), невозможно угадать. Объем статьи не позволяет выписать эти решения явно.

Таким образом, исходная обобщенная цепочка Тоды с двумя экспонентами имеет два $(2n - 1)$ -параметрических семейства ее точных решений в элементарных функциях.

3. Уравнение (3) не поддается изучению с помощью элементарных методов. Возникла идея применить к (3) методы группового анализа дифференциальных уравнений. Эти методы были разработаны Софусом Ли во второй половине XIX в. и явились исходным пунктом его теории непрерывных групп, т. е. групп Ли. Изложение всей нужной нам теории содержится в книге Ли и Шеффера [4].

Групповой анализ дифференциального уравнения основан на вычислении его группы симметрии. Если она содержит разрешимую подгруппу той же размерности, что и порядок уравнения, то его можно проинтегрировать в квадратурах. В частности, если группа симметрии уравнения второго порядка имеет размерность два, то это уравнение интегрируется. Если же его группа симметрии одномерна, то уравнение можно свести к дифференциальному уравнению первого порядка.

Алгебра Ли группы Ли, допускаемой уравнением (3), состоит из операторов

$$\chi = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

удовлетворяющих следующему условию инвариантности [4, теорема 35]:

$$\begin{aligned} \eta_{xx} + y_1(2\eta_{xy} - \xi_{xx}) + y_1^2(\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) - y_1^3\xi_{yy} + (\eta_y - 2\xi_x - 3y_1\xi_y)f = \\ \xi f_x + \eta f_y + (\eta_x + y_1(\eta_y - \xi_x) - y_1^2\xi_y)f_{y_1}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$f = f(x, y, y_1) = \left(\lambda - \frac{1}{k} y_1^2 \right) \left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1-x^2-y^2} \right),$$

а $\xi_x, \eta_y, \xi_{xy}, \dots$ обозначают соответствующие частные производные.

Записывая функции f, f_x, f_y, f_{y_1} по степеням y_1 и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y_1 в равенстве (5), получим расщепление условия (5) по параметру y_1 на следующие 4 условия:

$$\begin{cases} \eta_{xx} + (\eta_y - 2\xi_x) \lambda \left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1-x^2-y^2} \right) = \frac{4\lambda xy}{(1-x^2-y^2)^2} \xi + \lambda \left(-\frac{k}{y^2} + \frac{2(1-x^2+y^2)}{(1-x^2-y^2)^2} \right) \eta, \\ (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) - \lambda \left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1-x^2-y^2} \right) 3\xi_y = -\frac{2}{k} \left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1-x^2-y^2} \right) \eta_x, \\ (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) + \frac{1}{k} \left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1-x^2-y^2} \right) \eta_y = -\frac{1}{k} \frac{4xy}{(1-x^2-y^2)^2} \xi - \frac{1}{k} \left(-\frac{k}{y^2} + \frac{2(1-x^2+y^2)}{(1-x^2-y^2)^2} \right) \eta, \\ -\xi_{yy} + \frac{1}{k} \left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1-x^2-y^2} \right) \xi_y = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Таким образом, оператор χ зависит от функций $\xi(x, y), \eta(x, y)$, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений в частных производных (6). Требуется найти общее решение этой системы.

4. Интегрирование системы (6) – весьма громоздкая и технически сложная задача. Наиболее удобные для вычислений случаи, когда $k = -\frac{1}{n}$, где n – произвольное натуральное число. Оказалось, что при таких k и любых $\lambda < 0$ группа симметрии уравнения (3) нульмерна, т. е. групповой анализ ничего не дает.

Было замечено однако, что система (6) существенно упрощается, если в ней положить $\lambda = 0$. Возникла мысль заменить уравнение (3) более простым уравнением

$$y'' = -\frac{1}{k} \left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1-x^2-y^2} \right) y'^2, \quad (7)$$

которое получается из (3) при $\lambda = 0$. Можно надеяться, что решения уравнения (7) сохраняют существенные особенности решений уравнения (3) при достаточно малом λ . И в то же время группа симметрии уравнения (7) может оказаться нетривиальной.

Действительно, вычисления показали, что при $k = -\frac{1}{n}$ группа симметрии уравнения (7) одномерна и порождается оператором

$$\chi = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^2 - 1}{y} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (8)$$

который не зависит от выбора параметра n . Непосредственная проверка убеждает, что оператор (8) удовлетворяет системе (6) при $\lambda = 0$ и любом ненулевом $k \in R$. Это означает, что уравнение (7) всегда имеет нетривиальную группу симметрии и, следовательно, допускает более глубокое изучение по сравнению с уравнением (3).

Более поздние независимые вычисления в Maple показали, что уравнение (3) при любых ненулевых k и λ одного знака имеет нульмерную группу симметрии, а уравнение (7) при любом ненулевом k имеет одномерную группу симметрии.

5. Поскольку уравнение (7) имеет одномерную группу симметрии, оно сводится к уравнению первого порядка. Соответствующая теория изложена в [4, гл. 16, § 5].

Запишем оператор (8) в виде

$$\chi = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y},$$

так что

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y^2 - 1}{y}.$$

Согласно теории, сначала находим дважды продолженный оператор χ'' :

$$\chi'' \equiv \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \eta' \frac{\partial}{\partial y'} + \eta'' \frac{\partial}{\partial y''},$$

где

$$\eta' \equiv \frac{d\eta}{dx} - y' \frac{d\xi}{dx}, \quad \eta'' \equiv \frac{d\eta'}{dx} - y'' \frac{d\xi}{dx},$$

причем переменная y считается функцией переменной x .

Имеем

$$\chi'' \equiv x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^2 - 1}{y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{y^2} y' \frac{\partial}{\partial y'} + \left(\frac{1 - y^2}{y^2} y'' - \frac{2}{y^3} y'^2 \right) \frac{\partial}{\partial y''}.$$

Функция

$$u = \frac{x^2}{1 - y^2} \quad (9)$$

является решением уравнения

$$\chi f \equiv x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y^2 - 1}{y} \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

а функция

$$v = \frac{1 - y^2}{y^2 y'^2} \quad (10)$$

есть независимое от u решение уравнения

$$\chi' f \equiv x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y^2 - 1}{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{y^2} y' \frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

Очевидно, функции u и v удовлетворяют уравнению $\chi'' f = 0$.

Формула для третьего решения уравнения $\chi'' f = 0$, независимого от u и v , указана в [4]:

$$w = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} y' + \frac{\partial v}{\partial y'} y''}{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y'}. \quad (11)$$

Согласно этой формуле,

$$w = -\frac{(1-y^2)^2 [y'^2 + (1-y^2)yy'']}{xy^3(1-y^2+xyy')y'^3}. \quad (12)$$

Выразим y через x и u с помощью (9):

$$y^2 = \frac{u-x^2}{u}, \quad y = \sqrt{\frac{u-x^2}{u}}, \quad (13)$$

так как $y > 0$.

Выразим y' через x , u , v с помощью (10) и (13):

$$y'^2 = \frac{x^2}{(u-x^2)v}, \quad y' = \pm \sqrt{\frac{x^2}{(u-x^2)v}}. \quad (14)$$

Выразим y'' через x , u , v , w с помощью (12), (13) и (14).

В случае $y' > 0$

$$y'' = -\frac{w \frac{u}{x} \left(1 + \frac{u}{x} \sqrt{\frac{x^2}{uv}}\right) + \frac{u}{u-x^2} \sqrt{\frac{uv}{x^2}}}{v \sqrt{\frac{(u-x^2)v}{x^2}}}. \quad (15)$$

В случае $y' < 0$

$$y'' = \frac{w \frac{u}{x} \left(1 - \frac{u}{x} \sqrt{\frac{x^2}{uv}}\right) - \frac{u}{u-x^2} \sqrt{\frac{uv}{x^2}}}{v \sqrt{\frac{(u-x^2)v}{x^2}}}. \quad (16)$$

Так как по условию $1-x^2-y^2 > 0$, то $1-y^2 > 0$; а поскольку $y > 0$ и предполагается, что $x \neq 0$, то $u > 0$, $v > 0$ и формулы (13)–(16) имеют смысл в рассматриваемой ситуации. Если подставить функции y , y' и y'' , определенные этими формулами, в уравнение (7), то, согласно теории Ли, должно получиться равенство, содержащее u , v , w и не содержащее x . Поскольку из формулы (11) видно, что $w = \frac{dv}{du}$, полученное равенство можно рассматривать как дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $v = v(u)$.

В случае $y' > 0$ получается равенство

$$w \frac{u}{x} \left(1 + \frac{u}{x} \sqrt{\frac{x^2}{uv}}\right) = \frac{2-k(1-u)}{k(1-u)} \sqrt{\frac{uv}{x^2}},$$

которое при $x > 0$ принимает вид

$$\frac{dv}{du} = \frac{(u+a)v}{(1-u)(u+\sqrt{uv})}, \quad (17)$$

а при $x < 0$

$$\frac{dv}{du} = \frac{(u+a)v}{(1-u)(u-\sqrt{uv})}, \quad (18)$$

где $a = \frac{2-k}{k}$.

Параметр a , в зависимости от выбора k , может принимать любые действительные значения, кроме -1 .

В случае $y' < 0$ получается равенство

$$w \frac{u}{x} \left(1 - \frac{u}{x} \sqrt{\frac{x^2}{uv}} \right) = - \frac{2 - k(1-u)}{k(1-u)} \sqrt{\frac{uv}{x^2}},$$

которое при $x > 0$ принимает вид (18), а при $x < 0$ – вид (17).

6. Приведем уравнения (17) и (18) к более удобному виду.

Мы знаем, что $u > 0$, $v > 0$. Рассмотрим новую функцию

$$h(u) = \sqrt{v(u)}, \quad v(u) = h^2(u). \quad (19)$$

Так как $v'(u) = 2h(u)h'(u)$ и в то же время, согласно (17),

$$v'(u) = \frac{(u+a)h^2(u)}{(1-u)(u+\sqrt{u}h(u))},$$

то

$$h'(u) = \frac{(u+a)h(u)}{2(1-u)\sqrt{u}(\sqrt{u}+h(u))}.$$

Рассмотрим вместо u новую независимую переменную t :

$$t = \sqrt{u}, \quad u = t^2. \quad (20)$$

Ясно, что $t > 0$. Функция $h(u)$ превращается при этом в функцию

$$z(t) = h(t^2). \quad (21)$$

Имеем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(t^2+a)z}{(1-t^2)(t+z)}. \quad (22)$$

Таким образом, уравнение (17) привелось к уравнению (22).

Та же замена переменных (19), (20) и (21) приводит уравнение (18) к уравнению

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(t^2+a)z}{(1-t^2)(t-z)}. \quad (23)$$

Так как $t = \sqrt{u}$ и $u = \frac{x^2}{1-y^2}$, где $x \neq 0$ и $1-x^2-y^2 > 0$, то $1-y^2 > x^2$ и, следовательно, $0 < t < 1$.

В то же время $z = h(t^2) = h(u) = \sqrt{v(u)} > 0$. Это означает, что уравнения (22) и (23) следует рассматривать при $0 < t < 1$, $z > 0$.

Если каждой точке $M(x, y)$ круга $1-x^2-y^2 > 0$ поставить в соответствие число $t = \sqrt{u} = \sqrt{\frac{x^2}{1-y^2}}$, то $t \rightarrow 1$ тогда и только тогда, когда $M(x, y)$ неограниченно приближается к окружности $1-x^2-y^2 = 0$.

7. Уравнения (22) и (23) являются уравнениями Абеля второго рода. Такие уравнения иногда интегрируются, иногда – нет. Вполне возможно, что уравнения (22), (23) не интегрируются в квадратурах. Тем не менее, с их помощью можно получить сколь угодно точное описание общего решения уравнения (7) вблизи границы полукруга $1-x^2-y^2 > 0$, $y > 0$. А это, в свою очередь, приводит к описанию поведения интегральных кривых обобщенных цепочек Тоды (1) «на бесконечности», если только в соответствующем уравнении (3) параметр λ достаточно мал.

Перепишем уравнения (22) и (23) в виде

$$\frac{dt}{dz} = \frac{(1-t^2)(t \pm z)}{(t^2+a)z},$$

или

$$\frac{dt}{dz} = \frac{(1-t^2)t}{(t^2+a)z} \pm \frac{1-t^2}{t^2+a}. \quad (24)$$

Так как $\alpha \neq -1$, то при $t \rightarrow 1$ дробь $\frac{1-t^2}{t^2+a} \rightarrow 0$. Поэтому при значениях t , близких к 1, уравнения (24) можно заменить одним более простым уравнением

$$\frac{dt}{dz} = \frac{(1-t^2)t}{(t^2+a)z}$$

с разделяющимися переменными, которое без труда интегрируется:

$$z = C \frac{1}{t} \left(\frac{t^2}{1-t^2} \right)^{\frac{1}{k}}, \quad (25)$$

где $C > 0$ – произвольная постоянная.

При $k = -1$ имеем

$$z = C \frac{1-t^2}{t^3}, \quad C > 0.$$

Все это означает, что при значениях t , близких к 1, общие решения уравнений (22) и (23) приближенно описываются формулой (25). В этом легко убедиться и непосредственно, подставляя функции (25) в эти уравнения.

Если переменные z и t связаны равенством (25), то в силу формул (19), (20) и (21) переменные v и u связаны соотношением

$$v = \frac{C^2}{u} \left(\frac{u}{1-u} \right)^{\frac{2}{k}},$$

которое с учетом формул (9) и (10) можно рассматривать как дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $y = y(x)$. Согласно [4, гл. 13, § 5], такое уравнение допускает оператор (8), а потому по теореме 8 из [4] интегрируется в квадратурах. В результате мы получаем приближенное описание интегральных кривых уравнения (7) вблизи окружности $1-x^2-y^2=0$.

8. Поскольку уравнение (7) рассматривается в полукруге $1-x^2-y^2 > 0$, $y > 0$, то это описание следовало бы дополнить изучением его интегральных кривых вблизи оси Ox , т. е. при малых значениях y . Оказалось, что подобное исследование допускает даже исходное уравнение (3). Перепишем его в виде

$$y'' = \frac{1-x^2+ay^2}{y(1-x^2-y^2)}(k\lambda - y'^2), \quad a = \frac{2-k}{k}. \quad (26)$$

Можно считать, что $y < \varepsilon < 1-x^2$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Так как y^2 очень мало, то в уравнении (26) его можно опустить, и мы получаем уравнение, не содержащее переменной x :

$$yy'' + y'^2 - k\lambda = 0,$$

где $k\lambda > 0$. В [5, № 6.107] указано его общее решение

$$y^2 = k\lambda x^2 + C_1 x + C_2, \quad y = \pm \sqrt{k\lambda} x + C,$$

где C_1, C_2, C – произвольные постоянные. Поэтому с любой точностью можно утверждать, что интегральные кривые уравнения (3) пересекают достаточно узкую полосу полукруга, примыкающую к оси Ox , по кусочкам гипербол или прямых, которые при $\lambda \rightarrow 0$ превращаются в кусочки парабол или прямых, параллельных оси Ox .

Литература

1. *Тода М.* Теория нелинейных решеток. М., 1984.
2. *Козлов В. В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск, 1995.
3. *Милованов М. В., Медведева О. Г.* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 3. С. 37–42.
4. *Ли С.* Симметрии дифференциальных уравнений. М.; Ижевск, 2011. Т. 1.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.

M. V. MILOVANOV, O. G. MEDVEDEVA

mvmil@mail.ru; olga_medvedeva@tut.by

AN APPLICATION OF GROUP ANALYSIS METHODS TO THE STUDY OF GENERALIZED TODA LATTICES WITH TWO EXPONENTS

Summary

In the article, we consider the equation $y'' = \left(\lambda - \frac{1}{k} y'^2 \right) \left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1-x^2-y^2} \right)$ in the semicircle $1-x^2-y^2 > 0$, $y = y(x) > 0$, $k\lambda > 0$, to which the generalized Toda lattices with a Hamiltonian containing two exponents reduce.

For sufficiently small in absolute value λ , this equation can be replaced by a simpler equation setting $\lambda = 0$. It is proved that the latter has one-dimensional symmetry group and reduces to a differential first-order equation, by means of which one can get an arbitrarily accurate description of the general solution of the simplified second-order equation near the boundary of the semicircle.

УДК 519.1

Ю. А. КАРТЫННИК, Ю. Л. ОРЛОВИЧ

ДОМИНАНТНО-ТРЕУГОЛЬНЫЕ ГРАФЫ И ГРАФЫ ВЕРХНИХ ГРАНИЦ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Белорусский государственный университет, Минск

Поступило 11.12.2013

Введение. В настоящей работе рассматриваются вопросы структурного описания и анализируется вычислительная сложность некоторых оптимизационных задач для графов, называемых далее доминантно-треугольными. Доминантно-треугольные графы образуют собственный подкласс класса треугольных графов [1] – графов, удовлетворяющих «треугольному свойству», введенному в [2] и в дальнейшем исследованному в [1; 3–8]. Напомним, что в работе [2] треугольное свойство было сформулировано в терминах максимальных независимых множеств графа. Естественное переопределение треугольного свойства в терминах минимальных доминирующих множеств позволило ввести в рассмотрение «доминантно-треугольное свойство» и класс доминантно-треугольных графов, которые обладают этим свойством. Последующая возможная трактовка треугольного свойства в терминах максимальных ирридантных множеств графа приводит к ирридантно-треугольным графам, класс которых, как выяснилось, в точности совпадает с классом доминантно-треугольных графов.

Среди других интересных собственных подклассов треугольных графов можно выделить классы эквистабильных [9; 10] и сильно эквистабильных [11] графов, а также класс общих графов разбиений [2], введенный в связи с изучением триангуляций планарных точечных множеств [12]. Известно [6; 11], что имеет место следующая последовательность включений: *общие графы разбиений* \subseteq *сильно эквистабильные графы* \subseteq *эквистабильные графы* \subset *треугольные графы*. Отметим, что вопрос о сложности распознавания графов в каждом из четырех классов, указанных в этой последовательности, является открытым [4; 6]. В [10] сформулирована гипотеза о совпадении классов эквистабильных и сильно эквистабильных графов. Недавно [6] было высказано более сильное предположение о том, что классы эквистабильных графов и общих графов разбиений совпадают. К настоящему времени эти гипотезы нашли подтверждение лишь для некоторых специальных классов графов [6; 8]. В нашей работе уточняется положение доминантно-треугольных графов в упомянутой выше иерархии подклассов класса треугольных графов. А именно, показано, что доминантно-треугольные графы образуют собственный подкласс общих графов разбиений.

В работе также получен ряд характеристик класса доминантно-треугольных графов, одна из которых указывает на его совпадение с классом графов верхних границ [13]. Тем самым установлено, что графы верхних границ образуют собственный подкласс класса общих графов разбиений и, как следствие, треугольных графов. Отметим, что, в отличие от других перечисленных подклассов треугольных графов, для графов верхних границ известен полиномиальный алгоритм распознавания [14] (хотя класс этих графов является достаточно содержательным в том смысле, что множество порожденных подграфов графов верхних границ есть множество всех графов). Более того, нами показано, что этот же класс графов совпадает с классом ирридантно-треугольных графов. Установленные свойства позволили перенести известные результаты о вычислительной сложности задач в классе графов верхних границ [15] на класс графов разбиений и, как следствие, треугольных графов. Также удалось получить ряд новых характеристик класса графов верхних границ и установить в этом классе сложность аппроксимации некоторых

теоретико-графовых параметров, родственных классическим числам независимости и доминирования.

Основные понятия и известные результаты. Стандартные понятия теории графов, не определяемые в работе, можно найти в [16]. Под *графом* $G = (V, E)$ всюду понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер с множеством вершин $V = V(G)$ и множеством ребер $E = E(G)$. Число $|V|$ вершин графа G называется его *порядком* и обозначается через $|G|$. Подмножество всех вершин графа G , смежных с вершиной u , называется *окружением* вершины u и обозначается через $N(u)$; *замкнутым окружением* вершины u называется множество $N[u] = N(u) \cup \{u\}$. Число вершин в окружении вершины u называется ее *степенью* и обозначается через $\deg u$. *Замкнутое собственное окружение* $PN[e]$ ребра $e = uv$ в графе G определяется как пересечение замкнутых окружений концевых вершин u и v этого ребра. Другими словами, множество $PN[uv] = N[u] \cap N[v]$ состоит из вершин u и v и всех вершин графа G , которые одновременно смежны с u и v . Для произвольного подмножества $X \subseteq V$ положим $N(X) = \bigcup_{u \in X} N(u) \setminus X$ и $N[X] = N(X) \cup X$ – *окружение* и *замкнутое окружение* подмножества X соответственно. Подграф графа G , порожденный множеством $X \subseteq V$, обозначается через $G(X)$; положим $G - X = G(V \setminus X)$. Простая цепь с n вершинами ($n \geq 1$) и простой цикл длины m ($m \geq 3$) обозначаются через P_n и C_m соответственно; граф C_3 называется *треугольником*. Термины «максимальное» («минимальное») и «наибольшее» («наименьшее») применительно к множествам с каким-либо свойством всюду в работе означают соответственно максимальное (минимальное) по включению и наибольшее (наименьшее) по мощности множества с этим свойством.

Подмножество $X \subseteq V$ вершин графа G называется *независимым*, если никакие две вершины из этого множества не смежны, т. е. если подграф $G(X)$ является пустым. Число вершин в наибольшем независимом множестве графа G называется *числом независимости* этого графа и обозначается через $\alpha(G)$. Произвольный полный подграф графа называется *кликкой*. Множество вершин клики также называется *кликкой*; из контекста должно быть ясно, о чем идет речь. Конечное семейство клик графа G называется *покрытием кликами*, если G является объединением этих клик (сами клики называются *компонентами* покрытия). Вершина графа называется *симплициальной*, если ее окружение – клика. Клика, порожденная замкнутым окружением симплициальной вершины, – *симплициальная клика*.

Будем говорить, что множество $Y \subseteq V$ *доминируется* множеством $X \subseteq V$, если $Y \subseteq N[X]$. Подмножество $X \subseteq V$ вершин графа G называется *доминирующим*, если V доминируется множеством X , т. е. если $N[X] = V$. Число вершин в наименьшем доминирующем множестве графа G называется *нижним числом доминирования* этого графа и обозначается через $\gamma(G)$. *Верхнее число доминирования* (обозначается $\Gamma(G)$) – это число вершин в наибольшем минимальном доминирующем множестве графа G . Подмножество вершин графа называется *независимым доминирующим*, если оно является одновременно как независимым, так и доминирующим множеством. Известно [17], что независимое множество является максимальным тогда и только тогда, когда оно доминирующее. Таким образом, независимые доминирующие множества вершин графа – это его максимальные независимые множества вершин. Число вершин в наименьшем независимом доминирующем множестве графа G называется *числом независимого доминирования* этого графа и обозначается через $i(G)$.

Пусть G – граф и $X \subseteq V$. Для вершины $u \in X$ множество $pn[u, X] = N[u] \setminus N[X \setminus \{u\}]$ называется *X-приватной окрестностью* вершины u в графе G , а элементы этого множества – *X-приватными соседями* вершины u . Заметим, что вершина u принадлежит своей X-приватной окрестности тогда и только тогда, когда u является изолированной в графе $G(X)$. Если вершина u не принадлежит своей X-приватной окрестности, то все X-приватные соседи вершины u лежат в $V \setminus X$. Подмножество вершин X называется *ирридантным* (или *неизбыточным*) в графе G , если каждая вершина $u \in X$ имеет по крайней мере одного X-приватного соседа. Известно, что доминирующее множество является минимальным тогда и только тогда, когда это множество ирридантное. Кроме того [18], каждое минимальное доминирующее множество является максимальным ирридантным множеством. Эти факты послужили основой для введения и изучения понятия ирридантности в графах. Число вершин в наименьшем (соответственно, наибольшем) мак-

симальном ирридантном множестве графа G называется *нижним* (соответственно, *верхним*) *числом ирридантности* этого графа и обозначается через $\text{ir}(G)$ (соответственно, $\text{IR}(G)$).

Для любого графа G нижнее и верхнее числа ирридантности, нижнее и верхнее числа доминирования, число независимого доминирования и число независимости связаны известными соотношениями [19] $\text{ir}(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \alpha(G) \leq \Gamma(G) \leq \text{IR}(G)$.

Подмножество $X \subseteq V$ вершин графа G называется *окрестностным* [20], если граф G является объединением подграфов, порожденных замкнутыми окружениями вершин из X , т. е. $G = \bigcup_{u \in X} G(N[u])$. Заметим, что каждое окрестностное множество является доминирующим и, в частности, содержит все изолированные вершины графа. С другой стороны, доминирующее множество не обязательно является окрестностным. Число вершин в наименьшем окрестностном множестве графа G обозначим через $\hat{n}(G)$, а в наибольшем минимальном окрестностном множестве – через $\hat{N}(G)$. Таким образом, для любого графа G верны неравенства $\gamma(G) \leq \hat{n}(G) \leq \hat{N}(G) \leq \Gamma(G)$.

Подмножество вершин графа, являющееся как независимым, так и окрестностным, называется *независимым окрестностным* [21]. Ясно, что каждое независимое окрестностное множество является независимым доминирующим, но обратное, вообще говоря, неверно. Заметим также, что не каждый граф обладает независимым окрестностным множеством. Например, простой цикл нечетной длины не содержит независимых окрестностных множеств. Число вершин в наименьшем независимом окрестностном множестве графа G обозначим через $n_i(G)$, а в наибольшем – через $N_i(G)$. Таким образом, для любого графа G , содержащего независимое окрестностное множество, верны неравенства $i(G) \leq n_i(G) \leq N_i(G) \leq \alpha(G)$.

Введем еще одно понятие, тесно связанное с понятием окрестностного множества. Подмножество вершин $X \subseteq V$ назовем *треугольным покрытием* графа G , если для любого ребра uv этого графа, обе концевые вершины u и v которого не лежат в X , найдется вершина $w \in X$, одновременно смежная с u и v , т. е. множество $\{u, v, w\}$ порождает треугольник в графе G . Как легко видеть, каждое окрестностное множество является треугольным покрытием. С другой стороны, каждое треугольное покрытие, содержащее все изолированные вершины графа, является окрестностным множеством. Таким образом, подмножество $X \subseteq V$ в графе G , не содержащем изолированных вершин, является (минимальным) треугольным покрытием графа G тогда и только тогда, когда X – (минимальное) окрестностное множество. В дальнейшем различие между окрестностными множествами и треугольными покрытиями, выраженное в изолированных вершинах, будет для нас несущественным.

Граф называется *треугольным* [1], если каждое его максимальное независимое множество является треугольным покрытием. Другими словами, G – *треугольный граф*, если он удовлетворяет следующему *треугольному свойству*: для любого максимального независимого множества $I \subseteq V$ и любых смежных вершин u и v , не входящих в I , найдется такая вершина $w \in I$, что тройка вершин $\{u, v, w\}$ порождает треугольник в графе G . Поскольку каждое максимальное независимое множество содержит все изолированные вершины графа, треугольный граф можно эквивалентно определить как граф, в котором каждое максимальное независимое множество является окрестностным. В частности, это означает, что для треугольного графа понятия максимального независимого множества и независимого окрестностного множества совпадают. Таким образом, для любого треугольного графа G верны следующие соотношения [1; 7]: $i(G) = n_i(G) \leq N_i(G) = \alpha(G)$.

Известный подкласс класса треугольных графов составляют общие графы разбиений [2; 6]. Граф G называется *общим графом разбиений*, если существует такое множество S , что каждой вершине u графа G можно поставить в соответствие непустое подмножество $S_u \subseteq S$ таким образом, что

1) $uv \in E(G)$ тогда и только тогда, когда $S_u \cap S_v \neq \emptyset$;

2) $S = \bigcup_{u \in V(G)} S_u$;

3) для каждого максимального независимого множества I вершин графа G набор подмножеств $\{S_u : u \in I\}$ является разбиением множества S .

По аналогии с треугольным графом, граф назовем *доминантно-треугольным*, если каждое его минимальное доминирующее множество является окрестностным. Другими словами, G –

доминантно-треугольный граф, если он удовлетворяет следующему *доминантно-треугольному свойству*: для любого минимального доминирующего множества $D \subseteq V$ и любых смежных вершин u и v , не входящих в D , найдется такая вершина $w \in D$, что тройка вершин $\{u, v, w\}$ порождает треугольник в графе G . Как нетрудно убедиться, в определении доминантно-треугольного графа требование минимальности доминирующего множества D можно снять без ограничения общности. Поскольку каждое максимальное независимое множество является доминирующим, доминантно-треугольные графы образуют подкласс класса треугольных графов. Заметим, что для доминантно-треугольного графа понятия доминирующего множества и окрестностного множества совпадают. Таким образом, для любого доминантно-треугольного графа G верны соотношения $\gamma(G) = \hat{n}(G) \leq \hat{N}(G) = \Gamma(G)$.

Пусть $P = (A, <)$ – конечное *частично упорядоченное множество*, т. е. произвольное конечное множество A с заданным на нем антирефлексивным и транзитивным бинарным отношением $<$. Граф $UB(P)$, ассоциированный с P , определяется следующими условиями: множество его вершин совпадает с A и две различные вершины u и v смежны в $UB(P)$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $a \in A$, что $u \leq a$ и $v \leq a$, т. е. u и v имеют *общую верхнюю границу* a в A . (Здесь запись $x \leq y$ означает, что $x < y$ или $x = y$.) Если для некоторого графа G существует такое частично упорядоченное множество P , что G изоморфен графу $UB(P)$, то граф G называется *графом верхних границ*. Известно [22], что класс графов верхних границ совпадает с классом *реберно-симплициальных графов*, т. е. графов, каждое ребро которых принадлежит некоторой симплициальной клике. Такие симплициальные клики образуют множества вершин с общей верхней границей в частично упорядоченном множестве.

В [15] приведен обзор известных результатов по вычислительной сложности задач нахождения некоторых числовых теоретико-графовых параметров для графов верхних границ. В частности, отмечено, что вычисление каждого из параметров ig , γ и i для графов из данного класса является NP-трудной задачей, в то время как каждый из параметров α , Γ и IR для таких графов допускает полиномиальный алгоритм вычисления, основанный на эффективном перечислении симплициальных клик.

Характеризации доминантно-треугольных графов. Следующая теорема по сути является критерием доминантной треугольности графа.

Т е о р е м а 1. Для графа G следующие утверждения эквивалентны:

- 1) G – доминантно-треугольный;
- 2) для любого ребра $e \in E(G)$ найдется такая вершина $w \in PN[e]$, что $N[w] \subseteq PN[e]$ (вершину w , удовлетворяющую указанному свойству, будем называть *опорной для ребра e*);
- 3) каждое ребро $e \in E(G)$ содержится в некоторой симплициальной клике (симплициальную вершину этой клики будем называть *главной опорной вершиной для ребра e*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) \Rightarrow 2). Пусть G – доминантно-треугольный граф и пусть для ребра e графа G не существует опорной вершины. Это означает, что для каждой вершины $x \in PN[e]$ множество $N[x] \setminus PN[e]$ непусто. Но тогда множество $D = V(G) \setminus PN[e]$ является доминирующим в графе G и при этом все треугольники графа, содержащие ребро e , не пересекаются с D по вершинам. Противоречие с тем, что G – доминантно-треугольный граф.

2) \Rightarrow 3). Рассмотрим произвольное ребро $e \in E(G)$ и выберем в $PN[e]$ опорную вершину w минимальной степени. Будем считать $\deg w \geq 2$, поскольку при $\deg w = 1$ само ребро e является симплициальной кликой. Покажем, что любые две вершины $a, b \in N(w)$ являются смежными в графе G . Пусть x – опорная вершина для ребра aw . Тогда $N[x] \subseteq PN[aw] \subseteq N[w] \subseteq PN[e]$ и, следовательно, x также является опорной вершиной для ребра e . Ввиду минимальности степени вершины w имеем $|N[x]| \geq |N[w]|$. Отсюда и из включения $N[x] \subseteq N[w]$ получаем, что $N[x] = N[w]$. Учитывая теперь соотношения $b \in N[w] = N[x] \subseteq PN[aw] \subseteq N[a]$, приходим к заключению, что вершины a и b смежны. Таким образом, $N[w]$ и w есть соответственно требуемые в утверждении 3) симплициальная клика и главная опорная вершина для ребра e .

3) \Rightarrow 1). Рассмотрим в графе G произвольное доминирующее множество D и какое-либо ребро uv , концевые вершины которого не принадлежат D . Пусть w – главная опорная вершина для этого ребра, т. е. $N[w] \subseteq PN[uv]$ и $N[w]$ – клика. Поскольку D – доминирующее множество, в гра-

фе G найдется вершина $d \in D \cap N[w]$. Но тогда $d \in PN[uv]$ и, следовательно, $G(\{u, v, d\})$ – треугольник в графе G с $d \in D$, что и требовалось доказать.

Заметим, что формулировка утверждения 3) теоремы 1 совпадает в точности с определением реберно-симплициального графа. Поэтому верно

С л е д с т в и е 1. *Класс доминантно-треугольных графов совпадает с классом графов верхних границ (реберно-симплициальных графов).*

Таким образом, утверждение 2) теоремы 1, а также приводимые ниже характеристики класса доминантно-треугольных графов являются новыми характеристиками класса графов верхних границ. Поскольку в настоящей работе исследование данного класса графов проводится с позиции понятий независимости и доминирования, а сам класс рассматривается в контексте подклассов класса треугольных графов, далее в основном используется название «доминантно-треугольные графы». Название «графы верхних границ» будет упоминаться только для перечисления уже известных результатов, относящихся к этому классу графов. В частности, следующая характеристика графов верхних границ в терминах «упорядоченных» покрытий кликами является в силу сказанного одной из характеристик класса доминантно-треугольных графов.

У т в е р ж д е н и е 1 ([23]). *Граф является графом верхних границ тогда и только тогда, когда существуют упорядочение v_1, v_2, \dots, v_n множества его вершин и покрытие кликами Q_1, Q_2, \dots, Q_n , такие что:*

- 1) $v_i \in Q_i$ для каждого $i, 1 \leq i \leq n$;
- 2) если $v_i \in Q_j$, то $i \leq j$ и $Q_i \subseteq Q_j$.

Как уже отмечалось, вопрос о сложности задачи распознавания треугольного графа является открытым. Предполагается [4], что эта задача со-NP-полна. Напротив, как, в частности, следует из теоремы 1, задача распознавания доминантно-треугольного графа полиномиально разрешима.

Известно, что граф G является общим графом разбиений тогда и только тогда, когда существует его покрытие кликами, каждая компонента которого пересекается с каждым максимальным независимым множеством этого графа (см. свойство I в [2]). Для доминантно-треугольного графа таким покрытием будет покрытие симплициальными кликами. Действительно, если некоторая симплициальная клика не содержит вершин какого-либо независимого множества, то это множество можно расширить за счет добавления к нему соответствующей симплициальной вершины. Таким образом, класс доминантно-треугольных графов содержится в классе общих графов разбиений. Как нетрудно проверить, простой цикл C_4 является общим графом разбиений, но не доминантно-треугольным графом. Следовательно, класс всех доминантно-треугольных графов уже класса общих графов разбиений.

Класс доминантно-треугольных графов не является наследственным (т. е. не замкнут относительно операции удаления вершины). Более того, как нетрудно видеть, для произвольного графа H граф $\text{Tri}(H)$, который получается из графа H добавлением для каждого ребра $uv \in E(H)$ новой вершины x_{uv} и пары ребер ix_{uv} и vx_{uv} , является доминантно-треугольным и содержит H в качестве порожденного подграфа. Тем не менее, этому классу графов присуще одно интересное «псевдонаследственное» свойство. Для изложения этого свойства полезно ввести в рассмотрение *нуль-граф*, т. е. «граф», который не имеет ни вершин, ни ребер, и считать нуль-граф доминантно-треугольным.

Т е о р е м а 2. *Класс доминантно-треугольных графов замкнут относительно удаления замкнутого окружения произвольного подмножества вершин (это свойство назовем окрестностной наследственностью).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G – доминантно-треугольный граф. Предположим, что граф $G' = G - N[X]$, полученный из G удалением замкнутого окружения подмножества $X \subseteq V(G)$, не является доминантно-треугольным. Это означает, что в G' существуют доминирующее множество D' и ребро e такие, что $PN[e] \cap D' = \emptyset$. Но тогда множество $D = D' \cup X$ является доминирующим в графе G и $PN[e] \cap D = \emptyset$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.

Если $X \subseteq V$, то подграф $G - N[X]$ графа G назовем *ко-окрестностным*. Обозначим через $\text{NSub}(G)$ множество всех ко-окрестностных подграфов графа G . Класс графов M назовем *окрестностно наследственным*, если $\text{NSub}(G) \subseteq M$ для любого $G \in M$. Теорема 2 влечет возможность

характеризации класса доминантно-треугольных графов в терминах запрещенных ко-окрестностных подграфов. Более точно, класс графов M является окрестностно наследственным тогда и только тогда, когда $M = \{G : \text{NSub}(G) \cap Z = \emptyset\}$ для некоторого множества графов Z . (Здесь Z – множество *запрещенных ко-окрестностных подграфов* для класса M .) Частным случаем окрестностной наследственности является *конаследственность*, присущая и треугольным графам [1; 5; 7], – свойство замкнутости класса графов относительно операции удаления произвольного (возможно, пустого) независимого множества вершин вместе с их окружениями. Получающиеся в результате такой операции подграфы называются *костабильными*. Можно показать, что характеристика доминантно-треугольных графов как в терминах минимального множества запрещенных костабильных подграфов, так и в терминах минимального множества запрещенных ко-окрестностных подграфов, содержит бесконечное число графов. В частности, в нее входит бесконечная серия графов, предложенная в [7] для класса треугольных графов.

Для треугольных графов известна следующая характеристика [6]: граф G является треугольным тогда и только тогда, когда он не содержит порожденной простой цепи $P_4 = (a, b, c, d)$, концевые вершины a и d которой принадлежат некоторому максимальному независимому множеству I графа G , а внутренние вершины b и c не смежны одновременно ни с одной вершиной из I . Порожденный подграф $P_4 = (a, b, c, d)$ (соответственно, $C_4 = (a, b, c, d, a)$) графа G назовем *плохим*, если в этом графе существует такое доминирующее множество D , что вершины a и d принадлежат D , а вершины b и c не принадлежат D и не смежны одновременно ни с одной вершиной из D . Доминантно-треугольные графы допускают следующую характеристику в терминах плохих порожденных подграфов P_4 и C_4 .

Т е о р е м а 3. *Граф является доминантно-треугольным тогда и только тогда, когда он не содержит плохих порожденных подграфов P_4 и C_4 .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость очевидна – наличие в графе плохого порожденного подграфа $P_4 = (a, b, c, d)$ или $C_4 = (a, b, c, d, a)$ влечет нарушение доминантно-треугольного свойства графа на ребре bc . Обратно, если граф G не является доминантно-треугольным, то в нем существуют доминирующее множество D и ребро bc , такие что вершины b и c не принадлежат замкнутому окружению любой вершины из D . Поскольку D – доминирующее множество, для вершины b найдется смежная с ней вершина $a \in D$, а для вершины c – смежная с ней вершина $d \in D$, причем $a \neq d$ и $ac \notin E(G)$, $bd \notin E(G)$. Но тогда $G(\{a, b, c, d\})$ – плохой порожденный подграф графа G (в зависимости от смежности вершин a и d это либо цепь P_4 , либо цикл C_4). Теорема доказана.

Заметим, что в общем случае существование в графе плохого порожденного подграфа P_4 не влечет существования в этом графе «плохого P_4 » в смысле [6]. Контрпримером может служить тот из четырех графов со степенной последовательностью $(4, 3, 3, 3, 2, 1)$, который является треугольным.

На основе теоремы 1 (см. п. 2) нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

У т в е р ж д е н и е 2. *Если доминантно-треугольный граф содержит простой цикл C_m , $m \geq 4$, в качестве порожденного подграфа, то в этом графе также имеется порожденный подграф $\text{Tri}(C_m)$.*

Напомним, что граф называется *расщепляемым*, если существует разбиение множества его вершин на клику и независимое множество. Хорошо известно, что граф расщепляем тогда и только тогда, когда ни один из трех графов $2K_2$, C_4 и C_5 не является его порожденным подграфом (см., напр., [16]). Поскольку для каждого $m \geq 4$ граф $\text{Tri}(C_m)$ содержит порожденный подграф $2K_2$, отсюда с учетом утверждения 2 получаем

С л е д с т в и е 2. *Для доминантно-треугольного графа G следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) *граф G является расщепляемым;*
- 2) *граф G не содержит порожденных подграфов вида $2K_2$.*

Среди расщепляемых графов важный класс составляют *пороговые графы* – класс графов, который характеризуется запрещенными порожденными подграфами вида $2K_2$, P_4 и C_4 . Извест-

но [24], что граф верхних границ является пороговым, если и только если он не содержит порожденных подграфов $2K_2$ и *Bull*, где *Bull* – униграф со степенной последовательностью (3, 3, 2, 1, 1).

Обратимся еще к одному классу графов, замкнутому относительно операций объединения и соединения графов, – классу *кографов*. Хорошо известно, что граф является кографом, если и только если он не содержит порожденного подграфа P_4 . Поскольку граф $\text{Tri}(C_m)$ содержит порожденный подграф P_4 , отсюда на основе утверждения 2 нетрудно получить

С л е д с т в и е 3. Для графа G следующие утверждения эквивалентны:

- 1) *граф G является доминантно-треугольным кографом;*
- 2) *граф G не содержит порожденных подграфов вида P_4 и C_4 ;*
- 3) *любой порожденный подграф графа G является доминантно-треугольным.*

Наряду с понятиями треугольного и доминантно-треугольного графов можно ввести в рассмотрение *ирридантно-треугольный граф* как граф, в котором каждое максимальное ирридантное множество является окрестностным. Поскольку в любом графе каждое минимальное доминирующее множество является максимальным ирридантным множеством, ирридантно-треугольные графы образуют подкласс класса доминантно-треугольных графов. На самом деле, как будет видно из доказательства теоремы 4, эти классы совпадают. Для доказательства теоремы потребуется следующее утверждение, касающееся максимальных ирридантных множеств.

У т в е р ж д е н и е 3 ([18]). Пусть вершина z не доминируется максимальным ирридантным множеством X . Тогда для некоторой вершины $x \in X$ выполнено $pn[x, X] \subseteq N(z)$.

Т е о р е м а 4. В произвольном доминантно-треугольном графе каждое максимальное ирридантное множество является минимальным доминирующим.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы достаточно показать, что в доминантно-треугольном графе каждое максимальное ирридантное множество является доминирующим. Пусть G – доминантно-треугольный граф. Предположим от противного, что G содержит максимальное ирридантное множество X , которое не является доминирующим в этом графе, т. е. $Z = V(G) \setminus N[X] \neq \emptyset$. Зафиксируем некоторую вершину $z \in Z$. В силу утверждения 3 найдется такая вершина $x \in X$, что $pn[x, X] \subseteq N(z)$, т. е. z смежна со всеми X -приватными соседями вершины x . Так как z не смежна с x , то $x \notin pn[x, X]$, и, значит, $x \in N[X \setminus \{x\}]$. Теперь легко убедиться, что $D = (X \setminus \{x\}) \cup Z$ – доминирующее множество графа G . Действительно, как уже показано, вершина x доминируется некоторой вершиной из $X \setminus \{x\}$. Кроме вершины x множеству D не принадлежат лишь вершины из $N(X)$. Однако те из них, которые содержатся в $pn[x, X]$, доминируются вершиной $z \in Z$, а остальные – множеством $X \setminus \{x\}$. Таким образом, D – доминирующее множество графа G .

Введем в рассмотрение произвольную вершину $y \in pn[x, X]$ и ребро xy . Вершина x не смежна ни с одной вершиной из Z , а вершина y не смежна с вершинами из $X \setminus \{x\}$. Но тогда $PN[xy] \cap D = \emptyset$. Получили противоречие с тем, что G – доминантно-треугольный граф. Теорема 4 доказана.

В качестве простых следствий из теоремы 4 получаются следующие утверждения.

С л е д с т в и е 2. Класс ирридантно-треугольных графов совпадает с классом доминантно-треугольных графов (графов верхних границ, реберно-симплициальных графов).

С л е д с т в и е 3. Для любого доминантно-треугольного графа G имеют место равенства $ig(G) = \gamma(G)$ и $\Gamma(G) = \text{IR}(G)$.

Следствие 3 обобщает результат работы [19], где доказано равенство параметров ig и γ в классе реберных графов наследственных гиперграфов, который является специальным собственным подклассом графов верхних границ. Отметим также, что в [25] впервые доказано равенство параметров Γ и IR для произвольного графа верхних границ.

Сложность задач в классе доминантно-треугольных графов. В настоящем разделе представлены результаты о вычислительной сложности и сложности аппроксимации некоторых ретико-графовых задач в классе доминантно-треугольных графов. Отметим, что важным мотивом в этом исследовании были обнаруженные связи между числами доминирования, ирридантности и окрестностными числами названных графов, что позволило подойти с единых позиций к изучению сложностного статуса рассматриваемых задач.

Сформулируем следующие пять задач распознавания.

Доминирующее множество (Независимое доминирующее множество)

Условие: Задан граф G и натуральное число $k \leq |G|$. Вопрос: Существует ли в графе G доминирующее (независимое доминирующее) множество D такое, что $|D| \leq k$?

Окрестностное множество (Независимое окрестностное множество)

Условие: Задан граф G и натуральное число $k \leq |G|$. Вопрос: Существует ли в графе G окрестностное (независимое окрестностное) множество S такое, что $|S| \leq k$?

Максимальное ирридантное множество

Условие: Задан граф G и натуральное число $k \leq |G|$. Вопрос: Существует ли в графе G максимальное ирридантное множество X такое, что $|X| \leq k$?

Под оптимизационной версией каждой из пяти перечисленных задач распознавания будем понимать задачу нахождения в графе наименьшего множества вершин с указанным в названии задачи свойством. Например, оптимизационная версия задачи **доминирующее множество** состоит в нахождении наименьшего доминирующего множества вершин. При этом для обозначения оптимизационных версий задач будем использовать те же названия, что и для их распознавательных версий; из контекста должно быть ясно, о какой версии задачи идет речь.

Из определения доминантно-треугольного графа G следует, что $\gamma(G) = \hat{n}(G)$ и $\hat{N}(G) = \Gamma(G)$. Известно [15], что для любого графа G верхних границ верно равенство $\alpha(G) = \Gamma(G)$. В то же время для треугольного, а значит, и доминантно-треугольного графа G верны равенства $i(G) = n_i(G)$ [1; 5] и $\alpha(G) = N_i(G)$ [7]. Отсюда с учетом следствия 3 получаем, что для любого доминантно-треугольного графа G верны равенства $ir(G) = \gamma(G) = \hat{n}(G)$, $i(G) = n_i(G)$ и $N_i(G) = \alpha(G) = \Gamma(G) = \hat{N}(G) = IR(G)$, причем последний набор совпадающих параметров вычисляется за полиномиальное время путем подсчета числа симплициальных клик графа G [15]. Отметим, что наряду с перечисленными в [15] параметрами в указанные нами наборы совпадающих значений вошли также и окрестностные числа.

Как отмечалось выше, задачи **доминирующее множество** и **максимальное ирридантное множество** являются NP-полными в классе графов верхних границ. Далее в теореме 5 будет установлен результат о сложности аппроксимации этих задач в подклассе графов верхних границ – классе расщепляемых доминантно-треугольных графов.

Напомним, что алгоритм решения задачи минимизации называется $f(n)$ -приближенным, если для любого примера x размера n этой задачи алгоритм находит такое допустимое решение y со значением $m(x, y)$, что $m(x, y) / \text{opt}(x) \leq f(n)$, где $\text{opt}(x)$ – значение оптимального решения для x . Если $f(n)$ – константа, то получаем алгоритм с константным приближением. Если для оптимизационной задачи существует полиномиальный $f(n)$ -приближенный алгоритм решения, то говорят, что задача аппроксимируется за полиномиальное время с точностью до $f(n)$.

Классическая оптимизационная задача о наименьшем покрытии множества (или просто задача о покрытии) состоит в следующем. Даны множество $S = \{1, 2, \dots, s\}$ и набор $C = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ непустых его подмножеств такие, что $\cup S_i = S$, где объединение берется по всем $i = 1, 2, \dots, m$. Совокупность подмножеств S_j , $j \in J \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$, называется покрытием множества S , если $\bigcup_{j \in J} S_j = S$. Требуется найти наименьшее покрытие, т. е. покрытие множества S наименьшим числом подмножеств из C . Известно [26], что существование полиномиального $(c \ln s)$ -приближенного алгоритма для задачи о покрытии, где $c > 0$ – некоторая константа, влечет равенство $P = NP$, причем этот результат остается верным даже при выполнении ограничения $m \leq p(s)$, где $p(s)$ – некоторый фиксированный полином от $s = |S|$.

Т е о р е м а 5. В предположении $P \neq NP$ для оптимизационной версии каждой из задач **доминирующее множество**, **окрестностное множество** и **максимальное ирридантное множество** не существует полиномиального $(k \ln n)$ -приближенного алгоритма в классе расщепляемых доминантно-треугольных графов порядка n , где $k > 0$ – некоторая фиксированная константа.

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. Задача о покрытии с ограничением $m \leq p(s)$ сводится к задаче **доминирующее множество** в классе расщепляемых доминантно-треугольных графов (отметим, что графовая конструкция в похожем сведении из [27] (см. также [28]) не обладает доминантно-треугольным свойством). Пусть на вход задачи о покрытии даны множество $S = \{1, 2, \dots, s\}$

и набор $C = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ его подмножеств, где $m \leq p(s)$. К каждому из подмножеств $S_i \in C$, а также к самому множеству S добавим новый элемент x , отличный от всех остальных элементов S (это не влияет на размер и состав оптимальных покрытий). Положив $S'_i = S_i \cup \{x\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, построим граф G пересечений системы подмножеств $\{S'_i : i = 1, 2, \dots, m\} \cup \{a\} : a \in S'\}$ множества $S' = S \cup \{x\}$. Нетрудно проверить, что G имеет порядок $n = s + m + 1 \leq s + p(s) + 1$ и является расщепляемым доминантно-треугольным графом, причем для некоторого фиксированного q и достаточно больших s будет выполнено соотношение $n \leq s^q$. Можно показать, что каждому (в том числе и наименьшему) доминирующему множеству D в графе G соответствует некоторое покрытие множества S' подмножествами, число которых не превышает $|D|$. Обратно, наименьшему покрытию C' множества S' соответствует некоторое доминирующее множество в графе G , мощность которого ограничена сверху числом $|C'|$. Следовательно, значения оптимальных решений рассматриваемых задач совпадают.

Зафиксируем $k = c/q$, где c – константа из [26]. Предположим, что существует полиномиальный $(k \ln n)$ -приближенный алгоритм для задачи **доминирующее множество** в классе расщепляемых доминантно-треугольных графов порядка n . С помощью этого алгоритма построим в графе G доминирующее множество \tilde{D} , которое отличается по мощности от наименьшего доминирующего множества этого графа не более чем в $k \ln n$ раз. Множеству \tilde{D} будет соответствовать покрытие множества S' подмножествами, отличающееся от наименьшего покрытия не более чем в $k \ln s^q = kq \ln s = c \ln s$ раз. Получили противоречие с тем, что при условии $P \neq NP$ не существует полиномиального $(c \ln s)$ -приближенного алгоритма для задачи о покрытии, которое и завершает доказательство.

Заметим, что нам неизвестны какие-либо результаты сложности аппроксимации задач **окрестностное множество** и **максимальное ирридантное множество**, предшествующие теореме 5.

С л е д с т в и е 4. *Задачи доминирующее множество, окрестностное множество и максимальное ирридантное множество являются NP-полными в классе расщепляемых доминантно-треугольных графов.*

В [5] установлено, что в предположении $P \neq NP$ обе задачи **независимое доминирующее множество** и **независимое окрестностное множество** одинаково трудны с точки зрения приближенного решения с заданной точностью в классе треугольных графов. Следующая теорема показывает, что найденное ограничение на точность приближенных полиномиальных алгоритмов для этих задач сохраняется и в более узком классе доминантно-треугольных графов.

Т е о р е м а 6. *Задачи независимое доминирующее множество и независимое окрестностное множество являются NP-полными в классе доминантно-треугольных графов. В предположении $P \neq NP$ оптимизационные версии этих задач не могут быть аппроксимированы за полиномиальное время с точностью до $n^{1-\varepsilon}$ в классе доминантно-треугольных графов порядка n для любого $\varepsilon > 0$.*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке БРФФИ (проект Ф13К-078).

Литература

1. Orlovich Y., Zverovich I. // Electronic Notes in Discrete Math. 2007. Vol. 28. P. 341–348.
2. McAvaney K., Robertson J., De Temple D. // Discrete Math. 1993. Vol. 113, N 1–3. P. 131–142.
3. Anbeek C., De Temple D., McAvaney K., Robertson J. // Australas. J. Comb. 1997. Vol. 16. P. 285–293.
4. Kloks T., Lee C.-M., Liu J., Müller H. // Lect. Notes Comput. Sci. 2003. Vol. 2880. P. 273–283.
5. Орлович Ю. Л., Гордон В. С., Блажевич Я. и др. // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 1. С. 39–44.
6. Miklavič Š., Milanič M. // Discrete Appl. Math. 2011. Vol. 159, N 11. P. 1148–1159.
7. Orlovich Y., Blazewicz J., Dolgui A. et al. // Discrete Math. 2011. Vol. 311, N 16. P. 1670–1680.
8. Levit V. E., Milanič M. // Discrete Appl. Math. 2014. Vol. 165. P. 205–212.
9. Payan C. // Discrete Math. 1980. Vol. 29, N 1. P. 47–52.
10. Mahadev N. V. R., Peled U. N., Sun F. // J. Graph Theory. 1994. Vol. 18, N 3. P. 281–299.
11. Mahadev N. V. R., Peled U. N. Threshold graphs and related topics. Amsterdam: Elsevier, 1995.
12. De Temple D., Robertson J. M. // J. Aust. Math. Soc., Ser. A. 1989. Vol. 47, N 3. P. 391–398.
13. McMorris F. R., Zaslavsky T. // J. Combin. Inform. System Sci. 1982. Vol. 7, N 2. P. 134–138.
14. Skowroński M., Sysło M. // Discrete Appl. Math. 1984. Vol. 7. P. 201–208.

15. *Cheston G. A., Jap T. S.* // J. Graph Algorithms Appl. 2006. Vol. 10, N 2. P. 159–190.
16. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М., 1990.
17. *Berge C.* Graphs and hypergraphs. New York: American Elsevier Publishing Company, 1976.
18. *Bollobás B., Cockayne E. J.* // J. Graph Theory. 1979. Vol. 3, N 3. P. 241–250.
19. *Cockayne E. J., Hedetniemi S. T., Miller D. J.* // Canad. Math. Bull. 1978. Vol. 21. P. 461–468.
20. *Sampathkumar E., Neeralagi P. S.* // Indian J. Pure Appl. Math. 1985. Vol. 16. P. 126–132.
21. *Sampathkumar E., Neeralagi P. S.* // J. Combin. Inf. Syst. Sci. 1994. Vol. 19. P. 139–145.
22. *Cheston G. A., Hare E. O., Hedetniemi S. T., Laskar R. C.* // Congr. Numer. 1988. Vol. 67. P. 105–113.
23. *Lundgren J. R., Maybee J. S.* // Congr. Numer. 1983. Vol. 40. P. 189–193.
24. *Ogawa K., Tagusari S., Tsuchiya M.* // Discrete Math. 2009. Vol. 309. P. 3659–3663.
25. *Cheston G. A., Fricke G.* // Discrete Appl. Math. 1994. Vol. 55. P. 241–258.
26. *Raz R., Safra S.* // Proc. of the 29th annual ACM symp. on theory of computing. New York: ACM Press, 1997. P. 475–484.
27. *Paz A., Moran S.* // Theor. Comput. Sci. 1981. Vol. 15. P. 251–277.
28. *Kann V.* On the approximability of NP-complete optimization problems: Ph. D. thesis / Royal Institute of Technology. Stockholm, 1992.

Yu. A. KARTYNNIK, Yu. L. ORLOVICH

kartynnik@gmail.com, orlovich@bsu.by

DOMINATION TRIANGLE GRAPHS AND UPPER BOUND GRAPHS

Summary

In this article we introduce and study a proper subclass of triangle graphs, namely, the domination triangle graphs. A graph G is called a domination triangle graph if for every minimal dominating set D of G and any adjacent vertices u and v not contained in D , there exists a vertex $w \in D$ such that the set $\{u, v, w\}$ induces a triangle in G . We propose a number of characterizations of domination triangle graphs which show in particular that this class of graphs coincides with a well-known class of upper bound graphs and a class of irredundance triangle graphs. We establish the computational complexity and the complexity of approximation for some independence and domination-related graph-theoretical parameters within domination triangle graphs.

УДК 511.42

Н. В. БУДАРИНА¹, В. В. БЕРЕСНЕВИЧ², В. И. БЕРНИК³

**СОВМЕСТНЫЕ ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ
С НЕМОНОТОННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ**

(Представлена академиком Н. А. Изобовым)

¹Дублинский технологический институт, Ирландия

²Университет г. Йорка, Англия

³Институт математики НАН Беларуси, Минск

Поступило 08.01.2014

Введение. В 1964 г. В. Г. Спринджук [1] доказал гипотезу Малера для действительных и комплексных чисел. Он показал, что неравенство

$$|P(x)| < H(P)^{-w}, \quad w > n, \tag{1}$$

имеет для почти всех $x \in \mathbb{R}$ (в смысле меры Лебега) лишь конечное число решений в полиномах $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P = n$, $H = H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$ – высота P . Этот результат окончательный для степенных функций $\Psi(x) = x^{-w}$, так как с помощью принципа ящиков Дирихле при $w \leq n$ можно доказать, что неравенство $|P(x)| < c(n)H(P)^{-w}$ выполняется бесконечно часто для всех $x \in \mathbb{R}$.

В работах [2; 3] было рассмотрено обобщение (1)

$$|P(x)| < \Psi(H(P)), \tag{2}$$

где $\Psi(x)$ – некоторая монотонно убывающая функция положительного аргумента x . Обозначим через $\mathcal{L}_n(\Psi)$ множество точек интервала $I \subset \mathbb{R}$, для которых неравенство (2) имеет бесконечно много решений в полиномах $P \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P \leq n$, а через $\mu_\chi A$ меру Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^k$.

Т е о р е м а 1. Для $\mu \mathcal{L}_n(\Psi)$ справедливо равенство

$$\mu_1 \mathcal{L}_n(\Psi) = \begin{cases} 0 & \sum_{H=1}^{\infty} H^{n-1} \Psi(H) < \infty, \\ \mu_1 I & \sum_{H=1}^{\infty} H^{n-1} \Psi(H) = \infty. \end{cases}$$

Для $n=1$ теорема 1 известна как метрическая теорема Хинчина [4] о приближении действительных чисел рациональными числами. Заметим, что теорема Хинчина в случае сходимости справедлива без требования монотонности функции Ψ . В [5] доказано, что требование монотонности функции Ψ в теореме 1 можно опустить. Работа [5] была обобщена в [6].

После решения задачи (1) Спринджук выдвинул гипотезу [7] о разрешимости системы неравенств

$$\max_{1 \leq i \leq k} |P(x_i)| < H(P)^{-\nu}, \quad 2 \leq k < n, \quad \nu > n - k + 1,$$

при $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}$ для почти всех \bar{x} (в смысле k -мерной меры Лебега). Гипотеза была доказана в [8], а затем обобщена на системы неравенств

$$\max_{1 \leq i \leq k} |P(x_i)| < \Psi(H(P)), \quad \sum_{H=1}^{\infty} \Psi^k(H) H^{n-k} < \infty. \tag{3}$$

Еще более общая, чем (3) система неравенств в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ рассмотрена как в случае сходимости, так и в случае расходимости [9; 10].

В данной работе мы впервые решаем задачу для совместных приближений без требования монотонности функции Ψ в неравенстве (3) при $k = 2$. Далее через $c_1 = c_1(n), c_2, \dots$ обозначим величины, зависящие от n и не зависящие от H . Обозначим через $\mathcal{L}_2(\Psi)$ множество $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ для которых система неравенств (3) имеет бесконечное число решений в полиномах $P \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P \leq n$.

Т е о р е м а 2. Пусть $n \geq 5$ и $\Psi(H)$ – функция (не обязательно монотонная) натурального аргумента H такая, что ряд $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi^2(H)H^{n-2}$ сходится. Тогда

$$\mu_2 \mathcal{L}_2(\Psi) = 0.$$

Приближения нуля значениями аналитических функций

Пусть $n \geq 3$ и пусть f_1, \dots, f_n – действительные аналитические функции такие, что $1, f_1, \dots, f_n$ – линейно независимы над \mathbb{R} . Далее, пусть

$$\mathcal{F} = \left\{ F(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) : (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\} \right\}.$$

В случае $f_i(x) = x^i$ множество \mathcal{F} состоит из всех ненулевых целочисленных многочленов степени $\leq n$. По аналогии с многочленами, определим высоту $F \in \mathcal{F}$ как

$$H(F) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|.$$

Т е о р е м а 3. Пусть $v_1, v_2 > 0$ и $v'_1, v'_2 \geq -1$. Пусть выполняется неравенство

$$v_1 + v_2 + v'_1 + v'_2 > n - 3.$$

Тогда для почти всех $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ система неравенств

$$|F(x_i)| < H(F)^{-v_i}, \quad |F'(x_i)| < H(F)^{-v'_i}$$

имеет только конечное число решений $F \in \mathcal{F}$.

Доказательство теоремы 3 получается путем обобщения основного результата работы [11].

Доказательство теоремы 2. Случай большой производной

Обозначим через $P_n(H)$ множество целочисленных многочленов P , удовлетворяющих условиям $H(P) = H$ и $\deg P \leq n$. Пусть $P_n = \cup_H P_n(H)$. Далее будем полагать, что координата H стоит на j -м месте, где $2 \leq j \leq n$. Поскольку при $n \geq 3$ и $0 \leq j \leq 1$ можем перейти от многочлена P к многочлену $Q(t) = t^n P(1/t)$, где $H(P) = H(Q)$. Такое преобразование сохраняет меру множества точек t , удовлетворяющих неравенству $|P(t)| < \Psi(H(P))$, с точностью до константы $c(n)$. Поэтому, если H – один из коэффициентов a_0 или a_1 многочлена P , то H будет один из коэффициентов (a_n, \dots, a_2) многочлена Q .

Будем считать, что $\bar{x} = (x_1, x_2) \in \Pi_1 = I_1 \times I_2 \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$. Тогда в системе неравенств (3) верно неравенство $|P'(x_i)| < 2nH$, $i = 1, 2$. При достаточно малом $\delta > 0$ из Π_1 удалим полосу

$$|x_1 - x_2| < \delta.$$

Пусть $x \in \mathbb{R}$ и α – ближайший к x корень $P \in P_n$.

Л е м м а [1]. Справедливы неравенства

$$|x - \alpha| < n |P(x)| |P'(x)|^{-1}, \quad |x - \alpha| \leq 2^{n-1} |P(x)| |P'(\alpha)|^{-1},$$

для $P'(x) \neq 0$ и $P'(\alpha) \neq 0$ соответственно.

Из сходимости ряда $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi^2(H)H^{n-2}$ следует, что $\Psi^2(H) = o(H^{-(n-2)})$ и

$$\Psi(H) \ll H^{-(n-2)/2}. \quad (4)$$

Если функция $\Psi(H)$ монотонна, то известно, что $\Psi^2(H)H^{n-2} \ll H^{-1}$ и (4) можно записать в виде $\Psi(H) = o(H^{-(n-1)/2})$. Воспользовавшись такой оценкой, можно доказать теорему 2 при условии

$n \geq 3$. При оценке (4) для $n = 3$ и $n = 4$ нельзя доказать, что порядки значений полинома $P(t)$ в точках x_i и α_i совпадают. В работе [12] применен иной метод для решения метрической задачи для комплексных чисел с немонотонной правой частью. Возможно, его можно использовать при доказательстве теоремы 2 с условием $n \geq 3$, однако это привело бы к значительному техническому усложнению доказательства. Мы решили остановиться на условии $n \geq 5$.

Добавим к (3) условие

$$\min_{1 \leq i \leq 2} |P'(x_i)| \leq H^{-\gamma}, \gamma > 0, \quad (5)$$

которое означает, что одна из производных в (5), например, $P'(x_1)$ не превосходит по модулю $H^{-\gamma}$. Для другой производной $P'(x_2)$ будем использовать тривиальную оценку $|P'(x_2)| < 2nH$. Воспользуемся теоремой 3 при

$$v_1 = v_2 = (n-2)/2, \quad v'_1 = \gamma, \quad v'_2 = -1.$$

Получим неравенство

$$v_1 + v_2 + v'_1 + v'_2 = n - 3 + \gamma > n - 3.$$

Теперь из теоремы 3 следует, что система неравенств (3) вместе с условием (5) выполняется бесконечно часто только для множества нулевой меры. Поэтому для доказательства теоремы 2 достаточно тривиальное неравенство $|P'(x_1)| < 2nH$ довести до неравенства (5). Сделаем это за несколько шагов.

Предложение 1. *Обозначим через $\mathcal{L}_3(\Psi)$ множество $\bar{x} \in \Pi_1$, для которых система неравенств*

$$\max_{1 \leq i \leq 2} |P(x_i)| < \Psi(H), \quad H^{1/2} < |P'(x_i)| < 2nH, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

имеет бесконечное число решений в полиномах $P \in \mathbb{Z}[t]$. Тогда $\mu_2 \mathcal{L}_3(\Psi) = 0$.

Доказательство. Оценим $|x_1 - \alpha_1|$ и $|x_2 - \beta_1|$, где α_1 – ближайший корень полинома $P \in P_n(H)$ к x_1 , а β_1 – ближайший корень полинома P к x_2 . По лемме и (6) имеем

$$|x_1 - \alpha_1| < n |P(x_1)| |P'(x_1)|^{-1} < n \Psi(H) H^{-1/2}, \quad |x_2 - \beta_1| < n \Psi(H) H^{-1/2}. \quad (7)$$

Используем оценки (7) и для многочленов $R(t) = P_2(t) - P_1(t)$ с одинаковыми коэффициентами $\bar{b}_1 = (a_n, \dots, H, \dots, a_2)$ у P_1, P_2 , получим

$$|ax_1 + b| < 4c_5, \quad |ax_2 + b| < 4c_5, \quad a \in \mathbb{Z}, \quad a \neq 0,$$

откуда простым подсчетом мер следует предложение 1.

Существенные и несущественные прямоугольники

Обозначим через $\mathcal{L}_{4, \alpha_1}(\Psi)$ множество $\bar{x} \in \Pi_1$, для которых система неравенств

$$\max(|P(x_1)|, |P(x_2)|) < \Psi(H), \quad H^{5/32} < |P'(\alpha_1)| < 1/2H^{1/2}$$

имеет бесконечно много решений в полиномах $P \in \mathbb{Z}[t]$. Аналогично определим множество $\mathcal{L}_{4, \beta_1}(\Psi)$. Проведем доказательство для множества $\mathcal{L}_{4, \alpha_1}(\Psi)$.

Предложение 2. *Верно равенство*

$$\mu_2 \mathcal{L}_{4, \alpha_1}(\Psi) = 0.$$

Доказательство. Наряду с прямоугольником $\sigma(P)$, определенным в (7), введем прямоугольник $\sigma_2(P)$:

$$|x_1 - \alpha_1| < c_6 H^{-1/2} |P'(\alpha_1)|^{-1}, \quad |x_2 - \beta_1| < c_6 H^{-1/2} |P'(\beta_1)|^{-1}.$$

Ясно, что при подходящем $c_6 > 0$ и $n \geq 3$ имеем $\sigma(P) \subset \sigma_2(P)$ и

$$\mu_2 \sigma(P) < c_4^2 c_6^{-2} \Psi^2(H) H \mu_2 \sigma_2(P).$$

Введем вектор $\bar{b}_2 = (a_n, \dots, a_{s_1-1}, a_{s_1+1}, \dots, H, \dots, a_{s_2-1}, a_{s_2+1}, \dots, a_1)$, где координата H стоит на j -м месте, $1 \leq j \leq n$. Множество многочленов P с одним и тем же вектором \bar{b}_2 объединим в класс

$T_2(\bar{b}_2)$. Ясно, что $\#T_2(\bar{b}_2) < 2^n H^{n-3}$. Прямоугольник $\sigma_2(P_1)$ будем называть существенным, если для любого другого прямоугольника $\sigma_2(P_2)$, $P_2 \neq P_1$, $P_2 \in T_2(\bar{b}_2)$, выполняется неравенство

$$\mu_2(\sigma_2(P_1) \cap \sigma_2(P_2)) < 1/2 \mu_2 \sigma_2(P_1).$$

Если же найдется полином $P_2 \in T_2(\bar{b}_2)$ такой, что

$$\mu_2(\sigma_2(P_1) \cap \sigma_2(P_2)) \geq 1/2 \mu_2 \sigma_2(P_1),$$

то прямоугольник $\sigma_2(P_1)$ назовем несущественным.

В случае существенных прямоугольников получаем

$$\sum_{\bar{b}_2} \sum_{P_1 \in T_2(\bar{b}_2)} \mu_2(\sigma(P_1)) \ll H \Psi^2(H) H^{n-3} \asymp H^{n-2} \Psi^2(H). \quad (8)$$

Ряд с общим членом (8) сходится, поэтому по лемме Бореля–Кантелли $\mu_2 \mathcal{L}_{4, \alpha_1}(\Psi) = 0$, если \bar{x} принадлежит бесконечному числу существенных областей.

В случае несущественных прямоугольников на пересечении $\sigma_2(P_1) \cap \sigma_2(P_2)$ разложим многочлены P, P' по формуле Лагранжа и оценим $|P(t)|$, $|P'(t)|$, а затем и $R(t) = P_2(t) - P_1(t) = a_{s_1} t^{s_1} + a_{s_2} t^{s_2} + a_0$ сверху:

$$\max(|R(x_1)|, |R(x_2)|) \ll H^{-5/16}, \quad |R'(x_1)| \ll H^{1/2}, \quad |R'(x_2)| \ll H.$$

Применим к многочленам R теорему 3. Здесь

$$v_1 = v_2 = 5/16, \quad v'_1 = -1/2, \quad v'_2 = -1, \quad n = 2, \quad d = 2.$$

Из того, что

$$5/8 - 1/2 - 1 = 1/8 - 1 > -1$$

закключаем, что множество $\bar{x} \in \Pi_1$, попадающих в бесконечное число несущественных прямоугольников, имеет нулевую меру.

Малые значения производной и окончание доказательства

Обозначим через $\mathcal{L}_{5, \alpha_1, \beta_1}(\Psi)$ множество $\bar{x} \in \Pi_1$, для которых система неравенств

$$\begin{aligned} \max(|P(x_1)|, |P(x_2)|) &< \Psi(H), \\ H^{-1/6} < |P'(\alpha_1)| \leq H^{5/32}, \quad H^{-1/6} < |P'(\beta_1)| &< 4nH \end{aligned}$$

имеет бесконечно много решений в полиномах $P \in \mathbb{Z}[t]$. Аналогично определим множество $\mathcal{L}_{5, \beta_1, \alpha_1}(\Psi)$. Проведем доказательство для множества $\mathcal{L}_{5, \alpha_1, \beta_1}(\Psi)$.

Предложение 3. *Справедливо равенство*

$$\mu_2 \mathcal{L}_{5, \alpha_1, \beta_1}(\Psi) = 0.$$

Доказательство. Зафиксируем вектор

$$\bar{b}_3 = (a_n, \dots, a_{s_1-1}, a_{s_1+1}, \dots, H, \dots, a_{s_2-1}, a_{s_2+1}, \dots, a_{s_3-1}, a_{s_3+1}, \dots, a_1)$$

и класс векторов с одним и тем же вектором \bar{b}_3 обозначим $T_3(\bar{b}_3)$. Ясно, что

$$\#T_3(\bar{b}_3) < 2^n H^{n-4}.$$

Наряду с прямоугольником $\sigma(P)$ рассмотрим прямоугольник $\sigma_3(P)$:

$$|x_1 - \alpha_1| < c_7 H^{-1} |P'(\alpha_1)|^{-1}, \quad |x_2 - \beta_1| < c_7 H^{-1} |P'(\beta_1)|^{-1}.$$

При подходящем c_7 и $n \geq 4$ имеем $\sigma(P) \subset \sigma_3(P)$ и

$$\mu_2 \sigma(P) \ll \Psi^2(H) H^2 \mu_2 \sigma_3(P).$$

При $P \in T_3(\bar{b}_3)$ поделим прямоугольники $\sigma_3(P)$ на существенные и несущественные, и проведем аналогичные как в предложении 2 рассуждения.

Остался случай $|P'(\alpha_1)| \leq H^{-1/6}$. Нетрудно показать, что $|P'(x_1)| < H^{-1/7}$. Это означает, что получили неравенство (5) с $\gamma = -1/7$. Доказательство этого случая проведено после (5). Аналогично рассматривается случай $|P'(\beta_1)| \leq H^{-1/6}$, и поэтому теорема 2 доказана.

Литература

1. *Спринджук В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск, 1967.
2. *Beresnevich V. V.* // Acta Arith. 1999. Vol. 90. P. 97–112.
3. *Bernik V. I.* // Acta Arith. 1989. Vol. 53. P. 17–28.
4. *Khinchine A. Ya.* // Math. Ann. 1924. Vol. 92. P. 115–125.
5. *Beresnevich V. V.* // Acta Arith. 2005. Vol. 117. P. 71–80.
6. *Budarina N.* // Доклады Академии наук. 2011. Т. 437, № 4. С. 441–443.
7. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. М., 1977.
8. *Берник В. И.* // Изв. Акад. наук СССР, сер. мат. 1980. Т. 44, № 1. С. 24–45.
9. *Bernik V. I., Budarina N. V., Dickinson D.* // Lith. Math. J. 2008. Vol. 48, N 2. P. 158–173.
10. *Bernik V. I., Budarina N. V., Dickinson D.* // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 2010. Vol. 149, N 2. P. 193–216.
11. *Beresnevich V. V.* // Ann. of Math. 2012. Vol. 175, N 1. P. 187–235.
12. *Бударина Н.* // Матем. заметки. 2013. Т. 93, вып. 6. С. 812–820.

N. V. BUDARINA, V. V. BERESNEVICH, V. I. BERNIK

buda77@mail.ru; victor.beresnevich@york.ac.uk; bernik@im.bas-net.by

SIMULTANEOUS DIOPHANTINE APPROXIMATIONS WITH THE NON-MONOTONIC RIGHT-HAND SIDE

Summary

In the article it is proved that the analogue of the Khinchine theorem for simultaneous approximations of the points on the plane by algebraic conjugate numbers holds without the monotonicity of the approximation function.

УДК 517.9

Академик И. В. ГАЙШУН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НАД КОЛЬЦОМ ФУНКЦИЙ НА МНОЖЕСТВЕ ГОМОМОРФИЗМОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО КОЛЬЦА В КОЛЬЦО КОНСТАНТ

Институт математики НАН Беларуси, Минск

Поступило 22.01.2014

Введение. Наличие операции дифференцирования в кольце [1; 2] дает возможность ввести в рассмотрение достаточно общее понятие дифференциального уравнения [2–5]. Однако в таких уравнениях отсутствует независимая переменная («время»), что не позволяет корректно сформулировать многие задачи, хорошо известные в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В настоящем сообщении предлагается один вариант дифференциальных уравнений над кольцом с дифференцированием, в которых роль независимой переменной играют гомоморфизмы в кольцо констант.

1. Основные понятия. Пусть K – ассоциативное кольцо с единицей e и P – его подкольцо с той же единицей. Предположим, что задано нетривиальное дифференцирование [1; 2] $D : P \rightarrow K$, т. е. отображение, удовлетворяющее требованиям $D(x + y) = Dx + Dy$, $D(xy) = (Dx)y + xDy$. Элемент Dx называется производной элемента x . Элементы $c \in P$, для которых $Dc = 0$, образуют кольцо $C \subset P$ констант.

Операция нахождения элемента по его производной называется интегрированием. Если для $f \in K$ существует такое $F \in P$, что $DF = f$, то элемент F есть (неопределенный) интеграл или первообразная элемента f ; он обозначается

$$F = \int f.$$

Ясно, что первообразная существует тогда и только тогда, когда $f \in \text{Im}D = \{y : y = Dx, x \in P\}$. Если F – первообразная элемента f , то первообразной будет и любая сумма $f + c$, при этом такими суммами исчерпываются все первообразные.

2. Кольцо функций на множестве гомоморфизмов в кольцо констант. Пусть T – некоторое множество гомоморфизмов $t : K \rightarrow C$, не изменяющих константы, т. е. $tc = c$ ($c \in C$); оно называется достаточным, если для любых различных элементов $x, y \in K$ найдется такое $t \in T$, что $tx \neq ty$. Заметим, что достаточное множество гомоморфизмов существует не для всякого кольца с дифференцированием.

Пусть множество T достаточно. Обозначим через K' совокупность функций $\varphi : T \rightarrow C$, для каждой из которых найдется такое $x \in K$, что $\varphi(t) = tx$. Если на множестве K' определить операции $(\varphi + \psi)(t) = t(x + y)$, $(\varphi \cdot \psi)(t) = t(xy)$ (x и y – элементы из K , задающие функции φ и ψ), то K' превратится в кольцо с единицей $\varepsilon : \varepsilon(t) = te = e$. Кольца K и K' изоморфизмы; изоморфизм осуществляет отображение $x \rightarrow \varphi$, где $\varphi(t) = tx$. Совокупность функций $\varphi \in K'$, порожденных элементами $x \in P$, образует подкольцо $P' \subset K'$.

Рассмотрим кольцо $K = C[a, b]$ непрерывных вещественных на отрезке $[a, b]$ функций с обычным дифференцированием и его подкольцо $P = C^1[a, b]$, состоящее из непрерывно дифференцируемых элементов. Кольцо констант в данном случае – это поле \mathbf{R} действительных чисел. Возьмем в качестве T совокупность отображений $C[a, b] \ni \gamma \rightarrow \gamma(t) \in \mathbf{R}$ ($t \in [a, b]$). Отображения множества T очевидным образом можно отождествить с независимой переменной $t \in [a, b]$. Это дает основание и в общем случае гомоморфизмы t трактовать как независимую переменную, о которой говорилось во введении.

3. Дифференцирование и интегрирование в кольце K' . Исходя из дифференцирования D , зададим дифференцирование $\delta : P' \rightarrow K'$ следующим образом:

$$(\delta\varphi)(t) = t(Dx),$$

где $x \in P$ – элемент, порождающий функцию φ . Кольцо C' констант дифференцирования δ состоит из функций, определяемых элементами $c \in C$. Очевидно, кольца C и C' изоморфны.

Пусть элемент $f \in K$ интегрируем и F – его первообразная. Легко убедиться, что функция $\varphi \in K'$, $\varphi(t) = tF$, интегрируема и ее интеграл равен

$$\left(\int \varphi\right)(t) = tF.$$

Выберем какие-либо гомоморфизмы $t_0, t \in T$. Элемент кольца C

$$\int_{t_0}^t \varphi = tF - t_0F \quad (1)$$

назовем определенным интегралом от t_0 до t функции φ . Если интеграл (1) рассматривать как функцию переменной $t \in T$, то он принадлежит кольцу P' и справедливо равенство

$$\delta \left(\int_{t_0}^t \varphi \right) = \varphi(t).$$

4. Дифференциальные уравнения над кольцом K' . Пусть $A(t)$ – $(n \times n)$ -матрица с элементами из кольца K' и $\psi(t)$ – некоторый элемент из множества $(K')^n$. Системой линейных дифференциальных уравнений над кольцом K' называется соотношение

$$(\delta\varphi)(t) = A(t)\varphi(t) + \psi(t), \quad (2)$$

связывающее неизвестную функцию $\varphi \in P'$ и ее производную $\delta\varphi$. Сопоставим системе (2) дифференциальное уравнение

$$(\delta\Phi)(t) = A(t)\Phi(t)$$

над кольцом $(n \times n)$ -матриц. Обратимое решение этого уравнения называется фундаментальной матрицей системы (2). Отметим, что фундаментальная матрица существует не всегда; более того, может оказаться, что для некоторого кольца K' нет ни одной системы (2), обладающей фундаментальной матрицей. Для наличия таких систем необходимо и достаточно существование обратимых $(n \times n)$ -матриц над кольцом P' .

Задача нахождения решения $\varphi(t)$ системы (2), удовлетворяющего начальному условию $\varphi(t_0) = \varphi_0$, называется задачей Коши. Для разрешимости такой задачи при любом $\varphi_0 \in C^n$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\Phi(t)^{-1}\psi(t)$ была интегрируемой. В этом случае соответствующее решение определяется формулой

$$\varphi(t) = \varphi(t, t_0, \varphi_0) = \Phi(t) \left(\Phi(t_0)^{-1} \varphi_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t)^{-1} \varphi(t) \right).$$

Если $\psi(t) \in (C')^n$ и $A(t)$ – матрица над кольцом C' , то система (2) называется стационарной. Пусть $\alpha : K \rightarrow K$ – дифференциальный автоморфизм (т. е. $\alpha(Dx) = D(\alpha x)$), для которого $\alpha P \subseteq P$ и $\alpha c = c$ ($c \in C$). Тогда отображение α' , ставящее в соответствие функции $\varphi(t) = tx$ функцию $\gamma(t) = t(\alpha x)$, есть дифференциальный автоморфизм кольца K' . Легко убедиться, что если $\varphi(t)$ – решение стационарной системы (2), то решением является и функция $(\alpha'\varphi)(t)$.

5. Наблюдаемость дифференциальных систем. Продемонстрируем целесообразность предложенной трактовки дифференциальных уравнений над кольцом на примере задачи наблюдаемости. Предположим, что в системе (2) $\psi(t) = 0$ и задан выходной вектор

$$y(t) = L(t)\varphi(t), \quad (3)$$

где $L(t)$ – матрица размеров $m \times n$ над кольцом K' . Система (2) называется наблюдаемой по выходу (3) на множестве наблюдений $T_0 \subset T$, если при различных $\varphi_0, \varphi_0^* \in C^n$ функции $y(t, \varphi_0), y(t, \varphi_0^*)$

отличаются хотя бы в одной точке множества T_0 ; здесь $y(t, \varphi_0) = L(t)\varphi(t, \varphi_0)$ – выход, порожденный начальным условием $\varphi(t_0) = \varphi_0$. Заметим, что в отличие от понятия наблюдаемости, изученного в [4; 5], здесь явным образом фигурирует множество наблюдений T_0 , которое всегда присутствует в случае обыкновенных дифференциальных уравнений [6].

Если существует фундаментальная матрица $\Phi(t)$, то справедливо следующее утверждение: наблюдаемость на множестве T_0 имеет место тогда и только тогда, когда для любого ненулевого $q \in C^n$ найдется такая точка $\tau = \tau(q) \in T_0$, что

$$L(\tau)\Phi(\tau)q \neq 0.$$

Сформулированный критерий есть обобщение хорошо известного неявного критерия наблюдаемости линейных обыкновенных дифференциальных систем (см., напр., [6]).

Литература

1. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. М., 1973.
2. Капланский И. Введение в дифференциальную алгебру. М., 1959.
3. Гайшун И. В. // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 11. С. 1463–1471.
4. Гайшун И. В. // Докл. НАН Беларуси. 2008. Т. 52, № 6. С. 33–35.
5. Гайшун И. В. // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 5. С. 665–672.
6. Гайшун И. В. Введение в теорию линейных нестационарных систем. Минск, 1999.

I. V. GAISHUN

math@im.bas-net.by

DIFFERENTIAL EQUATIONS OVER THE RING OF FUNCTIONS ON A SET OF HOMOMORPHISMS OF THE DIFFERENTIAL RING TO THE RING OF CONSTANTS

Summary

Let (K, D) be a differential ring and T be some set of homomorphism $t : K \rightarrow C$ (C be ring constants) that for $x, y \in K$, $x \neq y$, there exists $t \in T$, $tx \neq ty$. Denote the ring K' of the functions $\varphi : t \rightarrow tx$ ($x \in K$) and let $(\delta\varphi)(t) = t(Dx)$. Some properties of the linear differential equation $(\delta\varphi)(t) = A(t)\varphi(t) + \psi(t)$ over the ring K' are obtained.

ФИЗИКА

УДК 524.6;531

Член-корреспондент Л. М. ТОМИЛЬЧИК

МАСШТАБНАЯ НЕИНВАРИАНТНОСТЬ В КОНФОРМНОЙ ГЕОМЕТРИИ
И ЕЕ ВОЗМОЖНЫЕ НАБЛЮДАЕМЫЕ ПРОЯВЛЕНИЯ

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск

Поступило 30.12.2013

Введение. Экспериментальное обнаружение ускоренного расширения Вселенной (1998–1999 гг.), теоретически интерпретируемое в рамках ОТО как следствие наличия парадоксальной гипотетической вакуумоподобной, непосредственно не наблюдаемой субстанции (тёмной энергии), заполняющей пространство Метагалактики по мере её расширения, активизировало поиски альтернативного объяснения наблюдаемого эффекта, вплоть до попыток изменения динамических оснований ОТО (см. [1]). Перспективнее, однако, выглядит менее радикальный вариант соответствующей модификации, затрагивающий только геометрию плоского предела ОТО, каковым является пространство Минковского, симметрия которого определяется группой Пуанкаре.

Идея описания космологического красного смещения без явной апелляции к ОТО восходит к Милну [2]. Первая попытка её реализации на основе использования конформной пространственно-временной геометрии принадлежит Хиллу [3], который *ad hoc* связал параметр специальных конформных преобразований (SCT) с темпом космологического расширения и установил в линейном по параметру приближении зависимость продолжительности распространения сигнала от красного смещения. Подход Хилла возрождён в недавней работе [4]. В наших работах [5–7] точное выражение, задающее продолжительность распространения сигнала в виде явной функции красного смещения, установлено чисто кинематическим путём в качестве прямого следствия SCT и условия инвариантности уравнения светового конуса относительно этих преобразований. Тем самым получила общее определение вне рамок локационной процедуры и та дистанция, которую проходит сигнал, распространяющийся «в один конец».

В сочетании с известной из релятивистской теории продольного эффекта Доплера формулой, задающей зависимость относительной скорости источника и приёмника сигнала от красного смещения, получено явное аналитическое выражение для закона Хаббла, которое хорошо воспроизводит (в интервале $0,2 < z < 1,7$) характерные отклонения от его линейного приближения (т. е. непосредственно наблюдаемый эффект, интерпретируемый как ускоренное расширение Вселенной) [5–7].

Вместе с тем важный вопрос о локационной процедуре определения расстояний в условиях конформной пространственно-временной геометрии нуждается в специальном анализе, прежде всего потому, что совпадение длительности распространения сигнала «туда» и «обратно» не может быть обеспечено одновременно в двух системах отсчёта (СО), связанных посредством SCT.

В настоящей работе рассматривается проблема пространственно-временных измерений, и в частности, вопрос об определении радарного расстояния в условиях конформной геометрии.

Теоретическая часть. Мы исходим из предположения, что геометрия плоского предела ОТО определяется (локально) группой

$$\bar{P} = \text{SCT} \times L,$$

где SCT

$$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} + b^{\mu}(x^2)}{1 + 2(bx) + (b^2)(x^2)} \quad (b^{\mu} - 4\text{-вектор-параметр}) \quad (1)$$

есть абелева группа специальных конформных преобразований; L – группа Лоренца. Группа \bar{P} локально изоморфна группе Пуанкаре и образует подгруппу конформной группы $SO(4, 2)$. Будем использовать, следуя [8], одномерную модель

$$\left. \begin{aligned} x^{\mu} &= \{x^0 = ct, x, 0, 0\}, & x'^{\mu} &= \{x'^0 = ct', x', 0, 0\}, \\ b^{\mu} &= \left\{0, -\frac{1}{2R_0}, 0, 0\right\}, & R_0 &= ct_0, \quad t_0 - \text{параметр} \\ & & & \text{размерности времени} \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

ограничиваясь тем самым рассмотрением чисто продольных эффектов. SCT (1) с учётом (2) запишем в виде

$$x' = \frac{x \left(1 + \frac{x}{2R_0}\right) - \frac{c^2 t^2}{2R_0}}{\left(1 + \frac{x}{2R_0}\right)^2 - \left(\frac{ct}{2R_0}\right)^2}, \quad t' = \frac{t}{\left(1 + \frac{x}{2R_0}\right)^2 - \left(\frac{ct}{2R_0}\right)^2}. \quad (3)$$

Эти преобразования осуществляют отображение псевдоевклидовых плоскостей

$$\{x, x^0\} \rightarrow \{x', x'^0\}.$$

Они сингулярны на светоподобных мировых линиях

$$x(\pm) = -2R_0 \pm ct, \quad (4)$$

которые делят плоскость $\{x, x^0\}$ на четыре односвязных сектора (см. [8]).

Будем рассматривать взаимно однозначное отображение правого сектора плоскости $\{x, x^0\}$ в левый сектор плоскости $\{x', x'^0\}$, ограничиваясь полубесконечной частью правого сектора, заключённой между полупрямыми (4), исходящими из точек $(x = 0, x_{\pm}^0 = \pm 2R_0)$. Эта часть плоскости наиболее близка по своей геометрической структуре к псевдоевклидовой. Поэтому отрезки мировых линий, параллельных оси времени в этой области, до их пересечения с линиями сингулярности можно ассоциировать с мировыми линиями частиц, покоящихся в точках на оси x лоренцевой СО. Совокупность таких линий отображается в семейство гипербол в плоскости $\{x', x'^0\}$, каждая из которых соответствует движению с постоянным четырёхускорением, параметрически зависящим от координаты x отображаемой линии. В частности, линия, совпадающая с осью t , отображается в гиперболу с левой вершиной в начале координат CO' , отстоящей от центра гиперболы на расстояние, равное $R_0 = ct_0$. Мировые линии световых сигналов в выделенном нами секторе плоскости $\{x, x^0\}$ отображаются в мировые линии сигналов в соответствующем секторе плоскости $\{x', x'^0\}$. Это вытекает из условия инвариантности уравнения светового конуса относительно SCT (см. [8; 9]).

Для физической интерпретации SCT важную роль играют свойства этих преобразований в пределе, когда их нелинейный характер и другие особенности проявляются лишь в наличии малых поправок к пространственно-временным преобразованиям групп Пуанкаре и Галилея. Здесь выделенная роль принадлежит малой окрестности $\{\Delta x, \Delta t\}$ начала координат. Легко видеть, что в приближении

$$\frac{\Delta t}{t_0} \ll 1, \quad \frac{\Delta x}{R_0} \ll 1, \quad (5)$$

при $x = 0$ формулы (3) переходят в преобразования кинематики Галилея–Ньютона, определяющие переход от ИСО к равноускоренной CO' , движущейся в положительном направлении оси x ИСО с ускорением

$$W_B = \frac{c^2}{R_0} = \frac{c}{t_0}. \quad (6)$$

На основании эйнштейновского принципа эквивалентности в этом приближении CO' можно рассматривать как инерциальную, в которой действует соответствующее ускорению (6) постоянное ньютоново гравитационное поле.

Поскольку численное значение параметра t_0 – порядка возраста Вселенной, то окрестность начала координат CO' моделирует в рассматриваемом подходе (в приближении (5)) ту пространственно-временную область современной Метагалактики, в которой проводятся реальные наблюдения.

Инвариантность уравнения светового конуса относительно SCT позволяет использовать локационную процедуру синхронизации взаимно неподвижных часов, разделённых конечным расстоянием. Однако сингулярный характер преобразований и их нелинейный характер вносят в эту процедуру определённые коррективы, отличающие ситуацию от стандартной, когда взаимное отображение двух инерциальных CO осуществляется посредством преобразований группы Пуанкаре.

В СТО длительность распространения синхронизирующего сигнала в прямом и обратном направлениях совпадает в обеих CO , а выбор точки нахождения «опорных» часов и начала отсчёта времени по ним произвольны.

Однако ни одно из этих условий не может быть выполнено в случае, когда отображение $CO \rightarrow CO'$ осуществляется посредством SCT.

Воспользуемся выражением [5–7]

$$\frac{dt'}{dt}(\pm) = \frac{1}{\left(1 \pm \frac{t}{t_0}\right)^2}, \quad (7)$$

связывающим дифференциалы продолжительности распространения сигнала в этих системах отсчёта и сформулируем условие синхронизма как совпадение по часам CO' длительности распространения сигнала между пространственно разделёнными часами А и В в прямом и обратном направлениях («опорными» часами будем считать часы А):

$$t'_B - t'_A{}^0 = \int_{t'_A{}^0}^{t'_B} \frac{dt}{\left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^2} = \int_{t_B}^{t_A} \frac{dt}{\left(1 - \frac{t}{t_0}\right)^2} = t'_A - t'_B.$$

Отсюда получаем соотношение

$$\frac{t_B - t_A{}^0}{\left(1 + \frac{t_A{}^0}{t_0}\right)\left(1 + \frac{t_A}{t_0}\right)} = \frac{t_A - t_B}{\left(1 - \frac{t_A}{t_0}\right)\left(1 - \frac{t_B}{t_0}\right)}, \quad (8)$$

которое представляет собой следующее квадратное уравнение для определения t_B как функции начального ($t_A{}^0$) и конечного (t_A) показаний «опорных» часов:

$$\left(\frac{t_B}{t_0}\right)^2 + 2\Phi^{-1}\left(\frac{t_B}{t_0}\right) - 1 = 0, \quad (9)$$

где

$$\Phi = \Phi(t_A{}^0, t_A) = \frac{t_A{}^0 + t_A}{t_0 \left(1 + \frac{t_A{}^0}{t_0}\right)\left(1 - \frac{t_A}{t_0}\right)}. \quad (10)$$

Из двух решений уравнения (9)

$$\left(\frac{t_B}{t_0}\right)_{\pm} = \pm \Phi^{-1} \left\{ \left[1 + \Phi^2 \right]^{\frac{1}{2}} \mp 1 \right\}$$

следует выбрать то, которое соответствует верхнему знаку, поскольку только в этом случае при $t/t_0 \ll 1$, а следовательно, и при $\Phi(t_A^0, t_A) \ll 1$ (или, формально, в пределе $t_0 \rightarrow \infty$), для величины t_B получим, как это и должно быть, стандартное соотношение

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} t_B(t_A^0, t_A, t_0) = \frac{1}{2}(t_A^0 + t_A).$$

Таким образом, выражение для $t_B(t_A^0, t_A, t_0)$, удовлетворяющее предельному условию, имеет следующий вид:

$$t_B = t_0 \Phi^{-1} \left\{ \left[1 + \Phi^2 \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\}, \quad (11)$$

где Φ определяется формулой (10).

Очевидно, что при этом продолжительность распространения сигнала в прямом и обратном направлениях по часам СО не совпадают, хотя суммарная продолжительность распространения «туда» и «обратно» по-прежнему составляет величину, равную $t_A - t_A^0$.

Выражение (11) для t_B в первом порядке по t/t_0 имеет следующий вид:

$$t_B|_{t/t_0 \ll 1} \cong \frac{t_A + t_A^0}{2} \left\{ 1 + \frac{t_A - t_A^0}{2t_0} \right\} = \frac{t_A + t_A^0}{2} + \frac{t_A^2 - t_A^{02}}{2t_0}. \quad (12)$$

В этом приближении длительность распространения сигнала «туда» (Δt_{AB}) и «обратно» (Δt_{BA}) определяются соответственно выражениями

$$\Delta t_{AB} = t_B - t_A^0 = \frac{t_A - t_A^0}{2} + \frac{t_A^2 - t_A^{02}}{2t_0}, \quad (13)$$

$$\Delta t_{BA} = t_A - t_B = \frac{t_A - t_A^0}{2} - \frac{t_A^2 - t_A^{02}}{2t_0}. \quad (14)$$

Видно, что поправки первого порядка по t/t_0 к выражениям для продолжительности распространения сигнала «туда» и «обратно» не могут быть выражены через величину $\Delta t = \frac{1}{2}(t_A - t_A^0)$ вне зависимости от выбора начала отсчёта времени. Если ограничиться окрестностью начала координат, то можно положить $t_A^0 = 0$. В этом случае

$$\Delta t_{AB} = t + \frac{2t^2}{t_0}, \quad \Delta t_{BA} = t - \frac{2t^2}{t_0}, \quad (15)$$

где $t = \frac{t_A}{2}$.

В силу независимости скорости света от скорости движения источника описанная процедура полностью сохраняется в качестве метода определения радарного расстояния от точки наблюдения до места нахождения тела, независимо от наличия относительной скорости.

В случае конформной пространственно-временной геометрии светоподобные мировые линии, заданные в координатах СО, трансформируются в такие же линии в координатах СО'. Радарное расстояние в СО' определится формулой

$$D = c\Delta t' = c(t'_{\text{fin}} - t'_{\text{in}}), \quad (16)$$

и постулируем равенство

$$\Delta t'_{AB} = t'_B - t'_A = t'_A - t'_B = \Delta t'_{BA}.$$

При этом продолжительность распространения сигнала во взаимно противоположных направлениях по часам нештрихованной СО окажется различной (см. (7), (8)).

Поскольку любой реальный локационный эксперимент может проводиться только при выполнении соотношений (5), то все расчёты имеет смысл производить с учётом лишь поправочных членов первого порядка.

Величины t_B , Δt_{AB} и Δt_{BA} в этом приближении определяются формулами (12)–(14).

Видно, что при ключевом исходном условии $\Delta t'_{AB} = \Delta t'_{BA}$, принятом для «конформной» СО', оказывается, что по часам «инерциальной» СО $\Delta t_{AB} \neq \Delta t_{BA}$. Отличие этих промежутков времени от их лоренцова значения $\Delta t = \frac{t_A - t_A^0}{2}$ противоположно по знаку и совпадает по абсолютной величине, равной

$$\delta t(A, A^0) = \frac{1}{2t_0}(t_A - t_A^0)(t_A + t_A^0) = \frac{1}{2t_0}(t_A^2 - t_A^{02}).$$

Отметим, что при этом

$$\Delta t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\Delta t_{AB} + \Delta t_{BA}) = \frac{t_A - t_A^0}{2},$$

т. е. половина общей продолжительности распространения сигнала «туда–обратно» оказывается в точности такой же, как в СТО. Если рассматривать окрестность начала координат, и положить $t_A^0 = 0$, то временные интервалы Δt_{AB} и Δt_{BA} определяются формулами (15).

Поскольку продолжительность распространения сигнала «туда» и «обратно» по отдельности неизмерима, а фиксируется только суммарная длительность (которая затем делится пополам), то наблюдатель, находящийся в малой окрестности общего начала координат СО и СО', получит для соответствующего радарного расстояния «привычную» величину

$$D = x = ct, \quad (17)$$

где продолжительность t определена формулой

$$t = \frac{1}{2}t_A = \frac{1}{2}(t_{\text{fin}} - t_{\text{in}}).$$

Однако для определения эффекта, наблюдаемого «с точки зрения» СО', необходимо учесть изменение пространственных и временных масштабов в условиях конформной геометрии.

SCT для дифференциалов пространственно-временных координат удобно рассматривать в безразмерных переменных

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 1 + \frac{x}{2R_0}, & \tau &= \frac{x^0}{2R_0} = \frac{ct}{2R_0}; \\ \xi' &= 1 + \frac{x'}{2R_0}, & \tau' &= \frac{x'^0}{2R_0} = \frac{ct'}{2R_0}. \end{aligned} \right\}$$

В этих обозначениях из (6) получаем

$$d\xi' = \frac{\xi^2 + \tau^2}{(\xi^2 - \tau^2)^2} \left\{ d\xi - \frac{2\xi\tau}{\xi^2 + \tau^2} d\tau \right\}, \quad (18)$$

$$d\tau' = \frac{\xi^2 + \tau^2}{(\xi^2 - \tau^2)^2} \left\{ -\frac{2\xi\tau}{\xi^2 + \tau^2} d\xi + d\tau \right\}. \quad (19)$$

Полагая, что часы, расположенные в точках ξ' и $\xi' + d\xi'$, синхронизированы стандартным условием совпадения продолжительности «туда–обратно» по часам системы СО', дифференциала-

лом расстояния между точками ξ' и $\xi' + d\xi'$ будем считать разность этих координат в один и тот же момент времени τ' . Тогда, используя формулы (18) и (19), получим

$$d\xi' \stackrel{\text{def}}{=} d\xi' \Big|_{d\tau'=0} = \frac{d\xi}{\xi^2 + \tau^2}. \quad (20)$$

Соотношение между конечными отрезками длины предполагает интегрирование по переменной ξ . Очевидно, что результат будет зависеть от выбора фиксированного момента времени τ в СО (т. е. значения $\tau_{\text{fix}} = \frac{ct_{\text{fix}}}{2R_0}$). Иными словами, выражение для расстояния $\Delta\xi' = \xi'_{\text{fin}} - \xi'_{\text{in}}$ содержит параметрическую зависимость от выбора фиксированного момента времени, который в различных точках пространства СО' предполагается одинаковым.

В общем случае при $\tau \neq 0$ интегрирование по ξ даёт

$$\Delta\xi' = \xi'_{\text{fin}} - \xi'_{\text{in}} = \tau_{\text{fix}} \left\{ \text{arctg} \left(\frac{\xi_{\text{fin}}}{\tau_{\text{fix}}} \right) - \text{arctg} \left(\frac{\xi_{\text{in}}}{\tau_{\text{fix}}} \right) \right\}.$$

Особый интерес представляет, однако, именно выбор $\tau_{\text{fix}} = 0$ (в силу соображений соответствия и выделенной роли окрестности начала координат). В этом случае из (20) получаем выражение

$$d\xi' = \frac{d\xi}{\xi^2},$$

интегрирование которого в соответствующих пределах даёт

$$\Delta\xi' = \xi'_{\text{fin}} - \xi'_{\text{in}} = -1 \Big|_{\xi_{\text{in}}}^{\xi_{\text{fin}}} = \frac{\xi_{\text{fin}} - \xi_{\text{in}}}{\xi_{\text{in}} \xi_{\text{fin}}}.$$

В размерных переменных, полагая $x'_{\text{in}} = x_{\text{in}} = 0$ и обозначая $x'_{\text{fin}} = \Delta x'$, $x_{\text{fin}} = \Delta x$, находим

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{1 + \frac{\Delta x}{2R_0}}. \quad (21)$$

Это выражение представляет собой правило преобразования длин («конформное сокращение» длины) относительно SCT (при выборе $\tau = 0(!)$). В приближении $\Delta x / 2R_0 \ll 1$ отсюда получаем, ограничиваясь членами, линейными по $\Delta x / R_0$,

$$\Delta x' \cong \Delta x - \frac{(\Delta x)^2}{2R_0}. \quad (22)$$

Из формулы (21), в частности, видно, что отрезок оси Δx системы СО, ограниченный точками 0 и $2R_0$, сокращается вдвое

$$\Delta x' = \frac{2R_0}{1 + \frac{2R_0}{2R_0}} = R_0.$$

Применительно к дифференциально малым приращениям временной координаты τ' в СО' будем использовать стандартное определение, согласно которому промежуток времени, измеренный по часам, покоящимся в заданной точке некоторой СО, есть разность показаний этих часов при фиксированном положении этой точки.

Это означает

$$d\tau' \stackrel{\text{def}}{=} d\tau' \Big|_{d\xi'=0}.$$

На основании (18) и (19) получаем

$$d\tau' = \frac{d\tau}{\xi^2 + \tau^2}.$$

Формула содержит параметрическую зависимость от координаты $\xi = 1 + \frac{x}{2R_0}$.

Для конечных отрезков времени (при фиксированном значении $\xi = \xi_{\text{fix}}$) элементарное интегрирование даёт

$$\Delta\tau' = \tau'_{\text{fin}} - \tau'_{\text{in}} = \frac{1}{\xi_{\text{fix}}} \left\{ \text{arctg} \left(\frac{\tau_{\text{fin}}}{\xi_{\text{fix}}} \right) - \text{arctg} \left(\frac{\tau_{\text{in}}}{\xi_{\text{fix}}} \right) \right\}. \quad (23)$$

Для важного случая, когда часы находятся в начале координат СО ($\xi_{\text{fix}} = 1$), полагая $\tau'_{\text{in}} = \tau_{\text{in}} = 0$ и обозначая $\tau_{\text{fin}} = \Delta\tau$, $\tau'_{\text{fin}} = \Delta\tau'$, находим из (23)

$$\Delta\tau' = \text{arctg}(\Delta\tau),$$

или для размерных величин

$$\Delta t' = 2t_0 \text{arctg} \left(\frac{\Delta t}{2t_0} \right). \quad (24)$$

Отсюда при $\Delta t / t_0 \ll 1$ получаем

$$\Delta t' \cong \Delta t. \quad (25)$$

Для нахождения закона преобразования скоростей относительно SCT определим скорости в СО' и СО соответственно следующими соотношениями:

$$\frac{d\xi'}{d\tau'} = \frac{v'_x}{c}, \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{v_x}{c}.$$

Воспользовавшись (18) и (19), находим

$$v'_x = \frac{v_x - V_{cf}}{1 - \frac{v_x V_{cf}}{c^2}},$$

где величина

$$V_{cf} = c \frac{2\xi\tau}{\xi^2 + \tau^2} \quad (26)$$

выступает в роли скорости относительного движения систем отсчёта СО и СО', если эти СО связаны посредством SCT (3).

Нетрудно видеть, что абсолютная величина скорости V_{cf} лежит в интервале

$$0 \leq |V_{cf}| \leq \bar{c},$$

причём она стремится к пределу, равному \bar{c} по мере приближения точек ξ , τ к линиям сингулярности на плоскости $\{x, x^0\}$. Предел $V_{cf} = \bar{c}$ достигается при условии $\xi^2 = \tau^2$, которое в соответствии с (3) определяет положение этих линий.

В приближении малых пространственно-временных интервалов (т. е. пренебрегая членами порядка $(\Delta\tau)^2$) в окрестности начала координат получаем

$$V_{cf} \cong 2c\tau = \frac{c^2}{R_0} t = \frac{c}{t_0} t = W_B t, \quad (27)$$

что находится в соответствии с галилей-ньютоновым пределом SCT.

Нетрудно видеть, что в приближении (5) скорость взаимного удаления произвольно выделенных пар точек и радарное расстояние между этими точками оказываются взаимно пропорциональными.

Воспользуемся формулами (24) и (26) для выделенного частного случая $\xi = 1$.

Соответствующее радарное расстояние D , заданное в CO' , определяется на основании (24) следующей формулой:

$$D = ct' = 2ct_0 \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{2t_0} \right).$$

Здесь t' и t – промежутки времени, отсчитанные от $t'_{\text{in}} = t_{\text{in}} = 0$ общего начала координат CO и CO' .

В приближении $\frac{t}{t_0} \ll 1$, находим соответственно

$$V_{\text{cf}} \cong \frac{ct}{t_0}, \quad D \cong 2ct_0 \left(\frac{t}{2t_0} \right) = ct.$$

Видно, что в этом приближении выполняется соотношение

$$V_{\text{cf}} \cong t_0^{-1} D, \quad (28)$$

которое соответствует наблюдаемому при временах, малых по сравнению с возрастом Вселенной, линейному характеру космологического расширения

$$V = H_0 D, \quad (29)$$

где H_0 – константа Хаббла.

Из сопоставления (28) и (29) видно, что численное значение параметра t_0 равно обратной величине постоянной Хаббла, т. е.

$$t_0 = H_0^{-1}. \quad (30)$$

Это значение параметра t_0 совпадает с полученным нами ранее в работах [5] и [10]. Однако теоретическое обоснование соотношения (30) в этих работах не было осуществлено последовательно в рамках конформной геометрии. Заметим также, что полученное значение t_0 оказывается ровно вдвое меньшим, чем то, которое найдено в [5–7] на основе использования точного выражения для зависимости $t(z)$. Вопрос о причинах этого несовпадения нуждается в специальном обсуждении.

Вернемся теперь к вопросу о локационной процедуре определения радарного расстояния в условиях окрестности начала координат в приближении (5). Как видно из соотношений (16), (17) и (25), в этом приближении радарное расстояние, вычисленное по часам CO и CO' , имеет одно и то же значение. Однако если представить себе распространение сигнала между двумя идеально отражающими параллельными стенками, которые разделены некоторым расстоянием $\Delta x = x_B - x_A$ в координатах CO , то это расстояние в координатах CO' составляет величину $\Delta x'$, которая связана с Δx в приближении (5) формулой (22), которую с учётом (17) запишем в следующем виде:

$$\Delta x' = c \left(t - \frac{t^2}{2t_0} \right).$$

Конформное сокращение длины, имеющее величину $\delta x'_{\text{conf}} = \delta(\Delta x')$, приведёт к дополнительному сокращению продолжительности $\delta t'_{\text{extra}}$ распространения сигнала по часам CO' , определяемому соотношением

$$\delta t'_{\text{extra}} = c^{-1} \delta(\Delta x') = \delta t \left(1 - \frac{t}{t_0} \right). \quad (31)$$

Если испущенный из точки A сигнал является монохроматическим с частотой ν , то в соответствии с (31), сигнал, отражённый в точке B и возвратившийся в точку A , будет иметь в приближении (5) частоту ν' , определяемую формулой

$$\nu' = \nu \left(1 + \frac{t}{t_0} \right).$$

Отсюда следует, что в таком процессе в сигнале должен наблюдаться аномальный фиолетовый частотный сдвиг, относительная величина которого выражается с учётом (30) формулой

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu' - \nu}{\nu} = t_0^{-1} t = H_0 t. \quad (32)$$

В принципе при этом следует учитывать также эффект лоренцова сокращения, величина которого зависит от «конформной» скорости (26). Однако в приближении (5) эта скорость определяется формулой (27), откуда видно, что соответствующий эффект – второго порядка малости по $H_0 t$ пренебрежимо мал по сравнению с эффектом «конформного» сокращения длины. Нетрудно видеть также, что в рассматриваемом приближении при многократном отражении сигнала частотный сдвиг (32) должен суммироваться, так что под t в (32) следует понимать общее время распространения сигнала.

Заключение. Наблюдаемые в условиях современной Метагалактики эффекты расширения Вселенной могут быть описаны в хорошем согласии с экспериментом на основе использования в качестве группы симметрии плоского предела ОТО не группы Пуанкаре, а ей локально изоморфной подгруппы конформной группы $SO(4, 2)$, в которой вместо пространственно-временных трансляций фигурирует абелева группа специальных конформных преобразований SCT.

Условие совпадения продолжительности распространения сигнала во взаимно противоположных направлениях не выполняется одновременно в CO и CO' , связанных посредством SCT. Тем не менее, длительность распространения сигнала, задаваемая начальным и конечным показаниями часов в точке наблюдения, а следовательно, – и радарное расстояние в первом приближении по t/t_0 оказываются совпадающими в обеих CO . Однако конформное сокращение длины в этом порядке оказывается линейным по $H_0 t$, что должно проявляться в любом эксперименте локационного типа (с монохроматическим излучением) в виде универсального аномального фиолетового частотного сдвига, относительная величина которого определяется значением $H_0 t$. Этот эффект представляет собой локальное проявление космологического расширения, описываемого в рамках конформной пространственно-временной геометрии и, в принципе, доступен экспериментальной проверке.

Считаю своим долгом выразить благодарность проф. В. Г. Барышевскому за многократные стимулирующие обсуждения проблемы.

Литература

1. Турьшев С. // УФН. 2009. Т. 179, № 1. С. 3–34.
2. Milne E. A. // Relativity, Gravitation and World-Structure. New York, 1935.
3. Hill E. L. // Phys. Rev. 1945. Vol. 68. P. 232–233.
4. Wulfsberg C. E. // Physics-arxiv: /10 10. 2139.
5. Tomilchik L. M. // Proc. Int. Sem. on Contemporary Problems of Elementary Particle Physics, 17–18 January 2008. Dubna, 2008. P. 194–207; arxiv: gr-qc /0806.0241.
6. Tomilchik L. M. // AIP Conference Proceedings. 1205. New York, 2010. P. 177–184.
7. Томильчик Л. М. // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 1. С. 56–62; arxiv: gr-qc /1102.4995.
8. Fulton T., Rohrlich F., Witten L. // Nuovo Cim. 1962. Vol. 24. P. 652–670.
9. Томильчик Л. М. // Докл. НАН Беларуси. 2012. Т. 56, № 4. С. 42–47; Nonlinear Phenomena in Complex System. 2013. Vol. 16, N 1. P. 99–104.
10. Томильчик Л. М. // Оптика и спектроскопия. 2007. Т. 103, № 2. С. 246–250.

L. M. TOMILCHIK

lmt@dragon.bas-net.by

SPACE-TIME SCALE NONINVARIANCE OF THE CONFORMAL GEOMETRY AND ITS POSSIBLE OBSERVABLE MANIFESTATIONS

Summary

The radar procedure of the distance determination in conformal space-time geometry is considered. It is shown that the space intervals conformal contraction gave rise to an anomalous violet frequency shift during the monochromatic signal propagation over the closed path. Its relative value equals the Hubble constant multiplied by the duration of the signal propagation. The predicted phenomenon is the local manifestation of the cosmologic expansion and, in principle, is accessible to experimental detection.

УДК 535.14

В. П. СТЕПАНОВ, Д. С. МОГИЛЕВЦЕВ, А. С. МАЛОШТАН,
член-корреспондент С. Я. КИЛИН

КЛАССИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛИТЕЛЬ ПУЧКА ДЛЯ ОДИНОЧНЫХ ФОТОНОВ И УПРАВЛЕНИЕ СПОНТАННЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ С ПОМОЩЬЮ ПЕРЕПУТЫВАНИЯ

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск

Поступило 04.12.2013

Если на идеальный (не вносящий шумов и потерь) делитель пучка 50/50 запустить по одиночному фотону одновременно в оба входных канала, то детекторы, поставленные на выходных каналах, зарегистрируют либо два фотона, либо ни одного, т. е. вероятность одновременного срабатывания обоих детекторов будет равна нулю. Данное явление, называемое эффектом Хонга–У–Мандела [1], представляет собой хорошо известную иллюстрацию квантовой интерференции. В нашей работе мы предлагаем и обсуждаем квантовое интерференционное устройство, способное производить противоположный эффект: одновременный ввод одиночных фотонов может привести к регистрации одиночных фотонов на обоих выходах.

Предлагаемая модель включает два излучателя, моделируемых двухуровневыми системами (ДУС), взаимодействующими одновременно с двумя резервуарами электромагнитных мод поля. Модель соответствует двум соединенным волноводам с ДУС на торцах волнопроводов (рис. 1) или модам с различной поляризацией в низкочастотном резонаторе. Следует отметить, для системы с двумя близко расположенными излучателями (расстояние между которыми много меньше, чем длина волны перехода), связанными с единственным резервуаром, хорошо известна сильная зависимость спонтанного испускания от начального состояния ДУС (см., напр., [2]). Этот эффект возникает в результате коррелированных потерь благодаря связи излучателей через диссипативный резервуар. Такая ситуация возникает, например, для пары близко расположенных атомов в обычном неструктурированном вакууме. При этом у излучателей может появиться так называемое подпространство свободных от декогеренции состояний (ПСДС), в котором система обладает нераспадающимися («темновыми») состояниями, несмотря на связь с обычным марковским резервуаром. Эти состояния перепутаны, поэтому распад в соответствующий марковский резервуар может сохранить существующие [3] или создать новые перепутанности между системами, даже не взаимодействующими непосредственно [4; 5]. «Темновое» состояние составной системы, соединенной с общим резервуаром, было впервые реализовано экспериментально с модами поля [6], затем с состояниями ионов [7] и ядерных спинов [8], а также нейтронами [9]. Возможные реализации ПСДС интенсивно исследуются как вероятные и очень перспективные способы избежать влияния декогеренции на обработку квантовой информации и реализовать отказоустой-

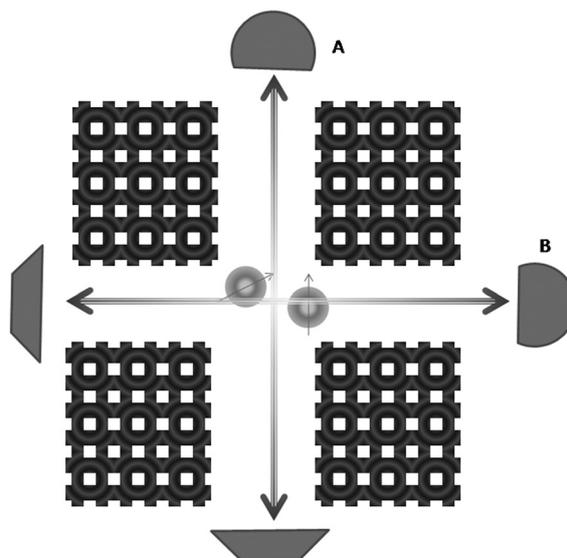


Рис. 1. Схематичное изображение рассматриваемой системы: две ДУС взаимодействуют с двумя группами мод

чивые квантовые вычисления (см., напр., [10]). В работе рассматривается случай, когда ПДС в системе отсутствует, но, если бы один из резервуаров был выключен, появилось бы «темное» состояние. Однако одновременное взаимодействие с обоими резервуарами приводит в итоге к полному спонтанному распаду атомных состояний на нижние невозбужденные уровни. Тем не менее, этот процесс демонстрирует нетривиальные и неожиданные особенности.

Рассматриваемая система описывается следующим стандартным гамильтонианом в рамках приближения «вращающейся волны»:

$$\begin{aligned} H &= H_0 + V_a + V_b, \\ H_0 &= \hbar \sum_j \Delta_j^a a_j^\dagger a_j + \hbar \sum_k \Delta_k^b b_k^\dagger b_k, \\ V_x &= \hbar \sum_j (g_{x,j}^{(1)} \sigma_1^+ + g_{x,j}^{(2)} \sigma_2^+) x_j + h.c., \end{aligned} \quad (1)$$

где расстройка Δ_j^x , $x = a, b$, описывает различие между частотами в j -й моде x -го резервуара и частотой перехода ДУС (частоты перехода обоих ДУС предполагаются равными). Операторы $\sigma_j^- = |-j\rangle\langle +j|$, $j = 1, 2$, – понижающие операторы соответствующей ДУС; $|\pm_j\rangle$ – состояния, описывающие основное и возбужденное состояние ДУС. Операторы x_j , x_j^\dagger – бозонные операторы уничтожения/рождения для j -й моды резервуара x . Постоянные $g_{x,j}^{(y)}$, $y = 1, 2$, описывают взаимодействие y -й ДУС с j -й модой x -го резервуара.

В предположении начального вакуумного состояния для модовых резервуаров уравнение для матрицы плотности приводится к виду

$$\frac{d}{dt} \rho = \sum_{m,n=1,2} \gamma_{mn}^x (2\sigma_m^- \rho \sigma_n^+ - \sigma_n^+ \sigma_m^- \rho - \rho \sigma_n^+ \sigma_m^-), \quad (2)$$

где

$$\gamma_{mn}^x \approx \int_0^{+\infty} d\tau \sum_j g_{x,j}^{(m)} (g_{x,j}^{(n)})^* e^{-i\Delta_j^x \tau}.$$

При выводе управляющего уравнения (2) мы пренебрегли лэмбовским сдвигом частоты, который для марковского резервуара, как правило, является малым и практически не влияет на динамику в рассматриваемом случае. Кроме того, предполагается, что в результате связи с резервуарами прямое диполь-дипольное взаимодействие не возникает (это соответствует расстоянию между ДУС в несколько десятков нанометров [2]).

Предположим, что обе ДУС связаны с отдельными резервуарами одинаковым образом, т. е. константы связи можно записать в факторизованном виде, $g_{x,j}^{(y)} \approx f_x^{(y)} \bar{g}_j$, что эквивалентно выполнению условия

$$\gamma_{mn}^x = \alpha_{xm} \alpha_{xn}^*.$$

В этом случае управляющее уравнение (2) принимает следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \rho = \mathcal{L}(S_a) \rho + \mathcal{L}(S_b) \rho, \quad (3)$$

где $S_x = \alpha_{x1} \sigma_1^- + \alpha_{x2} \sigma_2^-$, а $\mathcal{L}(Y) = 2Y^- \rho Y^+ - Y^+ Y^- \rho - \rho Y^+ Y^-$ – линдбладовский супероператор. Для простоты предположим, что константы α_{xj} могут принимать только действительные значения. Из (3) следует, что в отсутствие взаимодействия с резервуаром В, состояние

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{a1}^2 + \alpha_{a2}^2}} (\alpha_{a2} | +_1 \rangle | -_2 \rangle - \alpha_{a1} | -_1 \rangle | +_2 \rangle) \quad (4)$$

будет «темновым», не зависящим от потерь в резервуар А. Аналогичным образом, в отсутствие взаимодействия с резервуаром А, состояние

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{b1}^2 + \alpha_{b2}^2}} (\alpha_{b2} | +_1 \rangle | -_2 \rangle - \alpha_{b1} | -_1 \rangle | +_2 \rangle) \quad (5)$$

также будет «темновым» состоянием.

Предположим, что $\alpha_{b1} = -\alpha_{a2}$ и $\alpha_{b2} = \alpha_{a1}$, т. е. «темновые» состояния (4) и (5) ортогональны. В этом случае можно получить решения для диагональных элементов нестационарной матрицы плотности (3):

$$\begin{aligned}\rho_{++}(t) &= \langle +_1 | \langle +_2 | \rho(t) | +_1 \rangle | +_2 \rangle = \rho_{++}(0) e^{-4\gamma t}, \\ \rho_\phi(t) &= \langle \phi | \rho(t) | \phi \rangle = \\ &= \rho_\phi(0) e^{-2\gamma t} + \rho_{++}(0) e^{-2\gamma t} (1 - e^{-2\gamma t}), \\ \rho_\varphi(t) &= \langle \varphi | \rho(t) | \varphi \rangle = \\ &= \rho_\varphi(0) e^{-2\gamma t} + \rho_{++}(0) e^{-2\gamma t} (1 - e^{-2\gamma t}),\end{aligned}$$

где $\gamma = \alpha_{a1}^2 + \alpha_{a2}^2$ – скорость распада.

В предположении, что детекторы в схеме (рис. 1) идеальны и не различают моды с различной частотой в спектральной области обоих резервуаров А и В, их выходной сигнал (фототок), будет пропорционален числу падающих на них фотонов:

$$N_x(t) = \sum_j \langle x_j^\dagger(t) x_j(t) \rangle, \quad x = a, b.$$

Из гамильтониана (1) получаем

$$x_j(t) = x_j(0) \exp\{-i\Delta_j^x t\} - i \int_0^t d\tau \exp\{-i\Delta_j^x(t-\tau)\} (g_{x,j}^{(1)} \sigma_1^- + g_{x,j}^{(2)} \sigma_2^-),$$

что в марковском приближении приводит к соотношению

$$N_x(t) = 2 \int_0^t d\tau \langle (S_x^+(\tau))(S_x^-(\tau)) \rangle. \quad (6)$$

Окончательно, из решения (6) находим общее число фотонов ($t \rightarrow +\infty$), попадающих на детектор А и В, соответственно

$$N_a(+\infty) = \rho_\phi(0) + \rho_{++}(0), \quad (7)$$

$$N_b(+\infty) = \rho_\varphi(0) + \rho_{++}(0). \quad (8)$$

Полученные соотношения (7), (8) имеют нетривиальный смысл. Прежде всего, они демонстрируют сильную зависимость направления излучения от начального состояния. Начальное возбуждение обеих ДУС в одно из «темновых» состояний (4) или (5) приводит к полному подавлению спонтанного излучения в резервуарах А либо В. Отметим, что оба состояния (4) и (5) перепутаны с согласованностью $2|\alpha_{a1}\alpha_{a2}|/\gamma$. Начальное состояние с одинаково распределенными возбуждениями по обоим ДУС:

$$\rho(0) = \frac{1}{2} (|+_1\rangle |-_2\rangle \langle +_1| \langle -_2| + |-_1\rangle |+_2\rangle \langle -_1| \langle +_2|)$$

приводит к равновероятностной регистрации фотона на каждом детекторе 2. Неожиданная особенность, вытекающая из соотношений (4), (5) – невозможность излучения более одного фотона в резервуары А и В. Фотоны никогда не вылетают вместе, даже в случае, когда обе ДУС полностью возбуждены. В этом случае будет присутствовать строго один фотон, летящий к каждому детектору.

Таким образом, рассматриваемая модель представляет собой квантовое устройство, работающее на принципе квантовой интерференции и ведущее себя как «классический делитель пучка», но с одиночными фотонами: два фотона, попавшие в устройство через входящие каналы, всегда дают один фотон в каждый из выходных каналов. Если входит только один фотон, устройство действует как обычный квантовый делитель пучка.

Работа подобного «классического делителя одиночных фотонов» проиллюстрирована на рис. 2. Штриховая линия показывает, как ведет себя среднее число фотонов с течением времени при полном возбуждении обоих ДУС. Видно, что ни в какой момент времени среднее число фотонов

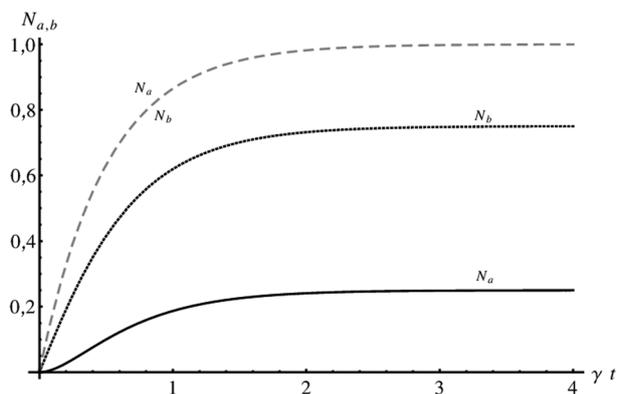


Рис. 2. Динамика числа фотонов в резервуарах в зависимости от времени взаимодействия, заданная (6) для различных начальных состояний. Штриховая линия соответствует полному начальному возбуждению обоих ДУС. Сплошная и пунктирная линии описывают динамику числа фотонов в резервуарах для начального состояния (9)

в отдельном резервуаре не превышает единицу. Сплошная и пунктирные линии показывают, как ведут себя средние числа фотонов в резервуарах при следующем начальном состоянии обоих ДУС:

$$\rho(0) = \frac{1}{2}(|+1\rangle|+2\rangle\langle+1|\langle+2| + |+1\rangle|-2\rangle\langle+1|\langle-2|). \quad (9)$$

Несмотря на то что среднее число возбуждений больше единицы и симметрия возбуждений отсутствует как в начальном состоянии, так и в динамике средних чисел фотонов, всё равно ни в какой момент времени среднее число фотонов в каждом резервуаре не превышает единицы.

Подытоживая, можно заключить, что мы предложили устройство на основе квантовой интерференции, работающее с одиночными

возбуждениями, но демонстрирующее эффект противоположный тому, какой ожидался бы при интерференции однофотонных состояний на обычном «унитарном» идеальном делителе. Благодаря неунитарности динамики и связи через диссипативные резервуары, характер распределения спонтанно излученных фотонов имеет отчетливо «классический» характер.

Данный эффект, помимо методологического интереса, несомненно, может быть полезным для практической разработки управляемых одиночными фотонами оптических переключателей и роутеров. Очевидно, что рассмотренную выше схему можно обобщить для ансамблей из большего числа излучателей и связанных с ними резервуаров.

Описанные здесь результаты были получены при исследованиях, проводимых в рамках ГПНИ «Конвергенция 3.1.01. Разработка и исследование источников и интегральных компонентов управления одиночными и коррелированными (перепутанными) фотонами для квантово-информационных и высокоточных диагностических приложений».

Литература

1. Hong C. K., Ou Z. Y., Mandel L. // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 59. P. 2044.
2. Ficek Z., Tanas R. // Physics Reports. 2002. Vol. 372. P. 369.
3. Prauzner-Bechcicki J. S. // J. Phys. A. 2004. Vol. 37. P. L173.
4. Braun D. // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89. P. 277901.
5. Horhammer C., Buttner H. // Phys. Rev. A. 2008. Vol. 77. P. 042305.
6. Kwiat P. G., Berglund A. J., Altepeter J. B., White A. G. // Science. 2000. Vol. 290. P. 498.
7. Myatt C. J., King B. E., Turchette Q. A. et al. // Nature. 2000. Vol. 403. P. 269.
8. Viola L., Fortunato E. M., Pravia M. A. et al. // Science. 2001. Vol. 293. P. 2059.
9. Pushin D. A., Huber M. G., Arif M., Cory D. G. // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 107. P. 150401.
10. Doucot B., Ioffe L. B. // Rep. Prog. Phys. 2012. Vol. 75. P. 072001.
11. Mogilevtsev D., Tyc T., Korolkova N. // Phys. Rev. A. 2009. Vol. 79. P. 053832.

V. P. STEPANOV, D. S. MOGILEVTSEV, A. S. MALOSHTAN, S. Ya. KILIN

maloshtan@tut.by

CLASSICAL BEAM-SPLITTER FOR SINGLE PHOTONS AND CONTROL OF SPONTANEOUS EMISSION BY ENTANGLEMENT

Summary

We demonstrate how the system of two-level emitters coupled to the same dissipative reservoirs can function as a "classical" beam-splitter when operating with single photons. The suggested "classical beam-splitting device" might be useful for devising controlled single-photon emitting devices.

УДК 539.122.2;539.124;548.732.2

С. Н. СЫТОВА

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ УСЛОВИЙ НА ХАОС В ОБЪЕМНЫХ ЛАЗЕРАХ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ

(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)

Институт ядерных проблем
Белорусского государственного университета, Минск

Поступило 30.12.2013

За полвека бурного развития вакуумной электроники в мире создано и успешно функционирует в научных и прикладных целях большое количество вакуумных электронных приборов, таких как лампы бегущей волны (ЛБВ), лампы обратной волны (ЛОВ), лазеры на свободных электронах (ЛСЭ), оротроны, многоволновые черенковские генераторы и др. [1–4]. Основа их работы состоит в излучении электронов, сгруппированных в сгустки и взаимодействующих в резонаторе либо ондуляторе с замедленными электромагнитными волнами. Эти усилители и генераторы используют различные механизмы спонтанного излучения (дифракционное излучение, излучение Смита–Парселла, черенковское излучение и т. д.) и обладают рядом достоинств [3], в частности, хорошим к. п. д., а также возможностью генерировать мощное излучение в узком спектральном диапазоне. Среди проблемных сторон их функционирования можно назвать угрозы пробоя волноводов на больших мощностях и сложность создания сверхразмерных систем.

В одном ряду с этими приборами стоят объемные лазеры на свободных электронах (ОЛСЭ), работающие на излучении релятивистских электронов, движущихся в двумерных (трехмерных) пространственно-периодических средах (резонаторах, естественных или искусственных электромагнитных (фотонных) кристаллах) в синхронизме с одной или несколькими электромагнитными волнами, для которых выполняются условия дифракции Брэгга в резонаторе вблизи области вырождения корней дисперсионного уравнения. Принципы функционирования ОЛСЭ, разработанные в [5–6], справедливы для всех частотных диапазонов и различных механизмов спонтанного излучения [7–9].

Главная особенность ОЛСЭ – необходимость одновременного выполнения условий синхронизма и дифракции. Это ведет к принципиально новой закономерности для инкремента излучательной неустойчивости пучка, проходящего через двумерные (трехмерные) резонаторы или фотонные кристаллы, а также к резкому снижению пороговых условий генерации [5; 6; 9]. Ни в одном из известных электронных приборов кроме ОЛСЭ не используется работа генератора в условиях, когда для электромагнитных волн выполняются условия дифракции Брэгга в резонаторе вблизи области вырождения корней дисперсионного уравнения. Другая особенность – наличие объемной распределенной обратной связи (ОРОС), означающей, что в результате динамической дифракции в области генерации формируются две (или более) сильно связанные электромагнитные волны, причем волновые векторы проходящих и дифрагированных волн, а также вектор скорости электронов пучка расположены под углами друг к другу. В результате при определенных условиях образуются электромагнитные волны, взаимодействующие с электронным пучком очень эффективно, поскольку в таких условиях их групповая скорость резко уменьшается, а излучение за счет непрерывного переотражения на периодических плоскостях резонатора задерживается в области взаимодействия электронного пучка с волной.

В 2001 г. была впервые получена генерация индуцированного СВЧ излучения ОЛСЭ в миллиметровом диапазоне [10]. В качестве резонатора в ОЛСЭ могут использоваться естественные

кристаллы (в рентгеновском диапазоне [7]) либо искусственные неоднородные пространственно-периодические структуры с периодом, пропорциональным длине волны излучения, называемые в настоящее время фотонными кристаллами [9]. В СВЧ диапазоне в экспериментальных установках ОЛСЭ в настоящее время используются сеточные или фольговые резонаторы [11], обладающие всеми необходимыми свойствами фотонных кристаллов.

Еще одно преимущество ОЛСЭ – возможность использования сверхразмерных пучков заряженных частиц, когда поперечное сечение пучка много больше длины волны. Благодаря этому и ОРОС электроны пучка более эффективно отдают свою энергию электромагнитному полю. Большие поперечные размеры электронного пучка позволяют распределить его мощность и мощность генерируемой волны по большему объему, снижая локальную нагрузку на отдельные элементы системы. Генерация большого количества нежелательных мод, ведущая к деструктивной интерференции и некогерентности излучения, подавляется ОРОС, которая позволяет выделить требуемые моды и подавить нежелательные.

Это свойство ОЛСЭ, а также пороговые условия генерации и практически все остальные его важные свойства были промоделированы и продемонстрированы численно [12–15] для частотных диапазонов от СВЧ до рентгеновского и самых различных типов и геометрий ОЛСЭ, включая двухволновые геометрии Брэгга и Лауэ, режим SASE (стимулированное усиление спонтанного излучения), различные трехволновые геометрии. Было исследовано влияние внешних зеркал, установленных в системе. Работа вышеперечисленных типов ОЛСЭ рассматривалась в режимах усиления и генерации. Было показано, что существует оптимальный набор параметров для эффективной генерации излучения в каждом из рассмотренных случаев, и этот набор параметров не относится к одномерной геометрии.

В [12–15] было впервые продемонстрировано, что при прохождении пучков заряженных частиц через двумерные (трехмерные) пространственно-периодические среды генерируемое квазичеренковское параметрическое излучение является хаотическим, т. е. ОЛСЭ – динамическая хаотическая система, характеризующаяся различными режимами работы, такими, например, как стационарная генерация, периодичность и автомодуляция, квазипериодичность и «слабый» хаос, а также перемежаемость, перемежаемость перемежаемости и др. Была показана реализация практически всех известных сценариев перехода к хаосу в таких системах. Было исследовано влияние изменения управляющих параметров в широком диапазоне, ведущее через бифуркации к смене режимов работы ОЛСЭ, когда стационарная генерация переходит в периодические колебания, которые последовательно усложняются вплоть до стохастических со сплошным спектром. Причем хаотические состояния могут опять переходить в различные периодические и квазипериодические. Продемонстрирован переход с ростом тока от стадии стационарного нелинейного насыщения к колебательной динамике с последовательным удвоением периода и далее к хаотическому поведению. Показано, что увеличение плотности тока пучка не приводит к хаосу автоматически, а имеются многочисленные окна периодичности и квазипериодичности. Исследование хаоса в неоднородных пространственно-периодических резонаторах выявило существенно более богатую структуру хаоса по сравнению с хаосом в одномерных периодических структурах. Выполненные исследования проиллюстрированы построенными фазовыми портретами, аттракторами, сечениями Пуанкаре, бифуркационными диаграммами, энергетическими спектрами и разнообразными параметрическими картами перехода к хаосу [13–15].

Как было показано [3], хаос в электронных приборах типа ЛОВ, ЛБВ и других обусловлен запаздывающим характером внутренней обратной связи. Источником хаоса в ОЛСЭ [13–15] является сложная природа взаимодействия пучка электронов с электромагнитным полем в условиях объемной распределенной обратной связи, реализующейся в резонаторе при выполнении условий динамической дифракции, что приводит к неоднородному распределению интенсивности электромагнитного поля и в свою очередь ведет к значительным возмущениям в движении электронов и соответственно к многообразию динамики генерации в ОЛСЭ.

Проведенное моделирование показало совпадение численных результатов с теоретическими расчетами, справедливыми на линейной стадии развития неустойчивости, и теоретическими оценками перехода к хаосу через бифуркации. Поскольку в системе имеется свыше десяти управ-

ляющих параметров, то проблема полной параметризации хаотических режимов ОЛСЭ выглядит достаточно сложной. Данная работа посвящена дальнейшему исследованию хаотической динамики ОЛСЭ.

Моделирование ОЛСЭ. Рассмотрим теоретическую модель ОЛСЭ, лежащую в основе его моделирования (рис. 1). Электронный пучок со скоростью u пролетает через полубесконечную пространственно-периодическую мишень (резонатор, фотонный кристалл) толщиной L . Электроны пучка начинают испускать спонтанное излучение, которое при одновременном выполнении условий дифракции

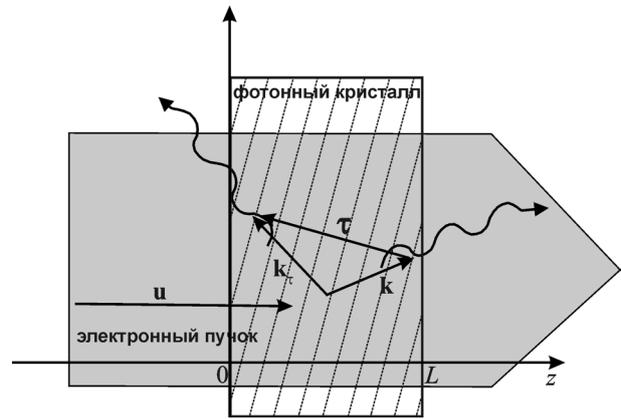


Рис. 1. Схема двухволнового ОЛСЭ в геометрии Брэгга

и условий синхронизма преобразуется в коллективное квазичеренковское излучение с частотой ω и волновыми векторами \mathbf{k} и $\mathbf{k}_c = \mathbf{k} + \boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ – вектор обратной решетки мишени.

Система уравнений получается из уравнений Максвелла в приближении медленно меняющихся амплитуд. Подробно вывод и различные варианты системы приведены в [12–15]. Электронный пучок моделируется усреднением по фазам влета релятивистских электронов в область взаимодействия. Этот метод хорошо известен и широко применяется для расчета различных типов ЛОВ, ЛБВ, ЛСЭ и других вакуумных электронных приборов [3], но там усреднение проводится только по моменту влета пучка в зону взаимодействия. Как было показано в [12], этот метод также хорошо работает при моделировании динамики пучка в ОЛСЭ. Более того, поскольку выражение для тока пучка получено усреднением по двум фазам – не только по моменту влета пучка в зону взаимодействия, но и по поперечной координате влета, и имеет, соответственно, более сложный вид, чем обычно используемый в литературе, это позволило учесть тонкие эффекты, связанные со взаимодействием «сверхразмерного» пучка и электромагнитного поля в условиях ОРОС.

Итак, система, моделирующая двухволновой ОЛСЭ, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \gamma_0 c \frac{\partial E}{\partial z} + 0,5i\omega l E - 0,5i\omega \chi_{\tau} E_{\tau} &= j\Phi \int_0^{2\pi} \frac{2\pi-p}{4\pi} (e^{-i\theta(t,z,p)} + e^{-i\theta(t,z,-p)}) dp, \\ \frac{\partial E_{\tau}}{\partial t} + \gamma_1 c \frac{\partial E_{\tau}}{\partial z} + 0,5i\omega \chi_{-\tau} E - 0,5i\omega l_1 E_{\tau} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \theta(t,z,p)}{\partial z^2} &= \frac{e\Phi}{m\gamma^3 \omega^2} \left(k_{0z} - \frac{\partial \theta(t,z,p)}{\partial z} \right)^3 \operatorname{Re}(E e^{i\theta(t,z,p)}), \\ \frac{\partial \theta(t,0,p)}{\partial z} &= k_{0z} - \omega/u, \quad \theta(t,0,p) = p, \quad E(0,t) = E_0(t), \quad E_{\tau}(L,t) = E_1(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $t > 0$; $z \in [0, L]$, $p \in [-2\pi, 2\pi]$; $E(z, t)$ и $E_{\tau}(z, t)$ – амплитуды проходящей и дифрагированной волн; $\theta(t, z, p)$ – фаза электронов относительно электромагнитной волны; $\gamma_{0,1}$ – направляющие косинусы ОРОС; $\Phi = \sqrt{l_0 + \chi_0 - 1/(u/c\gamma)^2}$; γ – Лоренц-фактор пучка; $l_0 = (k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_0) / \omega^2$, $l = l_0 + \delta$, $l_1 = (k_{\tau}^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_0) / \omega^2$ – системные параметры; δ – отклонение от точного выполнения условия синхронизма; $\varepsilon_0 = 1 + \chi_0$ – диэлектрическая проницаемость среды; $\chi_{\pm\tau}$ – коэффициенты разложения диэлектрической проницаемости среды в ряд по векторам обратной решетки.

$E_0(t)$ и $E_1(t)$ определяют граничные условия для волн $E(z, t)$ и $E_{\tau}(z, t)$ и представляют собой внешние падающие на резонатор волны. Они обе могут быть равны 0 и тогда при превышении пороговых условий система работает в режиме генерации, либо являются постоянными по амплитуде, либо изменяются во времени.

Следует отметить, что фактически одномерная по пространственной координате система (1) позволяет успешно моделировать прохождение электронного пучка через двумерные (трехмерные) пространственно-периодические структуры благодаря учету всех поперечных ком-

понент волновых векторов, а также усреднению тока пучка по поперечной координате влета в систему.

Разностные методы решения (1) были разработаны в [12] и реализованы в виде комплекса программ моделирования ОЛСЭ.

Влияние внешних электромагнитных волн на особенности хаоса в ОЛСЭ. В данном сообщении рассмотрим влияние граничных условий, а именно внешней падающей волны $E_0(t)$ на тип решения системы (1) по сравнению со случаем $E_0 \equiv 0$. Параметры системы соответствуют параметрам ОЛСЭ с сеточным резонатором [11].

Были рассмотрены самые различные виды волны $E_0(t)$. Здесь приведем следующие наиболее яркие и интересные на наш взгляд случаи: $E_0(t) = 50 + 10 \sin(t/4)$ (рис. 2, а, кривая 2); $E_0(t) = 100 + 20 \sin(3t) + 20a$, где a – случайное число в интервале $[0, 1]$, генерируемое в каждый момент времени (рис. 2, а, кривая 3) и $E_0(t) = 100$ (рис. 2, а, кривая 4). Результаты моделирования для проходящей волны на выходе из резонатора при $z = L$ приведены на рис. 2, б, рис. 3, 4. Кривая 1 демонстрирует поведение решения для входного параметра $E_0 = 0$. Номера других помеченных кривых соответствуют номерам кривых на рис. 2, а.

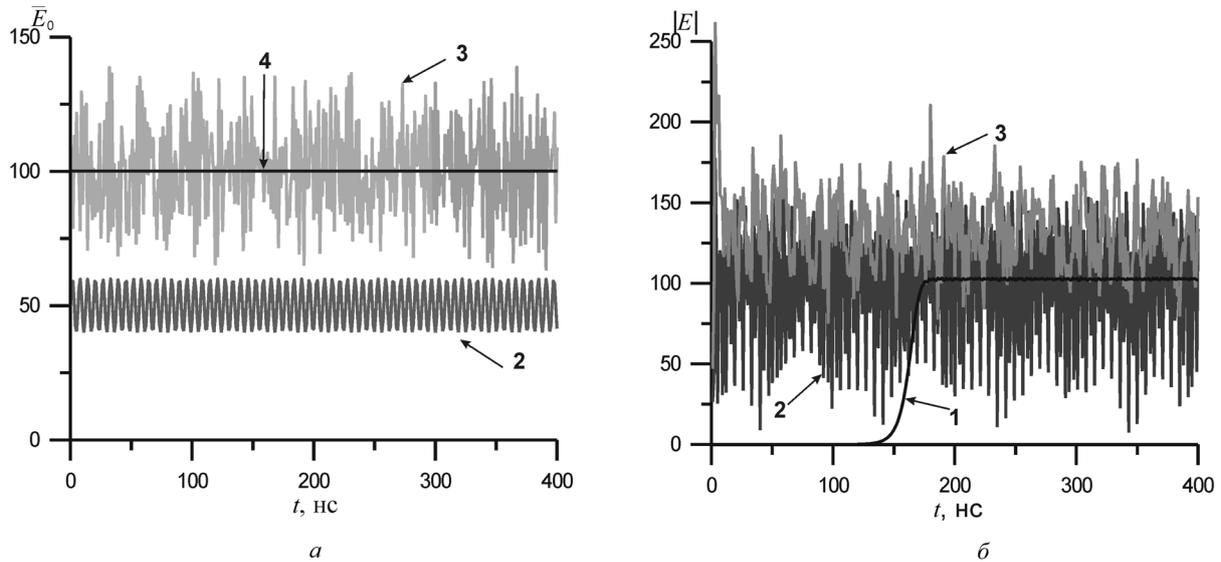


Рис. 2. Временная зависимость (а) внешней падающей на систему волны и (б) проходящей волны на выходе из резонатора при $z = L$ для $\tau_x = 1,5$ для различных граничных условий

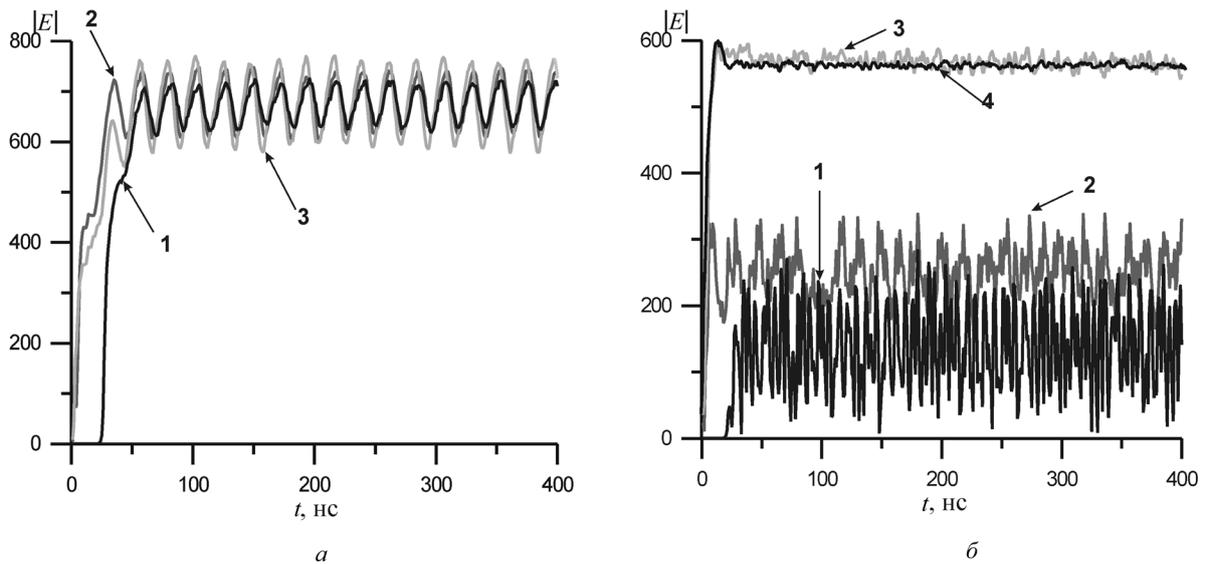


Рис. 3. Временная зависимость проходящей волны на выходе из резонатора для различных граничных условий при $\tau_x = 1,0$ (а) и $\tau_x = 1,1$ (б)

На рис. 2–4 приведены четыре решения при изменении геометрии динамической дифракции для различных τ_x от 1,0 до 1,5.

На рис. 2, б продемонстрирован случай работы генератора вблизи пороговых условий (кривая 1), когда установление одночастотного режима генерации с небольшими периодическими колебаниями происходит спустя 150 нс. В случае падения на систему внешней волны (кривые 2 и 3) этот режим переходит в режим высокоамплитудных колебаний (почти периодических для кривой 2 и хаотических для кривой 3). Последнее неудивительно, поскольку внешняя волна 3 находится в режиме «сильного» или «развитого» хаоса, когда его энергетический спектр представляет собой сплошной «частокол» частот.

На рис. 3, а видно, что если кривая 1 в режиме генерации дает достаточно большую амплитуду по сравнению с величиной амплитуды падающей волны, то почти периодический тип решения при $E_0 = 0$ (синусоидальная кривая с небольшим шумом, точнее это так называемый слабый хаос, когда зависимость амплитуды от времени выглядит как приблизительное повторение однотипных пиков близких размеров за приблизительно равные промежутки времени) практически не меняется (ср. кривую 1 с кривыми 2 и 3), небольшое различие наблюдается только в величинах амплитуд.

Теперь рассмотрим сильно нерегулярный хаотический высокоамплитудный режим генерации (хаотическая перемежаемость, рис. 3, б, кривая 1). Здесь при падении внешней периодической волны с амплитудой порядка 50 (кривая 2) наблюдается некоторое увеличение амплитуды без изменения хаотического типа решения. А внешние волны 3 и 4 с амплитудами порядка 100 приводят к увеличению решения по сравнению с режимом генерации в 3 раза. Причем видно, что вместо высокоамплитудного получаются низкоамплитудные режимы. Кривая 1 представляет собой случайные переключения между несколькими аттракторами, отвечающими разным модам в системе. По всей видимости, внешний сигнал (рис. 2, а, кривые 3 и 4) возбуждает сильнее одну из таких мод и решение кардинально меняет свой вид.

Кроме того, наблюдается подавление хаотической составляющей, вносимой генератором случайных чисел (рис. 2, а, кривая 3), т. е. кривая 3 (рис. 3, б) без такого подавления должна была бы быть существенно более «лохматой». Это и есть проявление одного из основных свойств ОЛСЭ – подавления паразитных мод в системе. Еще более яркая демонстрация данного свойства ОЛСЭ приводится на рис. 4 (см. подробнее рисунок-сноску справа), а также на рис. 3, а (кривая 3).

Кстати, на рис. 4 внешние волны, существенно превышающие по амплитуде волну, генерируемую в их отсутствие (кривая 1), по отношению к величине падающей амплитуды дают усиление на выходе из резонатора более чем в 4 раза (кривые 2–4).

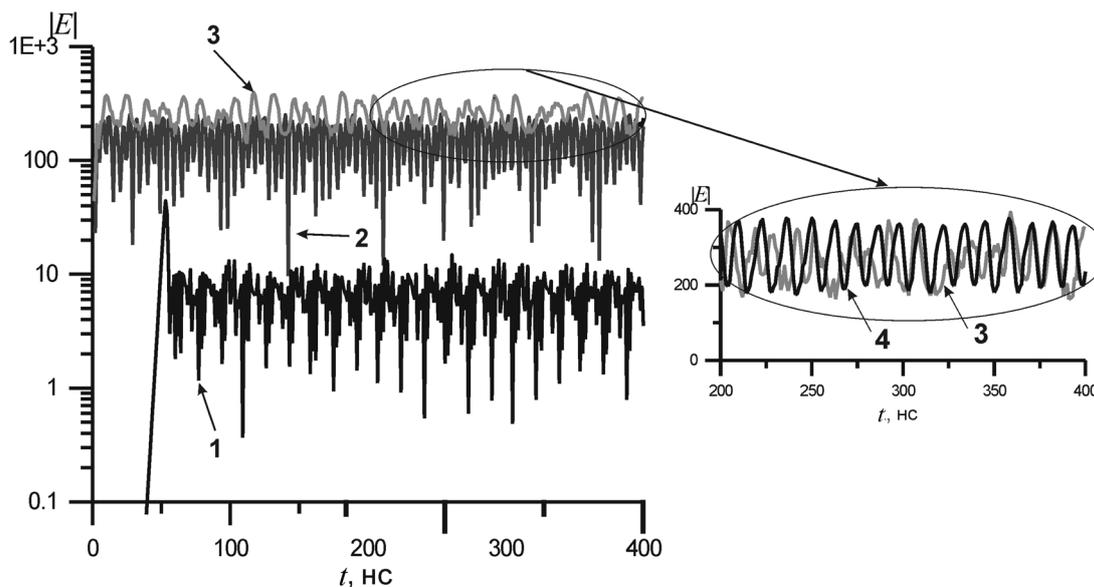


Рис. 4. Временная зависимость проходящей волны на выходе из резонатора для различных граничных условий при $\tau_x = 1,3$

Проведенное моделирование демонстрирует возможность получения значительного усиления в случае использования многосекционного ОЛСЭ, в котором волны из предыдущей секции поступают в последующую в качестве внешних падающих волн. Понятно, что для получения значительного выигрыша по величине получаемых амплитуд электромагнитных волн в системе должна быть проведена оптимизация параметров секций.

Заключение. Известно [3], что воздействие внешнего сигнала на автоколебательную хаотическую систему может приводить к принципиально разным решениям в зависимости от характера этого сигнала. Как было показано выше, это явление имеет место и в ОЛСЭ.

Целью данного моделирования была демонстрация возможности получения значительного усиления в случае использования многосекционного ОЛСЭ. Причем аккуратным выбором геометрии дифракции данный процесс можно оптимизировать, включая получение на выходе последней секции волны с принципиально другим типом решения, чем в случае односекционного ОЛСЭ.

Исследование хаоса в ОЛСЭ представляет собой сложную задачу, связанную с наличием большого числа управляющих параметров в системе и большим числом степеней свободы. Проведенное исследование хаотической динамики ОЛСЭ и аналогичные ему важны для определения возможного режима осцилляций при проведении экспериментальных исследований, а также при необходимости устранить автомодуляцию как паразитный эффект либо выбрать область с периодической автомодуляцией вместо хаотической. На основании проведенного анализа можно сделать вывод о возможности численно моделировать работу ОЛСЭ в будущих экспериментах.

Литература

1. Benford J., Swegle J. A., Schamiloglu E. High power microwaves, second edition. New York; London, 2007.
2. Маршалл Т. Лазеры на свободных электронах. М., 1987.
3. Трубецков Д. И., Храмов А. Е. Лекции по СВЧ электронике для физиков: В 2 т. М., 2003–2004.
4. Бугаев С. П., Канавец В. И., Кошелев В. И., Черепенин В. А. Релятивистские многоволновые СВЧ генераторы. Новосибирск, 1991.
5. Baryshevsky V. G., Feranchuk I. D. // Physics Let. A. 1984. Vol. 102. P. 141–144.
6. Барышевский В. Г. // ДАН СССР. 1988. Т. 299. С. 1363–1366.
7. Baryshevsky V. G., Batrakov K. G., Dubovskaya I. Ya. // J. Phys. D. 1991. Vol. 24. P. 1250–1257.
8. Baryshevsky V. G., Gurinovich A. A. // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. 2006. Vol. B252. P. 92–101.
9. Baryshevsky V. G. // <http://xxx.lanl.gov/abs/1211.4769>. 20 Nov 2012. 35 p.
10. Baryshevsky V. G., Batrakov K. G. et al. // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. 2002. Vol. A483. P. 21–24.
11. Baryshevsky V. G., Belous N. A., Gurinovich A. A. et al. // Proc. 32 Int. Conf. FEL2010. THPB18. P. 632–635.
12. Батраков К. Г., Сытова С. Н. // ЖВМ и МФ. 2005. Т. 45, № 4. С. 690–700.
13. Sytova S. N. // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2007. Vol. 10, N 3. P. 297–302.
14. Сытова С. Н. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика 2011. Т. 19, № 2. С. 93–111.
15. Сытова С. Н. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 6. С. 124–135.

S. N. SYTOVA

sytova@inp.bsu.by

EFFECT OF EXTERNAL CONDITIONS ON THE CHAOS IN VOLUME FREE ELECTRON LASERS

Summary

The study of chaotic dynamics in the volume free electron laser (VFEL) under the influence of external incident on the VFEL grid resonator electromagnetic waves is proposed. The possibility of changes in the type and magnitude of the amplitude of the dynamic solutions, as well as the suppression of spurious modes in VFEL is demonstrated.

ХИМИЯ

УДК 577.152.1:547.681

А. Г. СЫСА¹, О. В. ПАНИБРАТ¹, А. С. БАБЕНКО², П. С. ШАБУНЯ¹,
С. А. ФАТЫХОВА¹, П. А. КИСЕЛЕВ¹

**КОМПЛЕКСНЫЙ ХАРАКТЕР ВЛИЯНИЯ ПОЛИЦИКЛИЧЕСКИХ АРОМАТИЧЕСКИХ
УГЛЕВОДОРОДОВ НА МЕТАБОЛИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ КАК ВАЖНЫЙ ФАКТОР,
ОПРЕДЕЛЯЮЩИЙ ОСОБЕННОСТИ ИХ КАНЦЕРОГЕННОЙ АКТИВАЦИИ**

(Представлено членом-корреспондентом С. А. Усановым)

¹Институт биоорганической химии НАН Беларуси, Минск

²РНПЦ онкологии и медицинской радиологии им. Александра
Министерства здравоохранения Республики Беларусь, Минск

Поступило 18.11.2013

Введение. Полициклические ароматические углеводороды (ПАУ) относятся к наиболее опасным экотоксикантам. В частности, им присущи канцерогенные свойства. Однако для проявления своего биологического эффекта ПАУ нуждаются в метаболической активации [1–4]. Активация реализуется тремя основными путями [5]. Два из них обусловлены пероксидазной и монооксигеназной активностью изоэнзимов цитохрома Р-450 (СУР). В третьем случае основная роль принадлежит семейству альдо-кето редуктаз. Вместе с тем мало что известно о конкретном вкладе каждого из путей в инициирование и развитие канцерогенных процессов в отдельных органах и тканях. Более того, так как полициклические ароматические углеводороды поступают в организм в виде широкого набора соединений, часть из которых не только подвергается метаболической трансформации, но и вызывает усиление экспрессии генов тех СУР, которые их окисляют (эффект субстратной индукции), актуальным является вопрос о роли комплексного воздействия ПАУ в реализации того или иного молекулярного механизма химически обусловленного канцерогенеза [3; 6; 7]. Действительно, выявлена органо- и видоспецифичность различных изоформ фермента, что в свою очередь во многом определяет органо- и видоспецифичность действия как канцерогенов, так и токсических соединений, подвергающихся метаболической активации [3; 7].

Цель работы – оценка роли веществ, сопутствующих проканцерогенному субстрату, в процессе активации последнего. В качестве субстрата выбран 7,8-дигидрокси-7,8-дигидробензо(а)-пирен (Б(а)П-7,8-диол), эпоксидирование которого приводит к «полному» канцерогену — г-7,т-8-дигидрокси-г-9,10-эпокси-7,8,9,10-тетрагидро-бензо(а)пирену (ДЭ2) [8]. Примером сопутствующего вещества стал 20-метилхолантрен (20-МХ), который наряду с производными бензо(а)пирена (Б(а)П), является компонентом табачного дыма.

Работа проводилась на модели опухолевой клеточной линии А549 (клеточная линия карциномы легких человека), что обусловлено двумя обстоятельствами: во-первых, значительная часть загрязнителей окружающей среды поступает в организм через легкие и претерпевает окислительную трансформацию непосредственно в этом органе; во-вторых, по морфологии и функциональным свойствам, в т. ч. синтезу сурфактантов, окислительному метаболизму, транспортным свойствам, клеточная линия А549, близка к легочным эпителиальным клеткам II типа [9].

Материалы и методы исследования. В работе монослойную клеточную культуру А549 культивировали в среде RPMI-1640 (Sigma, США) содержащей 10 % эмбриональной сыворотки крупного рогатого скота (КРС) (HyClone, США), 4 мМ L-глутамина, 100 ед/мл пенициллина

и 100 мкг/мл стрептомицина, при 37 °С во влажной атмосфере с 5 % CO₂. Клеточная культура поддерживалась на стадии логарифмического роста путем рутинной пересадки трижды в неделю. Контроль адгезии клеток на подложке, роста и возможной контаминации производили визуально с помощью инвентированного микроскопа АУ-12 (ЛЮМО, Россия).

Для индукции использовали раствор 20-МХ в диметилсульфоксиде (концентрация маточного раствора 20-МХ 3,0 мМ). При 70–80 %-ной конfluентности образца питательную среду во флаконе меняли на свежую, не содержащую сыворотки КРС, затем во флакон добавляли сыворотку КРС с предварительно растворенным в ней 20-МХ (конечная концентрация индуктора составляла 30,0 мкМ, объем растворителя не превышал 0,1 %). Экспонирование длилось 24 ч.

Общую фракцию РНК выделяли с использованием набора реагентов «РНК-ВТК» (Институт биоорганической химии НАН Беларуси) согласно протоколу производителя. Концентрацию РНК после выделения измеряли с помощью спектрофотометра NanoDrop 2000 (Thermo, США). Во всех образцах соотношение 260/280 находилось в диапазоне 1,9–2,1, соотношение 260/230 в диапазоне 1,7–2,8, соотношение 260/320 во всех случаях превышало 4. Целостность полученной РНК оценивали с помощью электрофореза в агарозном геле без использования денатурирующих условий.

Обратную транскрипцию проводили с помощью набора реагентов «РЕВЕРТА» (Амплиценс, Россия) согласно протоколу производителя. Специфические олигонуклеотидные праймеры и флуоресцентно меченые TaqMan зонды для амплификации *CYP11B1*, *CYP11A1*, *CYP11A2* и *GAPDH* были сконструированы с помощью программного обеспечения ABI Primer Express (version 3.0), а затем синтезированы и методом ВЭЖХ очищены ОДО «Праймтех» (Беларусь). В качестве положительного контроля ПЦР использовали плазмидную ДНК, содержащую последовательность кДНК исследуемых генов в векторе рХсм21. Калибраторы получали разведением плазмидной ДНК со вставкой. Конструкции были созданы на базе Института биоорганической химии НАН Беларуси.

Для проведения ПЦР в режиме реального времени использовали амплификатор Applied Biosystems 7500 (США). Реакция протекала в инкубационной среде объемом 25 мкл, содержащей примерно 50 нг кДНК-матрицы, 0,5 мкМ каждого олигонуклеотидного праймера для амплификации, 0,5 мкМ флуоресцентно меченного зонда, 0,2 мМ каждого dNTP, 50 мМ KCl, 25 мМ Трис-HCl, 2 мМ MgCl₂ и 1,25 МЕ Taq ДНК-полимеразы (Институт биоорганической химии НАН Беларуси). ПЦР состояла из первичной денатурации ДНК при +95 °С в течение 5 мин и 45 циклов амплификации, проводимых при следующих условиях: денатурация при +95 °С в течение 10 с, отжиг праймеров и синтез ДНК при +60 °С в течение 60 с. Измерение флуоресценции образца проводилось в конце каждого цикла амплификации. Полученные количественные данные обрабатывали с помощью программного обеспечения Applied Biosystems, поставляемого с прибором. Специфичность амплификации целевых участков генов подтверждали с помощью секвенирования с использованием прямого и обратного праймеров. Секвенирование проводили с помощью прибора ABI 3130 (Applied Biosystems, США). Для определения эффективности реакций для каждой мишени использовали метод стандартных кривых [10].

Ферментативную реакцию окисления Б(а)П-7,8-диола проводили в культуральном флаконе (2,0 млн клеток) в 2 мл питательной смеси, содержащей субстрат, начальная концентрация которого составляла 10,0 мкМ (объем растворителя – ДМСО не превышал 0,1 %). Реакцию начинали добавлением 1,0 мМ НАДФН и проводили в течение 2 ч. Далее питательную смесь отбирали, вносили 5 мл этилацетата и экстрагировали смесь в течение 1 мин с использованием встряхивателя Micro-Shaker-326m (Польша). Органическую фазу отбирали. Экстракцию проводили трижды, затем этилацетат удаляли. Продукты экстракции растворяли в 500 мкл метанола.

Хроматографический анализ проводился на жидкостном хроматографе Agilent 1200 с флуоресцентным детектором FLD G1321A. Была использована колонка Zorbax Eclipse plus C18 длиной 100 мм, диаметром 3,0 мм, размер зерна – 1,8 мкм. Разделение компонентов проб проводили при следующих условиях: температура колонки +40 °С; скорость потока 0,4 мл/мин; объем инъекции 2 мкл; детектирование при длинах волн возбуждения 344 нм и испускания 398 нм; подвижная фаза А – деионизованная вода; подвижная фаза В – метанол. Был использован градиентный режим элюирования с изменением состава подвижной фазы от 40 до 47,3 % фазы В за 14 мин,

затем до 60 % фазы В за 1 мин и изократической элюцией при 60 % фазы В следующие 15 мин. Общее время анализа составляло 30 мин.

Определение концентрации продуктов реакции осуществляли на базе калибровки, построенной по стандартным образцам тетрагидроксипроизводных бензо(а)пирена (Б(а)П-тетрол). Содержание г-7,т-8-дигидрокси-с-9,10-эпокси-7,8,9,10-тетрагидро-бенз(а)пирена (ДЭ1) рассчитывали как сумму концентраций г-7,т-8-с-9,с-10-тетрагидрокси-7,8,9,10-тетрагидробенз(а)пирена и г-7,т-8-с-9, т-10-тетрагидрокси-7,8,9,10-тетрагидробенз(а)пирена. Для г-7,т-8-дигидрокси-т-9,10-эпокси-7,8,9,10-тетрагидро-бенз(а)пирена характеристичными тетролами были г-7,т-8,т-9,с-10-тетрагидрокси-7,8,9,10-тетрагидробенз(а)пирен и г-7,т-8,т-9,т-10-тетрагидрокси-7,8,9,10-тетрагидробенз(а)пирен.

Результаты и их обсуждение. Основные загрязнители окружающей среды, в том числе полициклические ароматические углеводороды, типичным представителем которых является бенз(а)пирен, окисляются изоформами CYP1A1 и CYP1B1. Эти ферменты индуцибельны, и их уровень увеличивается при введении субстратов окисления, таких как ПАУ, хлорированные диоксины и др. К классическим индукторам монооксигеназ относится 20-MX, который вводился в клеточную культуру в настоящей работе. Его присутствие не мешает проведению анализа 7,8-дигидрокси-7,8-дигидробензо(а)пирена и продуктов его дальнейшего окисления в раковой клеточной линии A549, с одной стороны, и хорошо моделирует индукцию, вызываемую ПАУ, с другой. На первом этапе работы было проанализировано 40 образцов кДНК, полученных из раковой клеточной линии A549. С каждым образцом была проведена постановка ПЦР в режиме реального времени в дублях. В качестве генов-мишеней использовали CYP1B1, CYP1A1 и CYP1A2. Нормализация данных проведена по целевому гену – CYP1A2, а ее результаты представлены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1. Результаты оценки уровня экспрессии целевых генов

Ген	Интактные клетки	Индукция 20-MX
<i>GAPDH</i>	1,0	1,83
<i>CYP1B1</i>	1,0	1,05
<i>CYP1A1</i>	1,0	1,52

Как видно из данных табл. 1, 20-MX приводит к некоторому повышению уровня экспрессии в клетках генов изоэнзимов цитохрома P450, играющих важную роль в биоактивации ПАУ. Полученные нами данные хорошо согласуются с результатами работ [8; 11; 12], где также в клеточной линии A549 зарегистрировано небольшое, но все же достоверное увеличение уровня экспрессии генов CYP1A1 и CYP1B1.

Следующим этапом нашей работы стала оценка монооксигеназной составляющей в трансформации ключевого соединения в процессе канцерогенной активации бензо(а)пирена – Б[а]П-7,8-диола в стандартно культивируемой опухолевой клеточной культуре и при ее экспонировании действием 20-MX. Для этого определено количество израсходованного субстрата и содержание обоих продуктов его монооксигеназного окисления – ДЭ2 и ДЭ1. Полученные данные представлены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2. Оценка количества израсходованного Б[а]П-7,8-диола и продуктов его монооксигеназного окисления, нмоль

Наименование	Стандартные условия культивирования	Экспонирование 20-MX
Б[а]П-7,8-диол	8,62	11,93
ДЭ1	0,18	0,32
ДЭ2	0,83	2,58

Как видно из табл. 2, использование индуктора приводит к увеличению каталитической активности исследуемой системы. Причем действие индуктора, в первую очередь, проявляется в отношении каталитической активности CYP в клетках A549. Так, практически трехкратное увеличение содержания ДЭ1 и ДЭ2 наблюдается на фоне лишь полуторакратного повышения уровня экспрессии гена CYP1A1.

Вклад монооксигеназного процесса в биотрансформацию Б(а)П-7,8-диола в условиях нашего эксперимента в стандартно культивируемой клеточной культуре A549 составляет лишь 13 %, что в принципе согласуется с относительно низким уровнем конститутивной экспрессии CYP1A1 и CYP1B1 и высокой активностью изоэнзимов AKR1C1–AKR1C3 семейства альдо-кето редуктаз [5]. Картина существенно меняется при экспонировании клеток действием 20-МХ. Из данных табл. 2 видно, что в этом случае монооксигеназная составляющая в канцерогенной активации 7,8-Б[а]П-диола достигает уже 25 %. Обращает на себя внимание, что эпоксирирование Б[а]П-7,8-диола приводит к преимущественному образованию ДЭ2, содержание которого практически в 5 раз превышает таковое ДЭ1 в отсутствие 20-МХ и более чем в 8 раз в его присутствии. Напомним, что именно диолэпоксид-2 относят к так называемым полным канцерогенам, способным участвовать как в стадии инициации, так и промоции опухолевого процесса, а 20-МХ является полициклическим ароматическим соединением и наряду с бензо(а)пиреном входит в состав табачного дыма [8].

Считается, что в органах и тканях с высоким уровнем конститутивной экспрессии семейства альдо-кето редуктаз именно последним может принадлежать основная роль в метаболической активации полициклических ароматических углеводородов [5]. Полученные нами данные указывают на необходимость учета комплексного характера влияния полициклических ароматических углеводородов на метаболические процессы, поскольку попадание в организм не одного, а целого пула таких соединений может существенным образом влиять как на уровень, так и, возможно, на направление канцерогенной активации отдельных представителей ПАУ.

Литература

1. DeMontellano O., Paul R. // *Future Med. Chem.* 2013. Vol. 5(2). P. 213–228.
2. Пономаренко Т. М., Сычёв Д. А., Чикало А. О. и др. // *Фармакокинетика и Фармакодинамика.* 2012. № 1. С. 25–28.
3. Ляхович В. В., Цырлов И. Б. *Индукция ферментов метаболизма ксенобиотиков.* М., 1981. – 239 с.
4. Кобляков В. А. *Цитохромы семейства Р-450 и их роль в активации проканцерогенов.* М., 1990. – 190 с.
5. Zhang Li, Jin Yi, Huang M., Penning T. M. // *Pharmacol.* 2012. Vol. 3. P. 1–12.
6. DeMontellano O., Paul R. *Cytochrome P450: structure, mechanism, and biochemistry.* 3d ed. New York, 2005.
7. Handschin C., Meyer U. // *Pharmacol. Rev.* 2003. Vol. 55. P. 649–673.
8. Conney A. H. // *Cancer Res.* 1982. Vol. 42. P. 4875–4917.
9. Foster K. A. // *Exp. Cell. Res.* 1998. Vol. 243. P. 359–366.
10. Livak K. J., Schmittgen T. D. // *Methods.* 2001. Vol. 25, N 4. P. 402–408.
11. Hitoshi K., Katoh M., Suzuki T. et al. // *Drug. Metab. Dispos.* 2012. Vol. 40, N 3. P. 579–587.
12. Tsuchiya Y., Nakajima M., Itoh S. et al. // *Toxicol. Sci.* 2003. Vol. 72. P. 253–259.

A. G. SYSA, O. V. PANIBRAT, A. S. BABENKO, P. S. SHABUNYA, S. A. FATYKHOVA, P. A. KISELEV

aliaksei.sysa@gmail.com

COMPLEX NATURE OF THE INFLUENCE OF POLYCYCLIC AROMATIC HYDROCARBONS ON THE METABOLIC PROCESSES AS AN IMPORTANT DETERMINANT OF THEIR CARCINOGENIC ACTIVATION

Summary

In the article, the contribution of the monooxygenase component to the carcinogenic activation of a key procarcinogenic derivative of benzo(a)pyrene – 7,8-benzo(a)pyrenediol in lung adenocarcinoma cell line A549 was evaluated. It is shown that the contribution of the monooxygenase process under the experimental conditions in A549 cells is only 13%, which corresponds to a relatively low level of the constitutive expression of CYP1A1 and CYP1B1. The situation changes significantly when cells are exposed to 20-methylcholanthrene. In this case, the monooxygenase component in the carcinogenic activation of 7,8-benzo(a)pyrenediol has reached 25%. Moreover, 90% is accounted for a “complete” carcinogen – diolepoxide-2. As 20-methylcholanthrene is a polycyclic aromatic compound and exists with a benzo(a)pyrene in the tobacco smoke, this suggests that the entry into the body a whole pool of polycyclic aromatic hydrocarbons may significantly affect not only the level but also the direction of the carcinogenic PAH activation of individual compounds.

УДК 535.14;535.18

Х. А. АЛМОДАРРЕСИЕ¹, С. Н. ШАХАБ¹, Л. Н. ФИЛИППОВИЧ¹,
Н. Г. АРИКО¹, академик В. Е. АГАБЕКОВ²

ПОЛУЧЕНИЕ И ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ШИРОКОПОЛОСНЫХ ПОЛИВИНИЛСПИРТОВЫХ ПЛЕНОК, ОКРАШЕННЫХ СМЕСЬЮ ДИХРОИЧНЫХ КРАСИТЕЛЕЙ

¹Институт физико-органической химии НАН Беларуси, Минск

²Институт химии новых материалов НАН Беларуси, Минск

Поступило 10.06.2013

Поляризационные пленки на основе ПВС и дихроичных дисазокрасителей, находящие практическое применение в различных областях техники, поляризуют свет в видимой области (400–750 нм) электромагнитного спектра, где расположены основные полосы поглощения красителя с полисопряженными системами. Некоторые из них способны поляризовать излучение и в ближней УФ-области, например, пленки, содержащие коммерческие азокрасители – Конго Красный и Хризофенин [1], водорастворимые дихроичные дисазокрасители: Прямой оранжевый 39, Прямой красный 91, Прямой красный 28 и их металлсодержащие производные [2]. Однако в УФ-области поляризующая способность этих пленок гораздо ниже, чем в видимой области спектра. Для поляризации в области 350–385 нм разработаны пленки, полимерной основой которых являются полиэтилен, полиэтилентерефталат или полиамид-1,2, а дихроичным компонентом – специально синтезированные красители, содержащие хромофор азобензола, с абсорбционным максимумом при 365 нм [3]. Для их изготовления требуются красители с повышенной термостойкостью, поскольку формование пленки происходит из расплава полимера.

Для получения поляризационных пленок с расширенным спектральным диапазоном используют смеси красителей, поглощающих при различных длинах волн [4–7]. Авторы [4] для окрашивания ПВС-пленок использовали смесь азокрасителей Прямой голубой светопрочный К и Прямой коричневый светопрочный 2ЖХ, поляризующих в области 400–700 нм. Однако поляризующая способность полученных пленок зависела от длины волны и достигала максимальных значений ($\geq 90\%$) только в длинноволновой области спектра [5–7].

Цель работы – получение пленок на основе ПВС и смесей дихроичных красителей, обладающих поляризующей способностью в ближней УФ- и видимой областях спектра.

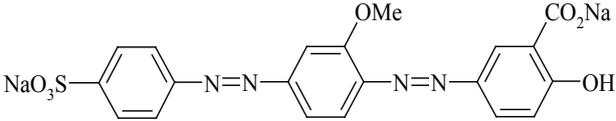
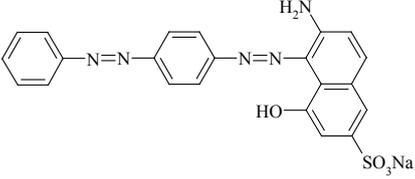
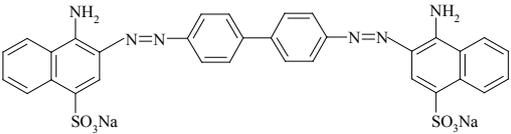
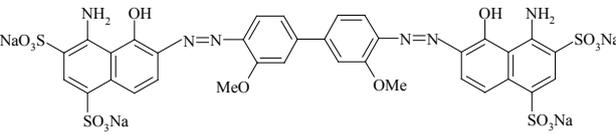
Экспериментальная часть. В работе использовали ПВС марки «Moviol 28–99» (производства ФРГ). Пленки, отлитые из его растворов, характеризуются высокой оптической прозрачностью и легко подвергаются механическому одноосному растяжению.

В качестве дихроичных компонентов применяли Конго Красный (КК) и Чикагский Синий 6В (ЧС) фирмы Merck без дополнительной очистки и синтезированные нами M_{12} и M_2 (табл. 1). Методика синтеза и спектральные характеристики M_2 описаны в [8].

Синтез дихроичного красителя M_{12} . 2-гидрокси-5-[[2-метокси-4-((4-сульфонатофенил)дiazе-нил)-фенил]-diazе-нил] бензоат натрия (M_{12}) получали из 4-(4-амино-3-метоксифенилазо)-бензолсульфокислоты, которую синтезировали диазотированием сульфаниловой кислоты с последующим азосочетанием с о-анизидином в среде муравьиной кислоты (рис. 1).

Приготовление исходной композиции. Пленки отливали из 10 %-ного водного раствора ПВС, содержащего 2,8 масс. % глицерина, 0,05 – борной кислоты, 5,5 – этилового спирта, 4,5 масс. % диметилформаида и дихроичный компонент (или их смесь). Растворителем служила трехком-

Т а б л и ц а 1. Д и х р о и ч н ы е к р а с и т е л и

Краситель ($\lambda_{\text{max, нм}}$)	Структура
M ₁₂ (340, 454)	 <p>натрий 2-гидрокси-5-((2-метокси-4((4-сульфофенил)дiazенил)фенил)дiazенил)бензоат</p>
M ₂ (360, 562)	 <p>натриевая соль 6-амино-4-гидрокси-5 [[4-(фенил)азо]фенил]азо]-2-нафталин-сульфокислоты</p>
КК (340, 528)	 <p>Конго Красный</p>
ЧС (328, 666)	 <p>Чикагский Синий 6В</p>

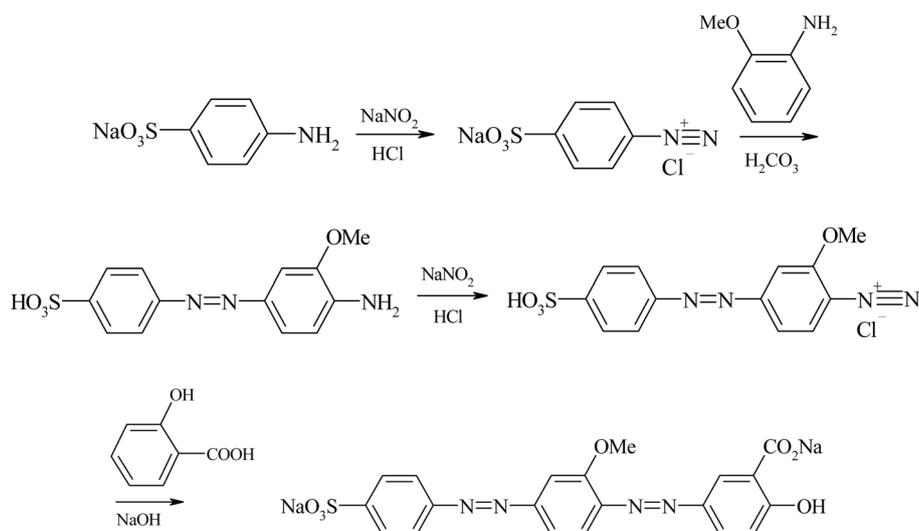


Рис. 1. Схема получения красителя M₁₂

понентная смесь «вода–этиловый спирт–диметилформамид (ДМФА)». Добавка этилового спирта способствовала повышению качества раствора, снижала гелеобразование ПВС, борная кислота обеспечивала требуемую вязкость композиции, необходимую для формирования пленок на поверхности твердых стеклянных подложек, ДМФА вводили для регулирования скорости высыхания пленки с целью предотвращения образования на ее поверхности разнообразных дефектов. Используя полимерный раствор указанного состава, получали ПВС-пленку толщиной 110–120 мкм, а после ее одноосного растяжения – до 50–60 мкм. Степень растяжения пленки (R_s) – соотношение длины пленки после растяжения к ее длине до этого.

Измерение спектральных характеристик пленок. Спектры поглощения и пропускания пленок в области 200–700 нм в поляризованном свете регистрировали на UV-NIR Spectrophotometer HR400 (Ocean optics, США).

Степень поляризации (СП) пленки рассчитывали по уравнению

$$\text{СП} = \{(T_{\perp} - T_{\parallel}) / (T_{\parallel} + T_{\perp})\} 100 \%,$$

где T_{\parallel} и T_{\perp} – экспериментально найденные значения пропускания света пленкой при параллельном и перпендикулярном расположении направления электрического вектора линейно-поляризованного света к оси ориентации пленки.

Поляризационная пленка с азокрасителем M_{12} . Характер влияния концентрации красителя на спектрально-поляризационные свойства пленок (табл. 2) свидетельствует о том, что количество M_{12} влияет как на светопропускание, так и на поляризующую способность пленки. По мере увеличения концентрации красителя СП пленки растет при исследованных длинах волн. Однако при этом снижается светопропускание пленок, что делает их непригодными для применения в качестве поляризаторов. Поэтому растворы ПВС с содержанием M_{12} свыше 0,03 масс. % не использовали.

Т а б л и ц а 2. Спектрально-поляризационные свойства пленок, содержащих краситель M_{12} , в зависимости от [С] в исходной композиции и R_s пленки

[С], масс. %	R_s	λ_{max} , нм	T_{\perp} , %	T_{\parallel} , %	СП, %
0,02	3	345–348	29,2	10,8	68
0,02	3	447–448	24,7	0,9	96
0,02	4	345–348	31,9	12,3	67
0,02	4	447–448	30,7	1,4	96
0,02	5	345–348	45,2	24,1	55
0,02	5	447–448	47,6	4,6	91
0,025	3	345–348	26,1	13,0	58
0,025	3	447–448	14,0	1,1	93
0,025	4	345–348	32,5	14,6	62
0,025	4	447–448	21,7	1,1	95
0,03	3	345–348	17,4	3,8	80
0,03	3	447–448	8,9	0,1	98
0,03	4	345–348	15,5	2,3	86
0,03	4	447–448	12,7	0,1	99
0,03	5	345–348	24,4	7,0	74
0,03	5	447–448	26,2	0,8	97

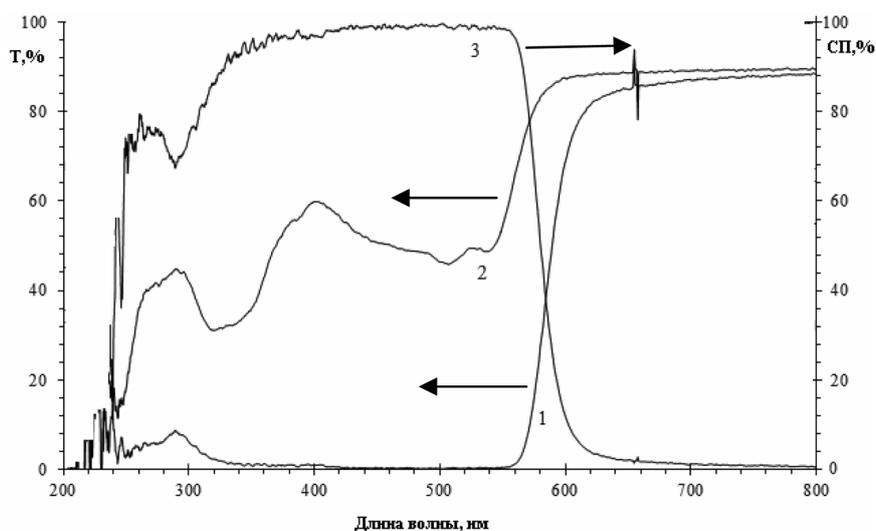


Рис. 2. Концентрация (масс. %): $M_{12} - 0,2$, КК – 0,2: 1 – T_{\parallel} , 2 – T_{\perp} , 3 – СП; $R_s = 4$

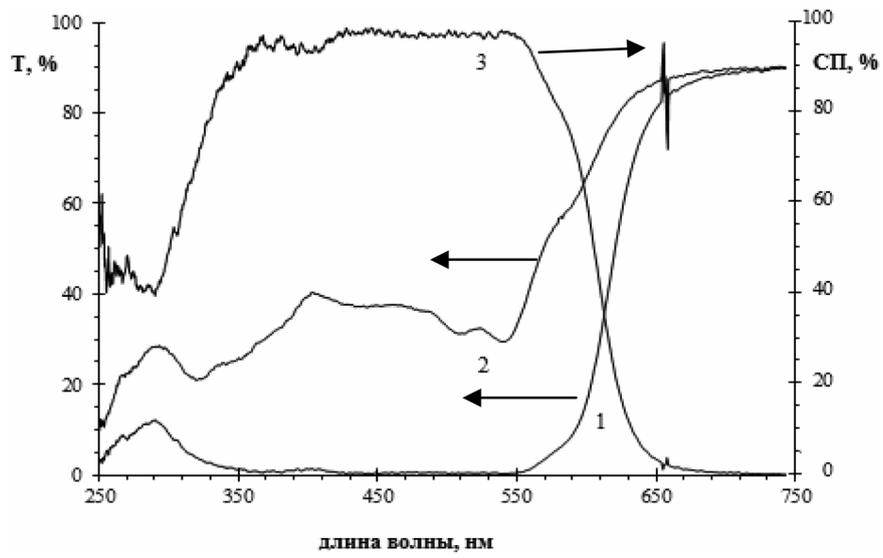


Рис. 3. Концентрация (масс. %): $M_{12} - 0,2$, $M_2 - 0,2$ и $KK - 0,2$: 1 - T_{\parallel} , 2 - T_{\perp} , 3 - СП; $R_s = 4$

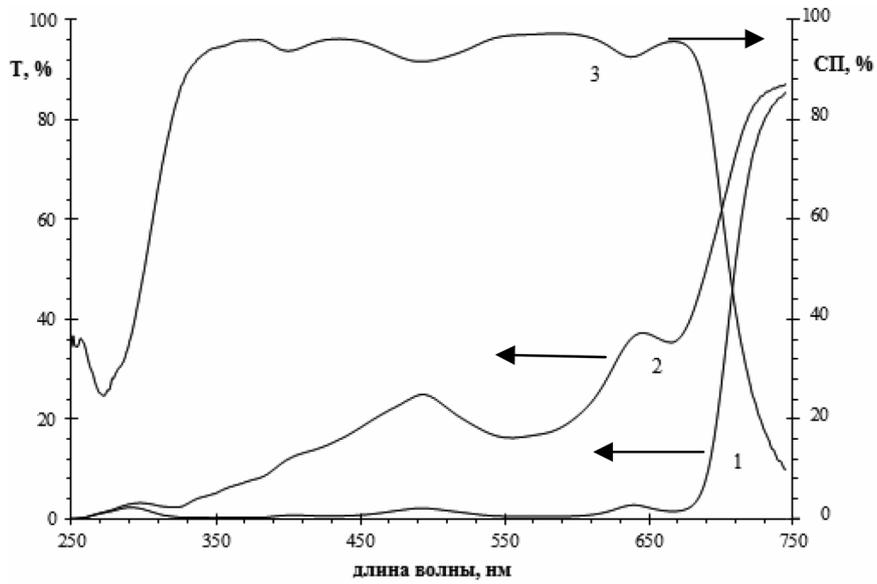


Рис. 4. Концентрация (масс. %): $M_{12} - 0,2$, $M_2 - 0,2$ и $ЧС - 0,2$: 1 - T_{\parallel} , 2 - T_{\perp} , 3 - СП; $R_s = 4$

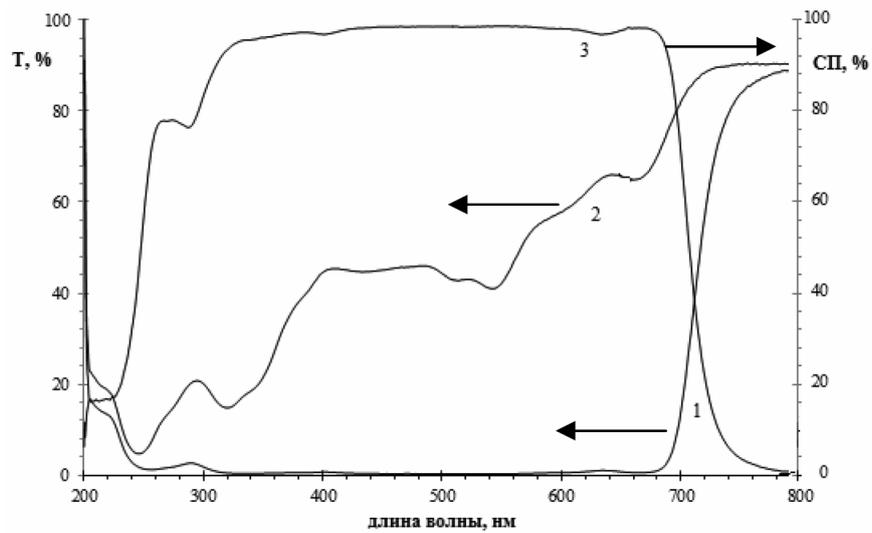


Рис. 5. Концентрация (масс. %): $M_{12} - 0,2$, $M_2 - 0,15$, $KK - 0,2$ и $ЧС - 0,15$: 1 - T_{\parallel} , 2 - T_{\perp} , 3 - СП; $R_s = 4$

Наибольшей СП = 99 %, как видно из данных табл. 2, обладает пленка, отлитая из композиции, содержащей 0,03 масс. % красителя и растянутая в 4 раза. Но ее светопропускание (T_{\perp}) имеет низкое значение, равное 12,7. Наилучшим сочетанием светопропускания и поляризующей способности обладает пленка с $[C] = 0,02$ и $R_s = 4$: в ближней УФ-области СП = 67 % и $T_{\perp} = 31,9$, а в видимой области СП = 96,4 % и $T_{\perp} = 30,7$. Наилучшая степень поляризации у всех пленок наблюдается при $R_s = 4$.

Поляризационные пленки, окрашенные M_{12} в смеси с дихроичными красителями. ПВС-пленки, окрашенные M_{12} в смеси с азокрасителями: «КК», « M_2 -КК», « M_2 -ЧС» и « M_2 -КК-ЧС» обладают способностью поляризовать свет в широком спектральном диапазоне (330–685 нм) со степенью поляризации 90–98 % (рис. 2–5).

Выводы

1. Синтезирован новый эффективный дихроичный компонент для пленок, поляризующих в видимой области спектра – натрий 2-гидрокси-5-((2-метокси-4((4-сульфофенил)диазенил)фенил)-диазенил)-бензоат (шифр M_{12}).

2. Получены ПВС-пленки, окрашенные смесями M_{12} с известными дихроичными дисазокрасителями и синтезированным M_2 , поляризующая способность которых в широком спектральном диапазоне, включающем ближнюю УФ- и видимую области спектра, составляет 90–98 %.

Литература

1. *Beekman E., Kocher C., Kokil A.* // J. Appl. Polym. Sci. 2002. Vol. 86. P. 1235–1239.
2. Пат. 2003/0035211 (2003) США.
3. *Kocher C., Weder Ch., Smith P.* // J. Appl. Optics. 2003. Vol. 42. P. 5684–5692.
4. Авт. св. 2389450/23–05 (1980) СССР.
5. Пат. GB 2162790A. 12.02.1986.
6. PCT WO 94/28073. 08.12.1994.
7. *Goldfarb D., Labes M., Luz Z., Purko R.* // Mol. Cryst. Liq. Cryst. 1982. N 87. P. 259.
8. *Малашко П. М., Тарасевич В. А., Южик Л. И.* // Вес. НАН Беларусі. Сер. хім. навук. 2003. № 4. С. 105–107.

H. Al. ALMODARRESIYEH, S. N. SHAHAB, L. N. FILIPPOVICH, N. G. ARIKO, V. E. AGABEKOV

siyamak@tut.by

PREPARATION AND OPTICAL PROPERTIES OF WIDE-BAND POLYVINYL ALCOHOL FILMS COLORED WITH A MIXTURE OF DICHOIC DYES

Summary

Film polarizers based on polyvinyl alcohol (PVA), a new dichroic dye – sodium 2-hydroxy-5-((2-methoxy-4-((4-sulfonatophenyl)diazenyl)phenyl)diazenyl) benzoate (M_{12}), and mixtures of dichroic dyes polarizing in a wide spectral range (330–685 nm) are developed.

УДК 543.554.6

Е. М. РАХМАНЬКО¹, Н. Н. СЛЕПЦОВА¹, А. Л. ГУЛЕВИЧ¹, академик А. Р. ЦЫГАНОВ²**БРОМИДНАЯ ФУНКЦИЯ ПЛЕНОЧНОГО ЭЛЕКТРОДА НА ОСНОВЕ ТРИНОНИЛОКТАДЕЦИЛАММОНИЯ ТЕТРАБРОМОКАДМИАТА**¹Белорусский государственный университет, Минск²Институт природопользования НАН Беларуси, Минск

Поступило 04.02.2013

Ионоселективные электроды (ИСЭ) на анионные комплексы металлов (АКМ) на основе высших четвертичных аммониевых солей (ЧАС), также как и других анионообменников, обладают в большей или меньшей степени выраженной лигандной функцией [1–3]. Такие функции могут быть использованы для создания электродов на анионы лигандов. Ярким примером является $Zn(NCS)_4^{2-}$ -ИСЭ, обладающий высокой селективностью к тиоцианат-анионам [4; 5]. В аналитическом плане для расширения спектра лигандных функций перспективным является использование галогенидных металлокомплексов.

В настоящей работе подробно исследована бромидная функция $CdBr_4^{2-}$ -ИСЭ, а также проведено моделирование бромидного отклика этого электрода с использованием возможностей системы компьютерной алгебры Mathematica 6.0. Особое внимание в работе уделено влиянию природы аниона соли кадмия на бромидную функцию $CdBr_4^{2-}$ -ИСЭ.

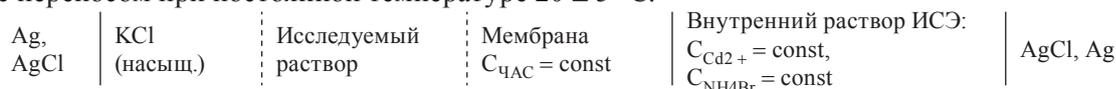
Экспериментальная часть. В работе были использованы следующие реактивы: бромид аммония, 4-водный нитрат кадмия, 2-водный ацетат кадмия и 2,5-водный хлорид кадмия марки «ч. д. а.», а также технический тетрагидрофуран (ТГФ), который очищали перегонкой и контролировали на содержание кислотных примесей по методике, описанной в [6]. В качестве пластификатора мембран электродов использовали α -бромнафталин (α -БН) марки «ч. д. а.», очистку которого проводили перегонкой по методике [7]. В качестве исходного анионообменника использовали йодид тринонилоктадециламмония (ТНОДА). Синтез йодида ТНОДА осуществляли ступенчатым алкилированием октадециламина йодистым нонилом по методике [8]. Очистку ионообменника от примесей аминов, алкилов и других неэлектролитов проводили экстракционным методом в системе: ацетонитрил–петролейный эфир. Анализ синтезированного и очищенного анионообменника проводили методами экстракционной фотометрии [1]. Содержание ЧАС составило 98,5 %, содержание аминов – не более 0,03 %.

Пленочные мембраны $CdBr_4^{2-}$ -СЭ изготавливали по стандартной методике [9] на основе поливинилхлорида (ПВХ) Fluka A. G. с содержанием электродноактивного вещества (ЭАВ) $5 \cdot 10^{-2}$ М. Из полученных мембран вырезались диски диаметром 10–12 мм и приклеивались к цилиндрическим торцам поливинилхлоридных трубок с помощью клеевой композиции ПВХ в ТГФ (1 г ПВХ в 10 мл ТГФ). В качестве внутреннего раствора для ИСЭ использовали раствор, содержащий $1 \cdot 10^{-3}$ М ионов кадмия и 0,36 М бромид аммония [3]. Перевод мембран электродов в форму бромидных комплексов кадмия производили путем их вымачивания во внутреннем растворе сравнения в течение 3 суток.

Исследование бромидных функций $CdBr_4^{2-}$ -СЭ проводили путем последовательного погружения электрода в растворы, содержащие переменные концентрации Br^- -ионов ($5,0-1 \cdot 10^{-7}$ М) и постоянные концентрации Cd^{2+} -ионов ($1 \cdot 10^{-1}-1 \cdot 10^{-4}$ М). Фоновые растворы солей кадмия были приготовлены путем растворения точных навесок ($\pm 0,0002$ г) их кристаллогидратов дистиллированной водой в колбах емкостью 1 л. Исходные растворы NH_4Br (5,0 М) на фоне солей кадмия готовили растворением точных навесок NH_4Br фоновыми растворами солей кадмия

в колбах емкостью 100 мл, более разбавленные растворы – методом последовательного разбавления исходных растворов NH_4Br (5,0 М) фоном солей кадмия.

Для измерения мембранных потенциалов ИСЭ использовали электрохимическую ячейку с переносом при постоянной температуре $20 \pm 5^\circ\text{C}$.



Измерения производили на рН-метре-милливольтметре рН-150М при постоянном перемешивании с помощью магнитной мешалки ММ-5. В качестве электрода сравнения использовали насыщенный хлорсеребряный электрод марки ЭВЛ-1М3.

По результатам измерений строили электродные функции – графические зависимости электродного потенциала (E) от обратного логарифма общей молярной концентрации Br^- -ионов в растворе. Рабочий диапазон (линейный интервал) электрода определяли как интервал концентраций Br^- -ионов, в котором потенциал электрода линейно зависел от логарифма концентрации Br^- -ионов. Нижний предел обнаружения (НПО) рассчитывали по точке пересечения экстраполированных линейных участков электродной функции. Аналогичным образом проводили расчет и верхнего предела обнаружения (ВПО) [10].

Результаты и их обсуждение. Известно, что $\text{Zn}(\text{NCS})_4^{2-}$ -СЭ обладает высокой селективностью по отношению к большинству анионов благодаря высокой гидрофобности потенциалопределяющих $\text{Zn}(\text{NCS})_4^{2-}$ -ионов [4]. Так как гидрофобность CdBr_4^{2-} -анионов значительно ниже, то на бромидную функцию CdBr_4^{2-} -СЭ сильное мешающее влияние могут оказывать анионы, находящиеся в анализируемом растворе [3]. В первую очередь это относится к анионам, которые входят в состав используемых солей кадмия. Их присутствие может приводить к увеличению нижних и верхних пределов обнаружения, уменьшению чувствительности электрода, сужению линейных рабочих диапазонов, а также к снижению селективности CdBr_4^{2-} -СЭ. В связи с вышесказанным выбор соли кадмия является одним из важных моментов при изучении бромидной функции CdBr_4^{2-} -СЭ.

В работе было исследовано влияние хлорид-, ацетат- и нитрат-анионов на бромидную функцию CdBr_4^{2-} -СЭ (рис. 1–3). Графически рассчитанные и статистически обработанные аналитические параметры CdBr_4^{2-} -СЭ на основе ТНОДА ($C_{\text{ЭАВ}} = 5 \cdot 10^{-2}$ М, пластификатор – α -БН, $n = 12$, $P = 0,95$) представлены в табл. 1–3.

Таблица 1. Влияние хлорид-ионов на аналитические параметры CdBr_4^{2-} -СЭ

$C_{\text{Cd}^{2+}}$, М	Наклон, В/рС _{Br}	Линейный диапазон, М	НПО, М	ВПО, М
Без CdCl_2	58–59	$1,6 \cdot 10^{-4} - 1 \cdot 10^{-2}$	$(1,4 \pm 0,1) \cdot 10^{-5}$	–
$1 \cdot 10^{-4}$	90	$2 \cdot 10^{-4} - 6 \cdot 10^{-2}$	$(5,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-5}$	$0,28 \pm 0,01$
$1 \cdot 10^{-3}$	95	$3 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-2}$	$(1,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-4}$	$0,24 \pm 0,01$
$1 \cdot 10^{-2}$	96	$2 \cdot 10^{-3} - 1 \cdot 10^{-1}$	$(7,8 \pm 0,1) \cdot 10^{-4}$	$0,32 \pm 0,01$
$1 \cdot 10^{-1}$	96	$3 \cdot 10^{-2} - 4 \cdot 10^{-1}$	$(7,7 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$0,68 \pm 0,01$

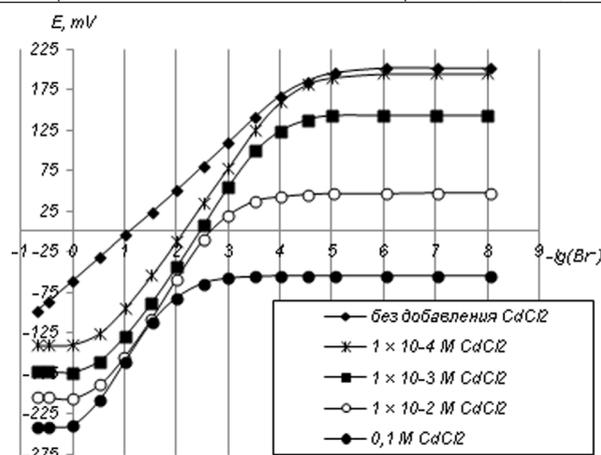


Рис. 1. Бромидные функции CdBr_4^{2-} -СЭ на фоне хлорида кадмия

Т а б л и ц а 2. Влияние ацетат-ионов на аналитические параметры CdBr_4^{2-} -СЭ

$C_{\text{Cd}^{2+}}, \text{M}$	Наклон, мВ/рС _{Br}	Линейный диапазон, М	НПО, М	ВПО, М
Без $(\text{CH}_3\text{COO})_2\text{Cd}$	58–59	$1,5 \cdot 10^{-4} - 3 \cdot 10^{-2}$	$(1,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-5}$	–
$1 \cdot 10^{-4}$	98–99	$2 \cdot 10^{-4} - 1 \cdot 10^{-1}$	$(3,5 \pm 0,2) \cdot 10^{-5}$	$0,22 \pm 0,02$
$1 \cdot 10^{-3}$	102–103	$2 \cdot 10^{-4} - 1 \cdot 10^{-1}$	$(5,0 \pm 0,1) \cdot 10^{-5}$	$0,19 \pm 0,01$
$1 \cdot 10^{-2}$	112–113	$2 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-2}$	$(6,7 \pm 0,3) \cdot 10^{-5}$	$0,23 \pm 0,01$
$1 \cdot 10^{-2}$	118–120	$1 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-1}$	$(2,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-4}$	$0,52 \pm 0,02$

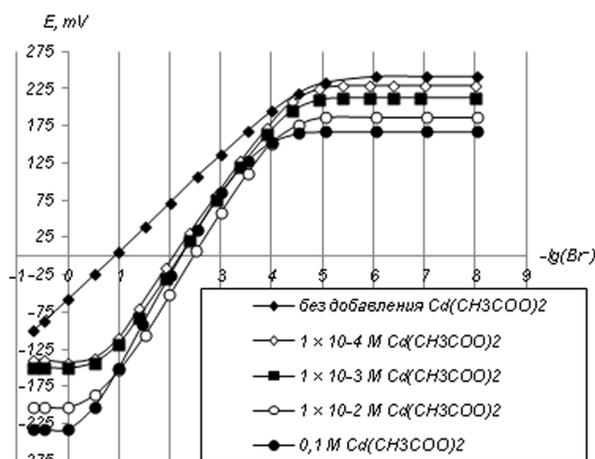


Рис. 2. Бромидные функции CdBr_4^{2-} -СЭ на фоне ацетата кадмия

Т а б л и ц а 3. Влияние нитрат ионов на аналитические параметры CdBr_4^{2-} -СЭ

$C_{\text{Cd}^{2+}}, \text{M}$	Наклон, мВ/рС _{Br}	Линейный диапазон, М	НПО, М	ВПО, М
Без $\text{Cd}(\text{NO}_3)_2$	57–58	$1,6 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot 10^{-2}$	$(1,6 \pm 0,2) \cdot 10^{-5}$	–
$1 \cdot 10^{-4}$	85	$1 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-1}$	$(5,4 \pm 0,1) \cdot 10^{-4}$	$0,35 \pm 0,01$
$1 \cdot 10^{-3}$	87	$2 \cdot 10^{-3} - 1 \cdot 10^{-1}$	$(1,2 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$0,30 \pm 0,01$
$1 \cdot 10^{-2}$	98	$8 \cdot 10^{-3} - 1 \cdot 10^{-1}$	$(4,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$	$0,30 \pm 0,01$
$1 \cdot 10^{-1}$	116	$3 \cdot 10^{-2} - 4 \cdot 10^{-1}$	$(2,2 \pm 0,1) \cdot 10^{-2}$	$0,57 \pm 0,01$

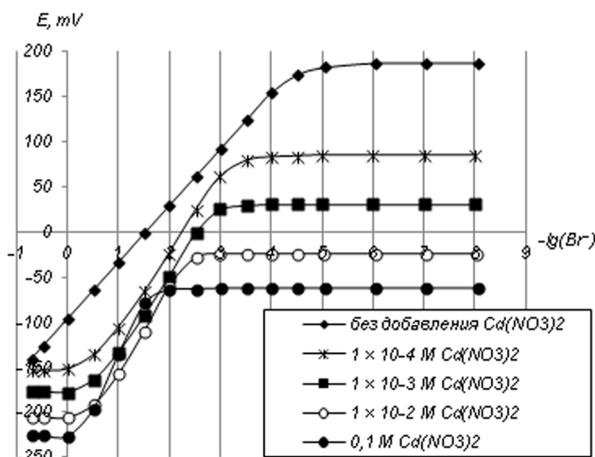


Рис. 3. Бромидные функции CdBr_4^{2-} -СЭ на фоне нитрата кадмия

Вид экспериментальных функций и анализ их аналитических параметров (рис. 1–3, табл. 1–3) показал, что для всех бромидных функций CdBr_4^{2-} –СЭ, независимо от вида противоиона, при росте концентрации Cd^{2+} -ионов в фоновом растворе прослеживаются следующие закономерности.

Во-первых, при возрастании фоновой концентрации кадмия от $1 \cdot 10^{-4}$ до $1 \cdot 10^{-2}$ М наблюдается сдвиг электродного потенциала в отрицательную область. При концентрации кадмия $1 \cdot 10^{-1}$ М электродный потенциал сдвигается в более положительную область (за исключением фона хлорида кадмия).

Во-вторых, рост концентрации фона Cd^{2+} -ионов приводит к увеличению тангенса угла наклона бромидной функции с 58–59 до 96 мВ/рС_{Br} для хлорида кадмия, с 59 до 120 мВ/рС_{Br} для ацетата кадмия и с 57–58 до 116 мВ/рС_{Br} для нитрата кадмия. Однако для функций, полученных на фоне хлорида кадмия, рост тангенса угла наклона бромидной функции наблюдается только при низких концентрациях кадмия ($1 \cdot 10^{-4}$ – $1 \cdot 10^{-3}$ М). Дальнейшее же увеличение концентрации фона кадмия приводит к тому, что тангенс угла наклона достигает своего постоянного значения в 95–96 мВ/рС_{Br}.

В-третьих, с ростом концентрации фона Cd^{2+} -ионов происходит рост значений НПО.

В-четвертых, при низких концентрациях фона кадмия ($1 \cdot 10^{-4}$ – $1 \cdot 10^{-2}$ М) наблюдается практически постоянное значение ВПО, а при концентрации фона 0,1 М значение ВПО возрастает практически в два раза.

В-пятых, происходит сужение и смещение рабочих диапазонов электродов в более концентрированную область.

Наблюдаемый вид экспериментальных бромидных функций, а также изменение аналитических параметров CdBr_4^{2-} –СЭ в зависимости от фоновой концентрации солей кадмия можно объяснить изменением равновесной концентрации потенциалопределяющих CdBr_4^{2-} -ионов в водном растворе и в мембране пленочного электрода.

В водном растворе в присутствии бромид-ионов происходит образование четырех бромидных комплексов кадмия, мольные доли которых определяются только соответствующими константами устойчивости и равновесной концентрацией бромид-ионов. Так как комплекс CdBr_4^{2-} является самым насыщенным, то с увеличением концентрации бромид-ионов мольная доля этого комплекса возрастает, достигает максимума при равновесной концентрации бромид-ионов 10^{-2} М и далее не изменяется. При дальнейшем увеличении концентрации бромид-ионов начинает протекать обратный процесс – уменьшение равновесной концентрации потенциалопределяющих CdBr_4^{2-} -анионов вследствие протекания обменной реакции:



Такое неоднозначное влияние бромид-ионов на концентрацию CdBr_4^{2-} -ионов при различном фоновом содержании соли кадмия и обуславливает наблюдаемый экспериментально вид бромидной функции и изменение аналитических параметров CdBr_4^{2-} –СЭ.

Мешающее влияние анионов на бромидную функцию увеличивается в ряду: $\text{CH}_3\text{COO}^- < \text{Cl}^- < \text{NO}_3^-$, который хорошо согласуется с экстракционным рядом Гофмейстера. Влияние этих анионов может быть обусловлено либо высокой гидрофобностью самих анионов, либо их способностью к образованию устойчивых комплексных анионов CdL_n^{2-n} . Присутствие таких высокогидрофобных комплексных анионов в фоновом растворе приводит к возрастанию концентрации CdBr_4^{2-} -анионов по обменной реакции (1). В результате этого процесса происходит рост НПО и ВПО, возрастает крутизна бромидной функции, происходит сокращение ширины рабочего диапазона электрода.

Для подтверждения вида лигандной функции в работе был проведен ее теоретический расчет по системе базовых уравнений (2) в СКА Mathematica 6.0.

$$\begin{cases}
 \beta_1 = [\text{CdBr}^+]/[\text{Cd}^{2+}][\text{Br}^-], \\
 \beta_2 = [\text{CdBr}_2]/[\text{Cd}^{2+}][\text{Br}^-]^2, \\
 \beta_3 = [\text{CdBr}_3^-]/[\text{Cd}^{2+}][\text{Br}^-]^3, \\
 \beta_4 = [\text{CdBr}_4^{2-}]/[\text{Cd}^{2+}][\text{Br}^-]^4, \\
 K_{2\text{Br}^-}^{\text{CdBr}_4^{2-}} = [\text{R}_4\text{N}^+\text{Br}^-]^2[\text{CdBr}_4^{2-}]/[(\text{R}_4\text{N}^+)_2\text{CdBr}_4^{2-}][\text{Br}^-]^2, \\
 C_{\text{чАС}} + C_{\text{Cd}} = [(\text{R}_4\text{N}^+)_2\text{CdBr}_4^{2-}] + [\text{Cd}^{2+}] + [\text{CdBr}^+] + [\text{CdBr}_2] + \\
 [\text{CdBr}_3^-] + [\text{CdBr}_4^{2-}], \\
 4C_{\text{чАС}} + C_{\text{Br}} = 4[(\text{R}_4\text{N}^+)_2\text{CdBr}_4^{2-}] + [\text{R}_4\text{N}^+\text{Br}^-] + [\text{Br}^-] + [\text{CdBr}^+] + \\
 2[\text{CdBr}_2] + 3[\text{CdBr}_3^-] + 4[\text{CdBr}_4^{2-}], \\
 2C_{\text{чАС}} = 2[(\text{R}_4\text{N}^+)_2\text{CdBr}_4^{2-}] + [\text{R}_4\text{N}^+\text{Br}^-], \\
 E = -29\log([\text{R}_4\text{N}^+)_2\text{CdBr}_4^{2-}]/[\text{CdBr}_4^{2-}],
 \end{cases} \quad (2)$$

где β_1 – β_4 – полные константы устойчивости бромидных комплексов кадмия [11]; $K_{2\text{Br}^-}^{\text{CdBr}_4^{2-}}$ – концентративная константа обмена, экспериментально определенная в [12] и равная $2,95 \cdot 10^{-11}$; $C_{\text{чАС}}$ – концентрация ТНОДА в CdBr_4^{2-} -форме в мембране электрода; C_{Cd} – фоновая концентрация соли кадмия в водном растворе; C_{Br} – исходная концентрация бромид-ионов в водном растворе; E – потенциал на границе раздела фаз, мВ; в квадратных скобках отмечены равновесные молярные концентрации частиц в водном растворе и в фазе пленочной мембраны.

С целью упрощения расчетов были сделаны допущения о равенстве объемов приграничных слоев водной фазы и мембраны, о независимости константы обмена от состава мембраны, а также в расчетах были использованы концентрации частиц вместо их активностей.

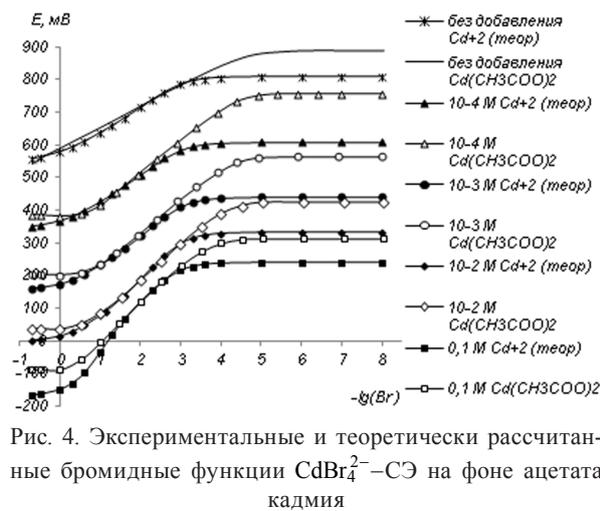


Рис. 4. Экспериментальные и теоретически рассчитанные бромидные функции CdBr_4^{2-} –СЭ на фоне ацетата кадмия

Как видно на рис. 4, в линейной области градуировочных графиков на фоне ацетата кадмия наблюдается хорошее соответствие экспериментальных и теоретически рассчитанных бромидных функций CdBr_4^{2-} –СЭ. Расхождения экспериментальных и теоретически рассчитанных потенциалов в концентрированной области связаны, вероятно, с изменением активности частиц. Для более точных расчетов в системе уравнений (2) необходимо использовать активности частиц, а не их концентрации. В разбавленной области теоретические потенциалы плато заметно ниже экспериментальных, что может быть связано с допущением о равенстве приграничных слоев водного раствора и мембраны.

Заключение. В работе исследована бромидная функция CdBr_4^{2-} –СЭ на основе ТНОДА. Установлено, что рост фоновой концентрации Cd^{2+} -ионов в водном растворе приводит к снижению ВПО и возрастанию крутизны бромидной функции, что вызывает увеличение точности определения бромидов в реальных объектах. Но вместе с тем при увеличении концентрации катионов кадмия возрастает НПО, сужается и смещается в более концентрированную область линейный диапазон бромидной функции. Установлено, что использование ацетата кадмия предпочтительнее, чем хлоридных и нитратных солей кадмия. Проведен теоретический расчет бромидной функции CdBr_4^{2-} –СЭ через систему уравнений, отражающих закон действующих масс и условия материальных балансов, и установлено, что экспериментальные и теоретические потенциалы совпадают в линейной области градуировочных графиков.

Литература

1. Рахманько Е. М. Физико-химические основы применения экстракции солями высших четвертичных аммониевых оснований в анализе: дис. ... д-ра хим. наук. Минск, 1994. С. 140.
2. Старобинец Г. Л., Рахманько Е. М., Цвирко Г. А., Гулевич А. Л. // Журн. анал. химии. 1987. Т. 42, № 2. С. 277–280.
3. Цвирко Г. А. Применение высших моно- и бис-четвертичных аммониевых солей для экстракционно-фотометрического и ионометрического определения кадмия, висмута, свинца: автореф. ... канд. хим. наук. Минск, 1993. С. 24.
4. Таразевич М. Я. Тетрароданоцинкат-селективный электрод и его аналитическое применение: дис. ... канд. хим. наук. Минск, 2006. С. 171.
5. Рахманько Е. М., Матвейчук Ю. В., Ясинецкий В. В. // Весці НАН Беларусі. Сер. хім. навук. 2012. № 2. С. 42–44.
6. Жилко В. В. Ионные ассоциаты на основе красителей – реагенты для фотометрического определения органических кислот: дис. ... канд. хим. наук. Минск, 2009. С. 139.
7. Лабораторная техника органической химии / под ред. Б. Кейла. М., 1966. С. 752.
8. Вейганд-Хильгетаг. Методы эксперимента в органической химии. М., 1968. С. 944.
9. Никольский Б. П., Матерова Е. А. Ионоселективные электроды. Л., 1980. С. 240.
10. Морф В. Принципы работы ионоселективных электродов и мембранный транспорт / пер. с англ. А. Ф. Жукова [и др.]; под ред. О. М. Петрухина. М., 1985. С. 280.
11. Лурье Ю. Ю. Справочник по аналитической химии. М., 1989. С. 448.
12. Цыганов А. Р. Анионообменная экстракция галогенидных комплексов висмута и кадмия четвертичными аммониевыми солями и ее аналитическое применение: дис. ... канд. хим. наук. Минск, 1981. С. 153.

E. M. RAKHMANKO, N. N. SLEPTSOVA, A. L. GULEVICH, A. R. TSYGANOV

megalania86@yandex.ru

BROMIDE FUNCTION OF THE FILM ION-SELECTIVE ELECTRODE BASED ON TRIANONILOCTADECYLAMMONIUM TETRABROMOCADMIUM

Summary

The work is devoted to the study of the influence of anion cadmium salts (chloride, nitrate and acetate) on the ligand function of the ion (CdBr_4^{2-})-selective electrode (ISE). The graphical form of the ligand functions of film electrodes in a wide concentration range of Cd^{2+} -ions (from $1 \cdot 10^{-4}$ to 0.1 M) is described and the influence of anion cadmium salts on the function of the ISE is explained in details. It is established that the increase in the concentration of Cd^{2+} -ions has a double impact on the response characteristics of the CdBr_4^{2-} -selective electrode. Also, it is established that the most suitable response characteristics are peculiar to the ligand functions of the CdBr_4^{2-} -selective electrode based on cadmium acetate. The mathematical model of the ligand functions of the ISE based on trianonioctadecylammonium is calculated using the system of computer algebra Mathematica 6.0.

УДК 577.112.4:57.083.3:543.426

О. С. ГАРБУЗ, Л. В. ДУБОВСКАЯ, О. В. СВИРИДОВ

НОВЫЙ РЕАГЕНТ ДЛЯ МЕЧЕНИЯ БЕЛКОВ ИОНАМИ РЕДКОЗЕМЕЛЬНЫХ МЕТАЛЛОВ

(Представлено академиком Ф. А. Лахвичем)

Институт биоорганической химии НАН Беларуси, Минск

Поступило 30.12.2013

Введение. Ионы некоторых редкоземельных элементов (главным образом, лантаниды Eu^{3+} , Sm^{3+} , Tb^{3+} и Dy^{3+}) в комплексах с поглощающими УФ-свет органическими соединениями способны к долгоживущей флуоресценции. Такое испускание света может быть зарегистрировано со значительной временной задержкой после импульса возбуждения, благодаря чему широко используется в биохимических и молекулярно-биологических исследованиях. Одним из практически важных направлений применения этого явления в медицине и смежных областях является лантанидный иммунофлуориметрический анализ (ЛИФМА), в котором один из компонентов системы антиген–антитело несет лантанидную метку чаще всего в виде иона Eu^{3+} в составе полиаминополикарбоксилатного комплексогена. В ходе ЛИФМА на стадии детекции этот комплексонат под действием диссоциативно-усиливающего раствора обеспечивает получение интенсивного флуоресцентного сигнала в форме узкого пика с большим стоксовым сдвигом и нулевым вкладом короткоживущей фоновой флуоресценции. ЛИФМА характеризуется повышенной чувствительностью и более широким диапазоном измеряемых концентраций в сравнении с иммуноферментным анализом, а также иммунофлуоресцентными тестами, в которых регистрируется обычное излучение меток на основе органических красителей [1–4].

Опираясь на описанную в научной и патентной литературе методологию синтеза белков, модифицированных комплексогенами металлов, и долговременный опыт их применения в диагностических тест-системах [5–9], мы поставили цель синтезировать активированный лантанидохелат на основе диэтилентриаминпентауксусной кислоты (ДТПК), способный образовывать прочные амидные связи при взаимодействии с первичными аминогруппами полипептидной цепи. Задачи достижения необходимых для ЛИФМА характеристик нового реагента и экономичности процессов его получения решены путем синтеза целевого продукта в реакции комплексной лантанидной соли аминоксидла ДТПК с одной из двух активированных карбоксильных групп *n*-фталевой кислоты. Конъюгаты белков с комплексоном Eu^{3+} , синтезированные нами с использованием полученного N-сукцинимидного эфира лантанидохелата, полностью удовлетворяют требованиям ЛИФМА.

Материалы и методы исследования. Все реактивы и растворители имели классификацию не ниже «ч. д. а.». Использовали диметилсульфоксид (ДМСО) фирмы Applichem (Германия), диангидрид ДТПК, N-Вос-1,2-этилендиамин, N-гидроксисукцинимид фирмы Sigma (США), триэтиламин фирмы Acros (Бельгия), усиливающий раствор фирмы PerkinElmer (США). Для химической модификации использованы коммерческие мышинные моноклональные антитела (МАТ) к тиреотропному гормону (ТТГ), свободной бета-субъединице хорионического гонадотропина (св. бета-ХГЧ) и ассоциированному с беременностью белку А плазмы человека (ПАББ-А). Для ЛИФМА применяли микропланшеты фирмы Biomat (Италия). Точную концентрацию Eu^{3+} в рабочем растворе EuCl_3 определяли комплексонометрическим титрованием с использованием диэтилентриаминтетрауксусной кислоты и ксиленолового оранжевого в качестве индикатора. На всех стадиях синтеза и в ЛИФМА применяли воду с удельным электрическим

сопротивлением 17–18 МОм · см, очищенную в модульной установке Water Pro Plus (Labconco, США). Для проведения анионообменной хроматографии продуктов синтеза использовали сорбент Dowex 1X4 фирмы Serva (Германия).

Спектры ЯМР ^1H и ^{13}C записывали на приборе фирмы Bruker BioSpin AVANCE 500 с рабочими частотами 500 и 125 МГц в d_6 -ДМСО и D_2O . Химические сдвиги определяли относительно сигналов ДМСО (δH 2,50 м. д. и δC 39,52 м. д.) или внутреннего стандарта ацетона (δH 2,22 м. д. и δC 30,89 м. д.). Масс-спектры получали на приборе LCQ Fleet фирмы Thermo Electron. Высушивание из замороженного состояния под вакуумом выполняли на установке для лиофильной сушки VirTis 6211 (США).

Для проведения ЛИФМА применяли синтезированные в данной работе конъюгаты МАт с комплексоном Eu^{3+} и готовые реагенты наборов ЛИФМА–нео-ТТГ (ТУ ВУ 100185093.060–2010), ЛИФМА–св. бета-ХГЧ (ТУ ВУ 100185093.062–2012) и ЛИФМА–ПАББ-А (ТУ ВУ 100185093.063–2012), изготовленные производственным участком лаборатории химии белковых гормонов с использованием технологического оборудования УП «ХОП ИБОХ НАН Беларуси». Флуоресценцию при длине волны возбуждения и регистрации 320 и 615 нм соответственно, с временной задержкой 400 мкс измеряли в микропланшетном флуориметре DELFIA 1234 фирмы Wallac Oy (Финляндия).

Электрофорез белков до и после химической модификации проводили в 10 %-ном полиакриламидном геле в восстанавливающих условиях, используя кипячение проб в присутствии 5 % 2-меркаптоэтанола. Для выявления белковых полос применяли окрашивание Кумасси R-250.

Синтез N^1 -(2-аминоэтиламида) ДТПК (1). Навеску 311 мг (0,87 ммоль) диангидрида ДТПК при нагревании до 60 °С растворяли в 2 мл ДМСО, при интенсивном перемешивании в течение 20 мин вносили раствор 99 мг (0,62 ммоль) N-Вос-1,2-этилендиамина в 1,5 мл ДМСО и добавляли 0,5 мл (3,48 ммоль) триэтиламина. Реакционную смесь перемешивали при комнатной температуре в течение 8 ч. Содержимое колбы вливали в диэтиловый эфир. Образовавшееся масло растворяли в 2 мл воды, перемешивали при нагревании на кипящей водяной бане в течение 1,5 ч, затем лиофилизовали. Сухой остаток растворяли в 0,3 мл воды и обрабатывали 0,3 мл концентрированной соляной кислоты в течение 1,5 ч при комнатной температуре. Раствор нейтрализовали 5 М раствором NaOH до pH 6. Смесь наносили на колонку с Dowex 1X4 (в форме ацетата), промытую и уравновешенную водой. Элюирование проводили сначала водой, затем 1 М раствором уксусной кислоты. Фракции, содержащие, по данным ТСХ, целевое соединение, объединяли и лиофилизовали. Получили 123 мг (45 %) соединения **1**: 2,2'-(13-амино-1-карбокси-2-(карбоксиметил)-10-оксо-2,5,8,11-тетраазатридекан-5,8-диил)диуксусная кислота. Масс-спектр, m/z : 434 [M]⁺. Спектр ЯМР ^1H (D_2O , δ , м. д.): 3,20 (т, 2H), 3,27–3,36 (м, 4H), 3,46 (т, 2H), 3,58 (т, 2H), 3,64 (т, 2H), 3,67 (с, 2H), 3,76 (с, 2H), 3,83 (с, 2H), 3,92 (с, 4H). Спектр ЯМР ^{13}C (D_2O , δ , м. д.): 37,5, 39,6, 51,2, 52,0, 52,5, 52,9, 55,1, 56,6, 58,1, 58,3, 170,5, 170,9, 172,5, 173,4.

Получение комплексной европиевой соли N^1 -(2-аминоэтиламида) ДТПК (2). Навеску 20 мг (46 мкмоль) 2-аминоэтиламида ДТПК **1** растворяли в 0,2 мл воды. Добавляли 0,5 мл (50 мкмоль) 0,1 М раствора EuCl_3 . Затем 1 М раствором триэтиламина в воде доводили pH до 6 и перемешивали в течение 30 мин при комнатной температуре. Прибавлением 1 М триэтиламина доводили pH до 11, перемешивали 30 мин при комнатной температуре, отделяли центрифугированием выпавший осадок гидроксида Eu^{3+} , супернатант лиофилизовали. Получили 45 мг 2-аминоэтиламида карбоксипроизводного диэтилентриаминтетраацетата Eu^{3+} /триэтиламина **2**: европий (III) триэтиламмоний 13-амино-2,5,8-трис(карбоксилатометил)-10-оксо-2,5,8,11-тетраазатридекан-1-карбоксилат.

Синтез ди-N-сукцинимидного эфира n-фталевой кислоты (3). 1 г (4,9 ммоль) дихлорангидрида n-фталевой кислоты растворяли в 30 мл хлористого метилена, перемешивали 10 мин при комнатной температуре, затем 10 мин при охлаждении на ледяной бане. Добавляли 2 г (17,4 ммоль) N-гидроксисукцинимид и 2,4 мл (17,4 ммоль) триэтиламина. Перемешивали 30 мин при охлаждении и 48 ч при комнатной температуре. Осадок отфильтровывали, промывали 5 мл хлористого метилена, суспендировали в 20 мл этого растворителя, опять отфильтровывали и сушили при комнатной температуре. Получили 1,37 г (78 %) ди(2,5-диоксопирролидин-1-ил) n-фталата **3**.

Масс-спектр, m/z : 359 [M]⁻. Спектр ЯМР ¹H (DMSO-d₆, δ, м. д.): 2,92 (с, 8H, CH₂), 8,34 (с, 4H, CH). Спектр ЯМР ¹³C (DMSO-d₆, δ, м. д.): 25,6, 130,1, 131,0, 161,0, 170,2.

*Получение N¹-[2-(*n*-сукцинимидилкарбокси)бензоиламино)этиламида] ДТПК/Eu³⁺ (4).* Навеску 16 мг (44 мкмоль) эфира **3** растворяли в 0,6 мл ДМСО. Добавляли 35 мг (36 мкмоль) европиевой соли **2** в 0,6 мл ДМСО и 0,03 мл (216 мкмоль) триэтиламина. Перемешивали при комнатной температуре в течение 2 ч. За ходом реакции следили по ТСХ в системе 10 % ацетат аммония : метанол 1 : 3. Rf продукта реакции 0,55.

Продукт выделяли осторожным наслаиванием диэтилового эфира на раствор в ДМСО. При этом выпадал белый кристаллический осадок. Для отделения от непрореагировавшего ди-*N*-сукцинимидного эфира **3** продукт снова растворяли в ДМСО и промывали тетрагидрофураном. При этом выпадал осадок, представляющий собой моно-*N*-сукцинимидный эфир комплексоната Eu³⁺ **4**: европий (III) триэтиламмоний 2,5,8-трис(карбоксилатометил)-15-(4-((2,5-диоксипирролидин-1-илокси)карбонил)фенил)-10,15-диоксо-2,5,8,11,14-пентаазапентадекан-1-карбоксилат. Соединение **4** хранили при -20 °С в сосуде, заполненном аргоном.

Получение белков, меченных Eu³⁺. Методика описана на примере иммуноглобулина класса G – МАт к ПАББ-А.

14 мкл свежеприготовленного раствора (8 г/л) реагента **4** в воде добавляли к 100 мкл раствора (4,5 г/л) МАт к ПАББ-А в 0,1 М NaHCO₃. Тщательно перемешивали и инкубировали при температуре 8–10 °С в течение ночи. Для очистки конъюгата проводили гель-фильтрацию на колонке (1,0 × 30 см) с сорбентом Superose 12 в системе проточной эффективной жидкостной хроматографии среднего давления FPLC при скорости элюирования 12 мл/ч. Элюирующий буфер – 0,05 М Tris-HCl (pH 7,8), 0,15 М NaCl, 0,05 % NaN₃. Фракции, содержащие белок, объединяли. По поглощению при 280 нм определяли концентрацию МАт, используя коэффициент экстинкции E_{280 нм, 1 см, г/л} = 1,35(г/л)⁻¹см⁻¹. Флуоресцентную активность конъюгата измеряли в диссоциативно-усиливающем растворе, содержащем 50 мкМ триоктилфосфиноксид, 15 мкМ β-нафтоилтрифторацетон и 0,1 % тритон X-100, и определяли концентрацию Eu³⁺, используя для калибровки растворы с точным содержанием Eu³⁺ по данным комплексонометрического титрования. Степень мечения определяли как мольное соотношение Eu³⁺/белок.

Выполнение ЛИФМА с применением МАт, меченных Eu³⁺, проводили в соответствии с инструкциями для наборов ЛИФМА–ПАББ-А, ЛИФМА–св. бета-ХГЧ, ЛИФМА–нео-ТТГ.

Результаты и их обсуждение. Для синтеза конъюгатов белков с полиаминополикарбоксилатными металлохелатами существуют два подхода. Один из них состоит в химической модификации белка органическим комплексоном, очистке полученного конъюгата, с последующим хелатированием иона редкоземельного металла образованным конъюгатом и отделением несвязавшихся ионов. Второй подход включает получение химически активного производного комплексоната металла, проведение его реакции с белком и очистку от избытка низкомолекулярного комплексоната. При реализации первого пути применяют производные ДТПК такие как диангидрид [5; 10], *N*-сукцинимидные эфиры [6–8] и другие дериваты [11]. Двухстадийная модификация белков ионами металлов более трудоемка по сравнению с реакцией в одну стадию по второму пути. Известно, что применение диангидрида ДТПК является причиной образования олигомеров модифицируемого белка, что приводит к снижению его иммунореактивности и значительному увеличению неспецифической адсорбции. Из-за высокой вероятности сшивки полипептидных цепей при использовании этого реагента невозможно получить конъюгаты с высокой степенью включения комплексона в молекулу белка [5; 9]. Помимо этого, на двух стадиях очистки конъюгатов, получаемых по первому пути, теряется довольно много белка, который часто является дорогостоящим реагентом. Второй путь мечения белков, хотя и является экономически более выгодным, требует разработки методов синтеза и очистки металлохелатов, реакционно-способных в отношении полипептида. Выполненный ранее в этом направлении синтез активированного N¹-(*n*-изотиоцианобензил)-диэтилентриамин-N¹, N², N³, N³-тетраацетата европия сложен, многостадийен и требует использования такого токсичного соединения, как тиофосген [9]. Кроме того, реакция активной изотиоцианатной группы соединения с первичными аминогруппами белка приводит к формированию тиокарбаматной связи, которая, как известно, характери-

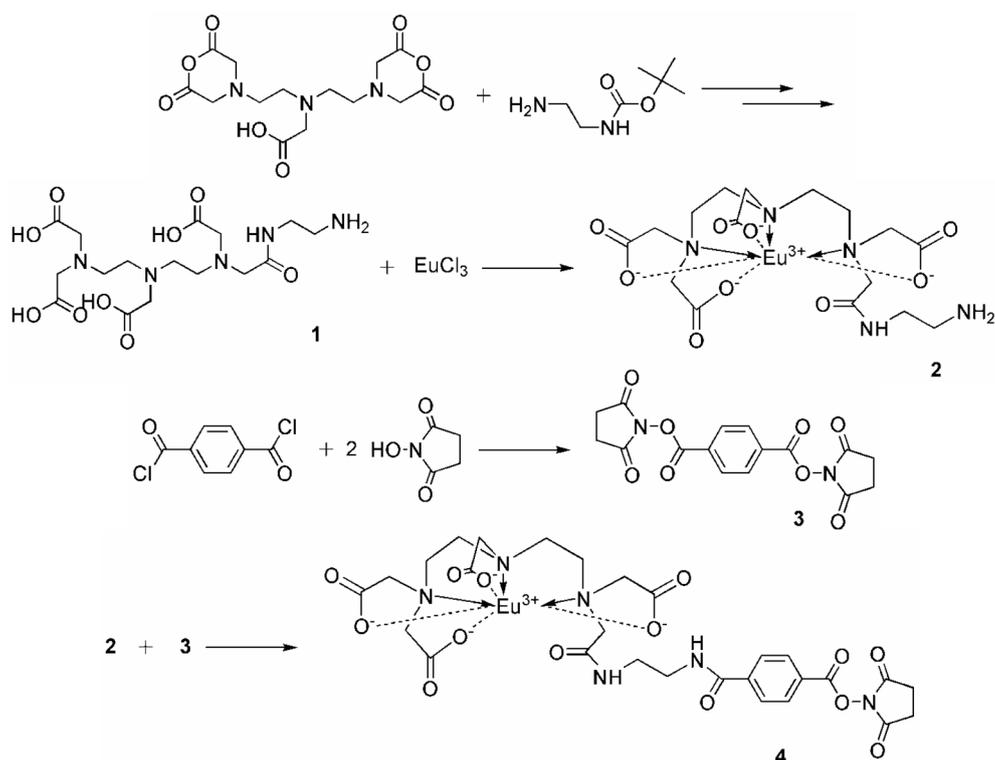


Рис. 1. Схема синтеза активированного эфира карбоксипроизводного тетраацетата европия

зуется определенной лабильностью, что может значительно ухудшить характеристики набора реагентов и ограничить срок его эксплуатации.

Разработанный нами синтез реагента **4** для мечения белков ионами лантанидов в целях ЛИФМА включает две параллельные схемы, в одной из которых моно-Вос-замещенный 1,2-диаминоэтан ацилируется диангидридом ДТПК с последующим удалением защитной группы и протеканием реакции комплексообразования, а другая состоит в получении активированного диэфира *n*-фталевой кислоты. Конечный продукт образуется в результате взаимодействия комплексной европиевой соли N^1 -(2-аминоэтиламида) ДТПК с одной из активированных карбоксильных групп ароматической кислоты (рис. 1).

При взаимодействии диангидрида ДТПК и *N*-Вос-1,2-этилендиамин образует смесь моноамида и диамида ДТПК. Для выделения аминопроизводного **1** использовали анионообменную хроматографию. При пропускании через колонку с анионитом неочищенного N^1 -(2-аминоэтиламида) ДТПК и элюировании раствором уксусной кислоты наибольшую подвижность имел ди- N^1 , N^3 -(2-аминоэтиламин) ДТПК, наименьшую – немодифицированная ДТПК, а моноамид **1** занимал промежуточное положение. ТСХ показала, что очищенный на колонке с Dowex 1X4 амин **1** не содержит примесей побочных продуктов реакции. Суммарная интегральная интенсивность сигналов в спектре ЯМР ^1H полученного соединения соответствует количеству метиленовых групп соединения **1**.

При получении комплексной европиевой соли **2** использовали небольшой избыток ионов Eu^{3+} по отношению к количеству аминопроизводного ДТПК **1**. Реакцию комплексообразования проводили при pH 6. Такие условия позволяли избежать образования гидроксида лантанида и являлись подходящими для хелатирования Eu^{3+} . Несвязанный лантанид удаляли из реакционной смеси при подщелачивании до pH 10–11, в результате чего выпадал осадок гидроксида Eu^{3+} . В реакции комплексообразования pH варьировали добавлением триэтиламина, поскольку образующуюся смешанную соль **2** удалось растворить в органическом растворителе ДМСО.

Хлорангидриды карбоновых кислот являются высокоактивными соединениями. Атом хлора может быть легко замещен даже таким слабым нуклеофилом, как *N*-гидроксисуцинимид. При получении сукцинимидил-*n*-фталата из хлорангидрида протеканию реакции в направлении об-

разования продукта **3** способствовало его выведение из реакционной среды в виде осадка. Результаты ЯМР и масс-спектр подтверждают структуру эфира **3** и его чистоту.

Реакцию ацилирования аминокислотного эфира **2** проводили в ДМСО в присутствии большого количества основания, способствующего депротонированию (активации) аминогруппы. Используемый растворитель является высококипящим, поэтому для его удаления из реакционной смеси использовали диэтиловый эфир, который аккуратно наслаивали на диметилсульфоксидный раствор. По мере удаления ДМСО выпадал продукт реакции **4** в виде кристаллического вещества.

Модификацию белков проводили в бикарбонатном буферном растворе (рН 8,3). При таких значениях рН среднее время полураспада сукцинимидных эфиров около 30 мин [12]. Для того чтобы реакция ацилирования аминокислотных групп белка протекала полностью, проводили инкубацию в течение ночи при непрерывном перемешивании. Очистка конъюгатов белок–металлохелат с помощью традиционной гель-фильтрации на колонке с Sephadex G-25 не обеспечивает отделения от белка всего количества химически не связанного комплексогена Eu^{3+} [13]. При гель-фильтрации на колонке с Superose 12 на установке для FPLC конъюгат и избыток реагента выходили узкими пиками (значения полуширин соответственно 1–2 и 2–3 мл), разделенными базовой линией протяженностью около 4 мл. При этом происходило отделение белковых агрегатов, элюция которых предшествовала выходу синтезированного конъюгата.

Возможное образование олигомеров за счет сшивки полипептидных цепей в результате химической модификации детектировалось SDS-электрофорезом в ПААГ. Ранее нами было показано, что при мольном соотношении диангида ДТПК и белка в пропорции 20 : 1 наблюдается частичная сшивка полипептидных цепей иммуноглобулинов, а при соотношении 100 : 1 практически весь белок находится в виде олигомеров [13]. В данной работе на электрофореграммах белковых конъюгатов, синтезированных с помощью (50–150)-кратных мольных избытков реагента **4**, вообще не было выявлено белковых полос, которые соответствовали бы сшитым полипептидам. Следовательно, степень модификации белка и его удельную флуоресцентную активность можно повысить за счет увеличения количества вносимого соединения **4** (рис. 2).

С целью апробации предложенного реагента для химической модификации белков комплексоном Eu^{3+} мы выбрали мышинные МАт, которые наиболее часто используются в ЛИФМА (МАт к ТТГ, св. бета-ХГЧ и ПАББ-А). Синтезированные конъюгаты были протестированы в соответствующих наборах ЛИФМА. Полученные технические характеристики, представленные в таблице, соответствуют техническим условиям на данные диагностикумы, и не уступают показателям референс-наборов фирмы PerkinElmer (США), зарегистрированным и используемым в Беларуси.

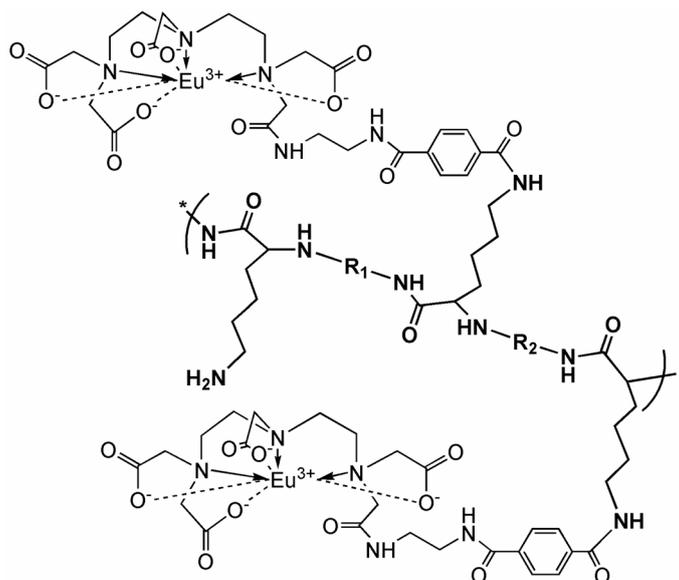


Рис. 2. Общая структура полипептида, меченного комплексоном Eu^{3+} с помощью реагента **4**

Технико-аналитические характеристики диагностических наборов ЛИФМА, включающих белковые конъюгаты, которые синтезированы с применением моно-N-сукцинимидного эфира комплексоната Eu^{3+}

МАт	Степень мечения, моль Eu^{3+} /моль белка	Отношение интенсивностей флуоресценции для калибровочных проб А и E^1 , V_E/V_A	Чувствительность ²	Коэффициент вариации ³ , %	Коэффициент корреляции ⁴ , r
Анти-ТТГ	18,0	47 (≥ 30)	1,2 (2,0) мкМЕ/мл	7,6–8,5 (≤ 12)	0,88
Анти-св. бета-ХГЧ	12,5	3229 (≥ 500)	0,03 (0,3) нг/мл	1,6–3,0 (≤ 8)	0,98
Анти-ПАББ-А	10,0	2975 (≥ 500)	3,0 (10,0) мМЕ/л	2,0–3,1 (≤ 8)	0,93

Примечания: 1 – калибровочные пробы, не содержащие определяемого вещества (А) и с максимальной концентрацией данного вещества (Е); 2 – минимальная достоверно определяемая диагностическим набором концентрация вещества, рассчитанная на основании удвоенного значения среднего квадратичного отклонения от среднего арифметического значения интенсивности флуоресценции, измеренной в пробе А; 3 – повторяемость результатов измерений; 4 – сравнение результатов определений веществ в одних и тех же пробах ЛИФМА-набором с исследуемым белковым конъюгатом и референс-набором. В скобках даны значения технико-аналитических параметров по утвержденным техническим условиям.

Представленные в таблице характеристики всех белковых конъюгатов несущественно изменились после хранения концентрата растворов в течение года в холодильнике при 2–8 °С. Низкая неспецифическая адсорбция и высокая удельная флуоресцентная активность меченных Eu^{3+} МАт обеспечивают высокую чувствительность ЛИФМА и хорошую воспроизводимость результатов во всем динамическом диапазоне. Это важно для клинико-диагностической практики особенно в области медицинской помощи матерям и детям при проведении массовых обследований в рамках национальных программ: неонатальный скрининг на врожденный гипотиреоз, пренатальный скрининг в первом триместре беременности для выявления врожденных пороков развития плода. Так, свойства меченного Eu^{3+} МАт к тиреотропину позволяют использовать данный конъюгат в диагностическом наборе для определения ТТГ в сухих пятнах крови, содержащих всего лишь около 0,003 мл образца.

Заключение. Синтезированный нами реагент для мечения белков ионами редкоземельных металлов обладает тремя преимуществами по сравнению с предложенными ранее соединениями аналогичного назначения: простота синтеза, присутствие в структуре иона лантанида, исключение возможности сшивания полипептидных цепей. Новый реагент получен путем превращения диангида ДТПК в N¹-(2-аминоэтиламин) диэтилентриаминтетраацетат лантанида и последующего его ацилирования ди-N-сукцинимидным эфиром *n*-фталевой кислоты. Реагент позволяет получать конъюгаты белка с комплексонатом Eu^{3+} с необходимой удельной флуоресцентной активностью. Избыток реагента легко отделяется от белкового конъюгата гелефильтрацией на установке для FPLC. Конъюгаты, полученные с использованием предложенного нами соединения, имеют характеристики, позволяющие применять их в наборах ЛИФМА. Есть все основания полагать, что разработанный метод синтеза позволит получать различные металлохелаты белков и для других научных и практических целей. Следует отметить, что в синтезе целевого реагента можно использовать и другие алифатические амины (например, монозамещенный 1,6-диаминогексан) и дикарбоновые кислоты (например, адипиновую).

Авторы выражают благодарность кандидатам хим. наук В. К. Ольховику и Д. А. Василевскому за оказанную помощь в планировании экспериментов и любезное предоставление некоторых реактивов, а также канд. хим. наук А. В. Барановскому за консультации по расшифровке масс-и ЯМР-спектров.

Литература

1. *Beitz J.* // Handbook on the Physics and Chemistry of Rare Earths. 1994. Vol. 18. P. 159–195.
2. *Holzwarth A. R.* // Methods in Enzymology. 1995. Vol. 246. P. 334–362.
3. *Hagan A. K., Zuchner T.* // Anal. Bioanal. Chem. 2011. Vol. 400. P. 2847–2864.
4. *Гарбуз О. С., Свиридов О. В.* // ARSmedica. 2011. № 13. С. 51–61.
5. *Paik C. H. et al.* // J. Nucl. Med. 1983. Vol. 24, N 12. P. 1158–1163.
6. *Najafi A., Childs R. L., Hnatowich D. J.* // Int. J. Appl. Radiat. Isot. 1984. Vol. 35, N 6. P. 554–557.
7. *Paxton R. J. et al.* // Cancer Res. 1985. Vol. 45, N 11. P. 5694–5699.

8. *Kondo S., Kurami M., Azuma M.* US Patent 5094950. Diethylenetriamine pentaacetic acid derivatives: заявл. 05.01.1989; опубл. 10.03.1992.
9. *Mukkala V. M., Mikola H., Hemmila I.* // *Anal. Biochem.* 1989. Vol. 176, N 2. P. 319–325.
10. *Hnatowich D. J., Childs R. L., Lanteigne D., Najafi A.* // *J. Immunol. Methods.* 1983. Vol. 65. P. 147–157.
11. *Kozak R. W.* et al. // *Proc. Natl. Acad. Sci USA.* 1986. Vol. 83. P. 474–478.
12. *Hermanson G. T.* *Bioconjugate technique.* USA. 1996.
13. *Гарбуз О. С., Вашкевич И. И., Свиридов О. В.* // *Весці НАН Беларусі. Сер. хім. навук.* 2014. № 1. С. 85–90.

O. S. GARBUZ, L. V. DUBOVSKAYA, O. V. SVIRIDOV

olga_garbuz@iboch.bas-net.by; dubovskaya@iboch.bas-net.by; sviridov@iboch.bas-net.by

NEW REAGENT FOR LABELING PROTEINS WITH RARE EARTH METAL IONS

Summary

Activated ester of a carboxylic derivative of europium diethylenetriaminetetraacetate has been synthesized by the interaction of europium salt of diethylenetriaminepentaacetic acid aminoethylamide with di-N-succinimidyl-p-phthalate. This reagent was applied to introduce rare earth metal ions in animal immunoglobulins (monoclonal antibodies). The proteins labelled with Eu^{3+} provide the required characteristics of fluorescence intensity, background, sensitivity and selectivity in diagnostic systems of lanthanide immunofluorometric assay.

УДК 544.72;546.824–31;546.776

Н. Е. БОБОРИКО¹, И. А. БОБРИКОВ², Д. И. МЫЧКО¹, Г. Ф. КАРКОЦКИЙ³

СИНТЕЗ И СТРУКТУРА ГАЗОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ TiO_2-MoO_3

(Представлено академиком А. И. Лесниковичем)

¹Белорусский государственный университет, Минск

²Лаборатория нейтронной физики им. И. М. Франка,
Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

³Инновационное ООО «Инноватсенсор», Минск

Поступило 30.12.2013

Введение. Сложнооксидные композиты состава TiO_2-MoO_3 находят применение как катализаторы дегидрирования алканов, аммоксидирования аренов, окисления спиртов, а также как газочувствительные слои химических газовых сенсоров [1; 2]. Специфические каталитические свойства нанесенных молибденовых катализаторов могут быть связаны как с координационным окружением иона молибдена, так и с природой оксидной подложки, которая сильно влияет на структуру MoO_3 [3]. В ранее проведенных нами исследованиях установлено [4], что полученные золь-гель методом сложнооксидные системы TiO_2-MoO_3 являются перспективными материалами для изготовления сенсоров селективного обнаружения водорода.

Материалы и методы исследования. Использование золь-гель синтеза позволяет получить материалы с развитой поверхностью и высокой степенью гомогенности на молекулярном уровне, с контролируемым фазовым составом и модифицированными структурными характеристиками. Золь-гель синтез композитных материалов TiO_2-MoO_3 (содержание триоксида молибдена 1; 5 и 10 мол. %) включал две основные стадии. На первой стадии был получен исходный золь $TiO_2 \cdot nH_2O$ осаждением аммиаком из раствора тетрахлорида титана в соляной кислоте. На второй стадии в исходный золь гидратированного диоксида титана вводилось расчетное количество гидрата парамолибдата аммония $(NH_4)_6Mo_7O_{24} \cdot 4H_2O$. При прогреве коллоидных систем происходит разложение гидрата диоксида титана до TiO_2 и термодеструкция парамолибдата аммония с образованием MoO_3 . Золь гидрата оксида молибдена был получен титрованием водного раствора парамолибдата аммония азотной кислотой с последующей промывкой при центрифугировании.

В данной работе с использованием нейтроно- и рентгенографии детально изучены структурно-фазовые характеристики синтезированных золь-гель методом сложнооксидных систем TiO_2-MoO_3 с различным количественным соотношением компонентов, прогретых при различной температуре, а также установлены структурно-фазовые особенности полученных композитов, ответственные за их газочувствительные свойства.

По результатам проведенного ранее методом рентгенографии исследования фазового состава композитных материалов с различным содержанием MoO_3 и прогретых при различной температуре [5] при введении триоксида молибдена в диоксид титана наблюдается смещение температуры фазового перехода анатаз–рутил в область больших температур по сравнению с индивидуальным диоксидом титана и подавление кристаллизации фазы диоксида титана при увеличении содержания MoO_3 в композите. Фазовый состав композитных материалов, установленный методом рентгенографии, представлен в табл. 1.

Для уточнения фазового состава композитных материалов и определения их прецизионной поликристаллической структуры использовался метод нейтронной дифракции высокого разре-

Таблица 1. Фазовый состав индивидуальных оксидов титана и молибдена и композитных материалов $\text{TiO}_2\text{-MoO}_3$, установленный методом рентгенографии

Состав образца	Температура прогрева, °С	Фазовый состав композитного материала
TiO_2	450	Анатаз
	600	Анатаз, рутил
	850	Рутил
MoO_3	450	$\alpha\text{-MoO}_3$
	600	$\alpha\text{-MoO}_3$
	850	$\alpha\text{-MoO}_3$
$\text{TiO}_2\text{-MoO}_3$ (1 мол. % MoO_3)	450	Анатаз
	600	Анатаз
	850	Рутил
$\text{TiO}_2\text{-MoO}_3$ (10 мол. % MoO_3)	450	Анатаз, $\alpha\text{-MoO}_3$
	600	Анатаз, $\alpha\text{-MoO}_3$
	850	Рутил

шения. Особый характер взаимодействия нейтронов с ядрами атомов приводит к тому, что амплитуда рассеяния нейтронов для атомов различных элементов произвольным образом зависит от порядкового номера Z элемента в периодической системе, в отличие от амплитуды рассеяния рентгеновских лучей, которая возрастает с увеличением порядкового номера атома. Рассеивающие способности легких и тяжелых элементов оказываются одного порядка, что позволяет прецизионно определять поликристаллическую структуру образцов, содержащих в своем составе как тяжелые, так и легкие элементы.

Данные особенности метода нейтронной дифракции, а также высокая разрешающая способность прибора, на котором выполнялись нейтронные дифракционные эксперименты (фурье-дифрактометр высокого разрешения (ФДВР/HRFD), расположенный на импульсном реакторе ИБР-2, в лаборатории нейтронной физики им. Франка Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна) [6], позволили уточнить фазовый состав сложнооксидных образцов и определить их поликристаллическую структуру. Разрешение дифрактометра составляет $\Delta d / d \approx 0,001$, где d – межплоскостное расстояние. Обработка полученных данных проводилась с помощью программы FullProf [7].

Результаты и их обсуждение. Результаты нейтронографического исследования позволили выявить присутствие фазы кристаллического $\alpha\text{-MoO}_3$ в композитных образцах с малым содержанием триоксида молибдена (1 мол. %), а также после прогрева образцов во всем диапазоне концентраций MoO_3 при высоких температурах (850 °С). Наличие фазы $\alpha\text{-MoO}_3$ в данных образцах методом рентгенографии не фиксировалось.

Как известно, индивидуальный триоксид молибдена характеризуется орторомбической сингонией, пространственная группа $P\ bnm$ [8]. Структурной единицей оксида молибдена является искаженный октаэдр с атомом молибдена в центре и шестью атомами кислорода, характеризующимися пятью различными длинами связей Mo-O . Схематическая структура данного октаэдра с указанием справочных значений длин связей при комнатной температуре [8] изображена на рис. 1, а.

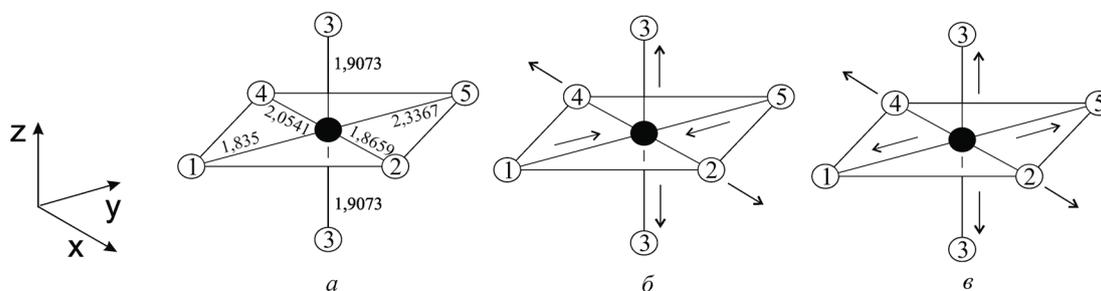


Рис. 1. Октаэдр MoO_6 с указанием справочных значений длин связей Mo-O при комнатной температуре (а) и направления искажений в октаэдрах MoO_6 при прогреве от 450 до 600 °С в композите $\text{TiO}_2\text{-MoO}_3$ (1 мол. %) (б) и в композите $\text{TiO}_2\text{-MoO}_3$ (10 мол. %) (в)

Установлено, что увеличение температуры прогрева оксида молибдена с 450 до 850 °С приводит к разрыхлению кристаллической решетки оксида, причем наблюдается монотонное увеличение параметров a и c , а для параметра b наблюдается снижение значения после прогрева при 600 °С с последующим увеличением после прогрева при 850 °С. Изменение параметров кристаллической решетки оксида молибдена представлено в табл. 2.

Т а б л и ц а 2. Изменение параметров кристаллической решетки диоксида титана и оксида молибдена

Образец	Температура прогрева, °С	Кристаллическая фаза	Параметры решетки кристаллической фазы			
			a , Å	b , Å	c , Å	$V_{\text{мц}}$, Å ³
MoO ₃	450		3,9602	13,8537	3,6955	202,75
MoO ₃	600	α -MoO ₃	3,9607	13,8515	3,6956	202,75
MoO ₃	850		3,9626	13,8574	3,6976	203,04
TiO ₂	450	Анатаз	3,7898	3,7898	9,4869	136,25
TiO ₂	850	Рутил	4,5919	4,5919	2,9589	62,38
TiO ₂ -MoO ₃ 1 мол.%	450	Анатаз	3,7896	3,7896	9,4448	135,64
TiO ₂ -MoO ₃ 1 мол.%	850	α -MoO ₃	3,9813	13,9363	3,6887	204,66
TiO ₂ -MoO ₃ 1 мол.%	850	Рутил	4,5948	4,5948	2,9593	62,48
TiO ₂ -MoO ₃ 10 мол.%	450	α -MoO ₃	3,9745	13,8481	3,6834	202,73
TiO ₂ -MoO ₃ 10 мол.%	450	Анатаз	3,7853	3,7853	9,3546	134,04
TiO ₂ -MoO ₃ 10 мол.%	850	α -MoO ₃	3,9595	13,8220	3,6945	202,19
TiO ₂ -MoO ₃ 10 мол.%	850	Рутил	4,5940	4,5940	2,9588	62,45
TiO ₂ -MoO ₃ 10 мол.%	850	α -MoO ₃	3,9619	13,8602	3,6966	202,99

По данным нейтрографии, при прогреве индивидуального оксида молибдена наблюдается изменение длин связей в октаэдре MoO₆. Установлено, что длина связей Mo–O(2), Mo–O(3), Mo–O(4) монотонно увеличивается с повышением температуры прогрева, тогда как длина связи Mo–O(1) и Mo–O(5) снижается после прогрева при 600 °С и увеличивается после прогрева при 850 °С. Сумма длин связей Mo–O(2) и Mo–O(4) представляет собой параметр a кристаллической решетки оксида молибдена. Таким образом, при увеличении температуры прогрева фиксируется появление тетрагональных искажений октаэдров MoO₆ по различным направлениям (рис. 1 и 2). После прогрева при 600 °С наблюдается сжатие основания октаэдра вдоль диагонали O(1)–Mo–O(5) и расширение вдоль диагонали O(2)–Mo–O(4). После прогрева при большей температуре (850 °С) фиксируется увеличение длин связей в экваториальном направлении. Кроме того, при прогреве наблюдается монотонное увеличение связей в аксиальном направлении, в предельном случае такой тип искажения должен привести к образованию слоистой структуры.

Для сложнооксидной системы TiO₂-MoO₃ с содержанием оксида молибдена 1 мол. % тенденция изменения длин связей Mo–O при увеличении температуры прогрева от 450 до 600 °С остается сходной с индивидуальным оксидом молибдена. Дальнейший прогрев до 850 °С приводит к сжатию октаэдра в аксиальном направлении и вдоль диагонали O(2)–Mo–O(4), и к растяжению вдоль диагонали O(1)–Mo–O(5).

Для композитного материала TiO₂-MoO₃ с содержанием оксида молибдена 10 мол. % характер изменения длин связей Mo–O меняется – наблюдается увеличение всех длин связей Mo–O

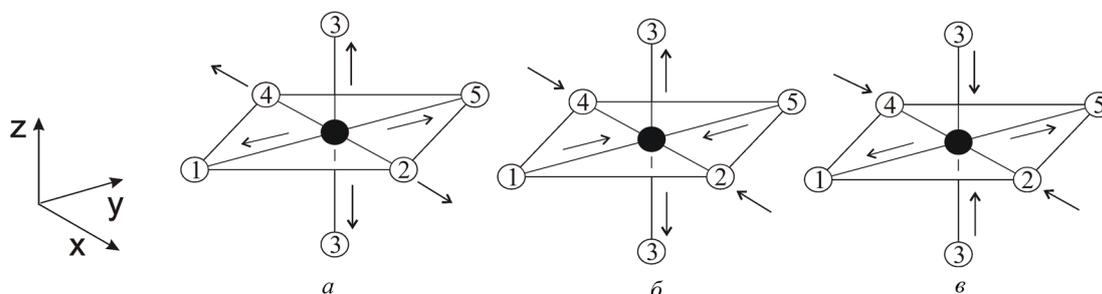


Рис. 2. Направления искажений в октаэдре MoO₆ при прогреве от 600 до 850 °С в индивидуальном MoO₃ (а), композите TiO₂-MoO₃ (10 мол. %) (б) и в композите TiO₂-MoO₃ (1 мол. %) (в)

после прогрева при 600 °С и их незначительное уменьшение после прогрева при 850 °С. Лишь для связей Mo–O(3) наблюдается дальнейшее незначительное увеличение длины после прогрева при 850 °С, т. е. наблюдается небольшое растяжение октаэдра MoO₆ в аксиальном направлении (рис. 2, б, в). Величина изменения связей при прогреве 600–850 °С мала, т. е. можно говорить об устойчивости октаэдра MoO₆ в данном температурном интервале. Сохранение характера изменений длин связи Mo–O в композите с содержанием MoO₃ 10 мол. % сходным с изменениями в индивидуальном триоксиде молибдена и резкое различие характера изменений в композите с 1 мол. % MoO₃ указывают на наличие взаимодействий в системе TiO₂–MoO₃ с 1 мол. % триоксида молибдена, состоящих в нарушении структуры как MoO₃, так и TiO₂ при формировании композита, причем взаимодействия тем более выражены, чем выше температура прогрева.

Наличие тетрагональных искажений в структурных элементах композитных материалов TiO₂–MoO₃ по различным направлениям (рис. 1 и 2) указывает на высокую подвижность кислорода решетки триоксида молибдена, что позволяет ему активно участвовать в процессах окисления адсорбированных молекул, т. е. улучшает каталитические свойства системы. Кроме того, величина изменения длины связей Mo–O в сложноксидных образцах на порядок больше, чем для индивидуального MoO₃.

Как показывает анализ полученных результатов, для индивидуального MoO₃ характерно наличие микронапряжений, изменяющихся при прогреве. После температурной обработки при 450 °С триоксид молибдена характеризуется наличием микронапряжений по направлениям [220] и [202]. Микронапряжения по направлению [202] практически исчезают после прогрева при 600 °С, а после прогрева при 850 °С – как по направлению [202], так и по направлению [220].

Диоксид титана в фазе анатаза относится к тетрагональной сингонии, пространственная группа I 41/amd [8]. По данным нейтронографии, объем ячейки анатаза снижается с увеличением содержания модифицирующей добавки триоксида молибдена (табл. 2).

Как показывают результаты фазового анализа, введение модифицирующей добавки триоксида молибдена смещает температуру фазового перехода анатаз–рутил в область больших значений. Для образцов, прогретых при 850 °С, с различным содержанием MoO₃ характерно расширение решетки диоксида титана в фазе рутила. Таким образом, введение MoO₃ в диоксид титана при низких температурах прогрева (450 °С, диоксид титана кристаллизуется в фазе анатаза) приводит к сжатию решетки TiO₂, при высоких температурах (850 °С, фаза анатаза переходит в фазу рутила) – к ее расширению. Данный факт можно объяснить влиянием легирующей добавки MoO₃ на кристаллизацию диоксида титана в процессе прогрева, причем указанное влияние тем более эффективно, чем ниже концентрация легирующего оксида. Некоторая часть оксида молибдена остается в индивидуальном виде, что фиксируется при фазовом анализе.

Основываясь на результатах, полученных методом нейтронографии, определены размеры кристаллитов фаз диоксида титана и оксида молибдена в композитных материалах. Для определения среднего размера частиц строилась зависимость полуширины пика от межплоскостного расстояния [9]

$$W^2 = c_1 + (c_2 + c_3)d^2 + c_4d^4,$$

где W – ширина пика на полувысоте; c_1 и c_2 – коэффициенты, которые определяются функцией разрешения дифрактометра; c_3 – коэффициент, пропорциональный ε^2 , где ε – микродеформация; d – межплоскостное расстояние.

Коэффициент при d^4 связан с размером частиц

$$c_4 \approx K / L^2,$$

где L – размер кристаллитов; K – коэффициент анизотропии, определяющийся формой частиц, для сферических частиц $K = 0,75$.

Как видно из представленных в табл. 3 результатов расчета размера частиц, в композитных материалах данный параметр для обеих фаз значительно меньше, чем в индивидуальных оксидах, прогретых при той же температуре. Наибольшее влияние на изменение размера частиц диоксида титана оказывает введение 1 мол. % оксида молибдена – по сравнению с индивидуаль-

ным TiO_2 величина снижается в 2 раза. При этом наблюдается кристаллизация наноразмерного высокодисперсного MoO_3 с размером частиц до 10 нм.

Т а б л и ц а 3. Размер частиц в материалах, прогретых при 850 °С

Состав образца	Размер частиц кристаллической фазы, нм	
	Рутил	$\alpha\text{-MoO}_3$
TiO_2	185	–
MoO_3	–	147
$\text{TiO}_2\text{-MoO}_3$ 1 мол. %	89	10
$\text{TiO}_2\text{-MoO}_3$ 10 мол. %	134	75

Исходя из результатов фазового анализа, варьирование количества оксида молибдена в сложнооксидном материале, а также прогрев композитов при различных температурах приводит к формированию кристаллических фаз и возникновению особенностей поликристаллической структуры, которые должны оказывать влияние на газочувствительные свойства материала. На основе синтезированных сложнооксидных материалов были изготовлены чувствительные элементы химических газовых сенсоров. Технология их изготовления и измерения газочувствительных характеристик сенсоров описаны в [4]. Изготовленные сенсоры с нанесенными и высушенными зольями подвергались температурной обработке при 600 °С или при 850 °С для формирования различных кристаллических фаз в газочувствительном материале. Выходной сигнал сенсора рассчитывался как разность напряжения на сенсоре на воздухе и в водородо-воздушной смеси (поверенная газозоодушная смесь с содержанием водорода 1,0 об. %).

Как видно на рис. 3, легирование диоксида титана триоксидом молибдена приводит к значительному повышению выходного сигнала сенсора в среде H_2 -воздух независимо от температуры отжига чувствительных элементов, причем значение выходного сигнала сенсора снижается при увеличении мольного отношения триоксид молибдена : диоксид титана. Снижение концентрации MoO_3 в композите ниже 1 мол. % не приводит к повышению выходного сигнала сенсора.

При сравнении данных, представленных на рис. 3, а и 3, б, очевидно, что при снижении температуры отжига чувствительных элементов до 600 °С выходной сигнал сенсоров остается на том же уровне для сенсоров на основе системы $\text{TiO}_2\text{-MoO}_3$ (10 мол. %) и снижается (на 10–30 мВ) для сенсоров на основе системы $\text{TiO}_2\text{-MoO}_3$ (1 мол. %).

Значительное увеличение выходного сигнала сенсоров на основе композитных материалов $\text{TiO}_2\text{-MoO}_3$ в сравнении с сенсорами на основе индивидуального диоксида титана указывает на определяющую роль наличия фазы оксида молибдена при детектировании водорода.

Сохранение выходного сигнала сенсоров на основе системы $\text{TiO}_2\text{-MoO}_3$ (10 мол. %), прогретых при 600 и 850 °С, на одном уровне объясняется устойчивостью структуры MoO_6 в данном

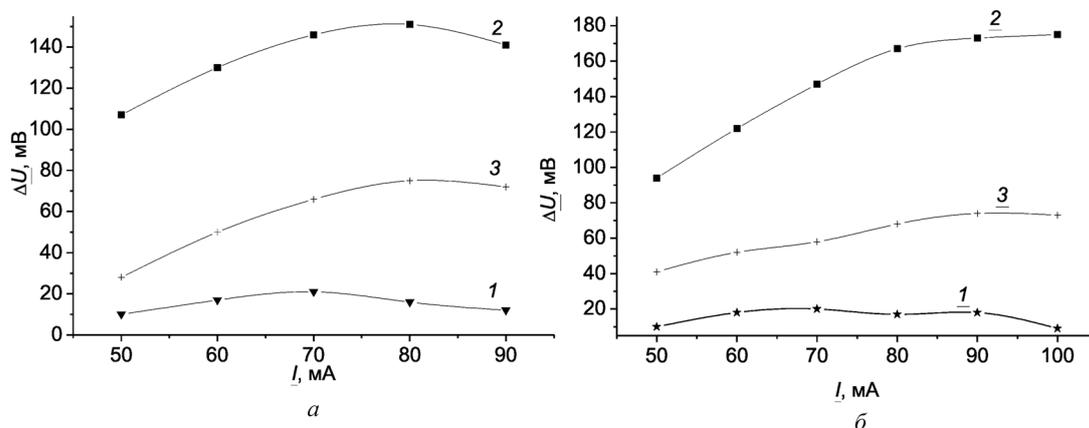


Рис. 3. Зависимость выходного сигнала от рабочего тока сенсоров на основе систем $\text{TiO}_2\text{-MoO}_3$ в водородо-воздушной среде (1,0 об. % H_2): 1 – TiO_2 , 2 – $\text{TiO}_2\text{-MoO}_3$ (1 мол. %), 3 – $\text{TiO}_2\text{-MoO}_3$ (10 мол. %); температура прогрева чувствительных элементов 600 °С (а) и 850 °С (б)

композите при прогреве, тогда как в октаэдрах MoO_6 в композите $\text{TiO}_2\text{-MoO}_3$ (1 мол. %) в температурном интервале 600–850 °С фиксируется наличие различных типов искажений, что увеличивает активность кислорода решетки MoO_3 в процессах каталитического окисления и приводит к повышению выходного сигнала.

Заключение. Полученные результаты позволяют предположить механизм детектирования водорода газочувствительными материалами на основе композитов $\text{TiO}_2\text{-MoO}_3$. Адсорбция молекул водорода наиболее вероятна на наноразмерные частицы MoO_3 , содержащие координационно ненасыщенные ионы молибдена, наличие которых установлено в ранее проведенных исследованиях [10]. Окисление адсорбированных молекул происходит при участии как поверхностных и мостиковых групп Ti-OH , так и кислорода решетки MoO_3 . Высокая активность кислорода решетки оксида молибдена подтверждается его высокой подвижностью, установленной методом рентгено- и нейтронографии, а также способностью к изменению координационного окружения атома молибдена, установленной ранее [11].

Значительное увеличение выходного сигнала сенсоров, изготовленных на основе композитного материала с наименьшим содержанием MoO_3 , обусловлено кристаллизацией высокодисперсного наноразмерного триоксида молибдена, обладающего высокой каталитической активностью. Размер частиц MoO_3 в композитных материалах с большим содержанием MoO_3 , а также в индивидуальном оксиде молибдена, прогретых в тех же условиях, превышает размер частиц MoO_3 в композите с 1 мол. % MoO_3 в 10–20 раз. Таким образом, при увеличении содержания MoO_3 в сложнооксидном материале наблюдается увеличение размера частиц кристаллических фаз TiO_2 и MoO_3 , что снижает каталитическую активность композита.

Литература

1. Komandur V. R. C., Kondakindi R. R., Chinthala P. K. // Catal. Commun. 2001. Vol. 2. P. 277–284.
2. Galatsis K. et al. // Sens. Actuators B. 2001. Vol. 77. P. 472–477.
3. Zhao-Bin W., Cheng-Dong W., Qin X. // Acta Physico-Chimica Sinica. 1994. Vol. 10. P. 402–408.
4. Мычко Д. И., Боборико Н. Е., Каркоцкий Г. Ф., Дашко Н. С. // Свиридовские чтения. 2012. Вып. 8. С. 109–115.
5. Боборико Н. Е., Мычко Д. И. // Неорг. мат. 2013. Т. 49, № 8. С. 853–859.
6. Aksenov V. L. et al. // J. Neutron Res. 1997. Vol. 5. P. 181–200.
7. Rodriguez-Carvajal J. // Physica B. 1993. Vol. 192. P. 55–62.
8. Кристаллографическая и кристаллохимическая База данных для минералов и их структурных аналогов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://database.iem.ac.ru/mincryst/rus/>.
9. Bruno G. et al. // J. Eur. Ceram. Soc. 2010. Vol. 30. P. 2555–2562.
10. Боборико Н. Е., Ланчук Н. М., Азарко И. И., Мычко Д. И. // Журн. прикладной спектроскопии. 2013. Т. 80, № 2. С. 211–215.
11. Boboriko N. E., Mychko D. I. // Vib. Spectrosc. 2014. Vol. 70. P. 36–41.

N. E. BOBORIKO, I. A. BOBRIKOV, D. I. MYCHKO, G. F. KARKOTSKY

boboriko@bsu.by

SYNTHESIS AND THE STRUCTURE OF $\text{TiO}_2\text{:MoO}_3$ GAS SENSING COMPOSITE MATERIALS

Summary

Introduction of molybdenum trioxide to gas sensing materials based on titanium dioxide results in a considerable increase of the output signal in the hydrogen-air environment. It is established that the value of the output signal reaches the maximum at the 1 mol. % MoO_3 content in the composite material. Improved gas sensing characteristics of $\text{TiO}_2\text{:MoO}_3$ composite correlate with the structural and phase peculiarities of this system – the inhibition of TiO_2 crystallization in the $\text{TiO}_2\text{:MoO}_3$ system, the shift of anatase-rutile phase transition to the higher temperature area in comparison with the temperature of this transition in unloaded TiO_2 , and with the presence of different types of tetrahedral distortions in MoO_6 octahedrons, which ensures the MoO_3 lattice high activity in the processes of hydrogen catalytic oxidation, and also with the crystallization of highly dispersed molybdenum oxide with a particle size of 10 nm.

УДК 54.165.2+666.265

Л. А. БАШКИРОВ¹, И. Н. КАНДИДАТОВА¹, П. П. ПЕРШУКЕВИЧ²**СЕНСИБИЛИЗИРУЮЩЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ИОНОВ ХРОМА (III)
НА ФОТОЛЮМИНЕСЦЕНЦИЮ АКТИВИРОВАННОГО ИОНАМИ ПРАЗЕОДИМА
ЛЮМИНОФОРА НА ОСНОВЕ ИНДАТА ЛАНТАНА**

(Представлено академиком А. И. Лесниковичем)

¹Белорусский государственный технологический университет, Минск²Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск

Поступило 29.01.2014

Введение. В последнее десятилетие значительно повысился интерес к исследованию оптических свойств люминофоров на основе LaInO_3 , LaGaO_3 , легированных ионами редкоземельных элементов Pr^{3+} , Sm^{3+} , Eu^{3+} , Tb^{3+} [1–3], излучающих свет в видимой области, которые перспективны для изготовления светодиодов белого света.

В литературе имеются сведения об использовании иона висмута Bi^{3+} как сенсibilизатора люминесценции оксидных фотолюминофоров на основе индата лантана, легированного ионами редкоземельных элементов [4–6]. Однако, насколько нам известно, сведения о влиянии иона хрома Cr^{3+} на интенсивность излучения подобных фотолюминофоров в литературе отсутствуют, хотя ион хрома Cr^{3+} является хорошо известным активатором и сенсibilизатором для ионов редкоземельных элементов, так как он имеет хорошее собственное поглощение в области видимого спектра, причем полосы поглощения иона хрома Cr^{3+} перекрываются с полосами поглощения ионов редкоземельных элементов (РЗЭ). К тому же, ионы хрома Cr^{3+} , в отличие от ионов висмута Bi^{3+} , располагаются в индиевой подрешетке твердого раствора $\text{La}_{1-x}\text{R}_x\text{InO}_3$ (R – Pr и другие РЗЭ) со структурой перовскита, а не в редкоземельной. Следовательно, расстояние между ионами Cr^{3+} и R^{3+} больше, чем между ионами Bi^{3+} и R^{3+} , что позволяет предположить, что тушение люминесценции в результате кросс-релаксационного взаимодействия в случае легирования люминофора LaInO_3 : R^{3+} ионами хрома Cr^{3+} будет меньшим, чем в случае использования ионов висмута Bi^{3+} .

Экспериментальная часть. В настоящей работе твердофазным методом проведен синтез твердого раствора $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$ и его легирование ионами Cr^{3+} путем твердофазного растворения при температуре 1573 К 0,5 мол. % предварительно синтезированного LaCrO_3 с кристаллической структурой перовскита в 99,5 мол. % $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$ с образованием твердого раствора $\text{Pr}_{0,0995}\text{La}_{0,9005}\text{Cr}_{0,005}\text{In}_{0,995}\text{O}_3$. Для этих твердых растворов в Отделе аналитических и спектральных измерений Института физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси получены спектры возбуждения люминесценции и фотолюминесценции, анализ которых проведен в настоящей работе. Результаты исследования кристаллической структуры и магнитных свойств твердого раствора $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$ приведены в [7; 8].

Результаты и их обсуждение. На рис. 1 приведены спектры возбуждения люминесценции твердых растворов $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$ и $\text{Pr}_{0,0995}\text{La}_{0,9005}\text{Cr}_{0,005}\text{In}_{0,995}\text{O}_3$ при $\lambda_{\text{пер}} = 654$ нм, показывающие, как изменяется интенсивность люминесценции с длиной волны 654 нм в зависимости от длины волны возбуждения. Из этого спектра возбуждения, а также из спектров фотолюминесценции для $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$ при различных длинах волн возбуждения, например, при 255 нм (рис. 2, кривая 1) и 440 нм (рис. 3), следует, что относительная интенсивность некоторых полос фотолюминесценции зависит от длины волны возбуждающего света. При длине волны возбуждения 255 нм интенсивность полос излучения в интервалах длин волн 460–520 и 590–680 нм

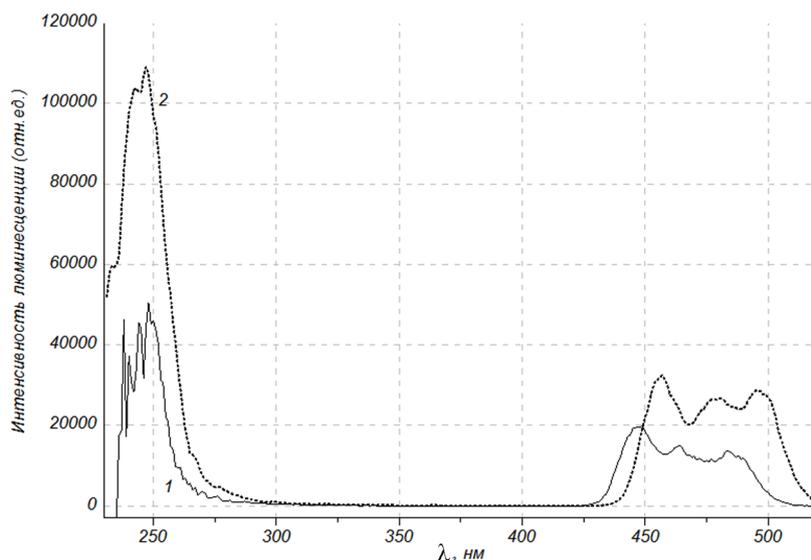


Рис. 1. Спектры возбуждения люминесценции ($\lambda_{\text{рег}} = 654 \text{ нм}$) твердых растворов $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$ (1), $\text{Pr}_{0,0995}\text{La}_{0,9005}\text{Cr}_{0,005}\text{In}_{0,995}\text{O}_3$ (2)

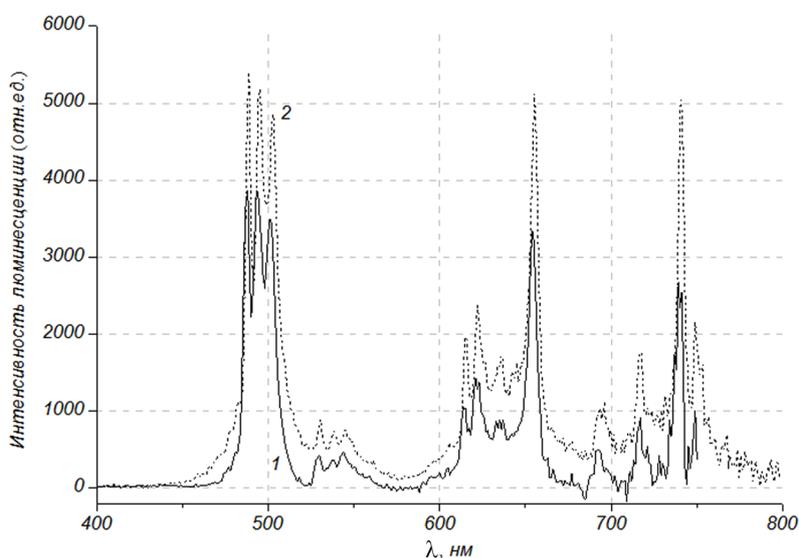


Рис. 2. Спектры фотолюминесценции ($\lambda_{\text{возб}} = 255 \text{ нм}$) твердых растворов $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$ (1), $\text{Pr}_{0,0995}\text{La}_{0,9005}\text{Cr}_{0,005}\text{In}_{0,995}\text{O}_3$ (2)

приблизительно одинакова, а при $\lambda_{\text{возб}} = 440 \text{ нм}$ наиболее интенсивной полосой излучения является полоса в интервале длин волн 590–680 нм.

Полосы возбуждения люминесценции твердого раствора $\text{Pr}_{0,0995}\text{La}_{0,9005}\text{Cr}_{0,005}\text{In}_{0,995}\text{O}_3$, содержащего одновременно как ионы празеодима Pr^{3+} с двумя $4f$ -электронами, так и ионы хрома Cr^{3+} с тремя $3d$ -электронами (рис. 1, кривая 2), имеют большую интенсивность, чем полосы возбуждения твердого раствора $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$ (рис. 1, кривая 1).

Максимумы полосы возбуждения люминесценции, расположенной в интервале длин волн 230–260 нм и обусловленной переходами типа $4f^2 \rightarrow 4f5d$ ионов Pr^{3+} [9], в спектрах возбуждения люминесценции твердых растворов $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$ и $\text{Pr}_{0,0995}\text{La}_{0,9005}\text{Cr}_{0,005}\text{In}_{0,995}\text{O}_3$ практически совпадают. Максимумы длин волн широких полос возбуждения люминесценции в области длин волн 430–520 нм для хромсодержащего твердого раствора сдвинуты в сторону больших длин волн приблизительно на 10 нм по сравнению с аналогичными максимумами для твердого раствора $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$.

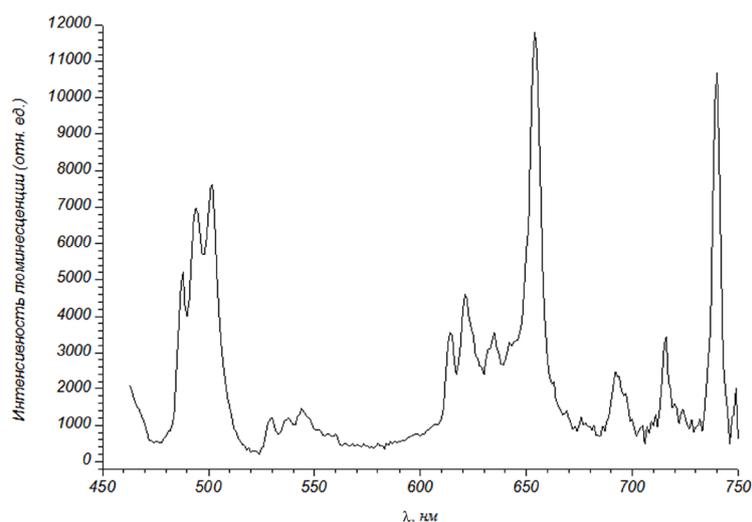


Рис. 3. Спектр фотолюминесценции ($\lambda_{\text{возб}} = 440$ нм) твердого растворов $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$

Для твердого раствора $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$ также были получены спектры поглощения и проведено их сравнение со спектрами возбуждения люминесценции. Расположение полос (длины волн максимумов) в этих спектрах совпадает.

На рис. 2 приведены спектры фотолюминесценции при длине волны возбуждающего излучения 255 нм твердых растворов $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$ и $\text{Pr}_{0,0995}\text{La}_{0,9005}\text{Cr}_{0,005}\text{In}_{0,995}\text{O}_3$. В спектрах люминесценции можно выделить четыре полосы: полосы в интервалах длин волн 460–520 и 520–570 нм расположены в сине-зеленой области видимого спектра, а полосы в интервалах длин волн 590–680 и 680–750 нм расположены в красной области видимого спектра. Таким образом, твердый раствор $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$ является высокоэффективным фотолюминофором, излучающим в сине-зеленой и красной областях видимого спектра.

Используя схему энергетических уровней f -электронов свободных ионов Pr^{3+} (диаграмму Дике) [10], нами определены величины энергетических интервалов f - f переходов, согласно [9], ответственных за фотолюминесценцию иона празеодима в твердых растворах $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$ и $\text{Pr}_{0,0995}\text{La}_{0,9005}\text{Cr}_{0,005}\text{In}_{0,995}\text{O}_3$ (таблица). Нами установлено, что наиболее вероятным f - f переходом, приводящим к возникновению полосы излучения с $\lambda_{\text{изл}} = 741$ нм ($\nu_{\text{изл}} = 1 / \lambda_{\text{изл}} = 13495 \text{ см}^{-1}$), является переход ${}^3P_0 \rightarrow {}^3F_4$, энергетический интервал которого составляет 13625 см^{-1} , т. е. лишь на 140 см^{-1} отличается от величины $\nu_{\text{изл}}$ этой полосы фотолюминесценции.

Максимумы длин волн полос излучения ($\lambda_{\text{изл}}$) и их обратные значения ($\nu_{\text{изл}}$) в спектрах фотолюминесценции при $\lambda_{\text{возб}} = 255$ нм для образцов $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$ и $\text{Pr}_{0,0995}\text{La}_{0,9005}\text{Cr}_{0,005}\text{In}_{0,995}\text{O}_3$, а также f - f переходы, обуславливающие излучение, и их энергетические интервалы

$\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$		$\text{Pr}_{0,0995}\text{La}_{0,9005}\text{Cr}_{0,005}\text{In}_{0,995}\text{O}_3$		f - f переходы (энергетический интервал перехода, см^{-1})
$\lambda_{\text{изл}}$, нм	$\nu_{\text{изл}}$, см^{-1}	$\lambda_{\text{изл}}$, нм	$\nu_{\text{изл}}$, см^{-1}	
489	20450	489	20450	${}^3P_0 \rightarrow {}^3H_4$ (20250)
495	20202	494	20243	–
501	19960	503	19881	–
530	18868	530	18868	${}^3P_1 \rightarrow {}^3H_5$ (18750)
538	18597	539	18553	–
545	18349	547	18282	–
614	16287	615	16260	${}^1D_2 \rightarrow {}^3H_4$ (16750)
625	16000	622	16077	–
636	15723	636	15723	–
655	15267	655	15267	${}^3P_0 \rightarrow {}^3F_2$ (15375)
694	14409	694	14409	–
717	13947	717	13947	–
741	13495	741	13495	${}^3P_0 \rightarrow {}^3F_4$ (13625)

Максимумы полос фотолюминесценции твердого раствора $\text{Pr}_{0,0995}\text{La}_{0,9005}\text{Cr}_{0,005}\text{In}_{0,995}\text{O}_3$ совпадают с максимумами полос фотолюминесценции твердого раствора $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$. При этом следует отметить, что интенсивность всех полос фотолюминесценции твердого раствора $\text{Pr}_{0,0995}\text{La}_{0,9005}\text{Cr}_{0,005}\text{In}_{0,995}\text{O}_3$ на 34–89 % выше, чем для $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$. Таким образом, впервые показано, что введение в состав твердого раствора $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$ 0,5 мол. % ионов хрома Cr^{3+} за счет эквивалентного уменьшения содержания ионов In^{3+} с образованием твердого раствора $\text{Pr}_{0,0995}\text{La}_{0,9005}\text{Cr}_{0,005}\text{In}_{0,995}\text{O}_3$ позволяет значительно увеличить интенсивность излучения фотолюминофора, полученного на основе LaInO_3 , легированного одновременно ионами Pr^{3+} , Cr^{3+} .

Согласно литературным данным [11], в видимой и ближней УФ-областях спектр поглощения рубина $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3 : \text{Cr}^{3+}$ содержит три широкие полосы поглощения с максимумами при 256, 410, 550 нм, из которых две полосы перекрываются с полосами возбуждения люминесценции в спектре возбуждения люминесценции твердого раствора $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$ (рис. 1, кривая 1). Можно предположить, что именно по этой причине введение 0,5 мол. % ионов Cr^{3+} в кристаллическую структуру твердого раствора $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$ приводит к увеличению интенсивности полос возбуждения люминесценции (рис. 1, кривая 2) и фотолюминесценции (рис. 2, кривая 2) полученного люминофора $\text{Pr}_{0,0995}\text{La}_{0,9005}\text{Cr}_{0,005}\text{In}_{0,995}\text{O}_3$.

Заключение. В работе показано, что твердые растворы $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$ и $\text{Pr}_{0,0995}\text{La}_{0,9005}\text{Cr}_{0,005}\text{In}_{0,995}\text{O}_3$ являются высокоэффективными фотолуминофорами, излучающими в сине-зеленой и красной областях видимого света, что делает их перспективными для использования при создании светодиодов белого света.

Впервые показано, что введение в состав твердого раствора $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$ 0,5 мол. % ионов Cr^{3+} за счет эквивалентного уменьшения содержания ионов In^{3+} с образованием твердого раствора $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3 : 0,005 \text{Cr}^{3+}$ приводит к значительному увеличению интенсивности излучения фотолюминофора, полученного на основе LaInO_3 , легированного ионами Pr^{3+} .

Литература

1. Li Q., Huang J., Chen D. // J. Alloys Compd. 2011. Vol. 509. P. 1007–1010.
2. Liu X., Lin J. // Solid State Sci. 2009. Vol. 11. P. 2030–2036.
3. Watras A., Pazik R., Deren P. J. // J. Lumin. 2013. Vol. 133. P. 35–38.
4. Lin J., Qiang Su, Wang Sh., Zhang H. // J. Mater. Chem. 1996. Vol. 6. P. 265–269.
5. Okamoto S., Yamamoto H. // J. Lumin. 2003. Vol. 102–103. P. 586–589.
6. Qiang Su // J. Lumin. 1983. Vol. 28. P. 1–11.
7. Кандидатова И. Н., Баширов Л. А., Петров Г. С. // Тр. БГТУ. Химия и технология неорганич. в-в. 2012. № 3. С. 29–31.
8. Баширов Л. А., Затюпо А. А., Кандидатова И. Н. и др. // Актуальные проблемы физики твердого тела: сб. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 2011. Т. 2. С. 7–9.
9. Tang An, Zhang D., Yang Liu, Wang X. // Optoelec. Adv. Mater. 2011. Vol. 5, N 10. P. 1031–1034.
10. Ogasawara K., Watanabe S., Toyoshima H., Brik M. G. // HPCRE. 2007. Vol. 37. P. 1–59.
11. Свиридов Д. Т., Свиридова Р. К., Смирнов Ю. Ф. Оптические спектры ионов переходных металлов. М., 1976.

L. A. BASHKIROV, I. N. KANDIDATOVA, P. P. PERSHUKEVICH

kin1988@mail.ru

CHROMIUM (III) ION AS A SENSITIZER OF PHOTOLUMINESCENCE OF ION-ACTIVATED PRASEODYMIUM OF PHORSHOR BASED ON LANTHANUM INDATE

Summary

Luminescent properties of $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$ and $\text{Pr}_{0,0995}\text{La}_{0,9005}\text{Cr}_{0,005}\text{In}_{0,995}\text{O}_3$ solid solutions were investigated. It was shown that $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$ and $\text{Pr}_{0,0995}\text{La}_{0,9005}\text{Cr}_{0,005}\text{In}_{0,995}\text{O}_3$ have a promising application as phosphors for white LEDs. It was found that Cr^{3+} ion is a good sensitizer of the Pr^{3+} ion photoluminescence in LaInO_3 -based phosphors.

БИОЛОГИЯ

УДК 574.52

Член-корреспондент В. П. СЕМЕНЧЕНКО, академик Л. М. СУЩЕНЯ

**ВЛИЯНИЕ НАГОННЫХ ЯВЛЕНИЙ И ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ВОДНЫХ МАСС
НА СОДЕРЖАНИЕ БИОГЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
В ЛИТОРАЛЬНОЙ ЗОНЕ СЛАБОЭВТРОФНОГО ОЗЕРА**

НПЦ НАН Беларуси по биоресурсам, Минск

Поступило 11.09.2013

Введение. В мелководных водоемах с хорошо развитой литоральной зоной ветровое воздействие приводит к значительному перемешиванию водных масс, нагону воды, увеличению количества взвешенного вещества в прибрежной зоне. В результате этого из донных отложений может высвободиться значительное количество биогенных элементов, в первую очередь, растворенных форм азота и фосфора [1; 2]. Изменения различных гидрохимических параметров также определяются характером литоральной зоны: ее протяженностью, наличием и степенью зарастания высшей водной растительностью, характером донных отложений и др. В частности, плотные заросли надводной растительности снижают волновое воздействие на прибрежную зону.

Нагонные явления и волновое перемешивание в литоральной зоне имеют также целый ряд экологических последствий [3]. Они влияют на развитие фито- и зоопланктона, макрозообентоса и распределение рыб [4; 5]. Показано, что нагон воды в литоральную зону приводит к коренной перестройке структуры зоопланктона [6]. Высвобождение биогенных элементов может способствовать развитию фитопланктона, в том числе и сине-зеленых водорослей.

Главной особенностью воздействия нагонных явлений на литоральную зону является их временная непредсказуемость. Это в определенной степени затрудняет оценку последствий от нагонных явлений, которые могут длиться от нескольких часов до нескольких дней.

Воздействие волнового перемешивания на различные процессы в прибрежной зоне достаточно хорошо изучено для морских эстуариев, в то время как для озерных экосистем, особенно небольшой площади и глубины, такого рода данные практически отсутствуют.

Основной целью данных исследований было определить воздействие нагонных явлений и перемешивания водных масс на концентрацию растворенных форм азота и фосфора в литоральной зоне слабоэвтрофного озера.

Материалы и методы исследования. Исследования проведены в летний сезон (июль) на слабоэвтрофном оз. Обстерно (Республика Беларусь). Площадь водоема составляет около 10 км², средняя глубина – 5,0 м, средняя прозрачность воды по диску Секки – 3,0 м за период исследований.

Озеро характеризуется выраженной литоральной зоной, протяженность которой в местах отбора проб составляет около 50 м, местами сильно заросшей тростником (*Phragmites australis*) и камышом (*Scirpus lacustris*). Пробы для гидрохимического анализа отбирали батометром в прибрежной зоне (глубина около 1 м) с поверхностного слоя воды в штилевую погоду и во время нагона воды. Параллельно фиксировали температуру, pH, электропроводность, направление ветра. Величина волнения во время нагона воды и перемешивания водных масс в литоральной зоне составила 3 балла (максимальная высота волны – 0,4 м), т. е. была относительно небольшой.

Определение гидрохимических показателей (ионы PO_4^- , NO_3^- , NH_4^+) проведено фотометрически, используя оборудование фирмы HANNA (HI 83 000). Данные получены для двух типов биотопов: заросли камыша и литораль без зарослей (чистая литораль), а также в пелагической части озера. Отметим, что станции отбора проб не подвергались прямому антропогенному загрязнению.

Результаты и их обсуждение. Чтобы определить изменения гидрохимических показателей и концентрацию биогенных элементов в течение достаточно длительного времени, на протяжении июля пробы отбирали с периодичностью 1 раз в три дня, после чего были рассчитаны средние значения. За исследуемый период температура, pH и величины электропроводности оставались относительно постоянными (таблица). Иная картина получена для концентрации растворенных форм азота (рис. 1).

Средние значения некоторых гидрохимических показателей в оз. Обстерно в течение июля (время измерения – 12⁰⁰)

Место забора проб	Температура, °C	pH	TDS, μS
Пелагиаль	21,9 ± 1,7	8,2 ± 0,4	124,6 ± 1,5
Чистая литораль	22,3 ± 1,8	8,4 ± 0,2	125,0 ± 1,2
Камыш	22,4 ± 1,9	8,3 ± 0,1	124,4 ± 6,3

Для данных биогенных элементов (ионы NO_3^- , NH_4^+) возможны достаточно значительные колебания концентрации в течение одного месяца. При этом в литоральной зоне величины стандартного отклонения выше таковых в пелагиали (рис. 1).

Что касается концентрации растворенного фосфора, то она была относительно одинаковой в разных биотопах в течение исследуемого периода.

Причины колебаний гидрохимических показателей, в особенности нитратного и аммонийного азота, могут быть вызваны значительным перемешиванием воды, спровоцированным нагонными явлениями и, соответственно, поступлением биогенных элементов из донных осадков.

Проведенные нами исследования показали, что спустя три дня после нагона воды концентрация ионов PO_4^- значительно увеличилась (рис. 2). Еще более возросла концентрация аммонийного азота, особенно в зоне с зарослями камыша (рис. 3).

Для того чтобы определить возможное воздействие ветрового перемешивания водных масс на содержание биогенных элементов, в частности, растворенного фосфора, был проведен следующий эксперимент.

В прибрежной зоне оз. Обстерно (глубина 0,5 м) было проведено механическое перемешивание воды, после чего отобраны пробы воды (5 л) со взвесью. После осаждения взвеси было проведено определение концентрации растворенного фосфора. Оказалось, что по отношению к контролю в чистой литорали концентрация фосфора увеличилась в 1,2 раза, а в литорали с зарослями камыша – в 3 раза.

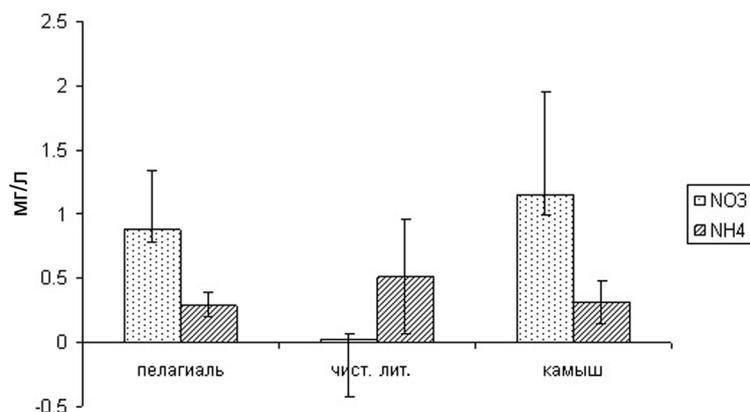


Рис. 1. Концентрация растворенных форм азота в разных биотопах оз. Обстерно

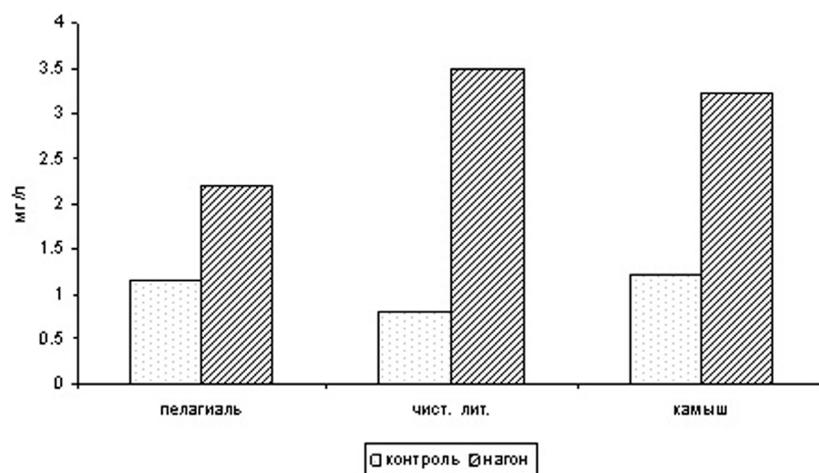


Рис. 2. Изменение концентрации растворенного фосфора при нагоне воды в литеральной зоне оз. Обстерно

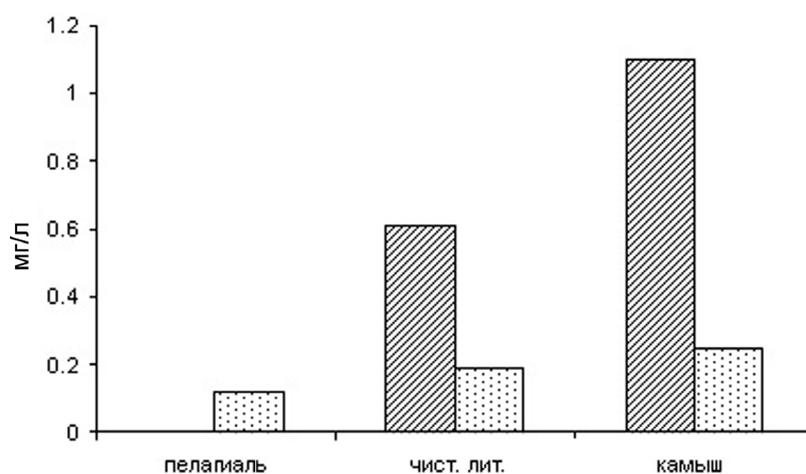


Рис. 3. Изменение концентрации аммонийного азота при нагоне воды в литеральной зоне оз. Обстерно

Различия в высвобождении растворенного фосфора, наблюдавшиеся при перемешивании воды, между чистой литералью и зарослями камыша могут быть в первую очередь вызваны его повышенной концентрацией в донных отложениях зарослей вследствие отмирания растений.

Таким образом, нагонные явления и интенсивное перемешивание водных масс в литеральной зоне озер могут приводить к существенному высвобождению биогенных элементов с донных отложений. Это, соответственно, создает благоприятные условия для массового развития фитопланктона и, в частности, сине-зеленых водорослей, вызывающих «цветение» воды.

Авторы выражают благодарность Т. Н. Рыбкиной за помощь в проведении гидрохимических анализов.

Литература

1. Gude H., Seidel M., Teiber P., Weymuller M. // Verh. Internat. Verein. Limnol. 2000. Vol. 27. P. 1–4.
2. Hofmann H., Lorke A., Peeters F. // Hydrobiologia. 2008. Vol. 613. P. 85–96.
3. Scheifhacken N., Fiek C., Rothhaupt K.-O. // Fundamental and Applied Limnology. 2007. Vol. 169, N 2. P. 115–129.
4. Stoll S., Hofmann H., Fischer P. // J. Fish Biol. 2010. Vol. 76. P. 1714–1728.
5. Hofmann H., Lorke A., Peeters F. // Limnol. Oceanogr. 2008. Vol. 53, N 1. P. 368–380.
6. Палаш А. Л. // Весці НАН Беларусі. Сер. біял. навук. 2007. № 1. С. 86–88.

V. P. SEMENCHENKO, L. M. SUSCHENYA

semenchenko57@mail.ru

INFLUENCE OF THE PILEUP AND MIXING OF WATER ON THE CONCENTRATION OF BIOGENIC ELEMENTS IN THE LITTORAL ZONE OF THE EUTROPHIC LAKE

Summary

The influence of the pileup and mixing of water on the concentration of dissolved nitrate nitrogen, ammonium nitrogen, and phosphorus in the littoral zone of eutrophic Lake Obsterno (Belarus) has been studied.

This concentration was determined for the two types of the littoral zone – with and without water-air vegetation (*Scirpus lacustris*). After the pileup the concentrations of PO_4^- , NO_3^- , NH_4^+ ions increased. The increasing of PO_4^- was higher in the littoral zone without vegetation, but NH_4^+ – in the littoral with vegetation.

Thus, the pileup and mixing of water in the littoral zone lead to an increase in biogenic elements, which may influence the phytoplankton development.

УДК 57.083.18

Л. Н. ВАЛЕНТОВИЧ, С. К. ЛОЗЮК, член-корреспондент Э. И. КОЛОМИЕЦ, М. А. ТИТОК

**МОЛЕКУЛЯРНО-ГЕНЕТИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИ
ЗНАЧИМЫХ БАКТЕРИЙ РОДА *BACILLUS***

Институт микробиологии НАН Беларуси, Минск

Поступило 25.11.2013

Введение. Повсеместно распространенные в природной среде бактерии рода *Bacillus*, способные продуцировать во внешнюю среду широкий спектр биологически активных соединений, являются перспективными объектами биотехнологии. В частности, они используются при производстве ферментов, а также входят в состав пробиотиков и биологических препаратов, обеспечивающих защиту животных и растений от вредителей и болезней [1–3]. Установление точной таксономической принадлежности биотехнологически значимых бактерий является необходимым этапом, позволяющим не только прогнозировать наличие в их геноме практически важных генетических детерминант, но и обеспечивает их последующее детальное изучение. Кроме того, знание особенностей генетической организации является основой для целенаправленного конструирования генно-модифицированных штаммов и микробных консорциумов, сочетающих ряд полезных свойств. Следует отметить, что наиболее широко применяемый в настоящее время метод молекулярно-генетической идентификации, основанный на сиквенс-анализе генов 16S рибосомной РНК (25665 последовательностей генов 16S рРНК представлено в доступных базах данных), имеет ряд ограничений. В частности, ряд видов, таких как *Bacillus subtilis*, *Bacillus amyloliquefaciens*, *Bacillus pumilis*, *Bacillus polyfermenticus* имеют высокое сходство нуклеотидных последовательностей генов 16S рРНК (гомология составляет 99–100 %), что не позволяет достоверно установить их видовой статус и, следовательно, затрудняет детальное изучение их геномов. Помимо этого, многие виды рода *Bacillus* представлены рядом подвидов, идентификация которых вызывает еще большие сложности в силу их генетического сходства.

Цель работы – молекулярно-генетическая идентификация биотехнологически значимых бактерий рода *Bacillus* на основании сиквенс-анализа случайных фрагментов хромосомной ДНК.

Материалы и методы исследований. В работе использовали 4 штамма бактерий (334, 262, 17, 245), отнесенные к виду *Bacillus subtilis* на основании физиолого-биохимического и сиквенс-анализа генов 16S рРНК, а также классический штамм *E. coli* XL1-Blue, предназначенный для молекулярного клонирования [4]. В качестве вектора для встраивания случайных фрагментов бактериальной хромосомы использовали плазмиду рMTL21C [5].

Бактерии выращивали в среде LB [6]. Агаризованные среды содержали 1,5 % агара. В работе использовали коммерческий препарат антибиотика ампициллина в концентрации 100 мкг/мл. Изопропилтио-β-D-галактозид (IPTG) и 5-бромо-4-хлоро-3-индоил-β-D-галактопиранозид (X-Gal) производства Thermo Scientific (Литва) готовили в соответствии с рекомендациями фирмы-изготовителя и использовали в концентрации 0,5 мМоль/л и 50 мкг/мл соответственно.

Хромосомную ДНК выделяли из бактерий с использованием СТАВ-буфера [7].

Плазмидную ДНК выделяли с использованием набора реактивов Plasmid Miniprep Kit Thermo Scientific (Литва).

Трансформацию *E. coli* плазмидной ДНК осуществляли методом электропорации с использованием прибора MicroPulser BIO-RAD (США) и кюветы с расстоянием между электродами 2 мм при напряжении 2,5 кВ в течение 5 мсек.

Рестриктию ферментами HindIII, PstI и лигирование ДНК осуществляли в условиях, рекомендуемых фирмой-изготовителем Thermo Scientific (Литва). Размер фрагментов ДНК устанавливали на основании их электрофоретической подвижности в агарозном геле, в качестве реперной ДНК использовали 1 kb DNA Ladder Invitrogen (США).

Для секвенирующей реакции использовали набор реактивов Thermo Sequenase Cycle Sequencing Kit (USB, Affymetrix, США) и меченые Cy5.5-меткой праймеры M13 («Праймтех», Беларусь). Сиквенс осуществляли с помощью автоматического секвенатора 4300 DNA Analyzer Li-COR Biosciences (США). Результаты анализировали с использованием компьютерных программ BLASTN2.2.1 (NCBI сайт: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov>), программного пакета eSeq V.3.1. (Li-COR Biosciences).

Результаты и их обсуждение. Бактерии рода *Bacillus* распространены повсеместно и занимают абсолютно разные экологические ниши (вода, воздух, почва, растительные и животные организмы). Такая поистине «неразборчивость» в местах обитания, в первую очередь, связана с их устойчивостью к стрессовым факторам среды благодаря способности образовывать споры. Однако спорообразование, как способ противостояния неблагоприятным внешним условиям, не является единственной причиной, обеспечивающей широкое распространение данных микроорганизмов в природе. Специфические условия существования, безусловно, накладывают отпечаток на их клеточный метаболизм, который в свою очередь определяется особенностями генетической организации. Утрата «старых» генов (функций) и появление «новых» приводит к дивергенции и образованию новых таксономических групп. Обладая генетическим родством, бактерии рода *Bacillus* характеризуются большим разнообразием признаков и свойств, что свидетельствует об их высоком потенциале изменчивости. В настоящее время установлены генетические локусы, подверженные высокой вариабельности, что выражается в изменении фенотипических и биохимических признаков у представителей даже одной таксономической группы. В частности, большим разнообразием характеризуются генетические детерминанты, обеспечивающие синтез вторичных метаболитов, тейховых кислот, белков, исправляющих нарушения в молекулах ДНК, участвующих в утилизации источников углерода, метаболизме аминокислот, а также поверхностных структур клетки, реагирующих на изменения в окружающей среде [8; 9].

Благодаря своей практической значимости бактерии рода *Bacillus* интенсивно изучаются. В настоящее время базы данных содержат информацию о нуклеотидных последовательностях почти 4500 бактериальных геномов, среди которых более 50 относится к бактериям рода *Bacillus*. Наличие такого объема доступной информации позволяет сравнивать отдельные генетические детерминанты вновь выделенных штаммов с известными. При этом такого рода анализ не требует больших временных и материальных затрат.

В ходе выполнения настоящей работы были определены нуклеотидные последовательности отдельных фрагментов бактериальной хромосомы четырех практически значимых штаммов (используются в качестве основы биопрепаратов для сельского хозяйства), которые ранее на основании физиолого-биохимического и сиквенс-анализа генов 16S рРНК были отнесены к виду *B. subtilis*. Клонирование фрагментов HindIII-PstI бактериальной хромосомы бактерий штаммов 17 и 245 размером от 1,4 до 5,3 т. п. н. в составе вектора рMTL21C с последующим секвенированием вставок с использованием стандартных праймеров M13, позволило установить нуклеотидные последовательности 10 генетических детерминант, определяющих синтез гипотетических полипептидов или белков с известными функциями (табл. 1).

Сравнительный анализ показал, что исследованные последовательности ДНК проявляют высокую степень гомологии (98–99 %) с генами бактерий вида *Bacillus amyloliquefaciens* подвида *plantarum* и менее сходны с соответствующими детерминантами *Bacillus amyloliquefaciens* подвида *amyloliquefaciens* (гомология составляла 90–96 %). Исключение составила лишь одна нуклеотидная последовательность, проявлявшая 99 % сходства с генами обоих подвидов *B. amyloliquefaciens*, определяющая синтез рибосомного белка (табл. 1).

Следует отметить, что выделение двух подвидов в пределах одного вида *amyloliquefaciens* осуществлено относительно недавно и основано на сравнении полноразмерных геномов двух штаммов DSM7 и FZB42 [10]. Показано, что исследованные бактерии отличаются не только ну-

Таблица 1. Сиквенс-анализ фрагментов бактериальной хромосомы штаммов 17 и 245

Секвенированная ДНК (п. н.)	Гомология с известными генами, детерминирующими белки	Идентичность (%)	Видовая принадлежность
Штамм 17			
779	Белок, транспортирующий глицин и бетаин	99 (96**)	<i>Bacillus amyloliquefaciens</i> subsp. <i>plantarum</i> *
721	Гликозилтрансфераза	98 (92**)	–//–
817	Белок репарации	99 (94**)	–//–
834	Адениндеаминаза	99 (94**)	–//–
796	N-ацетилглюкозаминидаза	98 (92**)	–//–
Штамм 245			
624	Белок, осуществляющий котранспорт ионов Na(+) и глюкозы	99 (93**)	<i>Bacillus amyloliquefaciens</i> subsp. <i>plantarum</i> *
630	Гипотетический белок	98 (94**)	–//–
620	Гипотетический белок	99 (95**)	–//–
545	Гипотетический белок	98 (90**)	–//–
339	50S рибосомный белок	99 (99**)	–//–

Примечания: * – приведены значения идентичности секвенированных фрагментов ДНК с генетическими детерминантами *Bacillus amyloliquefaciens* subsp. *plantarum* штаммов FZB42 (Ac. CP000560), AS43.3 (Ac. CP003838), NAU-B3 (Ac. HG514499), CAU B946 (Ac. HE617159), YAU B9601-Y2 (Ac. HE774679); ** – в скобках приведены значения идентичности секвенированных фрагментов ДНК с генетическими детерминантами *Bacillus amyloliquefaciens* subsp. *amyloliquefaciens* штаммов DSM7 (Ac. FN597644), TA208 (Ac. CP002627), LL3 (Ac. CP002634), XH7 (Ac. CP002927).

клеотидными последовательностями отдельных генов, но и рядом других свойств. В частности, установлено, что характерной особенностью представителей подвида *plantarum* является их способность колонизировать корни растений, а также продуцировать специфические вторичные метаболиты. Например, только представители подвида *plantarum* характеризуются способностью синтезировать поликетидные антибиотики макролактин и диффицидин. Кроме того, для представителей подвида *amyloliquefaciens* не идентифицирован фенгицин, являющийся антифунгальным соединением липопротеиновой природы, достаточно широко распространенным среди бактерий рода *Bacillus* [11]. Оказалось, что в хромосоме бактерий подвида *amyloliquefaciens* генетический локус, определяющий синтез этого антифунгального соединения, представлен лишь частично [10].

Таким образом, на основании полученных результатов с высокой вероятностью можно утверждать, что бактерии исследованных штаммов 17 и 245 относятся к бактериям *Bacillus amyloliquefaciens* подвида *plantarum*, что обуславливает дальнейшее направленное изучение практически важных свойств данных микроорганизмов исходя из их таксономической принадлежности.

Не менее интересными оказались результаты сиквенса случайных нуклеотидных последовательностей хромосомы бактерий штаммов 262 и 334. Так же как и в предыдущем случае в состав вектора pMTL21C были клонированы фрагменты HindIII-PstI, полученные в результате обработки тотальной ДНК вышеуказанными ферментами рестрикции (размер вставок составлял 1,4–5,2 т. п. н.). Анализ секвенированных последовательностей выявил их сходство с хромосомными детерминантами бактерий *Bacillus subtilis* (табл. 2).

Казалось бы, в полученных результатах нет ничего неожиданного, поскольку на основании физиолого-биохимического и сиквенс-анализа 16S рРНК они были отнесены к виду *B. subtilis*. Однако более пристальный анализ позволил установить их таксономический статус на уровне подвида. Оказалось, что исследованные последовательности проявляют 99–100 % гомологии с генами бактерий *Bacillus subtilis* подвида *subtilis*, тогда как с аналогичными детерминантами подвида *spizizenii* гомология была достоверно ниже и не превышала 90–95 %. Исключение составили гены, детерминирующие рибосомный белок S20 и S-аденозилметеониндекарбоксилазу, сходство которых с аналогичными последовательностями ДНК обоих подвигов составило 97–99 % (табл. 2).

Т а б л и ц а 2. Сиквенс-анализ фрагментов бактериальной хромосомы штаммов 334 и 262

Секвенированная ДНК (п. н.)	Гомология с известными генами, детерминирующими белки	Идентичность (%)	Видовая принадлежность
Штамм 334			
433	Рибосомный белок S20	100 (97**)	<i>Bacillus subtilis</i> subsp. <i>subtilis</i> *
878	Сурфактинсинтетаза	98 (92**)	–// –
654	Бета-гидроксиациддегидрогеназа	99 (93**)	–// –
886	Белок, транспортирующий марганец	99 (95**)	–// –
790	Пируватоксидаза	98 (90**)	–// –
Штамм 262			
745	АТФ-зависимая протеаза	99 (95**)	<i>Bacillus subtilis</i> subsp. <i>subtilis</i>
853	Регулятор ответа двухкомпонентной системы	98 (90**)	–// –
819	Белок инициации репликации, связанный с мембраной	99 (95**)	–// –
638	S-аденозилметеониндекарбоксилаза	99 (99**)	–// –
758	Пермеаза семейства ABC транспортеров	99*** (90**)	*

П р и м е ч а н и я: * – приведены значения идентичности секвенированных фрагментов ДНК с генетическими детерминантами *Bacillus subtilis* subsp. *subtilis* штаммов ВАВ-1 (Ас. СР004405), RO-NN-1 (Ас. СР002906), 6051-HGW (Ас. СР003329), BSP1 (Ас. СР003695), 168 (AL009126); ** – в скобках приведены значения идентичности секвенированных фрагментов ДНК с генетическими детерминантами *Bacillus subtilis* subsp. *spizizenii* штаммов W23 (Ас. СР002183), TU-B-10 (Ас. СР002905); *** – для гена, детерминирующего пермеазу семейства ABC транспортеров, приведено значение гомологии с аналогичным геном бактерий *B. subtilis* BSn5, при этом сходство с аналогичным геном бактерий *B. subtilis* subsp. *subtilis* 168 составило 96 %.

Как указывалось ранее, особенностями генетической организации у разных подвидов и даже штаммов характеризуются системы, обеспечивающие взаимодействие бактерий с внешней средой [9]. Среди них, безусловно, не последнюю роль играют белки транспорта, обеспечивающие введение и выведение из клетки определенных типов соединений [8]. В этом плане хотелось бы отметить, что для штамма 262 ген, детерминирующий синтез пермеазы эффлюкс системы ABC, проявлял наибольшее сходство с аналогичным геном штамма *B. subtilis* BSn5, тогда как с типовыми штаммами *B. subtilis* подвида *subtilis* сходство не превышало 96 %, а с представителями *B. subtilis* подвида *spizizenii* составило только 90 %. В связи с этим хотелось бы отметить некоторые особенности бактерий штамма *B. subtilis* BSn5. Данные эндофитные микроорганизмы (выделены из тканей растения *Amorphophallus konjac*) способны продуцировать специфическое белковое соединение, подавляющее рост и развитие патогенных бактерий *Erwinia carotovora* subsp. *carotovora*, вызывающих мягкие гнили корней многих растений. Для бактерий *B. subtilis* BSn5 определена нуклеотидная последовательность всего генома, что позволило сравнить ее организацию с типовым штаммом *B. subtilis* subsp. *subtilis* 168. Оказалось, что геном *B. subtilis* BSn5 отличается от типового штамма 168 наличием небольших вставок и делеций размером около 5 т. п. н. Изменения затрагивают ряд функций, связанных с регуляцией споруляции, синтезом клеточной стенки, антибиотиков, ферментами рестрикции-модификации, эффлюкс-системой и некоторые другие свойства. Более 4,8 % генома бактерий *B. subtilis* BSn5 вовлечены в синтез антибиотиков, причем некоторые из выявленных детерминант, обеспечивающих синтез практически ценных вторичных метаболитов, отсутствуют в геноме типового штамма *B. subtilis* 168 (например, локусы BSn5_04295–BSn5_04355, вовлеченные в синтез антимикробных соединений гибридной природы, а также ген BSn5_12550, определяющий синтез субланцина). В то же время специфические генетические кластеры, детерминирующие синтез лантибиотика паенибациллина и участвующие в регуляции споруляции, отсутствуют в хромосоме эндофитных бактерий штамма *B. subtilis* BSn5 [12].

Заключение. Таким образом, в результате сиквенс-анализа хромосомных последовательностей штаммов 334 и 262 было установлено, что они относятся к виду *Bacillus subtilis* подвида *subtilis*. Высокая гомология гена, определяющего синтез пермеазы семейства ABC транспорте-

ров, бактерий штамма 262 с аналогичной детерминантой штамма *B. subtilis* BSn5 может указывать на некоторые особенности его генетической организации.

Следует отметить, что в ходе выполнения настоящей работы получены результаты, которые обосновывают возможность идентификации бактерий рода *Bacillus* с использованием простого методического приема, предполагающего секвенирование случайных фрагментов бактериальной хромосомы. По сути, предложенный методический подход является одним из разновидностей широко используемого филогенетического анализа, предполагающего определение нуклеотидных последовательностей отдельных генетических детерминант, среди которых наиболее часто анализируются гены, детерминирующие синтез субъединиц гиразы (*gyrA*), РНК-полимеразы (*rpoB*), ДНК-полимеразы (*polC*), белка теплового шока (*groEL*), 16S рРНК и некоторые другие [13]. Однако в отличие от известных приемов, он не требует проведения полимеразной цепной реакции с использованием специфических праймеров, что в определенной степени удешевляет и ускоряет процедуру идентификации.

Литература

1. Schallmey M., Singh A., Ward O. P. // Can. J. Microbiol. 2004. Vol. 50, N 1. P. 1–17.
2. Berg G. // Appl. Microbiol. Biotechnol. 2009. Vol. 84. P. 11–18.
3. Cruz P. M., Ibáñez A. L., Hermosillo O. A. M., Saad H. C. R. // ISRN Microbiol. 2012. Vol. 2012. P. 916845–916860.
4. Bullock W. O., Fernandez J. M., Short J. M. // Biotechniques. 1987. Vol. 5. P. 376–380.
5. Chambers S. P., Prior S. E., Barstow D. A., Minton N. P. // Gene. 1988. Vol. 68, N 1. P. 139–149.
6. Миллер Дж. Эксперименты в молекулярной генетике. М., 1976. – 436 с.
7. Wilson K. Current Protocols in Molecular Biology. 1997. – 5300 p.
8. Earl A. M., Losick R., Kolter R. // J. Bacteriol. 2007. Vol. 89, N 3. P. 1163–1170.
9. Earl A. M., Losick R., Kolter R. // Trends Microbiol. 2008. Vol. 16, N 6. P. 269.
10. Borriss R., Chen X-H., Rueckert C. et al. // Intern. J. of Systematic and Evolutionary Microbiology. 2011. Vol. 61. P. 1786–1801.
11. Ramarathnam R., Bo S., Chen Y. et al. // Can. J. Microbiol. 2007. Vol. 53, N 7. P. 901–911.
12. Deng Y., Zhu Y., Wang P. et al. // J. Bacteriol. 2011. Vol. 193, N 8. P. 2070–2071.
13. Rooney A. P., Price N. P. J., Ehrhardt C. et al. // Intern. J. of Systematic and Evolutionary Microbiology. 2009. Vol. 59. P. 2429–2436.

L. N. VALENTOVICH, S. K. LAZIUK, E. I. KOLOMIETS, M. A. TITOK

titok@bsu.by

MOLECULAR-GENETIC IDENTIFICATION OF BIOTECHNOLOGICALLY RELEVANT BACTERIA OF THE GENUS *BACILLUS*

Summary

We have proposed an original approach for precise identification of bacteria of the genus *Bacillus*. Random fragment sequencing of bacterial chromosome DNA allowed us to establish a taxonomic membership for four studied microorganisms at the subspecies level (*Bacillus amyloliquefaciens* subsp. *plantarum* and *B. subtilis* subsp. *subtilis*).

УДК 575.174.015.3

В. С. ПАНКРАТОВ¹, Е. И. КУШНЕРЕВИЧ², член-корреспондент О. Г. ДАВЫДЕНКО¹

ПОЛИМОРФИЗМ МАРКЕРОВ Y-ХРОМОСОМЫ В ПОПУЛЯЦИИ БЕЛОРУССКИХ ТАТАР

¹Институт генетики и цитологии НАН Беларуси, Минск

²Эстонский биоцентр, Тарту

Поступило 27.01.2014

Введение. Проведенное ранее масштабное исследование генетической структуры популяции белорусов по маркерам Y-хромосомы и мтДНК [1] позволило ответить на ряд вопросов относительно их популяционной истории. Однако население современной Беларуси представлено не только белорусами, но и другими этносами, что необходимо учитывать как в генетических исследованиях, так и в приложении результатов таких исследований на практике.

Одной из этнических групп, генетическая структура которых может существенно отличаться от таковой белорусов, являются белорусские (литовские) татары. По данным последней переписи населения, в Беларуси проживает более 7 тысяч людей, идентифицирующих себя как белорусские татары. Согласно историческим сведениям, основа татарской популяции на территории Великого Княжества Литовского сформировалась в конце XIV в. в результате миграций из Золотой Орды, в частности, с территории Крыма и Приазовья [2]. Определенный вклад в формирование белорусских татар внесли и другие, как более ранние, так и более поздние миграционные события [2].

Цель работы – изучение генетической структуры современной популяции белорусских татар с тем, чтобы выявить их генетическое сходство и возможное родство с другими народами и определить степень взаимного генетического влияния белорусов и белорусских татар.

Материалы и методы исследования. Забор биологического материала осуществлялся у представителей популяции белорусских татар (всего 74 человека) на основании их добровольного информированного согласия и при условии, что их предки в первом и втором поколении идентифицировали себя татарами, не являлись прямыми родственниками по мужской и женской

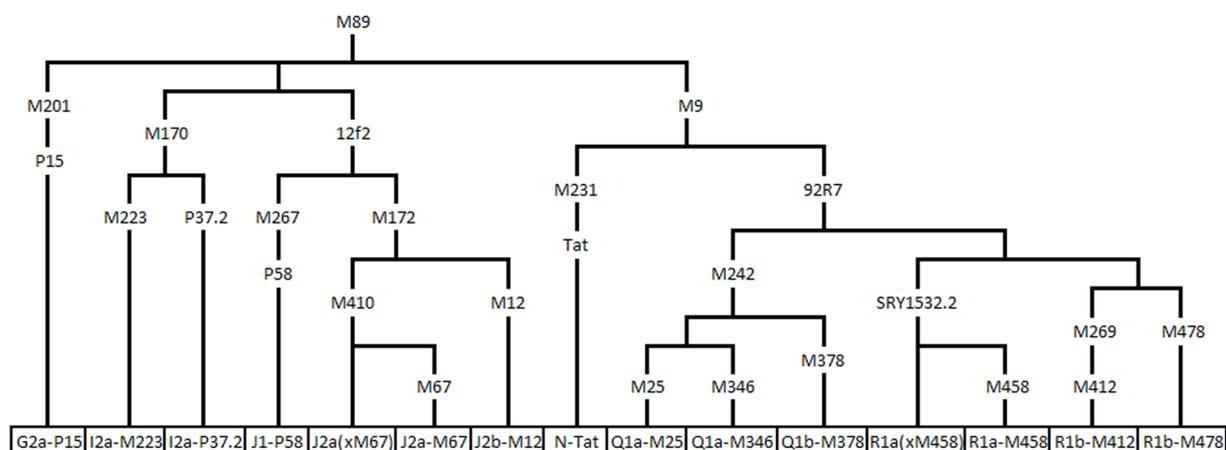


Рис. 1. Маркеры Y-хромосомы, использованные в работе, и филогенетические связи соответствующих гаплогрупп. Обозначения J2a(xM67) и R1a(xM458) используются для Y-хромосом, несущих производные аллели маркеров M410 и SRY1532.2, но предковые аллели маркеров M67 и M458 соответственно

линиям и проживали на территории Беларуси. ДНК выделяли из соскоба буккального эпителия с использованием протеиназы К и хлороформ-фенольной экстракции [3].

Маркеры, по которым проводилось генотипирование, а также филогенетические связи соответствующих гаплогрупп Y-хромосомы приведены на рис. 1. Генотипирование осуществлялось путем рестрикционного анализа либо прямого секвенирования. Для всех образцов было проведено также генотипирование 17 STR-локусов Y-хромосомы с помощью набора Y-filer производства Applied Biosystems.

Анализ главных компонент на основе частот гаплогрупп Y-хромосомы проводился с помощью алгоритма popstr (<http://harpending.humanevo.utah.edu/popstr/>). Вычисление медианных сетей для отдельных гаплогрупп проводилось с помощью программы Network 4.6.0.0 (<http://www.fluxus-engineering.com/index.htm>) с использованием алгоритма Median Joining [4]. Для построения сетей использовалась программа Network Publisher (<http://www.fluxus-engineering.com/index.htm>).

Результаты и их обсуждение. Гаплогруппа и гаплотип Y-хромосомы были определены для 74 мужчин, не являющихся близкими родственниками. Данные о частотах гаплогрупп в этой выборке, а также о числе разных гаплотипов каждой гаплогруппы приведены в табл. 1.

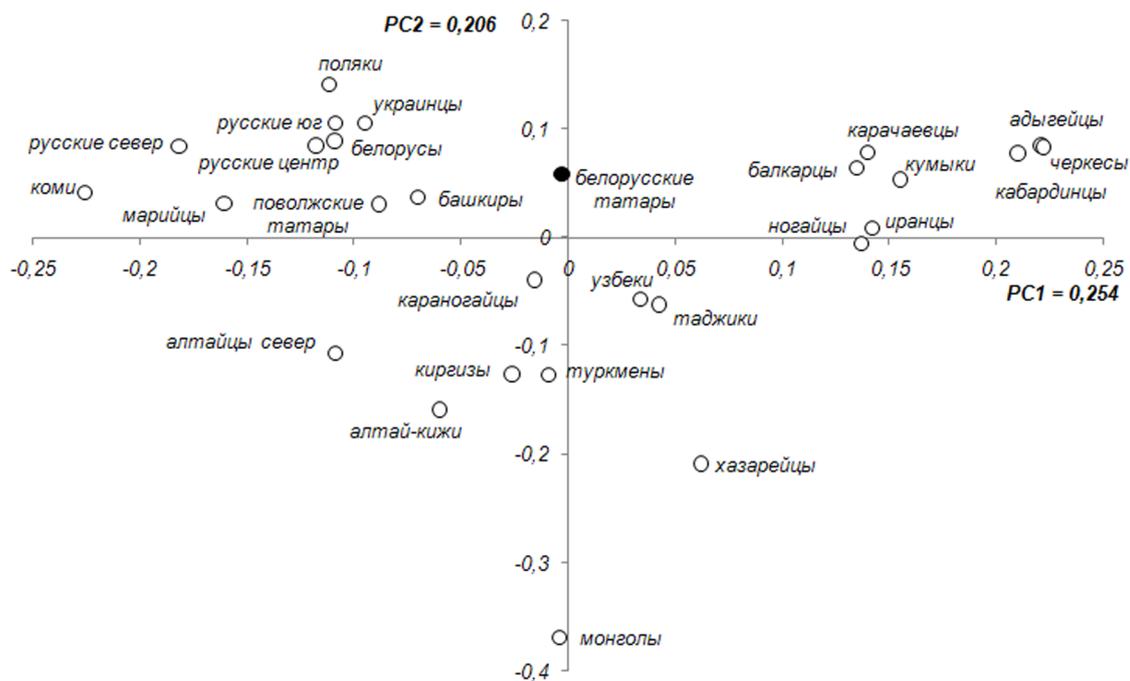
Таблица 1. Состав выборки белорусских татар по маркерам Y-хромосомы. Для сравнения приведены частоты соответствующих гаплогрупп у белорусов [1]

Гаплогруппа	Число образцов	Частота в выборке	Число гаплотипов	Частота гаплогруппы у белорусов
G2a-P15	3	0,041	2	0,014
I2a-M223	1	0,014	1	0,012
I2a-P37.2	0	0	0	0,172
J1a-P58	4	0,054	2	0,012*
J2a(xM67)	12	0,162	8	0,027*
J2a-M67	1	0,014	1	
J2b-M12	2	0,027	2	
N1c-Tat	2	0,027	2	0,096
Q1a-M25	1	0,014	1	0,002*
Q1a-M346	3	0,041	3	
Q1b-M378	2	0,027	1	
R1a(xM458)	20	0,27	12	0,361
R1a-M458	16	0,216	11	0,145
R1b-M478	2	0,027	2	0,004
R1b-M412	5	0,068	2	0,057*
Общее число	74		50	

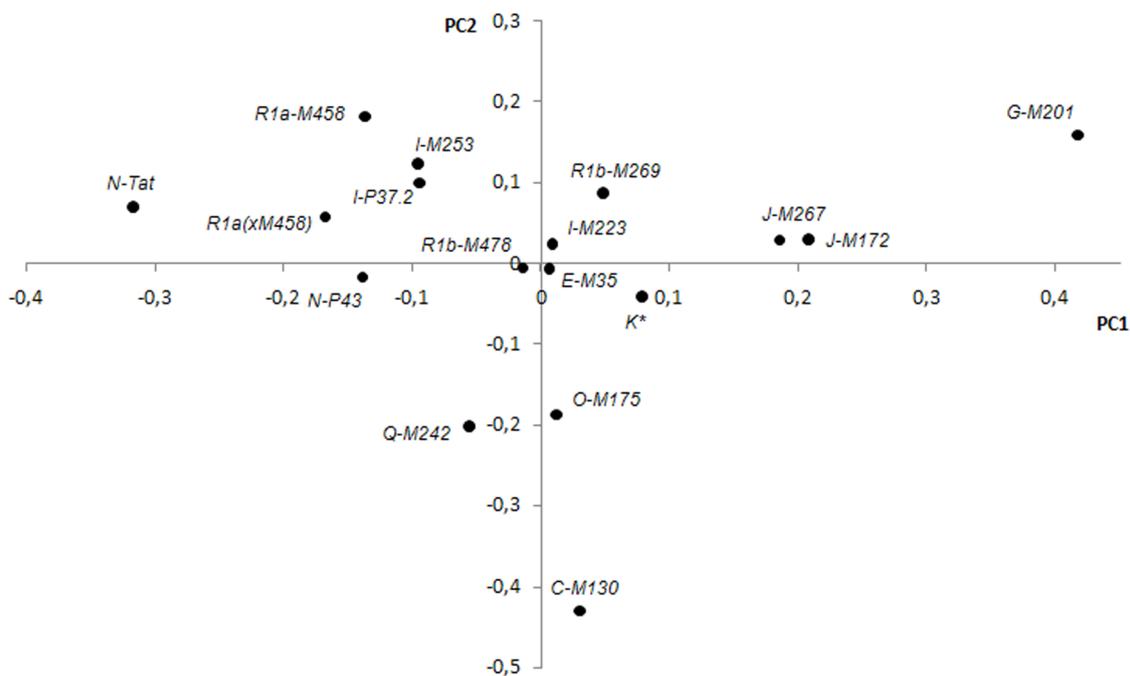
Примечание. * – приведены частоты гаплогрупп J1-M267, J2-M172, Q-M242 и R1b-M269 соответственно, так как более глубокое генотипирование Y-хромосомы белорусов не проводилось.

Как видно, большая часть разнообразия Y-хромосомы в популяции белорусских татар приходится на гаплогруппы R1a(xM458), R1a-M458, J2a(xM67) и различные варианты гаплогруппы Q (табл. 1). С более низкой частотой встречаются гаплогруппы R1b-M412, J1a-P58, G2a-P15, J2b-M12, N1c-Tat и R1b-M478. Гаплогруппы I2a-M223 и J2a-M67 в нашей выборке представлены единичными образцами. При сравнении пула Y-хромосомы белорусских татар и белорусов видно, что в популяции белорусских татар значительную долю составляют гаплогруппы J2-M172 и Q-M242, редкие у белорусов, и практически отсутствуют характерные для генофонда белорусов гаплогруппы I2a-P37.2 (в нашей выборке отсутствует) и N1c-Tat (представлена двумя образцами). С другой стороны, для обеих популяций характерна довольно высокая доля обоих вариантов гаплогруппы R1a-SRY1532.2.

Для выяснения сходства композиции Y-хромосомы белорусских татар с таковой популяций Восточной Европы, Волго-Уральского региона (ВУР), Кавказа и Центральной Азии был проведен анализ главных компонент для частот гаплогрупп Y-хромосомы. Графики, отражающие распределение проанализированных популяций по отношению к первым двум главным компонентам, а также вклад разных гаплогрупп в это распределение, приведены на рис. 2.



а



б

Рис. 2. Анализ главных компонент на основании частот Y-хромосомы: а – распределение анализируемых популяций в плоскости первых двух главных компонент; б – вклад разных гаплогрупп Y-хромосомы в распределение популяций в плоскости двух главных компонент. Примечание: в связи с разным разрешением, с которым определялись гаплогруппы в различных работах, в анализе главных компонент использовались частоты следующих вариантов: С-М130, Е-М35, G-М201, I-М223, I-Р37.2, I-М253, J-М267, J-М172, К* (производный аллель маркера М9, но предковые аллели маркеров М231, М175и 92R7), О-М175, N-Tat, N-Р43, Q-М242, R1a(xM458), R1a-М458, R1b-М478 и R1b-М269 [1; 5–14]

На графике главных компонент популяция белорусских татар занимает промежуточное положение между популяциями Кавказа (карачаевцы, балкарцы, ногайцы, караногайцы), Ирана (иранцы), Средней Азии (узбеки, таджики), ВУР (башкиры, поволжские татары) и Восточной Европы (белорусы, украинцы, русские), при этом не тяготея ни к одной из групп популяций.

Для выяснения филогенетических связей гаплотипов в пределах гаплогрупп Y-хромосомы строились медианные сети, однако в данной работе приведены лишь сведения о выявленных группах филогенетически близких гаплотипов белорусских татар (табл. 2). При построении медианной сети для гаплогруппы R1a-M458, характерной для населения Восточной Европы [7] и присутствующей с неожиданно высокой частотой (21,6 %) у белорусских татар, был выявлен ряд одинаковых гаплотипов у представителей разных географических регионов, сведения о которых приведены в табл. 3.

Т а б л и ц а 2. Группы филогенетически близких гаплотипов белорусских татар, образующие кластеры на медианных сетях

Гаплогруппа	Число кластеров (групп филогенетически близких гаплотипов)	Число гаплотипов в кластере (в скобках приведено число образцов)
J2a(xM67)	1	6 (10)
R1a(xM458)	3	5 (7); 2 (4); 1 (3)
R1a-M458	4	5 (7); 2 (3); 2 (2); 1 (2)
Q1a-M346	1	3 (3)
R1b-M412	1	2 (5)
I1a-P58	1	2 (4)
G2a-P15	1	2 (3)

Т а б л и ц а 3. Общие гаплотипы гаплогруппы R1a-M458 для популяции белорусских татар, также популяций Восточной и Центральной Европы и Кавказа [1; 8; 9; 14]

Гаплотип*	Популяция (в скобках приведено число образцов)
16,13,16,25,10,11,13,14,11,11,20,17,16,12	поляки (6), белорусы (4), украинцы (3), лужичане (1), немцы (1), словаки (1), белорусские татары (1)
16,13,16,25,10,11,13,14,11,11,20,17,17,12	поляки (2), белорусы (2), белорусские татары (1)
16,13,16,24,10,11,13,14,11,11,20,17,16,12	белорусы (2), белорусские татары (1)
16,13,16,25,10,11,13,14,11,11,20,16,16,12	поляки (1), украинцы (1), лужичане (2), немцы (2), белорусские татары (3)
16,14,16,25,10,11,13,14,11,11,20,17,16,12	белорусы (1), лужичане (1), белорусские татары (1)
17,13,17,25,10,11,13,14,11,10,20,16,17,12	поляки (5), лужичане (3), караногайцы (2), белорусские татары (1)
17,13,16,25,10,11,13,14,11,11,20,17,16,12	белорусы (1), поляки (1), караногайцы (2), ногайцы (3)
17,13,17,25,10,11,13,14,11,12,20,16,16,12	белорусы (2), украинцы (1), шапсуги (1)

Примечание. * – STR-локусы приведены в следующем порядке: DYS19, DYS389I, DYS389II, DYS390, DYS391, DYS392, DYS393, DYS437, DYS438, DYS439, DYS448, DYS456, DYS458 и H4.

Общая характеристика пула Y-хромосомы белорусских татар. Состав гаплогрупп Y-хромосомы белорусских татар (табл. 1), а также их положение между популяциями Кавказа, Средней Азии, ВУР и Восточной Европы на графике главных компонент (рис. 2, а) свидетельствуют о смешанном происхождении их Y-хромосомального пула. В частности, в нем присутствуют гаплогруппы, характерные для всех перечисленных выше регионов, а также для Сибири (гаплогруппа Q-M242).

Также стоит отметить высокую долю родственных гаплотипов в генофонде белорусских татар, что особенно характерно для гаплогрупп J2a(xM67), R1a(xM458) и R1a-M458 (табл. 2). Это может быть интерпретировано как результат участия в изначальной миграции на территорию современной Беларуси группы родственников по мужской линии (семейная или клановая миграция), либо экспансией отдельных гаплотипов и их последующей диверсификацией уже после миграции. В любом случае можно говорить об эффекте основателя для основных гаплогрупп генофонда белорусских татар.

Еще одна особенность генофонда белорусских татар – отсутствие в нем гаплогруппы С-М130. Один из ее вариантов, С-М217, имеет наибольшую частоту у монголов, коренных народов Восточной Сибири, хазарейцев и казахов, однако также встречается у алтайцев, ногайцев, крымских татар, адыгов, волжских татар, башкир и народов Средней Азии [5; 6; 10; 13; 16]. Это, скорее всего, связано с распространением данной гаплогруппы кочевниками, в частности, во время экспансии Монгольской империи. Предполагается, что Y-хромосома Чингисхана относилась к данной гаплогруппе, и следовательно, как минимум часть ее носителей в популяциях Средней Азии, ВУР и Кавказа могут быть его прямыми потомками по мужской линии [15]. Учитывая происхождение белорусских татар от кочевников, населявших Золотую Орду, отсутствие гаплогруппы С-М130 в их генофонде несколько неожиданно, и, вероятно, является следствием сильного генетического дрейфа.

Происхождение основных гаплогрупп, входящих в генофонд белорусских татар. С популяциями Кавказа и Закавказья белорусских татар сближает наличие в их генофонде гаплогрупп G-P15, J-P58 и J-M172, суммарная доля которых составляет 29,7 % (табл. 1). Анализ медианных сетей показал, что 2 гаплотипа G2a-P15 белорусских татар наиболее близки к гаплотипу из популяции кабардинцев. В случае гаплогруппы I1a-P58, гаплотипы, близкие к таковым белорусских татар, из изученных популяций встречаются у жителей Закавказья (армяне) и Ирана (иранские азербайджанцы, иранцы). Что касается различных вариантов гаплогруппы J-M172, среди опубликованных данных гаплотипов, близких к гаплотипам белорусских татар, обнаружено не было.

Около 8 % пула Y-хромосомы белорусских татар представлено тремя различными вариантами гаплогруппы Q, характерной для населения Сибири и Средней Азии [5; 13]. STR-гаплотипы одного из вариантов (Q1a-M346) белорусских татар филогенетически близки к гаплотипам тувинцев и хакасов, что указывает на их общее происхождение.

Гаплогруппа R1b-M478 встречается в различных популяциях, в частности, у башкир, караногайцев, балкарцев и северных алтайцев ее частота превышает 8 % [6; 10; 13]. STR-гаплотипы белорусских татар наиболее близки к гаплотипу из популяции поволжских татар, а также к двум гаплотипам из популяций Средней Азии.

Существенная часть (около 27 %) пула Y-хромосомы белорусских татар представлена гаплогруппой R1a(xM458) (табл. 1), имеющей очень широкое географическое распространение: она с высокой частотой встречается в Восточной Европе, ВУР, Средней Азии (особенно у киргизов), Южной Сибири (алтайцы), а также у индоевропейских народов Индии [1; 5–7]. Сравнение STR-гаплотипов не выявило общих вариантов, характерных для белорусских татар и других популяций, а построенная для данной гаплогруппы медианная сеть имеет большое количество ретикуляций, что не позволяет определить, какие гаплотипы наиболее близки к таковым белорусских татар. Однако тот факт, что гаплотипы белорусских татар образуют несколько далеко отстоящих друг от друга кластеров, позволяет предположить, что разные гаплотипы R1a(xM458) имеют различное происхождение.

Гаплогруппа R1a-M458, как считается, имеет восточно-европейское происхождение [7], поэтому ее наличие в генофонде белорусских татар может рассматриваться как результат потока генов от белорусов. Однако STR-гаплотипы, характерные для популяций Восточной и Центральной Европы, обнаружены не только у белорусских татар, но и у кубанских ногайцев, караногайцев и шапсугов, проживающих на Северном Кавказе (табл. 3), поэтому данная гаплогруппа могла как изначально присутствовать в генофонде предков белорусских татар, так и попасть в него позднее, после переселения в Восточную Европу.

Таким образом, наличие в генофонде белорусских татар гаплогрупп, характерных для популяций разных географических регионов, относительно удаленных как друг от друга, так и от территории Беларуси, может быть объяснено тем, что белорусские татары сформировались в результате нескольких независимых миграций из регионов Кавказа, Средней Азии и Южной Сибири. С другой стороны, возможно, что популяция, из которой выделились предки белорусских татар, была изначально генетически гетерогенной и содержала указанные варианты Y-хромосомы, что согласуется с представлениями о масштабных миграциях в пределах монгольской империи и сформировавшихся после ее распада государств.

Поток генов между популяциями белорусских татар и белорусов. Совместное проживание различных по происхождению этнических групп зачастую сопровождается изменением одного генофонда под действием другого или же взаимным влиянием генофондов друг на друга. Однако степень и направленность такого влияния могут сильно различаться, что во многом зависит от культурных особенностей взаимодействующих популяций. Учитывая длительную историю контакта между белорусами и белорусскими татарами (более 6 столетий), существенное культурное влияние этих народов друг на друга (в первую очередь, проявившееся в очень раннем переходе татар на белорусский язык) и исторические сведения о браках между мужчинами-татарами и белорусками [2], интересно рассмотреть вопрос об интенсивности и направленности потока генов по мужской линии между этими двумя популяциями.

В генофонде белорусов в небольшом количестве присутствуют гаплогруппы Y-хромосомы, характерные для популяций Причерноморья, Кавказа, Закавказья, Урала и Сибири (G-M201, J1-M267, J2-M172, Q-M242 и R1b-M478) [1], которые могли бы указывать на генетический поток от татар к белорусам. Однако анализ более глубоких маркеров и STR-гаплотипов свидетельствует о том, что данные варианты Y-хромосомы довольно сильно различаются у белорусов и белорусских татар, таким образом, их перенос от татар к белорусам маловероятен. С другой стороны, в изученной выборке белорусских татар либо отсутствуют, либо имеют очень низкую долю гаплогруппы I2a-P37.2 и N1c-Tat соответственно (табл. 1), которые занимают второе и третье место по частоте у белорусов [1]. Имеющиеся на настоящий момент данные, как уже обсуждалось, не позволяют сделать вывод об общем или различном происхождении гаплогрупп R1a(xM458) и R1a-M458 – наиболее частых как у белорусов, так и у белорусских татар. Таким образом, вклад белорусских татар в пул Y-хромосомы белорусов незначителен, а вопрос об обратном влиянии остается открытым, хотя если такой процесс и происходил, то затронул лишь отдельные гаплогруппы.

Выводы

1. В генофонде белорусских татар присутствуют гаплогруппы, встречающиеся в современных популяциях Кавказа, Закавказья, Ирана, Средней Азии, Южной Сибири и Восточной Европы, что указывает на сложную генетическую структуру популяции, предковой по отношению к белорусским татарам, а также, возможно, на вклад нескольких миграций в этногенез белорусских татар.

2. Для основных гаплогрупп генофонда белорусских татар (J2a, R1a(xM458) и R1a-M458) характерно присутствие большого количества одинаковых или близких гаплотипов, что говорит о значительном эффекте основателя по мужской линии и может быть результатом семейной миграции.

3. На основании полученных нами данных можно заключить, что поток генов по мужской линии от белорусских татар к белорусам был незначительным. В генофонде же самих белорусских татар есть гаплогруппы (R1a(xM458) и R1a-M458), которые потенциально могли попасть к ним от восточнославянских популяций, однако пока имеющиеся данные не позволяют сделать однозначного вывода.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы аспирантских исследований и интернационализации DoRa Европейского Социального Фонда.

Литература

1. *Kushniarevich A. et al. // PLoS One. 2013. Vol. 8(6).*
2. *Энцыклапедыя гісторыі Беларусі / пад рэд. Г. П. Пашкова [і інш.]. Мінск, 2001. Т. 6.*
3. *Mathew C. G. // Methods Mol. Biol. 1985. Vol. 2. P. 31–34.*
4. *Bandelt H.-J., Forster P., Röhl A. // Mol. Biol. Evol. 1999. Vol. 16. P. 37–48.*
5. *Di Cristifaro J., Pennarun E. et al. // PlosOne. 2013. Vol. 8(10).*
6. *Yunusbaev B., Metspalu M., Jarve M. et al. // Mol. Biol. Evol. 2012. Vol. 29(1). P. 359–365.*
7. *Underhill P. A. et al. // Eur. J. Hum. Genet. 2010. Vol. 18(4). P. 479–484.*
8. *Rebala K. et al. // Forensic Sci. Int. Genet. 2011. Vol. 5. P. 17–20.*

9. *Mielnik-Sikorska M.* et al. // *Forensic Sci. Int. Genet.* 2013. Vol. 7(1). P. 200–203.
10. *Лобов А. С.* Структура генофонда субпопуляций башкир: автореф.... канд. биол. наук. Уфа, 2009.
11. *Balanovsky O.* et al. // *Am. J. Hum. Genet.* 2008. Vol. 82. P. 236–250.
12. *Tambets K.* et al. // *Am. J. Hum. Genet.* 2004. Vol. 74. P. 661–682.
13. *Dulik M. C.* et al. // *Am. J. Hum. Genet.* 2012. Vol. 90(2). P. 229–246.
14. *Balanovsky O.* // *Mol. Biol. Evol.* 2011 Vol. 28(10). P. 2905–2920.
15. *Zerjal T.* et al. // *Genetika.* 2010 Vol. 46(9). P. 1276–1277.

V. S. PANKRATOV, A. I. KUSHNIAREVICH, O. G. DAVYDENKO

vasilipankratov@gmail.com; lkushniarevich@gmail.com; davydenko@tut.by

**GENETIC POLYMORPHISM OF Y-CHROMOSOME MARKERS IN THE POPULATION
OF BYELORUSSIAN TATARS**

Summary

Byelorussian tatars appeared in the territory of modern Belarus not later than the end of the 14th century and they are thought to be descendants of the inhabitants of the Golden Horde. Genetic relationships between Byelorussian Tatars and other Turkic peoples, as well as modern Byelorussians are not well understood. In order to address this question we studied the genetic structure of the population of Byelorussian Tatars using Y-chromosomal biallelic and STR markers. The study revealed the presence of genetic components typical for the populations of Northern and Southern Caucasus, Central Asia, and South Siberia.

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 621.9:536.75

Академик П. А. ВИТЯЗЬ¹, М. Л. ХЕЙФЕЦ², А. Г. КОЛМАКОВ³, А. А. ЗВЕРЕВ³, Л. И. КОБЕЛЕВА³

МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СТРОЕНИЯ СТРУКТУР И ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ РЕЛЬЕФА ПОВЕРХНОСТИ ТРЕНИЯ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

¹Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси, Минск²ГНПО «Центр» НАН Беларуси, Минск³Институт металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова РАН, Москва

Поступило 07.02.2014

Введение. Структуры и рельеф поверхности материала, формирующиеся в процессах трения и изнашивания, несут важную информацию о происходящих явлениях и связаны с триботехническими характеристиками поверхностей изделия [1; 2]. Трибологические процессы, протекающие при трении и изнашивании материалов, зависят от большого количества параметров, поэтому их адекватное описание связано с использованием системного подхода [3; 4]. Среди наиболее перспективных направлений применения системного подхода – многоуровневые мультифрактальный анализ и вейвлет-анализ [5; 6], использующие комплекс синергетических [7; 8], фрактально-информационных [9; 10] и вейвлетных [11; 12] представлений.

Цель работы – на основе использования системных подходов в материаловедении и трибологии развить традиционные методы анализа строения материала и рельефа поверхности трения и показать их эффективное применение для объектов, имеющих сложную многомасштабную структуру, в том числе и для контактирующих поверхностей наноструктурных материалов.

Мультифрактальный анализ структур поверхностного слоя. Для количественного описания структур поверхности трения применялась информационная интерпретация мультифрактального формализма [9; 10]. Анализировали образцы литых композиционных материалов (КМ) на базе алюминиевого сплава АК12 (в вес. %: Al – основа, 10...12 Si, 0,02 Cu, 0,35 Fe, 0,06 Zn, 0,08 Ti, 0,08 Ca), в который введены различные наполнители – высокомодульные керамические частицы SiC (средний диаметр 30 мкм) и Al₂O₃ (Ø < 400 мкм) в качестве сухой смазки [13; 14].

Испытания на сухое трение проводили на установке УМТ-1 (ГОСТ 23.210–80) по схеме осевого нагружения втулок ($d_{нар} = 28$ мм, $d_{вн} = 20$ мм, $h = 16$ мм) при постоянных нагрузках от 70 до 180 Н и скоростях скольжения, изменяемых в пределах от 0,2 до 1,85 м/с (300...1500 об/мин). Контртела были изготовлены из стали 40Х (HRC ≥ 45) [13; 14]. Поведение при сухом трении образцов из КМ и сплава АК12 оценивали по нагрузке и скорости скольжения, приводящим к схватыванию и заеданию. Образцы доводили до состояния задира (табл. 1).

Т а б л и ц а 1. Химический состав образцов, их твердость и параметры задира

№ образца	Матрица	Наполнитель (вес. %)	НВ, кг/мм ²	Параметры перехода в задира		
				<i>P</i> , Н	<i>n</i> , об/мин	<i>t</i> , мин
1	АК12	–	62,4	70	600	11
2	АК12	5 % SiC	71,2	70	1500	1
3	АК12	2,5 % SiC + 1,25 % C	76,0	180	1500	1
4	АК12	5 % Al ₂ O ₃	76,3	70	1000	7
5	АК12	2,5 % Al ₂ O ₃ + 2,5 % C	73,6	70	1500	15

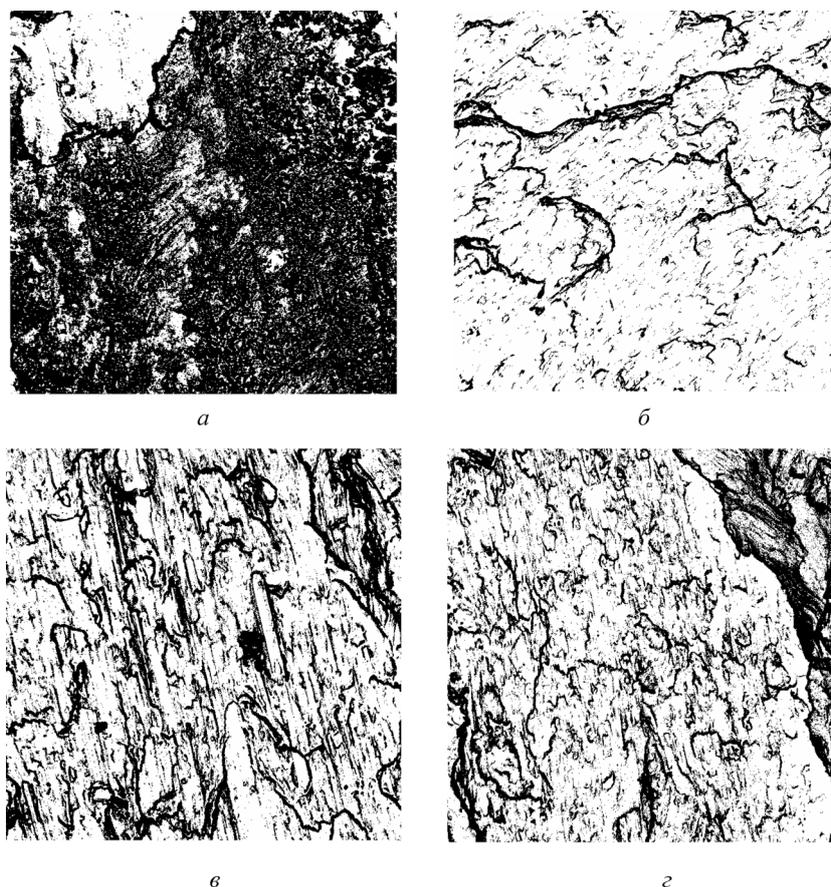


Рис. 1. Рельеф поверхности задира: со 2-го образца – 5 % SiC (а); с 3-го образца – 2,5 % SiC + 1,25 % C (б); с 4-го образца – 2,5 % Al₂O₃ (в); с 5-го образца – 2,5 % Al₂O₃ + 2,5 % C (г)

Структуры поверхностей трения исследовали на растровом электронном микроскопе LEO 430i. Из отсканированных снимков рельефа задира образцов (рис. 1) вырезали квадратные изображения размером 700×700 пикселей, для каждого образца по одному изображению. Каждое полученное изображение в градациях серого преобразовывалось в черно-белое. При этом черным пикселям, соответствующим характерным перепадам рельефа поверхности, присваивали значение «1», а белым пикселям – значение «0». Далее проводили разбиение полученных матриц на более крупные ячейки с размерами $l_k \times l_k$ ($l_k = 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 25, 28, 35, 50, 70, 100, 140, 175, 350$) и построение для каждого разбиения характеристической меры в виде равноячеечного распределения единиц P_i ($P_i = M_i / \Sigma M_i$, где M_i – количество единиц в i -й крупной ячейке; ΣM_i – общее количество единиц в матрице крупных ячеек, $i = 1, 2, 3, \dots, N$; $N = [700 / l_k]^2$).

Мультифрактальные характеристики $f(\alpha)$ -спектра и D_q -спектра размерностей Реньи рассчитывали для набора величин аргументов q из интервала $[-200; 200]$. После расчета спектры проверяли на монотонность.

Наиболее информативные мультифрактальные характеристики термодинамических условий формирования изучаемых структур [9]: обобщенные размерности (энтропии) Реньи D_q , количественные характеристики однородности f_q и упорядоченности Δ_q приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2. Основные мультифрактальные характеристики структур поверхностей трения КМ на базе алюминиевого сплава в зависимости от легирующих добавок

Характеристика	Образец (наполнитель)			
	2 (5 % SiC)	3 (2,5 % SiC + 1,25 % C)	4 (5 % Al ₂ O ₃)	5 (2,5 % Al ₂ O ₃ + 2,5 % C)
D_{200}	1,665	1,953	1,637	1,479
Δ_{200}	0,246	0,020	0,28751	0,293
f_{200}	0,408	0,669	0,31851	0,395

Высокие значения D_q соответствуют более неравновесным условиям формирования структуры. Чем выше показатель f_q , тем более равномерно распределены единичные элементы структуры в охватывающем ее евклидовом пространстве при каноническом варианте расчета. Увеличение Δ_q для исследуемых структур показывает, что их конфигурация становится более упорядоченной.

Для КМ с добавками Al_2O_3 и SiC можно отметить, что формирование структур поверхности трения в режиме задир протекает в примерно одинаковых термодинамических условиях. Добавление графита к КМ, армированному SiC, приводит к увеличению степени неравновесности термодинамических условий формирования изучаемой структуры, в то время как добавление графита к КМ, армированному Al_2O_3 , приводит к более равновесным условиям (рис. 2, а, табл. 2).

В первом случае это связано с тем, что переход в задир происходит при больших нагрузках и скоростях скольжения. Во втором случае значения нагрузки, соответствующей переходу в задир, не изменяются, однако, по-видимому, графит препятствует схватыванию и облегчает протекание процессов разрыва адгезионных связей.

Наибольшая степень упорядоченности структур поверхности трения характерна для КМ с добавками Al_2O_3 . При этом добавление в них графита не приводит к заметным изменениям степени упорядоченности, но вызывает некоторое увеличение однородности структур. Таким образом, добавка Al_2O_3 в наибольшей степени способствует фрагментации очагов схватывания

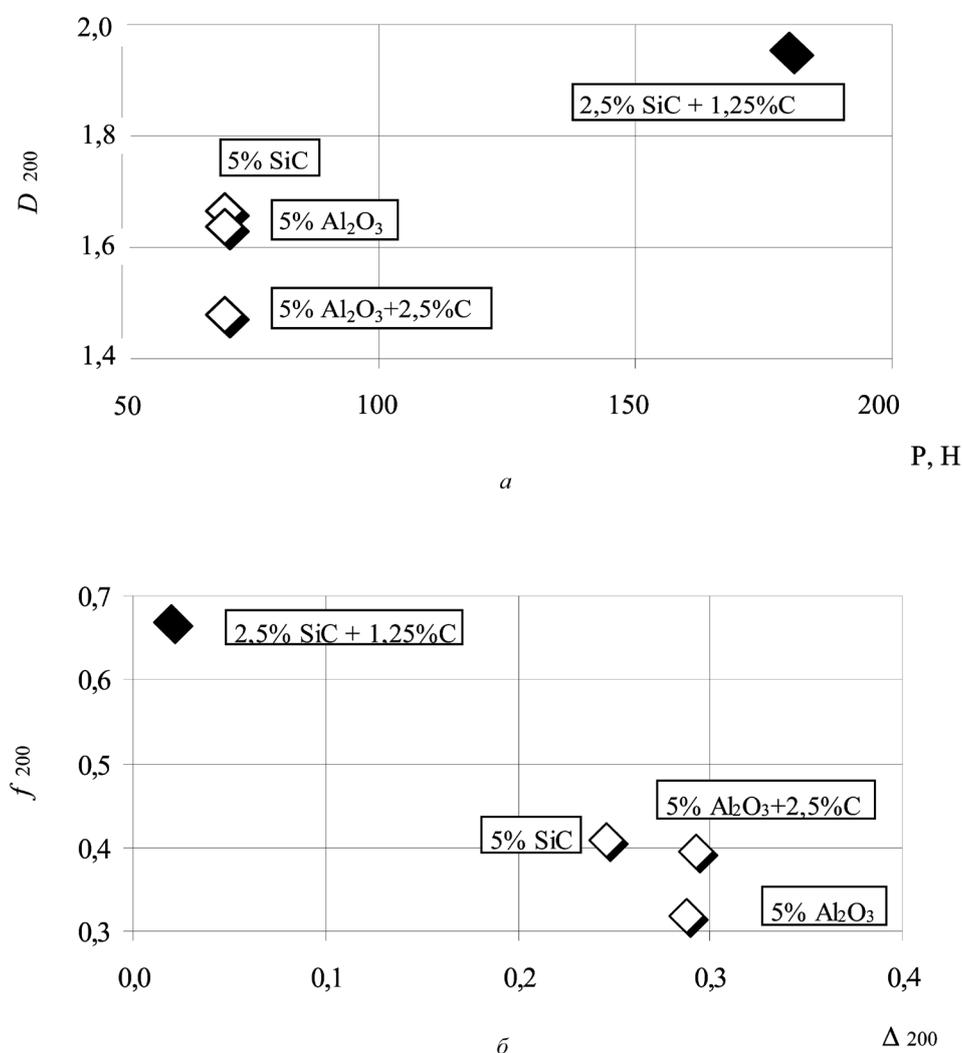


Рис. 2. Зависимость показателя неравновесности условий образования структур D_{200} от нагрузки P , при которой происходит переход к режиму задир (а) и связь показателей упорядоченности Δ_{200} и однородности f_{200} структур поверхности трения с химическим составом композита (б)

и возрастанию частоты чередования процессов схватывания и разрыва связей (рис. 1), что и приводит к образованию поверхности трения с более упорядоченным рельефом. Добавление графита должно способствовать более равномерному протеканию рассматриваемых процессов. Добавка SiC по сравнению с Al_2O_3 в меньшей мере способствует склонности к фрагментации и повышению частоты процессов схватывания и разрыва, а сами процессы протекают более равномерно на поверхности трения. Дополнительное введение в состав КМ графита еще в большей степени усиливает это различие, что приводит к формированию у таких образцов наименее упорядоченных и наиболее однородных структур поверхности трения. В результате полиармированные образцы КМ (рис. 1 и рис. 2, б), содержащие SiC и графит, отличаются наилучшими характеристиками задиристости.

Таким образом, использование для армирования SiC и графита с позиции задиристости более предпочтительно, чем Al_2O_3 , в том числе и в сочетании с графитом, за счет формирования более однородных и менее упорядоченных структур.

Вейвлет-анализ рельефа поверхностей трения. Для количественного описания рельефа поверхности трения применялся вейвлет-анализ [6; 14; 15].

Вейвлетный анализ представляет собой особый тип линейного преобразования сигналов и отображаемых этими сигналами физических данных о процессах и физических свойствах природных объектов и сред. Вейвлетные функции базиса позволяют сконцентрировать внимание на тех или иных локальных особенностях анализируемых процессов, которые не могут быть выявлены с помощью традиционных преобразований Фурье и Лапласа [11; 12]. Принципиальное значение имеет возможность вейвлетов анализировать нестационарные сигналы с изменением их компонентного содержания во времени или в пространстве.

Результатом вейвлет-преобразования одномерного числового ряда (сигнала) является двумерный массив значений коэффициентов $C(a, b)$. Распределение этих значений в пространстве (a, b) – временной масштаб, временная локализация – дает информацию об изменении во времени относительного вклада в сигнале вейвлетных компонент разного масштаба. Такое распреде-

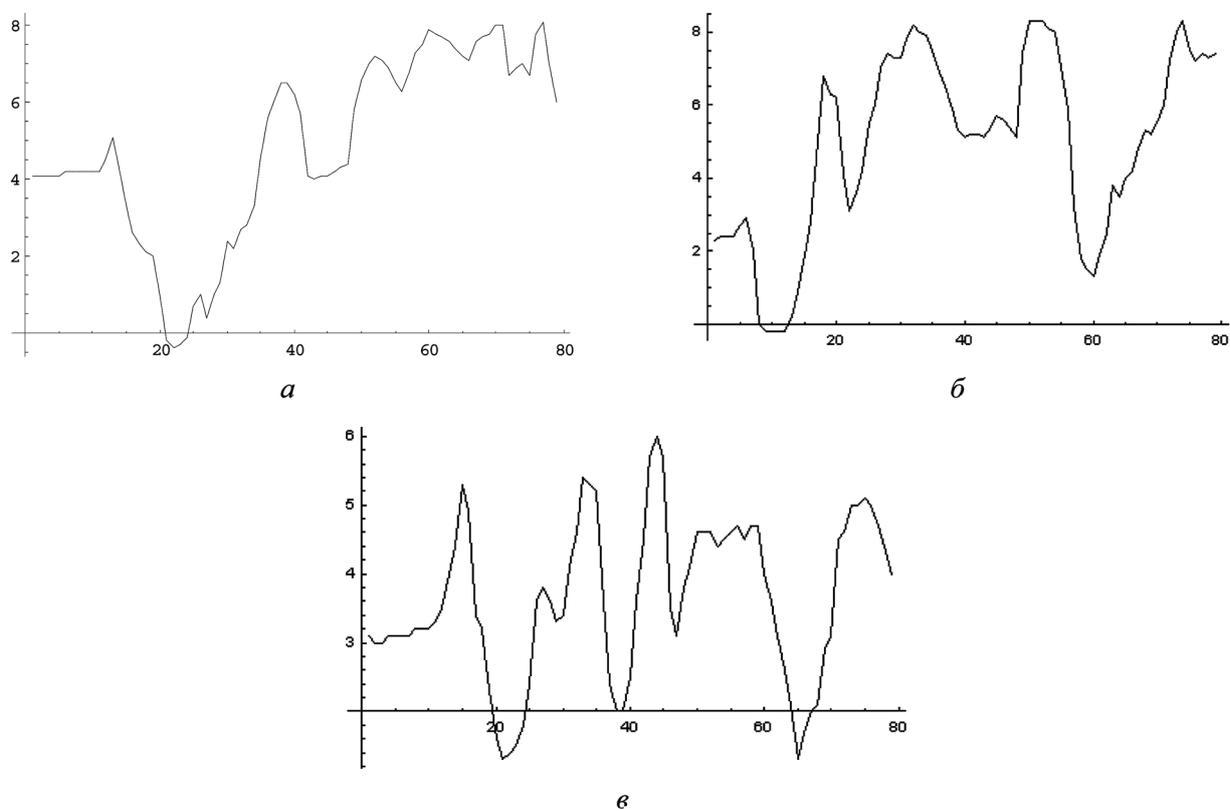
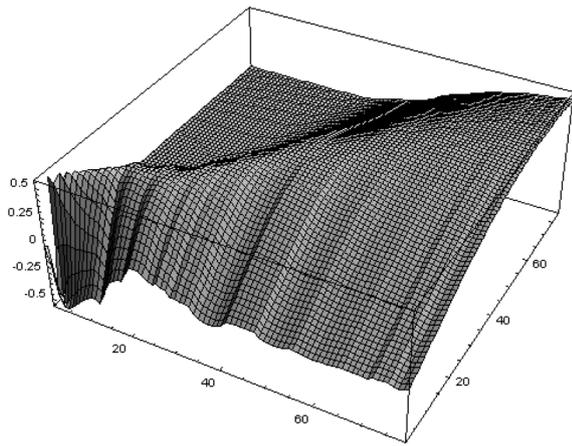
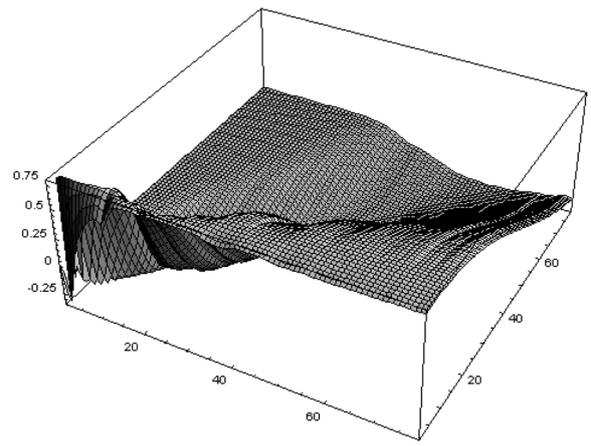


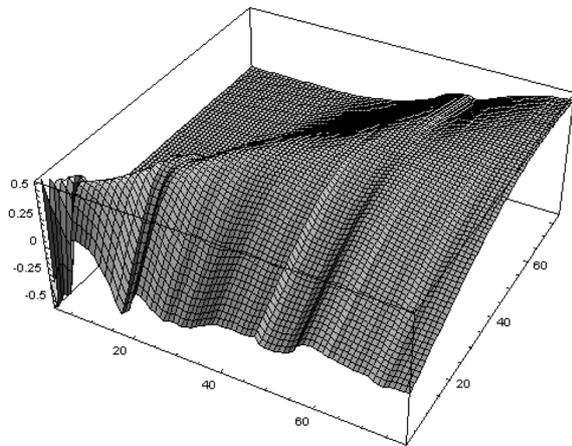
Рис. 3. Профили анализируемых поверхностей трения: с 1-го образца (а); со 2-го образца (б); с 3-го образца (в)



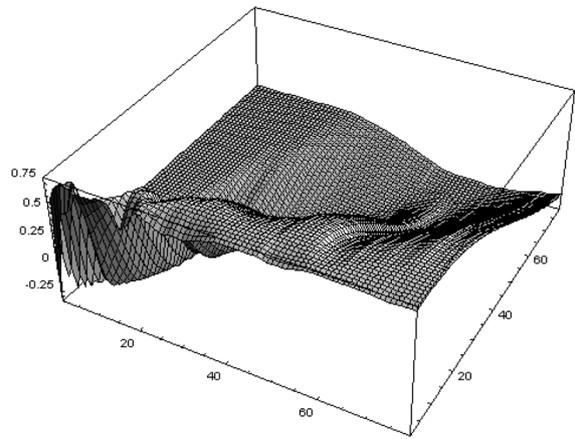
a



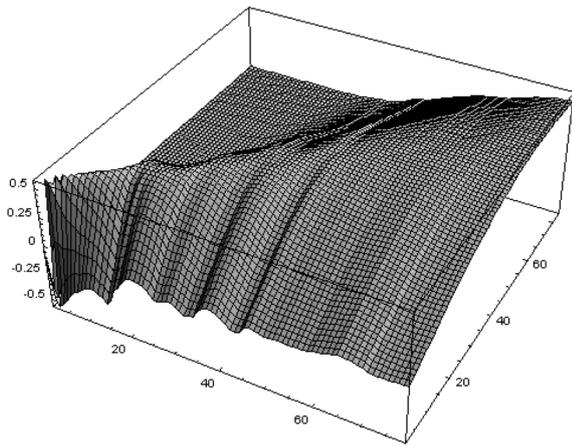
б



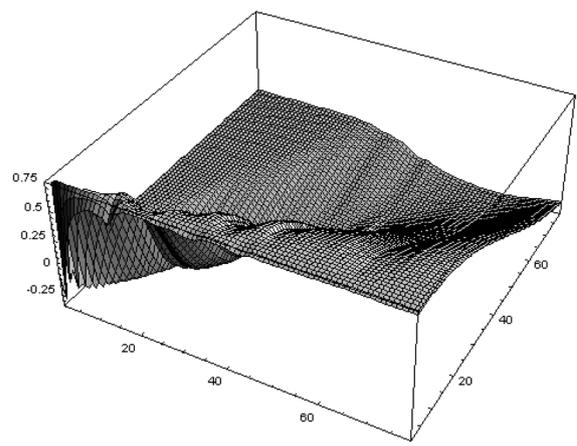
в



г



д



е

Рис. 4. Поверхности вейвлет-спектров для профилограмм: с 1-го образца – WAVE (*a*) и MHAT (*б*); со 2-го образца – WAVE (*в*) и MHAT (*г*); с 3-го образца – WAVE (*д*) и MHAT (*е*)

ление называется спектром коэффициентов вейвлет-преобразования, масштабно-временным (частотно-временным) спектром или просто вейвлет-спектром.

При анализе сигналов вейвлетами четного типа (МНАТ) гармоническим сигналам обычно соответствуют яркие горизонтальные полосы вейвлетных спектров на доминирующих частотах вейвлетов, совпадающих с частотой гармоник сигналов. Нарушения гладкости сигналов фиксируются вертикальными полосами, пики в сигналах выделяются максимумами, а впадины – минимумами вейвлетных коэффициентов. Вейвлеты нечетного типа (WAVE) более резко реагируют на скачки и быстрые изменения в сигналах, отмечая их максимумами или минимумами в зависимости от знака дифференциалов. Чем резче выражены особенности сигналов, тем сильнее они выделяются на спектрограммах.

Для исходной информации о структурах рельефа поверхности трения использовали профилограммы с масштабом 10 мм = 1 мкм (рис. 3).

Для построения поверхности вейвлет-спектра были взяты точки профиля по масштабной сетке, т. е. с шагом 0,1 мкм [14; 15]. Из полученного вектора значений профиля путем скалярного произведения рассчитывались коэффициенты спектра по сетке значений профилограммы. Шаг двумерной матрицы коэффициентов брался с аналогичным шагом, что естественно в случае анализа профиля, а не сигнала во времени.

Для вейвлет-анализа в данном случае, с целью получения полной картины, использовали оба типа вейвлетов WAVE и МНАТ. Полученные вейвлет-спектры приведены на рис. 4.

Наиболее информативными характеристиками вейвлет-анализа для конкретных спектров являются характеристики α и β [6; 7]. Если материнский вейвлет представляет из себя выделенный пик (т. е. анализируются резкие неровности профиля), то чем выше α , тем больше износ, а чем выше β , тем неравномернее износ – большие β отвечают резко изрезанным профилям. Для случая, когда материнский вейвлет представляет из себя площадку размера носителя с резкими обрывами по краям (т. е. анализируются ровные участки профиля), трактовка α и β меняется: α ведет себя также, а β теперь является показателем равномерности: чем выше β , тем равномернее износ – большие β отвечают профилям с ровными участками и равномерным износом.

Полученные характеристики вейвлет-анализа α и β приведены в табл. 3; для наглядного представления о характере изменения вейвлетных характеристик построены диаграммы « α - β » (рис. 5).

Т а б л и ц а 3. Рассчитанные α и β характеристики вейвлет-спектров

Характеристика вейвлет-спектров	№ образца		
	1	2	3
α WAVE	160,803	192,327	103,084
α МНАТ	195,728	223,608	123,074
β WAVE	1,32975	2,29628	1,15961
β МНАТ	1,95817	3,02989	2,11741

Анализ картин линий уровня различных вейвлетов на малых масштабах координат показал, что результаты обоих преобразований практически совпадают, однако картина меняется для масштабов, превышающих основной вклад профилограммы. Так, для МНАТ-преобразования в целом характерно очень четкое повторение профиля с узко выраженным максимумом основного вклада профиля, для WAVE-преобразования получается картина с размытым максимумом и также более размытым сигналом.

Исходя из полученных картин, можно сделать вывод, что при необходимости тонкого изучения профиля больше подойдет МНАТ-преобразование, если, напротив, нужно выяснить общий характер профиля, не обращая внимания на мелкие детали, то следует использовать WAVE-преобразование. Анализ расположения точек значений на « α - β » диаграмме для исследованных образцов (рис. 5) показал, что форма зависимости от применения четных или нечетных вейвлетов меняется не сильно, а в большей степени зависит от формы материнского вейвлета. При этом оказалось, что МНАТ-вейвлет более чувствителен, чем WAVE. В частности, на диаграмме для МНАТ-вейвлета четко виден «провал» β для 1-го образца, чего не выявляет WAVE-вейвлет.

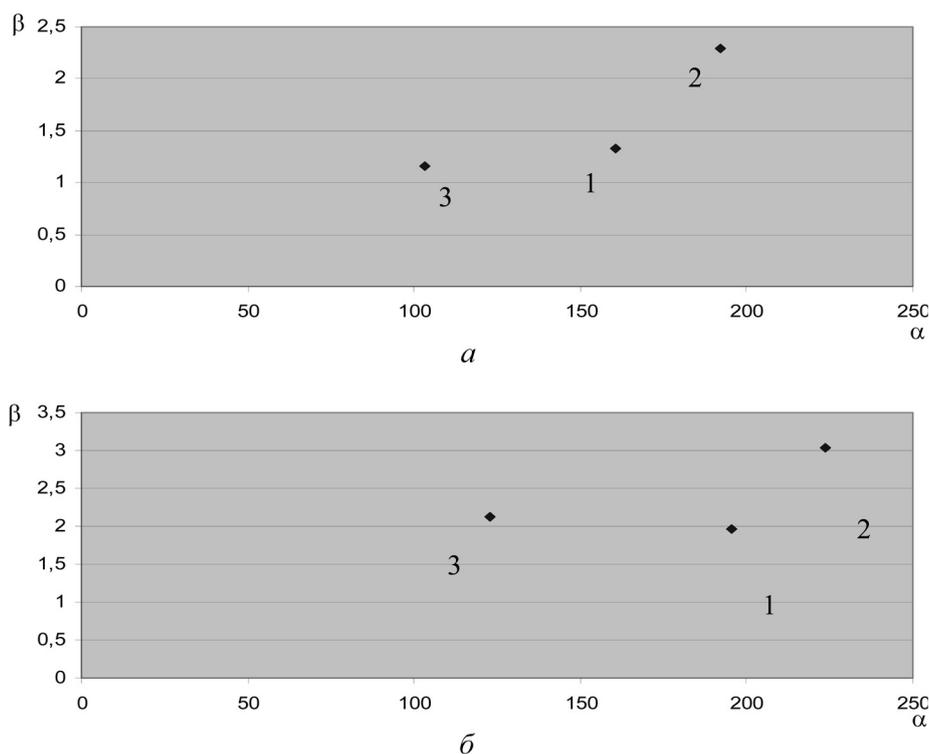


Рис. 5. « α - β » диаграммы вейвлет-спектров WAVE (а) и MHAT (б)

Заключение. Формирование структур поверхности трения композиционных материалов на базе алюминиевого сплава АК12 в режиме задира протекает в приблизительно одинаковых термодинамических условиях при его армировании Al_2O_3 и SiC. Добавление SiC по сравнению с Al_2O_3 в меньшей мере способствует фрагментации и повышению частоты процессов схватывания и разрыва, а процессы эти протекают на поверхности трения более равномерно.

Дополнительное введение в состав КМ алюминиевого сплава графита, приводящее к формированию наименее упорядоченных структур поверхности трения, в еще большей степени усиливает различие между Al_2O_3 и SiC. Добавление графита к КМ, армированному SiC, приводит к увеличению степени неравновесности термодинамических условий формирования структур.

Применение комплексного мультифрактального и вейвлет-анализа для качественного и количественного описания структур материала и рельефа поверхности трения позволяет выявить плохо различимые другими отдельными методами отличия, оценить системные характеристики строения структур материалов и количественно охарактеризовать процессы их самоорганизации.

Литература

1. Куксенова Л. И., Лантева В. Л., Колмаков А. Г., Рыбакова Л. М. Методы испытаний на трение и износ. М., 2001. – 152 с.
2. Справочник по триботехнике / под общ. ред. М. Хебды и А. В. Чичинадзе: в 3 т. М., 1989. Т. 1: Теоретические основы. – 400 с.
3. Salomon G. // ASLE Trans. 1974. Vol. 17, N 4. P. 295–299.
4. Czichos H., Molgaard J. // Wear. 1977. Vol. 44, N 2. P. 300–306.
5. Витязь П. А., Ильющенко А. Ф., Хейфец М. Л. и др. Технологии конструкционных наноструктурных материалов и покрытий / под общ. ред. П. А. Витязя и К. А. Солнцева. Минск, 2011. – 283 с.
6. Васильев А. С., Дальский А. М., Клименко С. А. и др. Технологические основы управления качеством машин. М., 2003. – 256 с.
7. Иванова В. С., Баланкин А. С., Бунин И. Ж., Оксогоев А. А. Синергетика и фракталы в материаловедении. М., 1994. – 383 с.
8. Хейфец М. Л. Проектирование процессов комбинированной обработки. М., 2005. – 272 с.
9. Встовский Г. В., Колмаков А. Г., Бунин И. Ж. Введение в мультифрактальную параметризацию структур материалов. Ижевск, 2001. – 116 с.

10. Колмаков А. Г. // Металлы. 2004. № 4. С. 98–107.
11. Блаттер К. Вейвлет-анализ. Основы теории. М., 2004. – 280 с.
12. Левкович-Маслюк Л., Переберин А. Введение в вейвлет-анализ. М., 1999. – 280 с.
13. Чернышова Т. А. и др. Взаимодействие металлических расплавов с армирующими наполнителями. М., 1993. – 272 с.
14. Колмаков А. Г., Зверев А. А., Хейфец М. Л., Кухта С. В. // Вестн. Полоцк. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. 2011. № 12. С. 19–29.
15. Kolmakov A., Zverev A. // Deformation & Fracture of Materials and Nanomaterials – DFMN 2007: Book of articles / ed. by O. A. Bannykh et al. Moscow, 2007. P. 637–639.

P. A. VITIAZ, M. L. KHEIFETZ, A. G. KOLMAKOV, A. A. ZVEREV, L. I. KOBELEVA

mlk-z@mail.ru

MULTIFRACTAL ANALYSIS OF THE STRUCTURE AND THE WAVELET ANALYSIS OF THE FRICTION SURFACE RELIEF FOR COMPOSITE MATERIALS

Summary

The article deals with the application of complex multifractal and wavelet analysis to describe material and surface structures qualitatively and quantitatively, which allows revealing the differences poorly distinguished with other separate methods and estimating system characteristics of structures and characterizing the process of structure self-organization. The formation by tearing friction surface structures for composite materials with additives of Al_2O_3 and SiC is described in comparable thermodynamic conditions. Adding SiC in comparison with Al_2O_3 promotes to a lesser extent the fragmentation and increase in frequency of setting and breaking processes. An additional introduction of graphite in even greater degree strengthens the distinctions between materials with SiC and Al_2O_3 additives, which results in the formation of the least ordered structures of the friction surface. Adding graphite to a reinforced SiC composite material results in increasing the non-equilibrium of thermodynamic conditions for structure formation.

СОЦИАЛЬНО-ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ

УДК 167+001.89+172](476)

*Академик Е. М. БАБОСОВ***ВЗАИМОСВЯЗЬ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
В СФЕРЕ ГУМАНИТАРНОГО ЗНАНИЯ КАК УСЛОВИЕ ФОРМИРОВАНИЯ
ПЕРСПЕКТИВНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ***Институт социологии НАН Беларуси, Минск**Поступило 13.01.2014*

Организация и проведение научных исследований в Национальной академии наук Беларуси при всей важности и значимости ориентации их на решение многомерных задач, диктуемых развитием экономики страны, все-таки должны быть, в первую очередь, сконцентрированы на проведении фундаментальных исследований и программ с длительным горизонтом реализации. Только на базе опережающего развития фундаментальных исследований в академических научных коллективах может быть намечен и осуществлен стратегический вектор ориентированности на технологический прорыв, которого требует от нас политическое руководство страны. Вместе с тем становится все более существенным значение в обеспечении устойчивого социально-экономического развития общества органического, взаимообогащающегося взаимодействия фундаментальной науки с прикладными исследованиями, которые развиваются с привлечением как бюджетных, так и внебюджетных источников финансирования, создают возможности практического внедрения научно-технических разработок, в том числе и в области гуманитарного знания.

Эти общие принципы должны быть конкретизированы применительно к различным сферам научных исследований, в частности, к области гуманитарных наук. Одним из перспективных направлений фундаментальных исследований в области гуманитаристики, по нашему мнению, должны стать исследования в области **теории и методологии науки**. В последнее время в Национальной академии наук Беларуси, как показало состоявшееся в декабре 2013 г. общее собрание, достигнуты впечатляющие результаты фундаментального характера в физико-математических, химико-биологических, медицинских и технических сферах исследования, что открывает новые возможности развития теории и методологии науки. Такие исследования могут быть результативными, приносящими приращение научного знания, при организации междисциплинарных исследований, в которых следует в режиме междисциплинарного научного синтеза объединить усилия философов, социологов, экономистов, психологов с физиками, математиками, химиками, биологами, генетиками, радиоэлектрониками, кибернетиками. Для этих целей, возможно, следует возродить существовавшую в советское время практику функционирования **методологических семинаров**, придав им общеакадемический статус. Это создаст дополнительный импульс интеграции научных исследований различной дисциплинарной направленности, поиску новых идей на стыке наук и возможных направлений их комплексного развития и реализации.

В области социологии представляется перспективным проведение фундаментальных исследований проблем **модернизации политической и экономической системы** в ее органической

сопряженности с устойчивым социально-политическим, экономическим и социокультурным развитием Республики Беларусь. Это поможет нашей стране сохранить и упрочить свою активную субъектность в непредсказуемо меняющемся глобализирующемся мире. Общие контуры таких изменений сформулированы в Указе Президента Республики Беларусь от 12 сентября 2013 г. «О некоторых мерах по оптимизации государственных органов и иных государственных организаций, а также численности их работников». Реализация данных установлений не отменяет, а, напротив, предполагает и актуализирует проведение фундаментальных научных исследований в их взаимосвязи с прикладными разработками по ряду важнейших аспектов. Новые научные идеи возникают, обсуждаются, конкретизируются и становятся общим достоянием в теоретико-методологических и творческих дискуссиях, проводимых совместно представителями различных областей научных исследований.

Первый из таких аспектов требует концентрации исследований на основных параметрах оптимизации деятельности всех органов власти и управления с приоритетным вниманием к социологическому исследованию способов повышения эффективности работы **местного уровня**, прежде всего на срезе горсоветов и райсоветов и их исполнительных комитетов. Здесь следует учитывать сложившиеся тенденции в общественном мнении населения, когда каждые четверо из десяти опрошиваемых граждан считают назревшей и своевременной модернизацию политической системы. Причем претензии к качеству и эффективности принимаемых и выполняемых решений чаще всего предъявляются населением именно к начальному, исходному уровню – к местным органам управления и самоуправления. Именно здесь и должны получать свою реализацию новые фундаментальные идеи о способах функционирования власти и более органического взаимодействия с интересами, потребностями и запросами граждан, с их практической реализацией в технологиях управленческой деятельности, начиная от выборов в местные советы до совершенствования их работы с различными группами населения.

В этой деятельности основной акцент должен быть сделан на неуклонном и эффективном выполнении обоснованных наказов и требований избирателей, предложений рядовых граждан. Разумеется, эта работа может стать эффективной и одобряемой населением только в том случае, если она будет взаимоувязана с поддержанием социального порядка на подведомственных территориях. Большинство населения, как показывают прикладные социологические исследования, активно поддерживают разнообразные меры, направленные на предупреждение правонарушений и преступности, пресечение коррупции, избавление общества от тунеядства. Необходимо учитывать в этих исследованиях, что местная власть должна быть по-настоящему близкой к людям, действовать так, чтобы любой гражданин мог обращаться к ее представителям, вносить реалистические требования и предложения, а тем самым получать возможность принимать участие в управлении своим районом, городом или поселком.

Второе направление взаимодействия фундаментальных социологических исследований с прикладными разработками в данной сфере состоит в широко организованном изучении возможных каналов влияния властных структур в их взаимосвязи с научными и образовательными учреждениями на **формирование гражданственности**, активной жизненной позиции, патриотизма и социальной ответственности, прежде всего молодежи, за свое поведение.

Сегодня наша страна как никогда ранее нуждается в человеке-гражданине, готовом и способном эффективно трудиться не только ради собственного благополучия, но и во имя благополучия своего Отечества. Поэтому все каналы и средства идейного влияния на людей – детский сад, школа, вуз, трудовой коллектив, армия, молодежные организации, печать, радио, телевидение и т. п. должны быть ориентированы на воспитание патриотического образа мышления и поведения, на формирование сознательного, целеустремленного и эффективно работающего гражданина Республики Беларусь.

В тесном взаимодействии с решением этой задачи должны быть предприняты действенные, хорошо скордированные усилия по повышению эффективности патриотического воспитания наших граждан. Во всей этой многогранной деятельности следует принимать во внимание

проявившиеся в последнее время нежелательные смещения в ценностном сознании и поведении некоторых групп молодежи. Социологические исследования, проводимые в Беларуси в мониторинговом режиме, убеждают в том, что в настоящее время наиболее значимыми базовыми ценностями для большинства молодых людей являются (в порядке убывания) семья, любовь, здоровье, дети (это – превосходно), достаточно важными выступают также материально обеспеченная жизнь, дружба, интересная работа, профессия, самореализация, душевный покой, комфорт (это – хорошо), гораздо ниже в ценностной иерархии располагаются творчество, общественное признание, известность, репутация, долг перед Родиной (это наводит на размышление).

Разумеется, в школах, колледжах, вузах, трудовых коллективах Беларуси проводится множество интересных мероприятий патриотической направленности. О значительных успехах в этой сфере свидетельствует тот факт, что 53,7 % опрошенных учащихся связывают свое представление о патриотизме с преданностью Родине, 23,3 % – готовностью служить ее интересам, 34,2 % – готовностью защищать интересы Отечества. Более трети опрошенных учащихся свои представления о патриотизме связывают с привязанностью к родным местам, а 31,3 % – с уважением к историческому прошлому своего народа. Однако настораживает тот факт, что только один из семи опрошенных учащихся связывает свое представление о патриотизме с активной и полезной для общества трудовой деятельностью.

Третий аспект фундаментальных и прикладных исследований в этой сфере включает выявление и теоретическое обоснование основных трендов государственного воздействия на модернизацию экономической системы. Об актуальности и важности такого рода исследований свидетельствует следующий факт. В программу модернизации были включены 2820 белорусских предприятий. Однако к середине декабря 2013 г. только 40 % из них развернули модернизацию, а более половины находятся в состоянии самоуспокоенности. Здесь требуется технико-технологическая и научная разработка эффективной оценки процесса и результатов экономической модернизации, а без фундаментальных и прикладных социолого-экономических исследований не обойтись.

Еще одно направление перспективных фундаментальных исследований в их сопряженности с прикладными разработками в сфере гуманитарного знания состоит в разработке принципов и оптимальных путей социальной и духовной консолидации современного белорусского общества и обеспечения устойчивого инновационного развития страны, всех ее систем (экономической, политической, социальной, социокультурной) в условиях перехода к информационному этапу развития человеческой истории. В рамках философского, социологического, культурологического решения данной проблемы возникает задача разработки структуры и функций идеологии белорусского государства, путей повышения социально-гражданской активности различных групп населения, прежде всего молодежи, возрастания уровня духовной культуры, образованности и качества жизни граждан страны.

Одно из важных направлений фундаментальных исследований в гуманитаристике составляет изучение социологическими и культурологическими методами социодинамики национальной культуры в ее сопряженности, с одной стороны, с новейшими достижениями мировой культуры, и с другой, с расширением сферы применимости белорусского языка как в системе образования, так и в других сферах жизнедеятельности нашего общества, так как специалисты утверждают, что если язык изучают и пользуются им менее 70 % детей, он становится исчезающим. Здесь есть о чем задуматься, в том числе – и специалистам гуманитарной сферы.

Требуется обогащение и конкретизация инструментария социально-политических и политологических исследований путем применения, в частности, метода «воронки причинности», предполагающего концептуализацию политических явлений и событий посредством движения исследовательской мысли от более широкого набора макрофакторов к более узкому слою микрофакторов, обуславливающих в своей совокупности электоральное поведение различных групп населения, а также уровень доверия к властным структурам, что всегда становится актуальным в предвыборный период.

Судьбоносное значение имеет направление перспективных фундаментальных исследований в области общественных наук, состоящее в изучении наиболее эффективных путей **обеспечения национальной безопасности** страны, тем более, что в современном, становящемся все более глобализованном, мире резко усиливается военно-политическая, экономическая, информационная конкуренция, обостряются глобальные социальные турбуленции и конфликты интересов. В условиях, когда претенденты на мировую гегемонию ставят под вопрос нормы нравственности, твердят о размывании и увядании традиций национальных культур и государственных суверенитетов, когда на нашу страну, равно как и на Россию, обрушиваются волны информационных атак и кибервойн, резко актуализируется проведение фундаментальных исследований вопросов информационной безопасности. В этом направлении необходимо творческое взаимодействие философов, социологов, экономистов, исследователей в области кибернетики и радиоэлектроники, чтобы своевременно улавливать и эксплицировать новейшие тенденции в развитии межгосударственных и мировых информационно-коммуникационных процессов, вырабатывать и практически применять новейшие технологии выявления, предупреждения и противодействия обструктивным вторжениям в информационное пространство страны. Это позволит осуществлять квалифицированное предупреждение и пресечение информационно-кибернетических атак на суверенные государственные структуры, финансовую и политическую системы страны.

Наконец, еще одно актуальное перспективное направление фундаментальных исследований составляет проблема всестороннего **изучения человека как уникального природно-социального феномена**. Здесь необходимо использовать в рамках междисциплинарного теоретического синтеза как классические, давно сформулированные научные принципы, методы, приемы, так и новейшие постнеклассические подходы. Среди них особенно интересны с точки зрения фундаментальных исследований синергетический постулат нелинейности, бифуркационности развития всего окружающего мира со стремительнодвигающейся стрелой времени, означающей необратимость происходящих процессов, сформулированный И. Пригожиным, а также космологический антропный принцип, разработанный выдающимся космологом С. Хокингом, утверждающий, что все многообразие изменений и развития в доступной нашему наблюдению Вселенной происходит в направлении создания условий для возникновения жизни и венчающего ее человека. Характерно, что известный журнал «Science» в опубликованном им списке самых знаковых топ-проектов последнего времени назвал 7 научных открытий, связанных с биотехнологиями и проблемами человека. Все это свидетельствует, что наука в наше время все более становится постнеклассической и человекомерной.

Сегодня мы не можем сказать, что наука проникла во все тайны сложнейшей архитектоники и социально-психологических механизмов действий человеческого мозга. И едва ли возможно клонировать пусть и самую сложную технологию деятельности человеческого интеллекта. Во всяком случае творчество, внезапные интуитивные озарения, являющиеся неотъемлемой характеристикой процесса фундаментальных исследований, находятся за пределами функционирования самых сложных, суперсовременных кибернетических устройств. Проблема человека, смысла его бытия, предназначения в этом мире столь же многогранна, как и сама наука, как жизнь. Поэтому фундаментальные достижения в изучении и разрешении данной проблемы требуют интеграции не только действий специалистов гуманитарного знания, но и представителей естественных, медицинских, технических наук. Всеми своими сегментами и направлениями исследовательской деятельности наука призвана служить повышению качественных характеристик человеческого потенциала. Основные тренды движения общества к лучшему будущему пролегают именно в области формирования творчески мыслящего и действующего человека, а приоритетная миссия политической, научно-образовательной и социокультурной систем заключается в выращивании **человека – гражданина**, создавая условия для его творческой самореализации в различных сферах жизнедеятельности.

Ye. M. BABOSOV

babosov@yandex.ru

**INTERACTION OF FUNDAMENTAL AND APPLIED RESEARCH IN THE SPHERE OF HUMAN
KNOWLEDGE AS THE CONDITION FOR PERSPECTIVE DEVELOPMENTS**

Summary

The importance of fundamental research of the scientific sphere functioning for achieving sustainable socio-economic development of the country is revealed. The author emphasizes that the organic interaction of fundamental science with applied research opens the way to practical implementation of scientific and technical developments, including the system of human knowledge. Promising areas of basic and applied research in the field of social sciences and humanities in Belarus are characterized.

УДК 94(476)(36)–912.43:93/99

С. П. ВІЦЯЗЬ

ПРАБЛЕМА АРЭАЛА ПРУСАЎ: ГІСТАРЫЯГРАФІЧНЫЯ ВЫЗНАЧЭННІ

(Прадстаўлена акадэмікам М. П. Касцюком)

Цэнтр даследаванняў беларускай культуры,
мовы і літаратуры НАН Беларусі, Мінск

Паступіла 07.02.2014

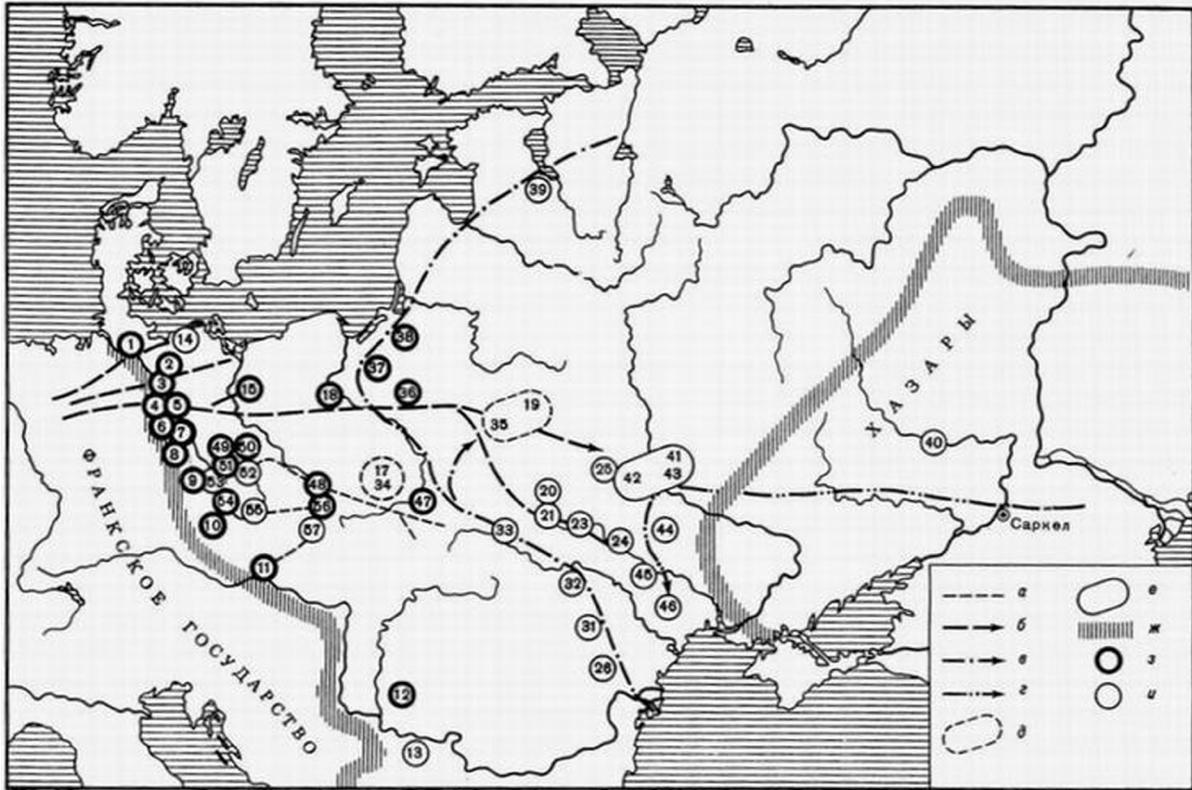
Прусы, як вядома, не стварылі тытульнага дзяржаўнага ўвасаблення. У канцы XIII ст. яны былі падпарадкаваныя ваенна-рэлігійнай арганізацыяй Тэўтонскага Ордэна, і ў выніку былі часткова асіміляваныя перасяленцамі на захопленыя землі (пераважна немцамі), часткова ўліліся ў склад насельніцтва суседніх тэрыторый – палякаў, літоўцаў, а таксама беларусаў.

Тэма арэала прусаў прадстаўлена ў еўрапейскай гістарыяграфіі ў адметным кантэксце, выразна палітызаваным, звязаным з праблематыкай тэрытарыяльных спрэчак. Паколькі ў прусаў не складалася ўласнае гістарыяграфічнае кола даследчыкаў, іх спадчыну вывучалі прадстаўнікі розных народаў і дзяржаў, у першую чаргу тыя, што валодалі іх землямі альбо прэтэндавалі на іх. Адпаведна, найбольш прадстаўнічыя пазіцыі ў гістарыяграфіі атрымалі вызначэнні нямецкіх і польскіх вучоных. Звароты расійскіх навукоўцаў да прускай тэматыкі да сярэдзіны XX ст. насілі выключна эпізодычны характар. Тэндэнцыя дысгармоніі захоўваецца ў расійскай навуцы дагэтуль: у вывучэнні спадчыны прусаў вылучаюцца сістэмныя археалагічныя даследаванні другой паловы XX – пачатку XXI ст., у той час як у галіне гісторыі адзначаецца «адсутнасць інтэлектуальнай традыцыі вывучэння даўніны рэгіёна» [1]. Гэты гістарыяграфічны дысбаланс актыўна выпраўляецца шэрагам навейшых даследаванняў, але праблема арэала застаецца адчыненай. Між іншым, назіраецца ўзрастанне навуковай увагі да гісторыі прусаў з боку еўрапейскіх даследчыкаў сярэднявечча, у т. л. беларускіх, у кантэксце высвятлення міжрэгіянальных сувязяў і уплываў рознага роду – этнічных, эканамічных, сацыяльных, палітычных, рэлігійных, культурных [2, с. 8–38].

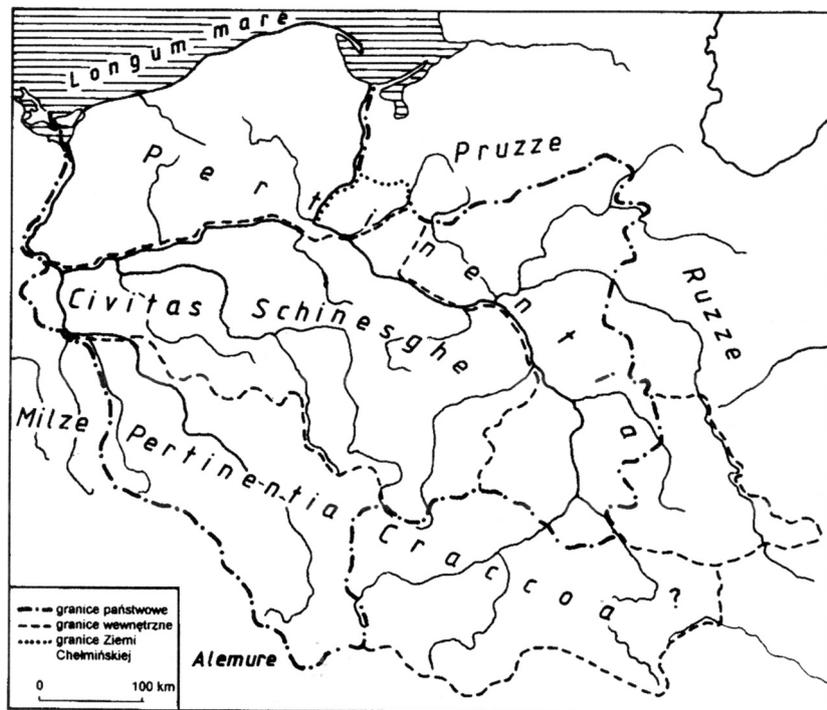
Варта папярэдне адзначыць дыяхронны аспект праблемы арэала прусаў: працяглы перыяд (V–XIII стст.) іх аўтаномнага бытавання (ад афармлення прусаў да іх падпарадкавання Ордэнам) схіляе да неабходнасці абмеркавання параметраў зменлівасці арэала ў часе.

Арэал старажытных прусаў вызначаецца праз комплексны аналіз гістарычных даных, суадносна з паведамленнямі пісьмовых крыніц, матэрыялаў археалогіі, даных мовазнаўства. Зыходнай пазіцыяй з’яўляецца высвятленне арэала прусаў згодна з іх этнічнымі вызначэннямі (4 рознакаранёвыя тыпы («эст-», «прус-», «віт-», «сем[б]-») [2, с. 47–53]. Найдаўнейшыя паведамленні па гэтай тэме ўключаюць узгадкі 8 раннесярэднявечных пісьмовых крыніц (IX–XI стст.) [2, с. 47–53]. Яны змяшчаюць звесткі аб месцазнаходжанні эстыяў (2 паведамленні), прусаў (4), Вітланда (1), Самланда і сэмбаў (1). Адзінкавыя крыніцы XIII–XVI стст. маюць звесткі аб месцазнаходжанні Прусіі і прусаў пасля ордэнскага гвалту. Раннія крыніцы адзначаюць адэкватнасць арэалаў эстаў, сэмбаў, прусаў, Прусіі, Вітланда, Самланда.

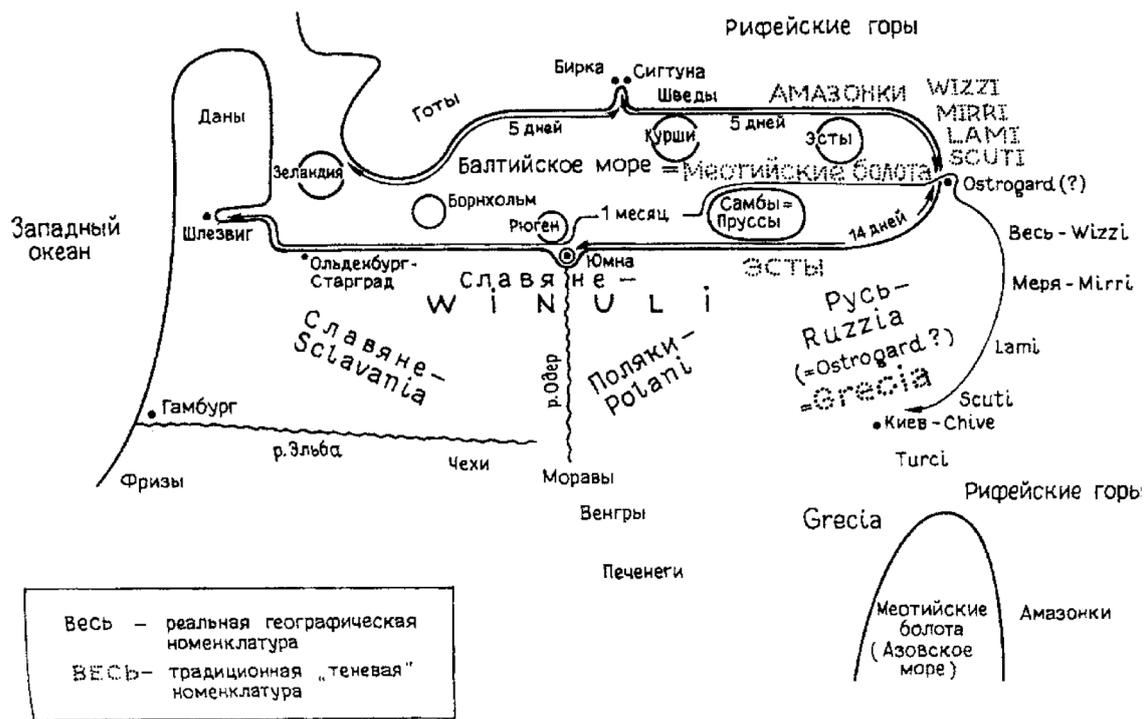
Геаграфічныя арыенціры месцазнаходжання ўзгаданых арэалаў (абагульненыя прасторавыя вызначэнні, а таксама ўскосныя спалучэнні адзнак) дазволілі даследчыкам рэканструіраваць лакалізацыю старажытных прусаў у рэгіёне Паўднёва-Усходняй Балтыкі, на ўсходнім беразе Балтыйскага мора, на ўсход ад ракі Вісла, на поўнач ад Польшчы, на паўночны захад ад Русі [3, с. 408; 4] (мал. 1–3). Адзначаныя крыніцы прадстаўляюць абагуленыя прасторавыя арыенціры знаходжання прусаў, але не даюць дакладных каардынат, а таксама не характары-



Мал. 1. Этнапалітычнае становішча ў рэгіёне Цэнтральнай Еўропы ў сярэдзіне IX ст., па звестках «Баварскага географа» (рэканструкцыя Й. Хермана): 38 – «Bruzzi»



Мал. 2. Этнапалітычнае становішча ў рэгіёне Цэнтральнай Еўропы ў канцы X ст., па звестках Dagome Iudex (рэканструкцыя Х. Лаўмянскага)



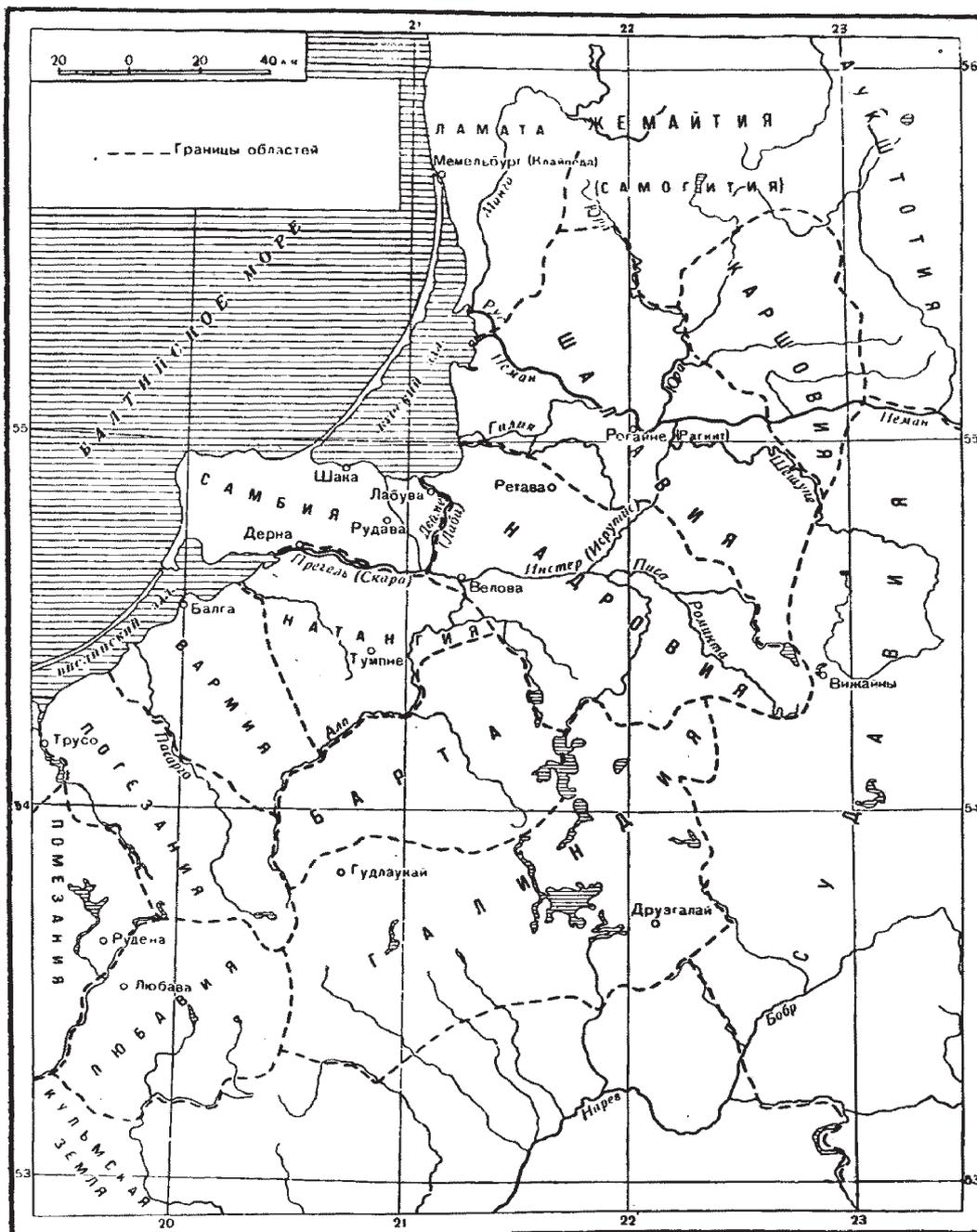
Мал. 3. Маршрут падарожжа Адама Брэменскага (канец XI ст.)

зуюць дынамікі рассялення. Асобныя крыніцы паведамляюць пра ландшафт прускіх земляў, вылучаюць іх спецыфічную рысу – знаходжанне сярод «непераадольных багнаў». Аналіз геаграфічных абставін рассялення прусаў дазволіў даследчыкам (Е. Сембжыцкі, Х. Лаўмяньскі, В. Шыменас) зрабіць выснову аб тым, што паміж пасяленскімі скупеннямі прусаў ляжалі незаселеныя памежныя пушчы, верагодна, сакралізаваныя.

Некаторыя познія крыніцы, у т. л. «Хроніка» Пятра з Дусбурга, «Гісторыя» Яна Длугаша, выкладаюць шэраг адносна дакладных геаграфічных каардынат і ўскосных звестак аб тэрытарыяльным падзеле арэала прусаў, згодна з чым выконвалі яго рэканструкцыю даследчыкі Германіі (мал. 4), Польшчы (мал. 5), СССР (мал. 6) з высокай ступенню ўзаемнасці. Але неабходна ўсведамляць, што характарыстыка арэалаў прускага рассялення ў пісьмовых крыніцах прама не прадстаўлена. Іх высвятленне з’яўляецца менавіта рэканструкцыяй гістарычных абставін [5]. Асабліва крытычна гэта палажэнне ставіцца да перыяду ранняга сярэднявечча, якое аддалена ад згаданых позніх пісьмовых крыніц на многія стагоддзі. Прадстаўляецца важным падчас разгляду дадзенага пытання кіравацца прынцыпам аўтэнтычнасці, вартасць якога адзначаў гістарычны географ С. А. Кавалеўскі: «Гісторык, які не ўлічвае тых змяненняў, што адбываюцца на працягу вякоў... нязменна будзе трапляць у памылку, адрываючы гістарычныя падзеі ад сучасных ім рэальных абставін» [6].

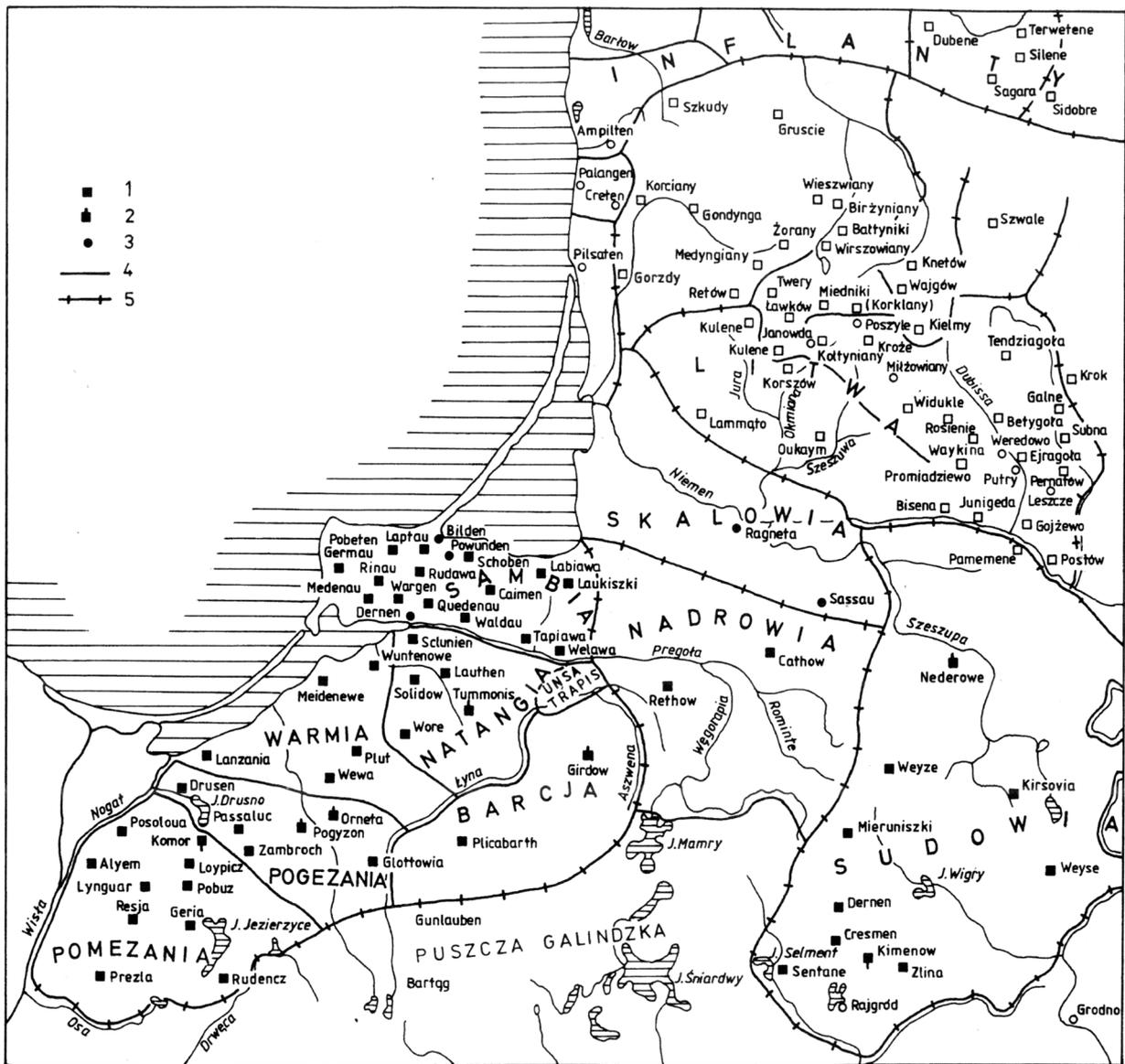
Высвятленне межаў і картаграфаванне прускіх земляў здзяйснялася з XIV ст. Вылучаюцца некалькі асноўных падыходаў у галіне гістарычнай геаграфіі прусаў.

Першы падыход, кансерватыўны. Праблема тэрыторыі прусаў была адной з прыярытэтных тэм нямецкай гістарыяграфіі. Гэта натуральна абумоўлівалася палітычнымі падставамі: імкненнем Тэўтонскага Ордэна і яго паслядоўнікаў апраўдаць гістарычнымі сродкамі падпарадкаванне нямецкімі находнікамі мясцовых жыхароў, прусаў. Зместам той пазіцыі былі, з аднаго боку, рэлігійная місія ахрышчэння насельнікаў узбярэжжа Балтыйскага мора, з другога – захоп іх земляў. Наступствам той пазіцыі былі вызначэнні, выкладзеныя ў працы «Пруская хроніка» пачатку XIV ст. храніста ордэна Пятра з Дусбурга [7]. Ён акрэсліў рэгіён Усходняй Балтыі, захоплены Ордэнам, абагульнена, як «землі прусаў». Аўтар адзначаў у іх складзе 11 так званых земляў. Іх пералік уключае наступныя: 1 – Хелмінская зямля і Любоўя, 2 – Памезанія, 3 – Паге-



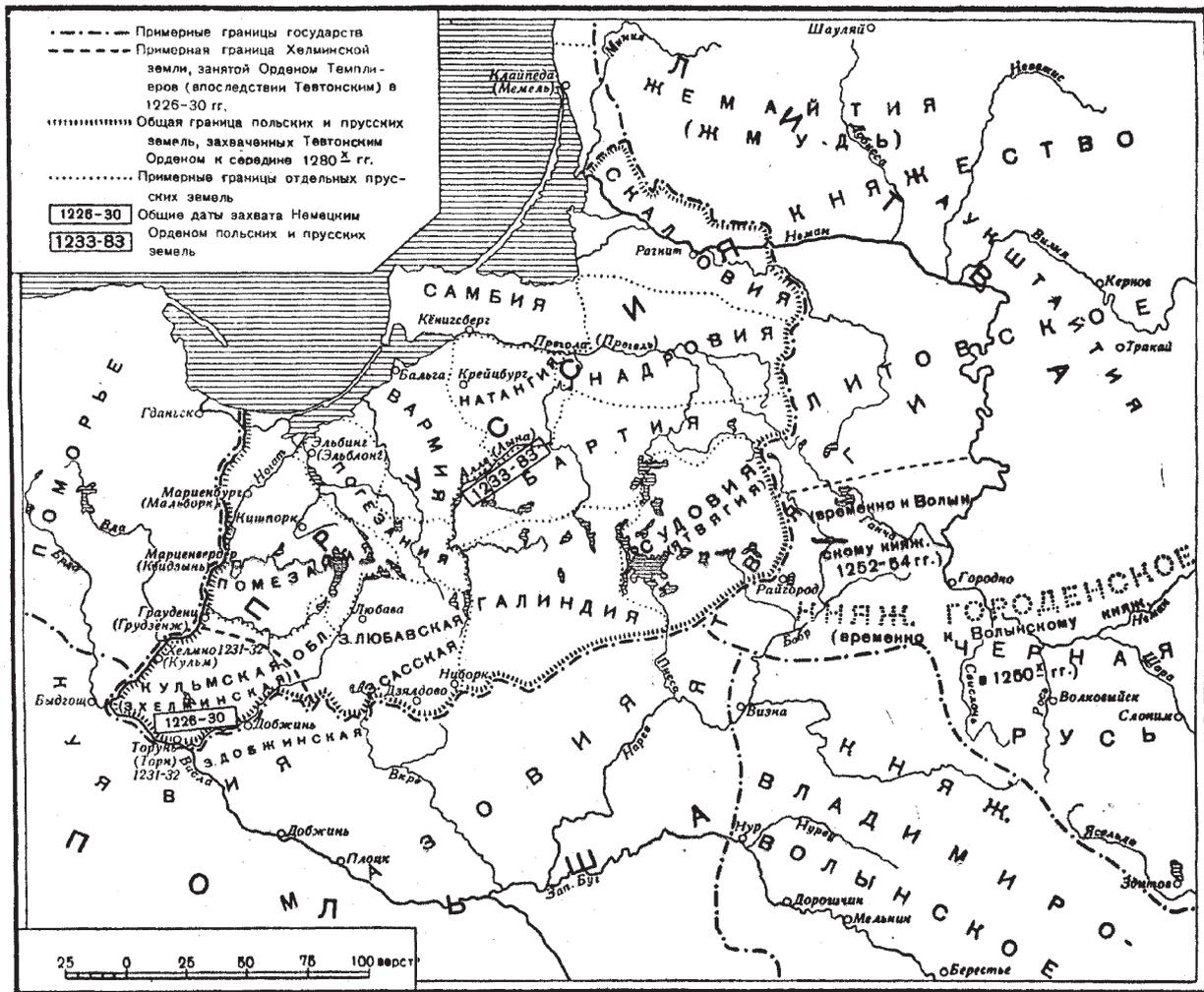
Мал. 4. «Землі» прусаў XIII–XIV стст. па звестках Пятра з Дусбурга (рэканструкцыя М. Тэппена; афармленне А. Кушнера)

занія, 4 – Вармія, 5 – Натангія, 6 – Самбія, 7 – Надровія, 8 – Скаловія, 9 – Судовія, 10 – Галіндыя, 11 – Барта і Пліка Барта (мал. 4–7). На падставе вызначэнняў храніста быў створаны дадзены падыход, які магчыма ацаніць, як прыклад суб'ектыўнага вырашэння арэальнай праблемы, менавіта з боку нямецкіх гісторыкаў [3; 5]. Крытычны аналіз пераліку Пятра з Дусбурга па звестках пісьмовых крыніц паказаў яго недакладнасць нават для перыяду XIII–XIV стст., якому была мэтава прысвечаная яго «Хроніка». Напрыклад, у пералік не патрапіў шэраг прускіх «земляў», вядомых па звестках іншых крыніц (Ланзанія, Перагодзія, Селонія, Сасінія, Паслек ды інш.) [8; 9]. З другога боку, з самога пераліку 11 вышэйназваных «зямель» толькі 7 былі заселеныя непасрэдна прусаў [5; 8–10].



Мал. 5. Этнапалітычнае становішча ва Ўсходняй Балтыцы ў XIII ст. («землі прусаў») (рэканструкцыя і афармленне Х. Лаўмяньскага)

Тым не меней, для першага падыходу прымаўся погляд аб спрадвечнай нязменнасці арэала прусаў ад старажытнасці да фіксацыі іх становішча ў названай «Хроніцы». Нямецкія гісторыкі не надта абцяжарвалі сябе пошукам аргументаў для высвятлення рэальнага становішча прускага рассялення ў раннім сярэднявеччы (сярод адзінкавых аналітычных прац – работы першай паловы XX ст. О. Шлютэра [11], Х. і Г. Мортэнсэнаў [12; 13]). Строга кажучы, такія аргументы (гістарычныя, археалагічныя) на перыяд да сярэдзіны XX ст. яшчэ не існавалі. Таму крыніцазнаўчая лакуна запаўнялася абагульненай рэтраспекцыяй праз стагоддзі вызначэнняў Пятра з Дусбурга, іншых сярэднявечных крыніц. Такое выключна гіпатэтычнае палажэнне не атрымала належнага крытычнага гістарычнага абмеркавання, але набыло статус агульнапрынятай догмы. Гэты падыход звычайна выкарыстоўваецца ў аглядна-абагульняючых і навукова-папулярных працах па прускай тэматыцы. Таму ў сувязі з шырокай распаўсюджанасцю гэтага падыходу (неабгрунтаванага і памылковага для перыяду раней за XIII ст.), які фактычна набыў статус гістарыяграфічнай традыцыі, пэўнага географічнага канону, прадстаўляецца мэтазгодным выкарыстоўваць яго вызначэнні ў якасці прасторавых арыенціраў (у далейшым у дужках будуць адзначацца нумары прускіх «зямель», згодна з пералікам Пятра з Дусбурга).



Мал. 6. Этнаполітычнае становішча ва Ўсходняй Балтыцы ў XIII ст. («землі прусаў») (рэканструкцыя В. Пашуты, афармленне І. Галубцова)

Другі падыход, этнічна арыентаваны. Створаны на падставе аналітычных удакладненняў арэальных вызначэнняў Пятра з Дусбурга. Згодна з ім, да прусаў адносяць толькі тыя землі з яго пераліку, якія былі заселеныя непасрэдна прусамі. Такі падыход распрацоўваўся, у пераважнай ступені, навукоўцамі Польшчы па даных пісьмовых крыніц (Х. Лаўмяньскі, К. Тымянецкі, К. Буцэк, Г. Лабуда, Я. Паверскі і інш.). Гэта акалічнасць мае палітычныя падставы, паколькі Польшча вяла тэрытарыяльныя спрэчкі за землі ўзбярэжжа Балтыкі з Тэўтонскім Ордэнам і яго паслядоўнікамі з XIV да сярэдзіны XX ст., калі, нарэшце, прускія землі былі перададзены ад Германіі да СССР (1/3) і Польшчы (2/3). Заўважым, што ўзгаданыя пісьмовыя крыніцы ствараліся ў познія часы, пасля ордэнскага прымусу. Таму тыя матэрыялы дазваляюць толькі акрэсліваць міжэтнічныя кантактныя зоны (найперш, пруска-польскія), выяўляць пэўныя кірункі рассялення, але не прадстаўляюць факталагічных даных для ранняга сярэднявечча. Аднак, арэальныя вызначэнні на падставе другога падыходу таксама як і першага носяць гіпатэтычны характар, з'яўляюцца рэтраспекцыяй, але несумненна больш абгрунтаванай.

У цэлым, для другога падыходу прымаецца палажэнне аб асваенні прусамі арэала (па «Хроніцы») праз іх рассяленне з Самбіі на мацярык у перыяд VII–VIII стст. [14, s. 289, 295]. Дыскусія па пытаннях этнічнага зместу «зямель» з пераліку Пятра з Дусбурга атрымала наступныя ўдакладненні. Тэндэцыйнасць аднясення да прусаў Хелмінскай (Кульмскай) зямлі (1), якая спрадвечна была польскай, адзначалі В. Кентжыньскі (1874, 1877, 1882), Л. Вэбер (1878), К. Казіске (1934). Яе першапачатковую прыналежнасць прусам, якую толькі кароткачасова захапіла Польшча



Мал. 7. Прускія «землі» ў V і XIII стст. (рэканструкцыя У. Кулакова, Х. Лаўмяньскага, афармленне С. Віцзя, А. Лукашова)

напярэдадні прыходу ордэна, меркавалі Г. Хенкель (1886), Г. Плэн (1900, 1904–1905). Пазіцыю Пятра з Дусбурга абараняў Х. Харм'янц (1936). Аргументаваныя доказы на карысць яе польскай (славянскай) прыналежнасці прывялі Я. Парадоўскі (1936, ён жа ўдакладніў палажэнне пруска-хелмінскай (пруска-польскай) мяжы), Я. Паверскі (1970).

Часам тэрытарыяльныя дыскусіі перакрочвалі традыцыйныя тэмы. Так, дыскутавалася нават этнічная прыналежнасць зямлі Памезаніі (2) на правабярэжжы Ніжняй Віслы, побач з Хелмінскай зямлёй. Яе залічалі да польскіх зямель В. Кентжынскі (1874), Ф. Дуда (1909), С. Куйот (1913–1918, 1924). Аргументавана адносілі яе да прусаў В. Лега (1929, 1930), Х. Лаўмяньскі (1935), Я. Паверскі (1970). З іншага боку, выказвалася меркаванне і аб бытаванні прусаў на левым беразе Ніжняй Віслы: Ф. Лорэнтц (1905), В. Лега (1929, 1930).

Прыналежнасць Скаловіі (8) да прусаў падтрымліваў О. Натан (1937). Лічылі скальваў адгалінаваннем заходнебалцкага племені куршаў К. Энгель (1931, 1939), В. Нагавічус (1935), Й. Хоффман (1939, 1941). Р. Валкайтэ-Кулікаўскене (1968, 1970), А. Таўтавічус (1977, 1987, 1996), В. Шыменас (1990, 1994) сцвярджалі, што скальвы – асобнае заходнебалцкае племя [15, s. 44–101, 173–181; 16]. Такі ж пункт гледжання падтрымлівае У. Кулакоў (1994, 2003) [10; 17]. Мяркуюцца, скальвы вылучыліся з агульнага масіва заходнебалцкай культуры ў II ст. н. э., яшчэ да фарміравання прусаў.

Судовія (9), згодна з другім падыходам, лічыцца адной з правінцый яцвягаў. Самі яцвягі сёння ацэнваюцца як асобнае (побач з прусамі і інш.) заходнебалцкае племя [2, с. 69–84]. З іншага боку аўтар абгрунтоўвае палажэнне аб познім (з IX ст.) фарміраванні яцвягаў на аснове прускай культуры [2, с. 163–170], але гэта пазіцыя складзена па-за межамі дадзенага падыходу (гл. трэці падыход).

Галіндыя (10) суадносіцца з адным з заходнебалцкіх народаў – галіндамі (носьбіты багачоўскай археалагічнай культуры вылучыліся ў пачатку I тыс. н. э. з масіва заходнебалцкай культуры) [18]. Старажытнае насельніцтва галіндаў да сярэдзіны I тыс. н. э. у значнай ступені пакінула мацярынскі арэал (Цэнтральныя Мазуры). Рэшткі галіндаў, па меркаванні Х. Лаўмяньскага (1931–1932), знішчылі палякі ў перыяд другой паловы XI – пачатку XIII ст. [19]. У выніку на месцы Галіндыі заставалася малазаселеная памежная пушча, што зафіксаваў у пачатку XIV ст. Пётр з Дусбурга ў разгорнутым каментарыі сваёй «Хронікі», угадаўшы той рэгіён як *terra desolata* («спустошаная зямля») [7]. Х. Лаўмяньскі той арэал вызначаў як «Пушча Галіндская» (незаселены памежны лясны масіў) [19; 20]. Такім чынам, па другім падыходзе вылучаецца наступны

пералік этнічна прускіх земляў са складу вызначэнняў Пятра з Дусбурга: усіх 7, за выключэннем «зямель» 1, 8, 9, 10 (мал. 7).

Існуе значны недахоп першага і другога падыходаў – меркаванне, што прускі арэал працяглы час заставаўся нязменным у часе. На гэтай падставе выконвалася спрошчанае рэтраспекцыя арэала вышэйзгаданых «зямель» па «Хроніцы» Пятра з Дусбурга для рэканструкцыі ранняга арэала прусаў. Натуральна, такі падыход – ацэнка арэальнага становішча на падставе звестак, пазнейшых на многія стагоддзі – з’яўляецца некрытычным па сутнасных параметрах і патрабуе крыніцазнаўчых удакладненняў. Немагчыма сцвярджаць, у які менавіта час там знаходзіліся прусы – пісьмовыя і лінгвістычныя крыніцы не даюць аб тым даных. Таму, вынікі гэтага падыходу таксама немагчыма прызнаць паўнаважкімі для ўсёй 800-гадовай прускай эпохі.

Трэці падыход, археалагічна арыентаваны. Гэты падыход мае прынцыповае адрозненне ад папярэдніх у крыніцазнаўчым плане, паколькі ён грунтуецца найперш на археалагічных даных, у суаднясенні са звесткамі пісьмовых крыніц. Адпаведна, да прусаў адносяцца толькі тыя землі, якія былі непасрэдна заселеныя прусамі, па вызначэннях археалогіі.

Дадзены падыход, найбольш рэалістычны і дасканалы, абапіраецца на вынікі археалагічных даследаванняў рэгіёна і патрабуе іх максімальна поўнага ўліку. Абгрунтаванае ўяўленне аб тэрыторыі раннесярэднявечных прусаў з’явілася толькі ў пачатку XX ст., пачынаючы з публікацыі археалагічнай карты арэала распаўсюджання даўніх прускіх пахавальных помнікаў, выкананай Э. Холлакам (1908) [21]. Пазней О. Шлютэр (1921) здзейсніў гіпатэтычную рэтраспекцыю палеагеаграфічнага становішча ў прускіх землях XI–XII стст. [11], абапіраючыся пераважна на матэрыялы пазнейшых пісьмовых крыніц XIII–XIV стст. і арыенціры Э. Холлака. Але ў цэлым прадстаўленні аб тэрыторыі раннесярэднявечных прусаў выкладаліся ў высокай ступені гіпатэтычна. Праблема ўскладнялася агульнай нераспрацаванасцю нямецкімі даследчыкамі пасяленчаскай археалогіі прусаў. Польскія навукоўцы выявілі зоны міжэтнічных кантактаў і акрэслілі зыходныя арэалы рассяленняў. Паўнаважныя распрацоўкі па арэальнай праблеме прадставілі расійскія археолагі (пераважна працы У. Кулакова) [5; 10; 17; 22; 23] у канцы XX ст. Вывучэнне

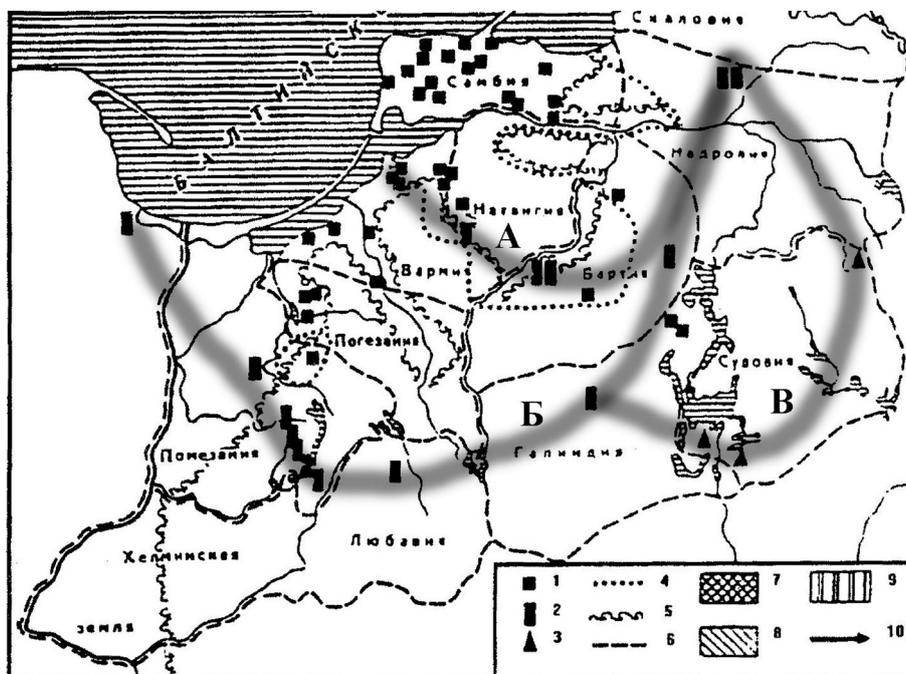


Мал. 8. Арэалы заходнебалцкіх плямёнаў (прусы, куршы, ламаты, скальвы, ятвягі) і іх суседзяў (славяне, аўкштайты, жэмайты) у VII–X стст. (па У. Кулакову)

пахавальных і жыллёвых помнікаў, сістэматызацыя матэрыялаў раскопак, каталагізацыя масіваў даных, назапашаных інтэрнацыянальнымі намаганнямі еўрапейскіх навукоўцаў, мела вынікам складанне факталагічнага грунту для рэканструкцыі пасяленчаскай сітуацыі прусаў. На фоне традыцыйна распаўсюджаных «вялікіх» арэалаў першага і другога кірункаў – гэты абшар для ранняга сярэднявечча выглядае нязвыкла «сцісла» (мал. 8) і прадстаўляе прускую тэрыторыю, якая ўключае паўвостраў Самбія (адпавядае «зямлі» Самбія (6) і паўночнай частцы «зямлі» Натангія (5), па першым і другім падыходах), а таксама адгалінаванне на паўднёвы захад – узбярэжжа Віслінскага заліва, да р. Нагата (паўночныя часткі «зямель» Натангія (5), Вармія (4) і Пагезанія (3), і адгалінаванне на поўдзень, па басейне ракі Лына (па памежжах «зямель» Натангія (5) і Надровія (7), а таксама Вармія (4) і Барта (11)) [24]. Мацярынскі арэал прусаў – во-бласць, дзе адбывалася складанне ўласна прускай культуры (сярэзіна I тыс. н. э.) уключае паўвостраў Самбія і прылеглае з захаду ўзбярэжжа Віслінскага заліва (мал. 7). Асваенне вышэй-акрэсленага раннесярэднявечнага рэгіёна адбывалася двума хвалямі прускага рассялення з мацярынскага арэалу – у другой палове XI і пачатку XII ст. (мал. 9) [5; 10; 17; 22]. Такім чынам, «запаўненне» прусамі рэгіёна па Пятру з Дусбурга адбывалася толькі за два стагоддзі да стварэння яго «Хронікі». Тады ж здзяйснялася і актыўнае непасрэднае памежнае кантактаванне з суседзямі, найперш славянамі – палякамі. Найбольш поўны масіў даных па гэтым падыходзе завоеваны расійскімі археолагамі [2, с. 43–44, 351–357; 23], што вызначае адпаведныя перадумовы вывятлення аб'ектыўнага стану прускага рассялення і накіроўвае для ацэнкі трэцяга падыходу арэла прусаў як найбольш крыніцазнаўча абгрунтаванага і дасканалага.

Варта адзначыць, што на сённяшні дзень у большасці публікацый па прускай тэматыцы прадстаўлены арэальныя распрацоўкі па першым падыходзе. Гэта выклікана тым, што аўтараў у большай ступені цікавіць не гісторыя саміх прусаў, а палітычныя наступствы той гісторыі, размеркаванне ва ўласнасць іх земляў. Навуковыя гістарычныя публікацыі прэзентуюць больш уважаны другі падыход. Навейшы трэці падыход знаходзіцца ў стадыі асэнсавання навуковай грамадскасцю.

У выніку вылучаюцца наступныя важныя акалічнасці: рэканструкцыі арэала прусаў канцэнтруюцца вакол трох вышэйакрэсленых падыходаў, якія ўвасабляюць змястоўна розныя гістарыяграфічныя пазіцыі. У сваю чаргу, тыя пазіцыі гістарыяграфіі абумоўленыя рознымі масівамі гістарычных крыніц. Такім чынам, выяўленне адэкватнага крыніцазнаўчага падмурку арэаль-



Мал. 9. Рассяленне прусаў у пачатку II тыс. н.э.: А – мяжа другой паловы XI ст.; Б, В – межы пачатку XII ст. (па У. І. Кулакову, з дапаўненнямі С. П. Віцязя)

най праблемы прывяло да прынцыповага перагляду гістарыяграфічных вызначэнняў, а таксама прадэманстравала надзённую запатрабаванасць увядзення матэрыялаў археалагічных даследаванняў у рэчышча гістарычнай рэканструкцыі.

Літаратура

1. Гончаров В. В. История Восточной Пруссии и Калининградской области в отечественной и зарубежной историографии: автореф. дисс. ... канд. ист. наук. М., 2009. – 30 с.
2. Віцязь С. П. Прусы і яцвягі ранняга сярэднявечча: этнакультурныя трансфармацыі ў Верхнім Панямонні. Мінск, 2012. – 411 с.
3. Гуревич Ф. Д. // Материалы и исследования по археологии СССР. М.; Л., 1960. Вып. 76. С. 328–451.
4. Щавелева Н. И. Польские латиноязычные средневековые источники. М., 1990. – 210 с.
5. Кулаков В. И. // Балто-славянские исследования–1985. М., 1987. С. 95–101.
6. Ковалевский С. А. // Изв. Крымского отд-ния географического общества СССР. 1957. Вып. 4. С. 18–24.
7. Петр из Дусбурга. Хроника земли Прусской. М., 1997. – 384 с.
8. Biskup M., Labuda G. Dzieje Zakonu Krzyżackiego w Prusach. Gospodarka – Społeczeństwo – Państwo – Ideologia. Gdańsk, 1986. – 624 s.
9. Lowmiański H. // Lituano-Slavica Posnaniensia. Studia Historyca. Poznań, 1985. N 1. S. 3–105.
10. Кулаков В. И. Становление европейского средневекового города. М., 1989. С. 80–106.
11. Schlüter O. Wald, Sumpf und Siedlungsland in Altpreußen vor der Ordenszeit. Halle, 1921. – 96 s.
12. Mortensen H., Mortensen G. Die Besiedlung des nordöstlichen Ostpreussens bis zum Beginn des 17 Jahrhunderts: in 3 bd. – Leipzig, 1937–1938.
13. Mortensen-Heinrich G. Beiträge zu den Nationalitäten- und Siedlungsverhältnissen von Preussischen Litauen. Berlin, 1927. – 87 s.
14. Wróblewski W. // Słowianie i ich sąsiedzi we wczesnym średniowieczu. Lublin; Warszawa, 2003. S. 165–181.
15. Tautavičius A. Z. Lietuvos TSR Archeologijos Atlasas. Vilnius, 1977. T. 3: I–XIII a. pilkapynai ir senkapiai. – 192 p.
16. Šimėnas V. // Vidurio Lietuvos Archeologija. Vilnius, 1994. S. 10–20.
17. Кулаков В. И. // Тр. V Междунар. конгресса славянской археологии: в 3 т. М., 1997. Т. 3. В. 1а: Города, их культурные и торговые связи. С. 116–124.
18. Nowakowski W. // Wiadomości Archeologiczne. Warszawa, 1986–1990. T. LI. Z. 1. S. 31–48.
19. Lowmiański H. Studia nad początkami społeczeństwa i państwa litewskiego: w 2 t. Wilno, 1931–1932.
20. Białuński G. Studia z dziejów plemion pruskich i jaciwskich. Olsztyn, 1999. Rozprawy i materiały OBN im. W. Kętrzyńskiego w Olsztynie. № 179. – 183 s.
21. Hollak E. // Zeitschrift für Ethnologie. Anthropologie, Ethnologie und Urgeschichte. Berlin. 1908. Bd. 40, N 1–6. S. 145–193.
22. Кулаков В. И. Древности пруссов VI–XIII вв.: Свод археологических памятников СССР. Вып. Г 1–9. М., 1990. – 170 с.
23. Кулаков В. И. История Пруссии до 1283 г. (Prussia Antiqua. Т. 1). М., 2003. – 432 с.
24. Кулаков В. И. // Калининградская область. Атлас мира. Калининград, 2011. Т. 20. С. 67.

S. P. VITSIAZ

vit@history.minsk.by

PRUSSIANS AREAL PROBLEM: HISTORIOGRAFIC DECISIONS

Summary

The basic historiographic approaches to the reconstruction of Prussians areal are discussed: conservative (German historical and archeological schools); 2 – ethnos-oriented (Polish historical and archeological schools), 3 – archeology-oriented (Russian archeological school). The source study features of approaches 1 and 2 are found: the orientation mainly to the later Middle Ages writing sources, which makes their definition of Prussians areal (V–XIII centuries) hypothetic, unreliable. The definitions of Russian archeologists (V.I. Kulakov et al.) are distinguished as the most substantiated and reliable, but not enough interpreted historically. A conclusion is made that it is urgent to introduce the material of archeology into the context of historical studies of the early Middle Ages.

РЕФЕРАТЫ

УДК 512.542

Мурашко В. И. **Свойства класса конечных групп с \mathbf{P} -субнормальными циклическими примарными подгруппами** // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 5–8.

Построен максимальный внутренний локальный экран наследственной насыщенной формации \mathbf{X} всех конечных групп с \mathbf{P} -субнормальными циклическими примарными подгруппами. С помощью найденного локального экрана получен новый критерий \mathbf{X} -гиперцентральности нормальной подгруппы. Показано, что формация \mathbf{X} является замкнутой относительно взятия произведений \mathbf{P} -субнормальных подгрупп, имеющих взаимно простые индексы в группе.

Библиогр. – 8 назв.

УДК 517.933

Милованов М. В., Медведева О. Г. **Применение методов группового анализа к изучению обобщенных цепочек Тоды с двумя экспонентами** // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 9–15.

Рассматривается уравнение $y'' = \left(\lambda - \frac{1}{k} y'^2 \right) \left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1-x^2-y^2} \right)$ в полукруге $1-x^2-y^2 > 0$, $y = y(x) > 0$, $k\lambda > 0$, к которому сводятся обобщенные цепочки Тоды с гамильтонианом, содержащим две экспоненты.

При достаточно малом по модулю λ это уравнение можно заменить более простым уравнением, положив $\lambda = 0$. Доказано, что последнее имеет одномерную группу симметрии и сводится к дифференциальному уравнению первого порядка, с помощью которого можно получить сколь угодно точное описание общего решения упрощенного уравнения второго порядка вблизи границы полукруга.

Библиогр. – 5 назв.

УДК 519.1

Картынный Ю. А., Орлович Ю. Л. **Доминантно-треугольные графы и графы верхних границ** // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 16–25.

В работе вводится и изучается собственный подкласс треугольных графов, а именно доминантно-треугольные графы. Граф G называется доминантно-треугольным, если для любого минимального доминирующего множества D графа G и любых смежных вершин u и v , не входящих в D , существует вершина $w \in D$, одновременно смежная с u и v , т. е. множество $\{u, v, w\}$ порождает треугольник в графе G . Получен ряд характеристик класса доминантно-треугольных графов, которые, в частности, указывают на совпадение этого класса графов с хорошо известным классом графов верхних границ и классом ирридантно-треугольных графов. Установлена вычислительная сложность и сложность аппроксимации в классе доминантно-треугольных графов некоторых теоретико-графовых параметров, родственных классическим числам независимости и доминирования.

Библиогр. – 28 назв.

УДК 511.42

Бударина Н. В., Бересневич В. В., Берник В. И. **Совместные диофантовы приближения с немонотонной правой частью** // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 26–30.

В работе доказано, что аналог теоремы Хинчина для совместных приближений точек плоскости алгебраическими сопряженными числами справедлив и без требования монотонности функции аппроксимации. Основным моментом доказательства является эффективная метрическая теорема о порядке значений многочлена и всех его производных на множестве точек плоскости, имеющего положительную меру.

Библиогр. – 12 назв.

УДК 517.9

Гайшун И. В. Дифференциальные уравнения над кольцом функций на множестве гомоморфизмов дифференциального кольца в кольцо констант // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 31–33.

Определен класс дифференциальных уравнений над абстрактным кольцом с дифференцированием, в которых явным образом фигурирует независимая переменная, роль которой играют гомоморфизмы в кольцо констант. Наличие независимой переменной позволяет достаточно естественным образом формулировать различные задачи, традиционные для обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве примера рассмотрена задача наблюдаемости линейной системы дифференциальных уравнений по некоторому выходу, известному в точках заданного множества наблюдения.

Библиогр. – 6 назв.

УДК 524.6:531

Томильчик Л. М. Масштабная инвариантность в конформной геометрии и ее возможные наблюдаемые проявления // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 34–42.

Рассмотрена процедура определения радиолокационного расстояния в условиях конформной пространственно-временной геометрии. Показано, что вследствие конформного сокращения пространственных интервалов распространение монохроматического электромагнитного сигнала по замкнутому пути должно сопровождаться возникновением универсального фиолетового частотного сдвига, относительная величина которого равна произведению постоянной Хаббла на длительность распространения сигнала. Предсказанный эффект представляет собой локальное проявление космологического расширения и, в принципе, доступен экспериментальной проверке.

Библиогр. – 10 назв.

УДК 535.14

Степанов В. П., Могилевцев Д. С., Малоштан А. С., Килин С. Я. Классический разделитель пучка для одиночных фотонов и управление спонтанным излучением с помощью перепутывания // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 43–46.

В сообщении показывается, что система двухуровневых излучателей, связанная с диссипативными резервуарами, может функционировать как «классический» делитель пучка при работе с одиночными фотонами. Предложенное «классическое светоразделяющее устройство» может быть полезно при разработке устройств, контролирующих спонтанное испускание.

Ил. 2. Библиогр. – 11 назв.

УДК 539.122.2:539.124:548.732.2

Сытова С. Н. Влияние внешних условий на хаос в объемных лазерах на свободных электронах // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 47–52.

Проведено исследование хаотической динамики в объемном лазере на свободных электронах (ОЛСЭ) под влиянием внешних падающих на сеточный резонатор ОЛСЭ электромагнитных волн. Показана возможность изменения типа и величины амплитуды динамического решения, а также подавления паразитных мод в ОЛСЭ.

Ил. 4. Библиогр. – 15 назв.

УДК 577.152.1:547.681

Сыса А. Г., Панибрат О. В., Бабенко А. С., Шабуня П. С., Фатыхова С. А., Киселев П. А. Комплексный характер влияния полициклических ароматических углеводородов на метаболические процессы как важный фактор, определяющий особенности их канцерогенной активации // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 53–56.

В работе оценен вклад монооксигеназной составляющей в канцерогенную активацию одного из ключевых проканцерогенных производных бензо(а)пирена – 7,8-бензо(а)пирен-диола в клеточной линии аденокарциномы легких А549. Количественное определение двух образующихся в результате монооксигеназной реакции диолэпоксидов и сопоставление с израсходованным количеством субстрата позволили заключить, что вклад монооксигеназного процесса в условиях эксперимента в клетках А549 составляет лишь 13 %, что в принципе согласуется с относительно низким уровнем конститутивной экспрессии CYP1A1 и CYP1B1. Картина существенно меняется при экспонировании клеток действию 20-метилхолантрена – полициклического ароматического углеводорода, входящего в состав табачного дыма: монооксигеназная составляющая в канцерогенной активации 7,8-бензо(а)пирен-диола достигает уже 25 %. Причем практически 90 % приходится на

долю «полного» канцерогена – диолэпоксида-2. Это позволяет полагать, что попадание в организм не одного, а целого пула полициклических ароматических углеводородов может существенным образом влиять не только на уровень, но и на направление канцерогенной активации отдельных представителей полициклических ароматических соединений.

Табл. 2. Библиогр. – 12 назв.

УДК 535.14;535.18

Алмодарресие Х. А., Шахаб С. Н., Филиппович Л. Н., Арико Н. Г., Агабеков В. Е. Получение и оптические свойства широкополосных поливинилспиртовых пленок, окрашенных смесью дихроичных красителей // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 57–61.

Разработаны пленочные поляризаторы на основе поливинилового спирта (ПВС), нового дихроичного красителя – натрий 2-гидрокси-5-((2-метокси-4((4-сульфофенил)диазенил)фенил)диазенил)бензоата (шифр M₁₂) и смесей дихроичных красителей, поляризирующих в широком спектральном диапазоне (330–685 нм).

Ил. 5. Табл. 2. Библиогр. – 9 назв.

УДК 543.554.6

Рахманько Е. М., Слепцова Н. Н., Гулевич А. Л., Цыганов А. Р. Бромидная функция пленочного электрода на основе тринонилоктадециламмония тетрабромокадмиата // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 62–67.

Работа посвящена изучению влияния природы аниона соли кадмия (хлорида, нитрата и ацетата) на лигандную функцию тетрабромокадмиат-селективного электрода. В качестве анионообменника для мембран ионоселективного электрода использовался образец высшей четвертичной аммониевой соли – иодид тринонилоктадециламмония. Установлено, что рост фоновой концентрации Cd²⁺-ионов в водном растворе приводит к снижению верхнего предела обнаружения и возрастанию крутизны бромидной функции, что вызывает увеличение точности определения бромидов в реальных объектах. Но вместе с тем при увеличении концентрации катионов кадмия возрастает нижний предел обнаружения, сужается и смещается в более концентрированную область линейный диапазон бромидной функции. Установлено, что использование ацетата кадмия предпочтительнее, чем хлоридных и нитратных солей кадмия. Проведен теоретический расчет бромидной функции CdBr₄²⁻-СЭ через систему уравнений, отражающих закон действующих масс и условия материальных балансов, и установлено, что экспериментальные и теоретические потенциалы совпадают в линейной области градуировочных графиков.

Табл. 3. Ил. 4. Библиогр. – 12 назв.

УДК 577.112.4:57.083.3:543.426

Гарбуз О. С., Дубовская Л. В., Свиридов О. В. Новый реагент для мечения белков ионами редкоземельных металлов // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 68–74.

Взаимодействием европиевой соли 2-аминоэтиламида диэтилентриаминпентауксусной кислоты с ди-N-сукцинимидным эфиром *n*-фталевой кислоты получен активированный эфир карбоксипроизводного диэтилентриаминтетраацетата европия. Этот реагент использован для введения ионов редкоземельного металла в структуру молекул моноклональных антител. Белки, меченные Eu³⁺, обеспечивали необходимые характеристики интенсивности флуоресценции, фона, чувствительности и специфичности в медицинских диагностических наборах лантанидного иммунофлуориметрического анализа.

Табл. 1. Ил. 2. Библиогр. – 13 назв.

УДК 544.72; 546.824-31; 546.776

Боборико Н. Е., Бобриков И. А., Мычко Д. И., Каркоцкий Г. Ф. Синтез и структура газочувствительных композитных материалов TiO₂-MoO₃ // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 75–80.

Введение легирующих добавок оксида молибдена в состав газочувствительных материалов на основе диоксида титана приводит к значительному повышению выходного сигнала в водородо-воздушной среде. Установлено, что величина выходного сигнала максимальна при содержании 1 мол. % MoO₃ в композитном материале. Улучшенные газочувствительные характеристики композита TiO₂-MoO₃ с 1 мол. % MoO₃ коррелируют со структурно-фазовыми особенностями данной системы – подавлением кристаллизации диоксида титана в системе TiO₂-MoO₃, смещением фазового перехода анатаз–рутил в область больших температур по сравнению с температурой данного перехода для нелегированного диоксида титана, наличием различных типов тетрагональных искажений в октаэдрах MoO₆ по различным направлениям, обеспечивающих высокую активность кислорода решетки MoO₃ в процессах каталитического окисления адсорбированных молекул водорода, а также кристаллизацией высокодисперсного оксида молибдена с размером частиц порядка 10 нм.

Табл. 3. Ил. 3. Библиогр. – 11 назв.

УДК 54.165.2+666.265

Башкиров Л. А., Кандидатова И. Н., Першукевич П. П. **Сенсибилизирующее воздействие ионов хрома (III) на фотолюминесценцию активированного ионами празеодима люминофора на основе индата лантана** // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 81–84.

В работе показано, что твердые растворы $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$ и $\text{Pr}_{0,0995}\text{La}_{0,9005}\text{Cr}_{0,005}\text{In}_{0,995}\text{O}_3$ являются высокоэффективными фотолюминофорами, излучающими в сине-зеленой и красной областях видимого света, что делает их перспективными для использования при создании светодиодов белого света. Впервые показано, что введение в состав твердого раствора $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3$ 0,5 мол. % ионов Cr^{3+} с образованием твердого раствора $\text{Pr}_{0,1}\text{La}_{0,9}\text{InO}_3 : 0,005 \text{Cr}^{3+}$ приводит к значительному увеличению интенсивности излучения полученного фотолюминофора.

Табл. 1. Ил. 3. Библиогр. – 11 назв.

УДК 574.52

Семенченко В. П., Суценья Л. М. **Влияние нагонных явлений и перемешивания водных масс на содержание биогенных элементов в литоральной зоне слабоэвтрофного озера** // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 85–88.

Проведена оценка воздействия нагонных явлений и перемешивания водных масс на концентрацию растворенных форм азота и фосфора в разных типах литоральной зоны слабоэвтрофного озера Обстерно. Показано, что спустя три дня после нагона воды концентрация ионов PO_4^- и NH_4^+ значительно увеличилась. Это увеличение было более ярко выражено в литорали без зарослей воздушно-водной растительности для растворенного фосфора, в то время как для аммонийного азота – в литорали с зарослями камыша.

Таким образом, нагонные явления способствуют увеличению содержания биогенных элементов в литоральной зоне, что может способствовать массовому развитию фитопланктона и приводить к «цветению» воды.

Табл. 1. Ил. 3. Библиогр. – 6 назв.

УДК 57.083.18

Валентович Л. Н., Лозюк С. К., Коломиец Э. И., Титок М. А. **Молекулярно-генетическая идентификация биотехнологически значимых бактерий рода *Bacillus*** // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 89–93.

Предложен оригинальный подход для точной идентификации бактерий рода *Bacillus*. Секвенирование случайных фрагментов хромосомной ДНК позволило установить таксономическую принадлежность четырех исследованных микроорганизмов до уровня подвида (*Bacillus amyloliquefaciens* подвида *plantarum* и *B. subtilis* подвида *subtilis*).

Табл. 2. Библиогр. – 13 назв.

УДК 575.174.015.3

Панкратов В. С., Кушнеревич Е. И., Давыденко О. Г. **Полиморфизм маркеров Y-хромосомы в популяции белорусских татар** // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 94–100.

Белорусские (литовские) татары – потомки выходцев из Золотой Орды, которые поселились на территории современной Беларуси не позднее конца XIV в. Вопрос об их генетической связи с другими народами, населявшими Золотую Орду или возникшими после ее распада, остается практически неизученным, равно как и вопрос о взаимном влиянии генофондов белорусов и белорусских татар. Нами было проведено исследование генетической структуры популяции белорусских татар по биаллельным и STR-маркерам Y-хромосомы. В генофонде белорусских татар были обнаружены варианты Y-хромосомы, характерные для популяций Кавказа, Закавказья, Средней Азии, Южной Сибири, а также Восточной Европы, что говорит о том, что предковая по отношению к белорусским татарам популяция была изначально гетерогенна, либо что на этногенез татар повлияло несколько независимых миграций из разных регионов.

Табл. 3. Ил. 2. Библиогр. – 15 назв.

УДК 621.9:536.75

Витязь П. А., Хейфец М. Л., Колмаков А. Г., Зверев А. А., Кобелева Л. И. **Мультифрактальный анализ строения структур и вейвлет-анализ рельефа поверхности трения композиционного материала** // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 101–108.

Показано применение комплексного мультифрактального и вейвлет-анализа для качественного и количественного описания структур материала и поверхности, позволяющее выявить плохо различимые другими отдельными методами отличия, оценить системные характеристики структур материалов и охарактеризовать процессы их самоорганизации. Рассмотрено в сопоставимых термодинамических условиях формирование в режиме задира структур поверхности трения для композиционных материалов на основе алюминиевого сплава с добавками Al_2O_3 и SiC. Добавление SiC по сравнению с Al_2O_3 в меньшей мере способствует фраг-

ментации и повышению частоты процессов схватывания и разрыва. Дополнительное введение графита в еще большей степени усиливает различие между материалами с добавками Al_2O_3 и SiC, что приводит к формированию наименее упорядоченных структур поверхности трения. Добавление графита к армированному SiC композиционному материалу приводит к увеличению степени неравновесности термодинамических условий формирования структур.

Табл. 3. Ил. 5. Библиогр. – 15 назв.

УДК 167+001.89+172](476)

Бабосов Е. М. Взаимосвязь фундаментальных и прикладных исследований в сфере гуманитарного знания как условие формирования перспективных направлений // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 109–113.

Раскрывается приоритетная значимость фундаментальных исследований в функционировании научной сферы, в обеспечении устойчивого социально-экономического развития страны. Подчеркивается, что органическое взаимодействие фундаментальной науки с прикладными исследованиями открывает пути практического внедрения научно-технических разработок, в том числе и в системе гуманитарных знаний. Охарактеризованы перспективные направления развития фундаментальных и прикладных исследований в области общественных и гуманитарных наук в Беларуси.

УДК 94(476)(36)–912.43:93/99

Витязь С. П. Проблема ареала пруссов: историографические определения // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 114–123.

Обсуждаются основные историографические подходы к реконструкции ареала пруссов: 1 – консервативный (немецкие историческая и археологическая школы); 2 – этнически ориентированный (польские историческая и археологическая школы), 3 – археологически ориентированный (российская археологическая школа). Отмечена источниковедческая особенность 1 и 2 подходов – ориентация преимущественно на позднесредневековые письменные источники, что изначально делает гипотетическими, ненадежными их определения ареала пруссов (период V–XIII вв.). Определения российских археологов (В. И. Кулаков, др.) выделяются, как наиболее обоснованные и достоверные, однако недостаточно интерпретированные исторически. Делается вывод о насущности целевого введения материалов археологии в контекст исторических исследований раннего средневековья.

Ил. 9. Библиогр. – 24 назв.