

# ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

Выходит шесть номеров в год

Журнал основан в июле 1957 года

---

МИНСК, БЕЛОРУССКАЯ НАУКА, 2016, ТОМ 60, № 4

---

Учредитель – Национальная академия наук Беларуси

Редакционная коллегия:

**В. Г. Гусаков** (главный редактор),

**А. В. Кильчевский** (заместитель главного редактора),

**С. Я. Килин** (заместитель главного редактора),

**С. А. Чижик** (заместитель главного редактора),

**И. М. Богдевич, П. А. Витязь, И. Д. Вологовский, И. В. Гайшун, С. В. Гапоненко,**

**А. Е. Дайнеко, И. В. Залуцкий, О. А. Ивашкевич, Н. А. Изобов, Н. С. Казак,**

**А. А. Коваленя, Ф. Ф. Комаров, И. В. Котляров, В. А. Лабунов, А. П. Ласковнев,**

**О. Н. Левко, А. И. Лесникович, В. Ф. Логинов, А. А. Махнач, А. А. Михалевич,**

**М. Е. Никифоров, В. А. Орлович, О. Г. Пенязьков, Ю. М. Плескачевский,**

**Н. С. Сердюченко, А. Ф. Смеянович, Л. М. Томильчик, С. А. Усанов,**

**Л. В. Хотылева, В. А. Хрипач, И. П. Шейко,**

ведущий редактор **Т. П. Петрович**

*Адрес редакции:*

220072, Минск, ул. Академическая, 1, к. 119,

тел. 284-19-19

[csl.bas-net.by/Web/Pages/magNAS.asp](http://csl.bas-net.by/Web/Pages/magNAS.asp)

E-mail: [doklady\\_nanb@mail.ru](mailto:doklady_nanb@mail.ru)

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

<b>Янчевский В. И.</b> О разложимости унитарных инволюций в алгебрах над специальными полями . . . . .	5
<b>Бенедиктович В. И.</b> Непересекающиеся конфигурации в дополнениях геометрических графов и дизъюнктивная совместимость . . . . .	8
<b>Иржавский П. А., Картыжник Ю. А., Орлович Ю. Л.</b> Характеризация 1-треугольных графов . . . . .	17
<b>Матальцкий М. А.</b> Вероятностный анализ сетевых моделей в транспортной логистике . . . . .	25
<b>Найденко В. Г.</b> Рекурсивное представление класса сложности $NP \cap coNP$ . . . . .	35
<b>Луневич А. В.</b> Размерность Хаусдорфа множества действительных, комплексных и $p$ -адических чисел с заданным порядком приближения алгебраическими числами . . . . .	38

### ФИЗИКА

<b>Троцюк Л. Л., Кулакович О. С., Шабуня-Клячковская Е. В., Ващенко С. В., Гапоненко С. В.</b> Формирование наностержней золота и пленок на их основе для применения в спектроскопии гигантского комбинационного рассеяния света . . . . .	44
--	----

<b>Шапошников В. Л., Кривошеева А. В., Борисенко В. Е.</b> Электронная структура и оптические свойства двумерных кристаллов SnS	50
<b>Хило Н. А.</b> Модифицированная схема Отто возбуждения поверхностных плазмонов	56
<b>Байков В. И., Левин М. Л., Герасимович Н. В., Чорный А. Д., Маханек А. А.</b> Фазовый переход второго рода в структурах мембран лимфоцитов человека при экстремальном газовом холодом воздействии (на англ. яз.)	61
<b>Овсюк Е. М., Веко О. В., Войнова Я. А., Кисель В. В., Редьков В. М.</b> Квантовая механика электрона в магнитном поле, учет аномального магнитного момента	67
<i>ХИМИЯ</i>	
<b>Васильева Н. Г., Петрусевич И. И., Хлебникова Т. С., Лахвич Ф. А.</b> Синтез 2-ацилциклопентан-1,3-дионов с насыщенной C <sub>9</sub> -C <sub>22</sub> ацильной цепью	73
<b>Свиридова Т. В., Логвинович А. С., Якименко Т. М., Кокорин А. И., Свиридов Д. В.</b> Сольвотермический синтез молибден-ванадиевых катализаторов на носителях из диоксида кремния	78
<b>Литвинко Н. М., Скоростецкая Л. А., Гудко Т. Г., Тимохова М. М., Камышников В. С., Вижинис Е. И., Воробей А. В.</b> Супрамолекулярный комплекс жирной кислоты с гемоглобином как индикатор фосфолипидоза для выявления экспериментального панкреатита	82
<i>БИОЛОГИЯ</i>	
<b>Жоров Д. Г., Сауткин Ф. В., Буга С. В.</b> Современная структура комплекса чужеродных видов сосущих членистоногих-фитофагов фауны Беларуси	88
<b>Аджиева В. Ф., Некрашевич Н. А., Бабак О. Г., Мишин Л. А., Кильчевский А. В.</b> Использование молекулярных маркеров для создания лежких гибридов томата с высоким содержанием каротиноидов	93
<b>Шаптуренко М. Н., Вакула С. В., Корзун В., Хотылева Л. В.</b> SNP-анализ генетического разнообразия пшеницы Беларуси	98
<i>МЕДИЦИНА</i>	
<b>Шуканова Н. А., Дубовская Л. В., Бакакина Ю. С., Мартынова М. А., Козловская Н. А., Шаповал Е. В., Бушмакина И. М., Молчан М. М.</b> Прогностические факторы при лечении рака молочной железы	104
<i>НАУКИ О ЗЕМЛЕ</i>	
<b>Курченко В. П., Багманян И. А., Мямин В. Е., Бородин О. И., Гигиняк Ю. Г.</b> Тяжелые металлы в кустистых лишайниках как индикатор атмосферного переноса загрязняющих веществ в Антарктиде	109
<i>СОЦИАЛЬНО-ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ</i>	
<b>Соколова Г. Н.</b> Социологический анализ механизмов адаптации рынка труда Республики Беларусь к структурным изменениям экономики	114
<i>АГРАРНЫЕ НАУКИ</i>	
<b>Пестис В. К., Коршун С. И., Климов Н. Н., Танана Л. А.</b> Влияние генотипических и паратипических факторов на продуктивное долголетие черно-пестрого скота	120
<b>Правила для авторов</b>	126

---

ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ. 2016. Т. 60, № 4

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,  
свидетельство о регистрации № 387 от 18.05.2009.

---

Редактор Т. П. Петрович  
Компьютерная верстка Н. И. Кашуба

Сдано в набор 02.08.2016. Выпуск в свет 26.08.2016. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Бумага офсетная. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 16,4. Тираж 154 экз. Заказ 164.

Цена номера: индивидуальная подписка – 10,28 руб.; ведомственная подписка – 25,21 руб.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/18 от 02.08.2013. ЛП № 02330/455 от 30.12.2013. Ул. Ф. Скорины, 40, 220141, г. Минск.

© «Издательский дом «Беларуская навука».  
Доклады НАН Беларуси, 2016

# DOKLADY OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

Published bimonthly

The journal has been published since July, 1957

---

MINSK, BELORUSSKAYA NAUKA, 2016, Vol. 60, N 4

---

Founder – National Academy of Sciences of Belarus

Editorial Board:

**V. G. Gusakov** (Editor-in-Chief),  
**S. Ya. Kilin** (Associate Editor-in-Chief),  
**A. V. Kilchevsky** (Associate Editor-in-Chief),  
**S. A. Chizhik** (Associate Editor-in-Chief),  
**I. M. Bogdevich, A. Ye. Daineko, I. V. Gaishun, S. V. Gaponenko, O. A. Ivashkevich,**  
**N. A. Izobov, N. S. Kazak, L. V. Khotyleva, V. A. Khripach,**  
**A. A. Kovalenya, F. F. Komarov, I. V. Kotlyarov, V. A. Labunov, A. P. Laskovnev,**  
**O. N. Levko, A. I. Lesnikovich, V. F. Loginov, A. A. Makhnach, A. A. Mikhalevich,**  
**M. Ye. Nikiforov, V. A. Orlovich, O. G. Penyazkov, Yu. M. Pleskachevsky,**  
**N. S. Serduchenko, I. P. Sheiko, A. F. Smeyanovich, L. M. Tomilchik,**  
**S. A. Usanov, P. A. Vitiaz, I. D. Volotovskii, I. V. Zalutsky,**  
lead editor **T. P. Petrovich**

*Address of the Editorial Office:*

220072, Minsk, 1 Akademicheskaya Str., room 119

telephone: 284-19-19

[csl.bas-net.by/Web/Pages/magNAS.asp](http://csl.bas-net.by/Web/Pages/magNAS.asp)

E-mail: [doklady\\_nanb@mail.ru](mailto:doklady_nanb@mail.ru)

## CONTENTS

### MATHEMATICS

<b>Yanchevskii V. I.</b> Decomposability of unitary involutions in algebras over special fields . . . . .	5
<b>Benediktovich V. I.</b> Non-crossing configurations in complements of geometric graphs and disjoint compatibility . . .	8
<b>Irzhavski P. A., Kartynnik Yu. A., Orlovich Yu. L.</b> A characterization of 1-triangle graphs . . . . .	17
<b>Matalytski M. A.</b> Probabilistic analysis of stochastic models in transport logistics . . . . .	25
<b>Naidenko V. G.</b> Recursive presentation of the complexity class $NP \cap coNP$ . . . . .	35
<b>Lunevich A. V.</b> Hausdorff dimension of the set of real, complex and $p$ -adic numbers with a given order of the algebraic number approximation . . . . .	38

### PHYSICS

<b>Trotsiuk L. L., Kulakovich O. S., Shabunya-Klyachkovskaya E. V., Vaschenko S. V., Gaponenko S. V.</b> Formation of gold nanorods and gold nanorod films for surface-enhanced Raman scattering spectroscopy . . . .	44
---	----

<b>Shaposhnikov V. L., Krivosheeva A. V., Borisenko V. E.</b> Electronic structure and optical properties of two-dimensional crystals of SnS .....	50
<b>Khilo N. A.</b> Modified Otto scheme for excitation of surface plasmons .....	56
<b>Baikov V. I., Levin M. L., Gerasimovich N. V., Chorny A. D., Makhanek A. A.</b> Second-kind phase transition in human lymphocytes membrane structures under extreme gas cold exposure .....	61
<b>Ovsiyuk E. M., Veko O. V., Voynova Y. A., Kisel V. V., Red'kov V. M.</b> Quantum mechanics of the electron in the magnetic field, taking into account of the anomalous magnetic moment .....	67
<i>CHEMISTRY</i>	
<b>Vasilyeva N. H., Petrusevich I. I., Khlebnicova T. S., Lakhvich F. A.</b> Synthesis of 2-acylcyclopentane-1,3-diones with a saturated C <sub>9</sub> -C <sub>12</sub> acyl chain .....	73
<b>Sviridova T. V., Logvinovich A. S., Yakimenko T. M., Kokorin A. I., Sviridov D. V.</b> Solvothermal synthesis of silica-supported molybdenum-vanadium catalysts .....	78
<b>Litvinko N. M., Skorostetskaya L. A., Gudko T. G., Tsimokhova M. M., Kamyshnikov V. S., Vizhinis E. I., Vorobey V. A.</b> Supramolecular complex of fatty acid with hemoglobin as an indicator of phospholipolysis to identify experimental pancreatitis .....	82
<i>BIOLOGY</i>	
<b>Zhorov D. G., Sautkin F. V., Buga S. V.</b> Actual structure of the complex of alien species of sucking phytophagous arthropods in the fauna of Belarus .....	88
<b>Ajyieva V. F., Nekrashevich N. A., Babak O. G., Mishin L. A., Kilchevsky A. V.</b> Use of molecular markers for the development of long-storage tomato hybrids with a high carotenoid content .....	93
<b>Shapturenko M. N., Vakula S. V., Korzun V., Khotyleva L. V.</b> High-throughput SNP array for genetic diversity evaluation within hexaploid wheat in Belarus .....	98
<i>MEDICINE</i>	
<b>Shukanova N. A., Dubovskaya L. V., Bakakina Y. S., Martynova M. A., Kazlouskaya N. A., Shapoval E. V., Bushmakina I. M., Molchan M. M.</b> Prognostic factors in the treatment of breast cancer .....	104
<i>SCIENCES OF EARTH</i>	
<b>Kurchenko V. P., Bagmanyanyan I. A., Miamin V. E., Borodin O. I., Giginyak J. G.</b> Heavy metals in fruticose lichens of Antarctica as an indicator of atmospheric transport of pollutants .....	109
<i>SOCIAL AND HUMAN SCIENCES</i>	
<b>Sokolova G. N.</b> Social analysis of the mechanisms of adaptation of the labor market of the Republic of Belarus to structural changes in economy .....	114
<i>AGRARIAN SCIENCES</i>	
<b>Pestis V. K., Korshun S. I., Klimov N. N., Tanana L. A.</b> Effect of the genotypic and paratypic factors on the productive longevity of the black-motley cattle .....	120
<b>Rules for the authors</b> .....	126

## МАТЕМАТИКА

УДК 512.552

Академик В. И. ЯНЧЕВСКИЙ

О РАЗЛОЖИМОСТИ УНИТАРНЫХ ИНВОЛЮЦИЙ В АЛГЕБРАХ  
НАД СПЕЦИАЛЬНЫМИ ПОЛЯМИИнститут математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
yanch@im.bas-net.by

Цель сообщения – показать, что всякая унитарная инволюция инволютивной простой центральной алгебры  $A$  над глобальным полем либо полем, кохомологическая размерность которого не превосходит 2, разложима относительно разложения алгебры  $A$  в примарные компоненты.

*Ключевые слова:* алгебры с унитарными инволюциями, циклические алгебры с делением, разложимые инволюции.

V. I. YANCHEVSKIĬ

## DECOMPOSABILITY OF UNITARY INVOLUTIONS IN ALGEBRAS OVER SPECIAL FIELDS

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
yanch@im.bas-net.by

The aim of the presented article is to prove that any unitary involution of involutory central simple algebra  $A$  over a global field or over a field of cohomological dimension not greater than 2 is decomposable with respect to the decomposition of  $A$  into primary components.

*Keywords:* algebras with unitary involutions, cyclic division algebras, decomposable involutions.

**Введение.** Пусть  $K$  – поле характеристики отличной от 2,  $A$  – конечномерная центральная  $K$ -алгебра с делением и инволюцией  $\tau$ .

**О п р е д е л е н и е.** Пусть  $A = A_1 \otimes_K A_2 \otimes_K \dots \otimes_K A_t$  – разложение  $A$  в тензорное произведение простых центральных  $K$ -алгебр. Инволюция  $\tau$  (алгебра  $A$ ) называется разложимой относительно разложения  $A_1 \otimes_K A_2 \otimes_K \dots \otimes_K A_t$ , если  $A_i^\tau = A_i$ ,  $i = 1, \dots, t$ ,  $\tau = \tau_1 \otimes \tau_2 \otimes \dots \otimes \tau_t$ , где  $\tau_i$  – ограничение  $\tau$  на  $A_i$ .

Хорошо известно, что все инволюции бывают трех типов: симплектические, ортогональные и унитарные. Проблеме разложимости (неразложимости) инволюций, тесно связанной с понятием их дискриминантов в случае инволюций первых двух видов, посвящено большое количество исследований (Кнус, Лэм, Роуэн, Солтман, Тиньоль, Паримала, Сридхаран, Сюреш, Янчевский, см., напр., [1; 2]). Случай унитарных инволюций изучен сравнительно мало. В этой работе мы интересуемся алгебрами с унитарными циклическими инволюциями и показываем, что во многих важных случаях они разложимы. Циклические инволюции играют важную роль при изучении внешних форм анизотропных алгебраических групп типа  $A_n$ . К сожалению, не все унитарные инволюции циклически [3; 4]. Однако существуют целые важные классы полей  $K$ , для которых циклическость имеет место. Ниже для двух таких классов мы устанавливаем разложимость соответствующих инволюций.

**Основная часть.** Для формулировки и доказательства основных результатов нам потребуются следующие определения и обозначения.

**О п р е д е л е н и е.** Пусть  $K/k$  – сепарабельное квадратичное расширение полей. Унитарная  $K/k$ -инволюция  $\tau$  простой центральной  $K$ -алгебры  $A$  называется циклической относительно ее максимального подполя  $Z$ , если  $A$  обладает максимальным  $\tau$ -инвариантным подполем  $Z$  таким, что подполе  $X$  неподвижных относительно  $\tau$  элементов из  $Z$  является циклическим расширением поля  $k$ .

Напомним, что через  $A = (Z/K, \sigma, \gamma, n)$  обозначается циклическая центральная  $K$ -алгебра, обладающая максимальным подполем  $Z$ , являющимся циклическим расширением поля  $K$  степени  $n$  с образующей  $\sigma$  группы Галуа  $\text{Gal}(Z/K)$ , и элементом  $\Gamma$  таким, что  $\Gamma^n = \gamma \in K$  и для каждого  $z \in Z$ ,  $\Gamma z \Gamma^{-1} = z^\sigma$ . Для расширения полей  $E/F$  ниже через  $N_{E/F}$  обозначено отображение нормы из  $E$  в  $F$ .

Пусть  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$  – разложение  $n$  в произведение взаимно простых примарных степеней. Назовем разложение алгебры  $A$  разложением на примарные компоненты, если  $A = A_1 \otimes_K A_2 \otimes_K \dots \otimes_K A_s$ , где  $A_i$  –  $K$ -алгебра степени  $p_i^{\alpha_i}$ . Сформулируем теперь первый основной результат работы.

**Т е о р е м а 1.** В вышеприведенных обозначениях пусть  $A$  – простая центральная алгебра нечетной степени  $n$  с циклической инволюцией  $\tau$  относительно подполя  $Z$ . Тогда  $\tau$  разложима относительно подходящего разложения алгебры  $A$  на примарные компоненты.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Поскольку группа Галуа  $\text{Gal}(X/k)$  циклическая, то существует однозначное представление  $X$  в виде  $X_1 \otimes_k X_2 \otimes_k \dots \otimes_k X_s$ , где  $X_i$  – подполе  $X$ , циклическое над  $k$  степени  $p_i^{\alpha_i}$ . Рассмотрим поля  $Z_i = X_i K$ ,  $i = 1, \dots, s$ . Тогда  $Z = Z_1 \otimes_K Z_2 \otimes_K \dots \otimes_K Z_s$ . Положим  $\Gamma_i = \Gamma^{n/n_i}$  ( $n_i = p_i^{\alpha_i}$ ) и рассмотрим алгебру  $A_i = (Z_i/K, \sigma_i, \gamma, n_i)$ , где  $\sigma_i$  – образующая группы Галуа  $Z_i/K$ , индуцируемая, очевидно, элементом  $\Gamma_i$ . Нетрудно видеть, что  $A = A_1 \otimes_K A_2 \otimes_K \dots \otimes_K A_s$  – разложение алгебры  $A$  на примарные компоненты, и для завершения доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что  $A_i^\tau = A_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ . Ясно, что  $Z_i^\tau = Z_i$ , поэтому остается показать, что  $\Gamma_i^\tau \in A_i$ . Заметим, что наличие у алгебры  $A$  инволюции  $\tau$  влечёт существование элемента  $x \in X$  со свойством

$$N_{X/k}(x) = \gamma \gamma^\tau.$$

Далее, пусть  $\alpha$  – примитивный элемент расширения  $X/k$ . Нетрудно видеть, что  $\alpha$  является примитивным элементом также и для расширения  $Z/K$ . Поскольку в алгебре  $A$  имеет место соотношение

$$\Gamma \alpha \Gamma^{-1} = \alpha^\sigma,$$

то применив инволюцию  $\tau$  к обоим частям последнего равенства, получим

$$\Gamma^\tau \alpha^\tau \Gamma^\tau = \alpha^{\sigma^\tau},$$

или

$$\Gamma^\tau \alpha \Gamma^\tau = \alpha^\sigma.$$

Из предыдущего немедленно вытекает, что  $\Gamma^{\tau+1} \in Z$ . Тогда  $\Gamma^\tau = z \Gamma^{-1}$ , для некоторого  $z \in Z$ . Далее

$$\Gamma_i^\tau = (z \Gamma^{-1})^{n/n_i} = z \Gamma^{-1} z \Gamma^{-1} \dots z \Gamma^{-1} = N_{Z/Z_i}(z) \Gamma_i^{-1}.$$

Так как  $N_{Z/Z_i}(z) \in Z_i$ , то  $\Gamma_i^\tau \in A_i$ , что и требовалось.

Непосредственным приложением предыдущей теоремы является установление разложимости унитарных  $K/k$ -инволюций в алгебрах нечетного индекса над глобальными полями.

**Т е о р е м а 2.** Пусть  $K$  – глобальное поле характеристики отличной от 2,  $A$  – центральная  $K$ -алгебра нечетной степени с унитарной  $K/k$ -инволюцией  $\tau$ . Тогда  $\tau$  разложима на циклические инволюции относительно некоторого разложения алгебры  $A$  на примарные компоненты.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Заметим, прежде всего, что инволюция  $\tau$  на самом деле циклическа ввиду теоремы 5.3 из [3], а тогда все следует из теоремы 1.

**З а м е ч а н и е 1.** Для алгебр  $A$  малых индексов и глобальных полей  $K$  положительной характеристики предыдущий результат был получен совместно с Т. С. Бусел.

Помимо классического случая глобальных полей  $K$  применение теоремы 1 оказывается эффективным и в гензелевой ситуации.

**Т е о р е м а 3.** Пусть  $k$  – поле частных двумерной превосходной гензелевой локальной области целостности с алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики и  $A$  – центральная простая  $K$ -алгебра нечетной степени с унитарной  $K/k$ -инволюцией  $\tau$ . Тогда  $\tau$  разложима на циклические инволюции относительно некоторого разложения алгебры  $A$  на примарные компоненты.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2, поскольку ввиду теоремы 5.4 из [3], всякая  $K/k$ -инволюция  $\tau$  циклическа.

**З а м е ч а н и е 2.** Предыдущие результаты позволяют редуцировать классификацию алгебр с унитарными инволюциями нечетных степеней к алгебрам, степени которых примарны.

**З а к л ю ч е н и е.** Установлена разложимость унитарных инволюций в простых центральных алгебрах над глобальными (и другими, см. теорему 3) полями, что позволяет во многих случаях сводить изучение унитарных инволюций в алгебрах произвольных нечетных степеней к изучению инволюций в алгебрах примарных степеней.

#### Список использованной литературы

1. Parimala, R. A question on the discriminants of involutions of central division algebras / R. Parimala, R. Sridharan, V. Suresh // Math. Ann. – 1993. – Vol. 297. – P. 575–580.
2. Yanchevskii, V. I. Symmetric and Skew-Symmetric Elements of Involutions, Associated Groups and the Problem of Decomposability of Involutions / V. I. Yanchevskii // Proc. of Symp. in Pure Math. – 1995. – Vol. 58, N 2. – P. 431–444.
3. Tikhonov, S. V. Symmetric elements, Hermitian forms, and cyclic involutions / S. V. Tikhonov, V. I. Yanchevskii // Communications in Algebra. – 2015. – Vol. 43, N 11. – P. 4735–4744.
4. Прокопчук, А. В. О нециклических унитарных инволюциях гензелевых дискретно нормированных алгебр с делением / А. В. Прокопчук, В. И. Янчевский // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2014. – № 1. – С. 51–53.

Поступило в редакцию 16.12.2015

УДК 519.173

В. И. БЕНЕДИКТОВИЧ

## НЕПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ КОНФИГУРАЦИИ В ДОПОЛНЕНИЯХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФОВ И ДИЗЬЮНКТНАЯ СОВМЕСТИМОСТЬ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
vbened@im.bas-net.by

В работе для произвольного непересекающегося совершенного паросочетания за время  $O(n^4 \log n)$  строится дизъюнктно совместимое остовное дерево максимальной степени вершин не больше 4. Получен критерий существования непересекающегося совершенного паросочетания в дополнении звезды порядка меньше  $2n$  в  $K_{2n}$ . Доказано существование непересекающегося совершенного паросочетания в дополнении дерева порядка  $(n + 1)$  в  $K_{2n}$  с числом внутренних вершин, не превышающим  $(n - 1)$ .

*Ключевые слова:* геометрический граф, (дизъюнктно) совместимые графы, двойственный мультиграф, непересекающееся совершенное паросочетание.

V. I. BENEDIKTOVICH

## NON-CROSSING CONFIGURATIONS IN COMPLEMENTS OF GEOMETRIC GRAPHS AND DISJOINT COMPATIBILITY

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
vbened@im.bas-net.by

In this article, for any non-crossing perfect matching a disjoint compatible spanning tree with a maximum vertex degree no more than 4 is constructed with the complexity  $O(n^4 \log n)$ . The criterion of existence of a non-crossing perfect matching in the complement of a star of the order less than  $2n$  in  $K_{2n}$  has been obtained. It has been proved that there exists a non-crossing perfect matching in the complement of a tree of the order  $(n + 1)$  in  $K_{2n}$  with the number of inner vertices no more than  $(n - 1)$ .

*Keywords:* geometric graph, (disjoint) compatible graphs, dual multigraph, non-crossing perfect matching.

*Геометрический граф*  $G = (V, E)$  – это граф, уложенный на плоскости таким образом, что множеством вершин  $V$  является множество точек на плоскости, а множество ребер  $E$  состоит из некоторых прямолинейных отрезков с концами из множества  $V$ , причем их внутренности не содержат других точек из  $V$ . Отметим, что последнее условие заведомо выполняется, если множество точек  $V$  на плоскости находится *в общем положении*, т. е. никакие три из них не лежат на одной прямой; среди проходящих через них прямых нет параллельных и никакие три из этих прямых не пересекаются в точке, не принадлежащей множеству  $V$ , что и будет предполагаться в дальнейшем. Говорят, что два ребра геометрического графа *пересекаются*, если у них есть общая точка, являющаяся внутренней для обоих ребер. Геометрический граф называется *непересекающимся* (или *плоским*), если никакие два его ребра не пересекаются.

Два геометрических графа без пересечений  $G_1 = (V_1, E_1)$  и  $G_2 = (V_2, E_2)$  называются *совместимыми*, если граф их объединения  $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$  также является геометрическим графом без пересечений. Если дополнительно выполняется условие  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ , то графы  $G_1$  и  $G_2$  называются *дизъюнктно совместимыми* [1].

Используя произвольную триангуляцию заданного непересекающегося совершенного паросочетания  $M$  можно построить *охватывающее дерево*, т. е. совместимое с  $M$  остовное дерево,



которое содержит  $M$  в качестве подграфа. Однако такой алгоритм может привести к тому, что степени некоторых вершин в построенном дереве могут оказаться достаточно большими. В 1995 г. P. Bose и G. T. Toussaint [2] доказали, что произвольное непересекающееся совершенное паросочетание  $M$  мощности  $n$  имеет охватывающее дерево  $T$  максимальной степени 7 и предложили алгоритм временной сложности  $O(n \log n)$  для его построения. Позже [3] они улучшили этот результат, показав, что произвольное непересекающееся совершенное паросочетание  $M$  мощности  $n$  имеет охватывающее дерево  $T$  максимальной степени 3 (*двоичное дерево*), которое может быть построено за оптимальное время  $\Theta(n \log n)$ . Последняя граница на степень является наилучшей, потому что охватывающее дерево с максимальной степенью 2 является чередующейся гамильтоновой цепью, которая, как известно, не всегда существует. Этот же результат был подтвержден в 2010 г. в усиленной форме в работе M. Hoffmann и C. D. Tóth [4], где за время  $O(n \log n)$  строится охватывающее бинарное дерево  $T$ , обладающее дополнительным свойством: для каждой вершины  $v$  дерева все инцидентные ей ребра  $T$  лежат в полуплоскости, границей которой является прямая, проходящая через ребро  $M$ , инцидентное  $v$ .

В 2009 г. D. L. Souvaine и C. D. Tóth [5] обобщили этот результат в другом направлении: произвольный несвязный геометрический граф на  $n$  вершинах может быть дополнен за время  $O(n \log n)$  до связного геометрического графа так, что степень каждой вершины может увеличиться не больше, чем на 2.

Если паросочетание  $M$  можно дополнить  $|M|$  ребрами до непересекающегося цикла  $P$ , то каждое второе ребро этого цикла принадлежит паросочетанию  $M$ . Такой полигон называется *чередующейся полигонизацией* паросочетания  $M$ . Нетрудно видеть, что не каждое паросочетание обладает чередующейся полигонизацией. D. Rappaport показал в 1989 г. [6], что задача распознавания существования дополнения плоского геометрического графа, являющегося гамильтоновым, является  $NP$ -полной. Каждая чередующаяся полигонизация имеет четное число ребер и является объединением двух непересекающихся совершенных паросочетаний  $M_1$  и  $M_2$ . С другой стороны, если  $M_1$  и  $M_2$  являются двумя непересекающимися дизъюнктивно совместимыми совершенными паросочетаниями одного и того же множества точек  $S_M$ , то их объединение, вообще говоря, является совокупностью простых полигонов (циклов в  $K(S_M)$ ), у каждого из которых четное число ребер. Отметим, что совершенное паросочетание с нечетным числом ребер не всегда имеет совместимое непересекающееся совершенное паросочетание. Была высказана *гипотеза о дизъюнктивно совместимом совершенном паросочетании*, заключающаяся в том, что для каждого непересекающегося совершенного паросочетания  $M$  с четным числом ребер в общем положении существует непересекающееся совместимое совершенное паросочетание.

Сначала она была подтверждена для частных случаев [7], а именно, для *выпукло независимых* (каждый отрезок обладает, по крайней мере, одной концевой вершиной, лежащей на выпуклой оболочке концевых вершин всех отрезков) и *ортогональных отрезков*. Также было доказано, что всегда существует множество чередующихся полигонов, каждый из которых совместим с  $M$  и охватывает не менее  $4/5$  ребер из  $M$ .

При исследовании указанной гипотезы были сформулированы новые гипотезы, использующие понятие *выпуклое подразбиение* плоскости. Напомним, что *выпуклым подразбиением* плоскости для множества  $M$  отрезков называется множество  $C$  попарно непересекающихся выпуклых областей (*клеток*), каждая из которых не пересекается с отрезками множества  $M$ , и объединение замыканий которых покрывает всю евклидову плоскость. Обозначим через  $S$  множество всех концевых вершин отрезков из множества  $M$ . Отметим, что каждая вершина  $v$  из  $S$  инцидентна, по крайней мере, двум клеткам из множества  $C$ . Пусть  $\sigma$  – произвольное отображение

$$\begin{aligned}\sigma : S &\rightarrow C \times C, \\ \sigma : s &\mapsto (c_1, c_2),\end{aligned}$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – две смежные (т. е. инцидентные вершине  $s$ ) клетки. Выпуклое подразбиение  $C$  и отображение  $\sigma$  определяют *двойственный мультиграф*  $D(C, \sigma)$ , множеством вершин  $V(D)$  которого является множество всех клеток  $C$ , и каждая концевая вершина  $p$  отрезка из  $M$  соответствует ребру  $(c_1, c_2) \in E(D)$ , если  $\sigma(p) = (c_1, c_2)$ . В этом случае будем говорить, что клетка  $c_i, i = 1, 2$ ,

инцидентна вершине  $p$  относительно  $\sigma$ . Поэтому если  $n = |M|$ , то  $|E(D)| = 2n$ , причем граф  $D(C, \sigma)$ , вообще говоря, может иметь двойные ребра.

Одним из классических способов построения выпуклого подразбиения евклидовой плоскости для множества отрезков из  $M$  является следующий. Для каждой вершины  $q \in S$ , являющейся концевой вершиной отрезка  $pq \in M$ , продолжим отрезок  $pq$  вдоль луча  $pq$  за вершину  $q$ , пока он не достигнет другого отрезка из  $M$ , либо предыдущего продолжения другого отрезка из  $M$ , либо в бесконечность. Очевидно, что различный порядок, согласно которому совершаются эти продолжения, приводит к различным выпуклым подразбиениям евклидовой плоскости. Кроме того, можно рассматривать продолжения концов отрезков в зависимости не только от порядка самих отрезков (т. е. когда продолжения концов для каждого отрезка выполняются последовательно), но и от порядка их концов, т. е. в зависимости от *перестановки*  $\tau$  на множестве концевых вершин  $S$ . Во всех случаях евклидова плоскость будет подразбита на  $n + 1$  выпуклых областей (*клеток*), и каждая вершина множества  $S$  будет инцидентна в точности двум клеткам. Такое выпуклое подразбиение называется *непосредственным* и будет обозначаться через  $C_\tau$ . Отметим сразу, что не все выпуклые подразбиения плоскости могут быть получены таким способом; например, минимальное число клеток в выпуклом подразбиении может быть гораздо меньше, чем  $n + 1$ .

Как уже было сказано выше, новые гипотезы были сформулированы Aichholzer и др. [7] в терминах двойственного мультиграфа  $D$ , ассоциированного с подходящим выпуклым подразбиением. *Ориентация* произвольного ребра графа  $D$ , инцидентного вершине  $v \in V(D)$ , может рассматриваться как сопоставление концевой вершины отрезка клетке, которая соответствует  $v$ . При *четной ориентации* неориентированного мультиграфа ребра ориентируются таким образом, что каждая вершина имеет четную степень входящих ребер (*четную входящую степень*). В частности, четная ориентация  $D$  означает, что каждой выпуклой области подразбиения плоскости сопоставлено четное число концевых вершин отрезков. В этом случае можно соединить концевые вершины, сопоставленные каждой клетке, используя непересекающиеся отрезки, лежащие внутри нее (и следовательно, совместимые с паросочетанием  $M$ ), кроме единственного исключительного случая, когда клетке сопоставлены ровно две концевые вершины одного и того же отрезка из паросочетания  $M$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** *Говорят, что два смежных ребра графа  $D$  конфликтны, если они соответствуют двум концевым вершинам одного и того же отрезка из  $M$ .*

**О п р е д е л е н и е 2.** *Говорят, что четная ориентация двойственного графа  $D$  бесконфликтна, если никакие два конфликтующих ребра не входят в вершину входящей степени 2.*

Следовательно, если для совершенного паросочетания  $M$  существует выпуклое подразбиение плоскости такое, что двойственному графу можно сопоставить бесконфликтную четную ориентацию, то отсюда немедленно следует существование непересекающегося дизъюнктно совместимого совершенного паросочетания для  $M$ .

Решение *гипотезы о дизъюнктно совместимом совершенном паросочетании* было найдено Ishaque и др. в 2011 г. [1]. Для каждого множества из  $n \geq 2$  непересекающихся прямолинейных отрезков на плоскости, лежащих в общем положении, строится выпуклое подразбиение такое, что ассоциированный двойственный граф  $D$  содержит два дизъюнктно совместимых непересекающихся остовных дерева. Такое подразбиение строится итеративным способом, при котором число выпуклых областей может стать меньше, чем  $n + 1$ , но число ребер в ориентированном двойственном мультиграфе останется равным  $2n$ , так как они находятся во взаимно однозначном соответствии с концевыми вершинами отрезков совершенного паросочетания  $M$ . Также можно показать, что у каждого ассоциированного мультиграфа, который имеет четное число ребер и содержит два дизъюнктно совместимых непересекающихся остовных дерева, должна существовать бесконфликтная четная ориентация. Основываясь на этих соображениях, можно построить непересекающееся дизъюнктно совместимое совершенное паросочетание.

Отметим, что ни одна из новых гипотез, сформулированных Aichholzer и др. [7], еще не была подтверждена, наоборот, некоторые из них были опровергнуты. Например, если требуется, чтобы выпуклое подразбиение было построено указанным выше классическим алгоритмом, т. е. последовательно продолжая прямолинейные отрезки совершенного паросочетания  $M$ , то двой-

ственный граф не всегда содержит два дизъюнктно совместимых непересекающихся остовных дерева. В доказательстве Ishaque и др. [1] очень существенно использование более широкого класса выпуклых подразбиений, у которых может быть меньше, чем  $n + 1$  клеток.

В нашем сообщении исследуется проблема существования дизъюнктно совместимого остовного дерева для заданного непересекающегося совершенного паросочетания.

**Т е о р е м а 1.** *Для произвольного непересекающегося совершенного паросочетания  $M$  в общем положении существует дизъюнктно совместимое с ним непересекающееся остовное дерево  $T$ , максимальная степень вершин которого не превосходит 4. При этом такое дерево  $T$  может быть построено за время  $O(n^4 \log n)$ .*

Нам понадобится следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

**Л е м м а 1.** *Пусть  $G$  является выпуклым полигоном с множеством вершин  $V(G)$ , у которого выбрано произвольное множество сторон  $H$ , не являющихся последовательными (при обходе его границы против часовой стрелки). Тогда за линейное время (от порядка полигона  $n = |V(G)|$ ) остальные стороны полигона  $G$  могут быть дополнены до гамильтоновой цепи  $P$  полного графа  $K(V(G))$  на вершинах  $V(G)$ , дизъюнктно совместимой с множеством  $H$ . При этом в качестве одной из концевых вершин этой цепи  $P$  может быть выбрана произвольная концевая вершина любой стороны из множества  $H$ .*

Доказательство этой леммы проведем индукцией по порядку  $n = |V(G)|$  полигона  $G$ .

Действительно, при  $n = 3$  утверждение очевидно. Поэтому предположим, что утверждение справедливо для  $m < n$  и рассмотрим полигон  $G$  порядка  $n$ . Выберем произвольную сторону  $e = pq$  из множества  $H$  и произвольную вершину  $p$  этой стороны. Без ограничения общности можно считать, что вершина  $q$  является предыдущей вершиной при обходе границы полигона  $G$  по часовой стрелке, а вершины  $p_1, p_2, \dots, p_{i-1}, p_i$  – последующими вершинами для вершины  $p$ , причем такими, что вершины  $p_1, p_2, \dots, p_{i-1}$  не являются вершинами ни одной из сторон  $H$ , а вершина  $p_i$  уже является вершиной следующей после  $pq$  стороны  $H$ . Построим новый выпуклый полигон (рис. 1)

$$G' = G - \{qp, pp_1, p_1p_2, \dots, p_{i-1}p_i\} + p_iq.$$

Очевидно, что его порядок  $\text{ord}G' < n$ , поэтому по индуктивному предположению для него существует гамильтонова цепь в полном графе  $K(V(G'))$ , дизъюнктно совместимая с множеством сторон  $H' = H - pq$  и имеющая концевую вершину  $p_i$ . Тогда цепь

$$P = P' + \{pp_1, p_1p_2, \dots, p_{i-1}p_i\}$$

является гамильтоновой цепью в полном графе  $K(V(G))$ , совместимая с множеством сторон  $H$ .

Нам понадобится также следующее утверждение.

**Л е м м а 2** [8]. *Для произвольного непересекающегося совершенного паросочетания  $M$  в общем положении за время  $O(n^4 \log n)$  можно построить выпуклое подразбиение, дуальный мультиграф которого является реберно-2-связным.*

Отметим, что при доказательстве этого утверждения также используется более широкий класс выпуклых подразбиений, называемых выпуклыми подразбиениями *ориентированного дерева*, у которых число клеток остается равным  $n + 1$ . Они строятся из произвольного непосредственного выпуклого подразбиения  $C_\tau$  с помощью применения последовательности «локальных модификаций», пока не будут исключены все запрещенные структуры, которые характеризуются существованием полигонов (состоящих из границы некоторых клеток) с некоторыми свойствами.

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 1 следующим образом. По лемме 2 можно построить выпуклое подразбиение  $C$  и соответствие  $\sigma: S \rightarrow C \times C$ , двойственный мультиграф  $D(C, \sigma)$  для которых является реберно-2-связным. Поэтому для каждой клетки  $c \in C$  этого подразбиения существуют, по крайней мере, две вершины из  $S$ , инцидентные с относительно  $\sigma$ .

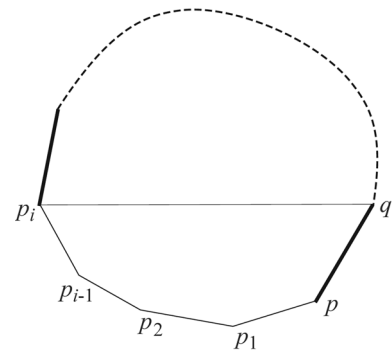


Рис. 1. Построение выпуклого полигона  $G'$  меньшего порядка

Если клетке  $c \in C$  инцидентны относительно  $\sigma$  не менее трех вершин множества  $S$  (обозначим их число через  $|c|$ ), то соединим их последовательно (при обходе ее границы по часовой стрелке). В результате для каждой такой клетки  $c$  получим выпуклый многоугольник  $V_c$ , не содержащий на границе двух последовательных ребер из  $M$  и лежащий в замыкании клетки  $c$ . В силу леммы 1 для каждого выпуклого многоугольника  $V_c$  можно построить непересекающуюся цепь  $P_c$ , лежащую в клетке  $c \in C$  и не содержащую ребер совершенного паросочетания  $M$ .

Если клетке  $c \in C$  инцидентны относительно  $\sigma$  в точности две вершины множества  $S$ , являющиеся концевыми вершинами разных отрезков множества  $M$ , то просто соединим их. В результате для каждой такой клетки  $c$  получим отрезок  $I_c$ , отличный от ребра из  $M$  и лежащий в замыкании клетки  $c$ .

Наконец, пусть клетке  $c$  инцидентны относительно  $\sigma$  в точности две вершины  $v$  и  $w$ , являющиеся концами одного ребра  $vw$  совершенного паросочетания  $M$ . Обозначим множество клеток с таким свойством через  $C'$ . Тогда каждой из вершин  $v$  и  $w$  может быть инцидентна относительно  $\sigma$  либо еще одна общая клетка  $c_{vw}$  выпуклого подразделения, либо каждой вершине  $v$  и  $w$  инцидентны относительно  $\sigma$  две различные клетки:  $c_1 = c_v$  и  $c_2 = c_w$ .

В первом случае в силу реберно-2-связности двойственного мультиграфа  $D(C, \sigma)$  клетке  $c_{vw}$  должна быть инцидентна относительно  $\sigma$ , по крайней мере, еще одна вершина  $u$  совершенного паросочетания  $M$ , поэтому для клетки  $c_{vw}$  существует соответствующий выпуклый многоугольник  $V_{c_{vw}}$ , а значит, цепь  $P_{c_{vw}}$  в силу леммы 1.

Во втором случае каждой клетке  $c_1$  и  $c_2$  должны быть инцидентны относительно  $\sigma$ , по крайней мере, еще по одной вершине множества  $S$ , которые являются концевыми вершинами ребер из  $M$ , отличных от  $vw$ . А значит, в клетках  $c_1$  и  $c_2$  можно построить отрезки  $I_{c_1}, I_{c_2}$  или выпуклые многоугольники  $V_{c_1}, V_{c_2}$ , для которых существуют цепи  $P_{c_1}, P_{c_2}$  в силу леммы 1.

Рассмотрим теперь граф, равный объединению всех построенных цепей и отрезков (рис. 2)

$$P = \left( \bigcup_{\substack{c \in C \\ |c| \geq 3}} P_c \right) \cup \left( \bigcup_{\substack{c \in C' \\ |c|=2}} I_c \right).$$

Данный граф  $P$  является остовным, степень каждой вершины которого не превосходит 4, так как каждая вершина совершенного паросочетания  $M$  инцидентна относительно  $\sigma$  в точности двум клеткам из  $C$ . Кроме того, граф  $P$  является связным в силу связности двойственного мультиграфа  $D(C, \sigma)$ . Поэтому выбрасывая из графа  $P$  кратные ребра и применяя, например, алгоритм Прима, мы получим в результате искомое остовное дерево  $T$  с максимальной степенью вершин 4, дизъюнктно совместимое с совершенным паросочетанием  $M$ . Отметим, что общее время, требуемое на построение такого дерева, определяется временем на построение выпуклого подразделения  $D(C, \sigma)$ , цепей  $P_c$  и временем  $O(n)$  алгоритма Прима, т. е. временем  $O(n^4 \log n)$ . Теорема доказана.

С общей задачей существования непересекающегося подграфа  $H$  со свойством  $P$  в геометри-

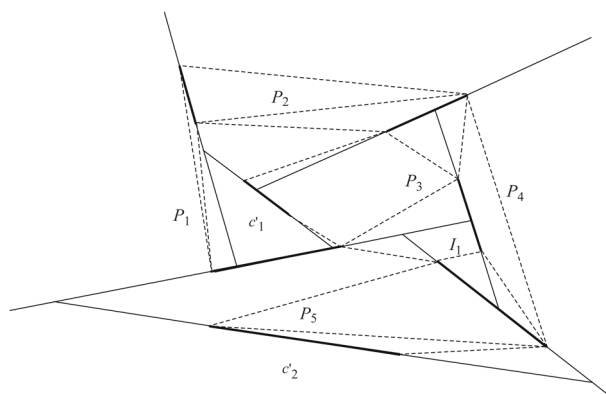


Рис. 2. Построение дизъюнктно совместимого остовного дерева  $P$  (жирные линии – ребра заданного совершенного паросочетания, пунктирные линии – цепи и отрезки для каждой клетки)

ческом графе тесно связана известная экстремальная проблема, восходящая еще к Эрдешу, об оценке числа  $e_k(n)$  – максимального числа ребер в геометрическом графе на  $n$  вершинах, у которого среди произвольно выбранных  $(k+1)$  ребер найдутся два ребра, имеющие общую точку. Так, в [9] при нахождении числа  $e_{n-1}(2n)$ , в частности, было доказано следующее утверждение.

**Т е о р е м а 2.** [9] Для произвольного полного графа  $G = K_{2n}$  на  $2n$  вершинах и произвольного его подграфа  $H = (V(H), E(H))$ , такого, что  $|E(H)| \leq n - 1$ , геометрическое дополнение  $G - H$  содержит непересекающееся совершенное паросочетание.

Там же была выдвинута гипотеза, что если рассматриваемый полный граф  $G = K_{2n}$  имеет достаточно много *внутренних* вершин, то из графа  $K_{2n}$  может быть удалено больше ребер, и при этом полученный граф все еще будет содержать непересекающееся совершенное паросочетание.

Далее данная гипотеза подтверждается для некоторых классов подграфов. Введем некоторые определения.

**О п р е д е л е н и е 3.** Пусть  $H = (V(H), E(H))$  – произвольный геометрический подграф в полном геометрическом графе  $G = K_{2n}$  на множестве  $V(G)$  из  $2n$  вершин. Тогда граф  $H'$  называется геометрическим дополнением графа  $H$  в  $K_{2n}$ , если  $V(H') = V(G)$  и  $E(H') = E(G) \setminus E(H)$ . Геометрическое дополнение будем обозначать через  $H' = G - H$ .

Выпуклую оболочку множества точек из  $V$  на плоскости будем обозначать через  $\text{conv}(V)$ . В соответствии с общепринятой практикой, выпуклой оболочкой также называют ее *границу*, которая по теореме Жордана делит евклидову плоскость на две области: внутреннюю и внешнюю.

**О п р е д е л е н и е 4.** Вершины графа  $G = K_{2n}$ , лежащие внутри выпуклой оболочки  $\text{conv}(V(G))$  множества вершин  $V(G)$ , называют внутренними. Множество внутренних вершин будем обозначать через  $\text{int}(V(G))$ . Вершины графа  $G = K_{2n}$ , лежащие на границе выпуклой оболочки  $\text{conv}(V(G))$  множества вершин  $V(G)$ , называют крайними.

Закрасим  $n$  вершин множества  $V(G)$  полного графа  $G = K_{2n}$  в черный цвет, а остальные  $n$  вершин – в белый цвет. Такую раскраску вершин назовем *равномерной*.

**О п р е д е л е н и е 5.** Прямую  $L$ , проходящую через любые две точки множества  $V(G)$ , будем называть прямой, определяемой множеством  $V(G)$ . Прямую  $L$ , определяемую множеством  $V(G)$ , назовем сбалансированной, если в каждой открытой полуплоскости, ограниченной этой прямой, число черных вершин равно числу белых вершин.

Заметим, что любая сбалансированная прямая  $L$  всегда проходит через две вершины, имеющие разную окраску.

**Т е о р е м а 3.** Пусть  $H = K_{1,m}$  – звезда, являющаяся подграфом полного графа  $G = K_{2n}$  на  $2n$  вершинах, причем  $m + 1 < 2n$ . Тогда дополнение  $G - H$  содержит непересекающееся совершенное паросочетание только в следующих случаях:

- 1) центр  $z$  звезды  $H$  является внутренней вершиной  $V(G)$ ;
- 2) центр  $z$  звезды  $H$  является крайней вершиной  $V(G)$ , но существует вершина  $v \in G \setminus H$ , являющаяся внутренней вершиной  $V(G)$ ;
- 3) центр  $z$  звезды  $H$  и все вершины  $G \setminus H$  являются крайними вершинами  $V(G)$ , но существует вершина  $v \in G \setminus H$ , такая, что в обеих полуплоскостях, определяемых прямой  $(zv)$  лежит четное число вершин множества  $V(G) \setminus \{z; v\}$ .

Действительно, в случае 1) существует  $v \in V(G) \setminus V(H)$ . Тогда пусть  $u_1, \dots, u_{2n-2}$  обозначают элементы множества  $V(G) \setminus \{z, v\}$ , перечисленные в порядке их обхода по часовой стрелке вокруг вершины  $z$ , начиная их обход от прямой  $(zv)$ . Тогда, очевидно, что непересекающееся совершенное паросочетание  $P$  будут образовывать ребра  $zv, u_1u_2, u_3u_4, \dots, u_{2n-3}u_{2n-2}$  (рис. 3, а).

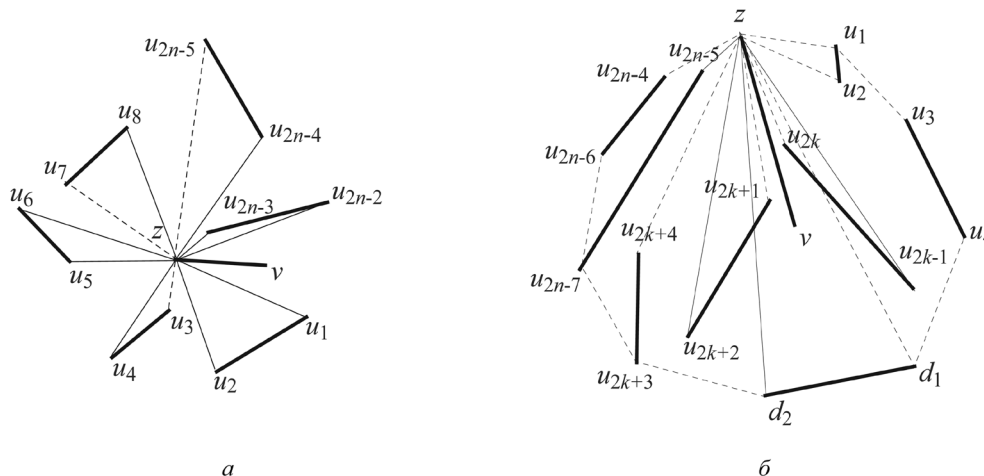


Рис. 3. Построение непересекающегося совершенного паросочетания  $P$

В случае 2) будем рассматривать две возможности: а) в каждой полуплоскости, определяемой прямой  $(zv)$ , лежит четное число вершин; б) в каждой полуплоскости, определяемой прямой  $(zv)$ , лежит нечетное число вершин. Если выполняется условие а), то пусть  $u_1, \dots, u_{2k}$  обозначают элементы множества  $V(G) \setminus \{z, v\}$ , перечисленные в порядке их обхода по часовой стрелке вокруг вершины  $z$  и лежащие слева от прямой  $(zv)$ , а  $u_{2k+1}, \dots, u_{2n-2}$  обозначают элементы множества  $V(G) \setminus \{z, v\}$ , перечисленные в порядке их обхода по часовой стрелке вокруг вершины  $z$  и лежащие справа от прямой  $(zv)$ . Тогда, очевидно, что непересекающееся совершенное паросочетание  $P$  будут образовывать ребра  $zv, u_1u_2, \dots, u_{2k-1}u_{2k}, u_{2k+1}u_{2k+2}, \dots, u_{2n-3}u_{2n-2}$ . При выполнении условия б) пусть вершина  $v$  лежит внутри треугольника  $\Delta zd_1d_2$ , где вершины  $d_1, d_2$  являются двумя последовательными крайними вершинами границы  $\text{conv}(V(G))$ . Пусть теперь  $u_1, \dots, u_{2k}$  обозначают элементы множества  $V(G) \setminus \{z, v, d_1, d_2\}$ , перечисленные в порядке их обхода по часовой стрелке вокруг вершины  $z$  и лежащие слева от прямой  $(zv)$ , а  $u_{2k+1}, \dots, u_{2n-4}$  обозначают элементы множества  $V(G) \setminus \{z, v, d_1, d_2\}$ , перечисленные в порядке их обхода по часовой стрелке вокруг вершины  $z$  и лежащие справа от прямой  $(zv)$ . Тогда поскольку ребро  $d_1d_2$  не пересекает никакое ребро из  $E(G)$ , то непересекающееся совершенное паросочетание  $P$  будут образовывать ребра  $zv, u_1u_2, \dots, u_{2k-1}u_{2k}, d_1d_2, u_{2k+1}u_{2k+2}, \dots, u_{2n-5}u_{2n-4}$  (рис. 3, б).

В случае 3) пусть  $u_1, \dots, u_{2k}$  обозначают элементы множества  $V(G) \setminus \{z, v\}$ , перечисленные в порядке их обхода по часовой стрелке вокруг вершины  $z$  и лежащие слева от прямой  $(zv)$ , а  $u_{2k+1}, \dots, u_{2n-2}$  обозначают элементы множества  $V(G) \setminus \{z, v\}$ , перечисленные в порядке их обхода по часовой стрелке вокруг вершины  $z$  и лежащие справа от прямой  $(zv)$ . Тогда, очевидно, что непересекающееся совершенное паросочетание  $P$  будут образовывать ребра  $zv, u_1u_2, \dots, u_{2k-1}u_{2k}, u_{2k+1}u_{2k+2}, \dots, u_{2n-3}u_{2n-2}$ .

Наконец, пусть в оставшемся случае, т. е. когда центр  $z$  звезды  $H$  и все вершины  $G \setminus H$  являются крайними вершинами  $V(G)$ , но не существует вершины  $v \in G \setminus H$ , такой, что в обеих полуплоскостях, определяемых прямой  $(zv)$ , лежит четное число вершин множества  $V(G) \setminus \{z, v\}$ , дополнение  $G - H$  содержит непересекающееся совершенное паросочетание  $P$ . Тогда для некоторой крайней вершины  $v \in G \setminus H$   $zv \in P$ . Но в силу выпуклости  $\text{conv}(V(G))$  паросочетание  $P$  не может содержать ребро с концевыми вершинами, лежащими в разных полуплоскостях, определяемых прямой  $(zv)$ . А значит, вершины  $G$ , лежащие слева и справа от прямой  $(zv)$  должны образовывать два отдельных непересекающихся подпаросочетания, следовательно, число вершин, лежащих слева и справа от прямой  $(zv)$ , должно быть четным, противоречие. Теорема доказана.

В частности, отсюда вытекает следующее утверждение.

**Л е м м а 4.** Пусть  $H = K_{1,m}$  – звезда, являющаяся подграфом полного графа  $G = K_{2n}$  на  $2n$  вершинах, причем  $|\text{int}(V(G))| \geq (m - 1)$  и  $m + 1 < 2n$ . Тогда дополнение  $G - H$  содержит непересекающееся совершенное паросочетание.

Действительно, в силу условия следствия, если центр  $z$  звезды  $H$  является крайней вершиной  $V(G)$  и не существует вершины  $v \in G \setminus H$ , являющейся внутренней вершиной  $V(G)$ , то, по крайней мере, одно из двух ребер границы  $\text{conv}(V(G))$  инцидентных  $z$ , не принадлежит  $E(H)$ . В то же время очевидно, что для такого ребра  $vd$  четное множество вершин  $V(G) \setminus \{v, d\}$  лежит в одной полуплоскости, определяемой прямой  $(vd)$ .

**Т е о р е м а 4.** Для произвольного дерева  $H$  порядка  $(n + 1)$  полного графа  $G = K_{2n}$  на  $2n$  вершинах, такого, что  $|\text{int}(V(G))| \leq (n - 1)$ , геометрическое дополнение  $G - H$  содержит непересекающееся совершенное паросочетание.

Для доказательства этой теоремы будем использовать следующие утверждения.

**Л е м м а 3.** Полный двудольный граф  $G = K_{m,m}$  всегда содержит непересекающееся совершенное паросочетание.

Доказательство этой леммы основано на существовании совершенного паросочетания минимальной длины, которое является непересекающимся в силу свойства четырехугольника, заключающегося в том, что сумма его диагоналей больше суммы противоположных сторон.

**Л е м м а 4.** Для произвольной равномерной раскраски вершин графа  $G$  и произвольной крайней вершины  $v_0$  множества  $V(G)$  всегда существует сбалансированная прямая, проходящая через нее.

Действительно, пусть  $u_1, \dots, u_{2n-1}$  обозначают элементы множества  $V \setminus \{v\}$ , перечисленные в порядке их обхода по часовой стрелке вокруг вершины  $v$ . Без ограничения общности можно предположить, что вершина  $v$  закрашена в белый цвет. Если вершины  $u_1$  или  $u_{2n-1}$  окрашены в черный цвет, то утверждение очевидно, так как в этом случае прямая  $(vu_1)$  или  $(vu_{2n-1})$  соответственно является сбалансированной. Иначе, начнем вращать прямую  $(vu_1)$  по часовой стрелке вокруг вершины  $v$ , отслеживая значение  $l$ , равное разности между числом вершин, окрашенных в белый цвет, и вершин, окрашенных в черный цвет, лежащих в левой полуплоскости от этой прямой. В момент, когда эта прямая проходит через вершину  $u_2$ , имеем  $l = 1$ . В конце, когда прямая проходит через точку  $u_{2n-1}$  имеем  $l = -2$ . Каждый раз, когда прямая проходит через новую точку, значение  $l$  изменяется на 1. Поэтому существует максимальный индекс  $i > 2$ , такой, что слева от прямой  $(vu_i)$  значение  $l = 0$ . В силу максимальности  $i$ , вершина  $u_i$  должна быть окрашена в черный цвет. Следовательно, значение  $r$  разности между числом вершин, окрашенных в белый цвет, и вершин, окрашенных в черный цвет, лежащих в правой полуплоскости от прямой  $(vu_i)$ , также равно  $r = 0$ , т. е. прямая  $(vu_i)$  является сбалансированной. Лемма доказана.

Теперь мы можем доказать теорему 4. Так как порядок дерева  $H$  равен  $(n + 1)$ , а число внутренних вершин  $|\text{int}(V(G))| \leq (n - 1)$ , то на выпуклой оболочке  $\text{conv}(V(G))$  лежат, по крайней мере, две различные вершины  $v$  и  $w$ , которые принадлежат дереву  $H$ . Положим

$$V_1 = V(H) \setminus \{w\}, \quad V_2 = V(G) \setminus V_1.$$

Очевидно, что  $|V_1| = |V_2| = n$ . Поэтому по лемме 4 для крайней вершины  $v$  существует сбалансированная прямая  $L_v$ .

Если прямая  $L_v = (vu)$  и  $vu \notin E(H)$ , то легко построить требуемое непересекающееся совершенное паросочетание: в каждой полуплоскости, определяемой прямой  $L_v$ , по лемме 3 можно построить непересекающиеся совершенные паросочетания  $P_1, P_2$ , объединение которых вместе с ребром  $vu$  и будет искомым паросочетанием.

Пусть теперь  $L_v = (vw)$  и  $vw \in E(H)$ . Из связности дерева  $H$  следует, что выполняется, по крайней мере, одно из неравенств:  $\text{ord}_H(v) \geq 2$  или  $\text{ord}_H(w) \geq 2$ . Пусть, например,  $\text{ord}_H(v) \geq 2$ , и инцидентные (в полном графе  $G$ ) вершине  $v$  ребра  $vu_1, vu_2$  лежат на границе выпуклой оболочки  $\text{conv}(V(G))$ .

Покажем, что если хотя бы одно из этих ребер не принадлежит дереву  $H$ , то можно построить требуемое непересекающееся совершенное паросочетание. Действительно, пусть  $vu_1 \notin E(H)$ . Тогда положим  $V' = V(G) \setminus \{v, u_1\}$  и рассмотрим индуцированные графы  $G[V_1] = K_{2n-2}$  и  $H[V_1 \cap V(H)]$ . Очевидно, что  $|E(H_1)| \leq n - 2$ , поэтому по теореме 2 в графе  $K_{2(n-1)} - H_1$  существует непересекающееся совершенное паросочетание  $P_1$ , которое вместе с ребром  $vu_1$  образует искомое паросочетание в графе  $G - H$ .

Поэтому можно считать, что оба ребра  $vu_1, vu_2 \in E(H)$ . Следовательно, по крайней мере, одна из вершин  $u_1$  или  $u_2$  отлична от вершины  $w$ . Пусть  $u_1 \neq w$ . Тогда для прежней раскраски и крайней вершины  $u_1$  по лемме 4 существует сбалансированная прямая  $L_{u_1}$ . В силу отсутствия циклов в дереве  $H$  имеем  $u_1w \notin E(H)$ , поэтому  $L_{u_1} = (u_1x)$  и  $u_1x \notin E(H)$ . А значит, как указано выше, можно построить требуемое непересекающееся совершенное паросочетание. Теорема 4 доказана.

Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция» и Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (проект № Ф14РА-004).

### Список использованной литературы

1. *Ishaque, M.* Disjoint compatible geometric matchings / M. Ishaque, D. L. Souvaine, C. D. Tóth // Proceedings of the 27th Symposium on Computational Geometry (Paris, 2011). – New York, 2011. – P. 125–134.
2. *Bose, P.* Growing a tree from its branches / P. Bose, G. T. Toussaint, // J. Algorithm. – 1995. – Vol. 19, N 1. – P. 86–103.
3. *Bose, P.* Every set of disjoint segments admits a binary tree / P. Bose, M. E. Houle, G. T. Toussaint // Discr. Comput. Geom. – 2001. – Vol. 26, N 3. – P. 387–410.
4. *Hoffmann, M.* Pointed binary encompassing trees: simple and optimal / M. Hoffmann, C. D. Toth // Comput. Geom. Theor. Appl. – 2010. – Vol. 43, N 1. – P. 35–41.

5. *Souvaine, D. L.* A vertex-face assignment for plane graphs / D. L. Souvaine, C. D. Tóth, // *Comp. Geom. Theor. Appl.* – 2009. – Vol. 42, N 5. – P. 388–394.
6. *Rappaport, D.* Computing simple circuits from a set of line segments is NP-complete / D. Rappaport // *SIAM J. Comput.* – 1989. – Vol. 18, N 6. – P. 1128–1139.
7. Compatible geometric matchings / O. Aichholzer [et al.] // *Comp. Geom. Theor. Appl.* – 2009. – Vol. 42. – P. 617–626.
8. Convex partitions with 2-edge connected dual graphs / M. Al-Jubeih [et al.] // *J. Combin. Opt.* – 2011. – Vol. 22, N 3. – P. 409–425.
9. Edge-removal and non-crossing configurations in geometric graphs / O. Aichholzer [et al.] // *Discr. Math. Theor. Comput. Sci.* – 2010. – Vol. 12, N 1. – P. 75–86.

*Поступило в редакцию 21.12.2015*



УДК 519.1

П. А. ИРЖАВСКИЙ, Ю. А. КАРТЫННИК, Ю. Л. ОРЛОВИЧ

## ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ 1-ТРЕУГОЛЬНЫХ ГРАФОВ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
irzhavski@bsu.by; kartynnik@bsu.by; orlovich@bsu.by

Граф называется 1-треугольным, если для любого максимального независимого множества  $I$  этого графа каждое ребро графа, не инцидентное ни одной вершине из  $I$ , образует единственный треугольник с вершиной из множества  $I$ . В работе получена структурная характеристика класса 1-треугольных графов, которая влечёт полиномиальный алгоритм их распознавания.

*Ключевые слова:* треугольный граф, рёберно-симплициальный граф, характеристика, независимое множество, совершенное окрестностное множество.

P. A. IRZHAVSKI, Yu. A. KARTYNNIK, Yu. L. ORLOVICH

## A CHARACTERIZATION OF 1-TRIANGLE GRAPHS

Belarusian State University, Minsk, Belarus  
irzhavski@bsu.by; kartynnik@bsu.by; orlovich@bsu.by

A graph is called 1-triangle if for each maximal independent set  $I$ , each edge of this graph with both end vertices not belonging to  $I$  forms exactly one triangle with a vertex from the set  $I$ . We have obtained a structural characterization of 1-triangle graphs which implies a polynomial time recognition algorithm for this class of graphs.

*Keywords:* triangle graph, edge simplicial graph, characterization, independent set, perfect neighbourhood set.

**Введение.** Теоретико-графовые понятия и обозначения, не оговоренные специально, следуют [1]. Под *графом*  $G$  всюду понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных рёбер с множеством вершин  $V(G)$  и множеством рёбер  $E(G)$ . Число  $|V(G)|$  вершин графа  $G$  называется его *порядком* и обозначается  $|G|$ . Множество всех вершин графа  $G$ , смежных с вершиной  $v$ , называется *окружением* вершины  $v$  и обозначается  $N(v)$ ; *замкнутым окружением* вершины  $v$  называется множество  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ . Для произвольного подмножества  $X \subseteq V(G)$  положим  $N(X) = \bigcup_{v \in X} N(v) \setminus X$  и  $N[X] = N(X) \cup X$  – *окружение* и *замкнутое окружение* множества  $X$  соответственно. *Замкнутым собственным окружением* произвольного ребра  $e = uv \in E(G)$  называется множество вершин  $PN[e] = N[u] \cap N[v]$ . Подграф графа  $G$ , порождённый множеством вершин  $X \subseteq V(G)$ , обозначается через  $G(X)$ ; положим  $G - X = G(V(G) \setminus X)$ . Граф  $G$  называется  *$H$ -свободным* для некоторого графа  $H$ , если  $G$  не содержит порождённых подграфов, изоморфных  $H$ . Через  $K_4 - e$  будем обозначать граф, получаемый удалением произвольного ребра из полного графа  $K_4$ . Тогда  $(K_4 - e)$ -свободный граф – это граф, не содержащий порождённых подграфов, изоморфных  $K_4 - e$ .

Множество попарно несмежных вершин графа называется *независимым*. Независимое множество вершин графа называется *максимальным*, если оно не является подмножеством никакого другого независимого множества этого графа. Множество попарно смежных вершин графа называется *кликой*. Клика графа называется *максимальной*, если она не является подмножеством никакой другой клики этого графа. Если для вершины  $v$  клики  $C$  выполнено равенство  $N[v] = C$ , то вершина  $v$  называется *симплициальной вершиной*, а  $C$  – *симплициальной кликой*. Каждая симплициальная клика, очевидно, является максимальной.

Граф  $G$  называется *общим графом разбиений*, если существует множество  $S$  произвольной природы, для которого выполнены следующие условия:

- 1) каждой вершине  $v \in V(G)$  можно поставить в соответствие непустое подмножество  $S_v$  множества  $S$  так, что две вершины  $u$  и  $v$  смежны в графе  $G$  тогда и только тогда, когда  $S_u \cap S_v \neq \emptyset$ ;
- 2) для каждого максимального независимого множества  $I$  графа  $G$  набор подмножеств  $\{S_v \mid v \in I\}$  является разбиением множества  $S$ .

Общие графы разбиений изучались ДеТемпл и соавт. в связи с триангуляциями многоугольников на целочисленной решётке [2], а также в более общем контексте [3–5]. Было обнаружено следующее необходимое «треугольное» условие принадлежности графа  $G$  классу общих графов разбиений ([5], «условие Т»; также см. [3], теорема 2): для каждого максимального независимого множества  $I$  графа  $G$  и каждого ребра  $uv \in E(G - I)$  найдётся вершина  $w \in I$ , одновременно смежная с вершинами  $u$  и  $v$  (т. е. множество вершин  $\{u, v, w\}$  порождает треугольник в графе  $G$ ).

Изначальное предположение о том, что треугольное условие может являться достаточным для принадлежности графа классу общих графов разбиений, хотя и справедливо для АТ-свободных графов и специальных графовых произведений [6], а также **планарных графов** [7], в общем случае оказалось верным лишь для графов порядка не более 8 [8] (в [9] построена бесконечная серия контрпримеров). Орлович и Зверович [10] назвали *треугольными* графы, удовлетворяющие треугольному условию.

Интерес к классу треугольных графов также обусловил результат Миклавича и Миланича [6] о том, что промежуточными звеньями в цепи включений между классом общих графов разбиений и классом треугольных графов являются классы *строго эквистабильных* и *эквистабильных* графов, фигурирующие в известной гипотезе Махадева, Пеледа и Сана [11]. Гипотеза заключалась в совпадении классов строго эквистабильных и эквистабильных графов. Миклавич и Миланич привели гипотезу о том, что оба эти класса совпадают с классом общих графов разбиений, которая оказалась верной в целом ряде частных случаев [6; 12]. Впоследствии указанные гипотезы были опровергнуты для общего случая Миланичем и Тротиньоном [13], доказавшими попарное различие всех трёх классов графов, т. е. классов общих графов разбиений, строго эквистабильных и эквистабильных графов. Борш, Гурвич и Миланич [14] приводят **обширную иерархию классов** графов, связанных с треугольными. В неё также входит класс *CIS-графов* (от англ. «Clique/Independent Set»), характеризующихся тем, что каждая максимальная клика в таком графе имеет непустое пересечение с каждым максимальным независимым множеством.

Множество  $D$  вершин графа  $G$  называется *доминирующим*, если  $N[D] = V(G)$ . Доминирующее множество  $D$  графа  $G$  называется *минимальным*, если оно не содержит никакого другого доминирующего множества этого графа. Множество вершин графа называется *независимым доминирующим*, если оно является одновременно независимым и доминирующим. Доминирующее множество  $D$  графа  $G$  называется *окрестностным* [15], если для каждого ребра  $uv \in E(G - D)$  в  $D$  найдётся вершина, смежная одновременно с обоими его концами  $u$  и  $v$ . Это эквивалентно тому, что  $G = \bigcup_{v \in D} G(N[v])$ . Окрестностное множество графа  $G$  называется *минимальным*, если оно не содержит никакого другого окрестностного множества этого графа. Окрестностное множество  $D$  графа  $G$  называется *независимым окрестностным*, если оно является одновременно независимым и окрестностным; и *совершенным окрестностным*, если для любых двух различных вершин  $u, v \in D$  подграфы, порождённые их замкнутыми окружениями  $N[u]$  и  $N[v]$ , не имеют общих рёбер (в частности, каждое совершенное окрестностное множество является независимым) [16]. Множество  $R$  вершин графа  $G$  называется *избыточным*, если удаление некоторой вершины  $v$  из  $R$  не изменяет его замкнутого окружения, т. е.  $N[R] = N[R \setminus \{v\}]$ ; и *неизбыточным*, или *ирридантным*, в случае, если такой вершины не существует [17]. **Ирридантное множество вершин** графа  $G$  называется *максимальным*, если оно не является подмножеством никакого другого ирридантного множества вершин этого графа. Заметим, что в произвольном графе каждое максимальное независимое множество является минимальным доминирующим, а каждое минимальное доминирующее множество является максимальным ирридантным.

В [18] был введён класс *доминантно-треугольных* графов (и класс *ирридантно-треугольных* графов) как графов, в которых каждое минимальное доминирующее (соответственно макси-

мальное ирридантное) множество является окрестностным. Такие графы, очевидно, являются треугольными. Было показано, что классы доминантно-треугольных и ирридантно-треугольных графов совпадают и характеризуются в точности «условием Е» из [19], достаточным для принадлежности графа классу общих графов разбиений и заключающемся в том, что каждое ребро графа принадлежит подграфу, порождённому симплициальной кликой. Этим «рёберным» условием определяется класс *рёберно-симплициальных* графов, известный также как класс *графов верхних границ* [20]. Для этого класса графов существует алгоритм распознавания со сложностью  $O(|V(G)| + |E(G)|)$ , основанный на перечислении симплициальных клик [21]. В каждом доминантно-треугольном графе семейства всех максимальных ирридантных множеств, всех минимальных доминирующих множеств и всех минимальных окрестностных множеств совпадают.

В настоящей работе вводится и характеризуется класс 1-треугольных графов, основанный на дополнительном ограничении о единственности треугольника в формулировке треугольного условия. Устанавливается, что класс 1-треугольных графов совпадает с классами  $(K_4 - e)$ -свободных CIS-графов и  $(K_4 - e)$ -свободных треугольных графов. Получаемая впоследствии структурная характеристика 1-треугольных графов влечёт полиномиальный алгоритм их распознавания и указывает на тесную связь класса 1-треугольных графов с классом доминантно-треугольных графов. Именно, каждый связный 1-треугольный граф принадлежит хотя бы одному из следующих семейств графов: полные двудольные  $K_{m,n}$ , декартовы произведения  $K_m \times K_m$  двух полных графов одинакового порядка,  $(K_4 - e)$ -свободные доминантно-треугольные.

**Свойства  $(K_4 - e)$ -свободных графов.** При характеристике 1-треугольных графов потребуются следующие утверждения о  $(K_4 - e)$ -свободных графах, приводимые здесь без доказательства (большинство из них, по-видимому, общеизвестны).

**Т е о р е м а 1.** *Граф  $G$  является  $(K_4 - e)$ -свободным тогда и только тогда, когда любые две различные максимальные клики графа  $G$  имеют не более одной общей вершины.*

**С л е д с т в и е 1.** *Пусть  $C$  – произвольная максимальная клика  $(K_4 - e)$ -свободного графа  $G$ . Тогда любая вершина  $x \in V(G) \setminus C$  смежна не более чем с одной вершиной из  $C$ .*

**С л е д с т в и е 2.** *Пусть  $C, C_1$  и  $C_2$  – попарно различные максимальные клики  $(K_4 - e)$ -свободного графа  $G$ , и пусть  $u \in C \cap C_1, v \in C \cap C_2, u \neq v$ . Тогда клики  $C_1$  и  $C_2$  не пересекаются.*

**С л е д с т в и е 3.** *Пусть  $C, C_1$  и  $C_2$  – попарно различные максимальные клики  $(K_4 - e)$ -свободного графа  $G$ , и пусть  $u \in C \cap C_1, v \in C \cap C_2, u \neq v$ . Тогда никакие две различные вершины  $u', u'' \in C_1$  не смежны одновременно с одной и той же вершиной  $v' \in C_2$ .*

**Т е о р е м а 2.** *Граф  $G$  является  $(K_4 - e)$ -свободным тогда и только тогда, когда для каждого ребра  $e \in E(G)$  его замкнутое собственное окружение  $PN[e]$  является максимальной кликой.*

**Свойства 1-треугольных графов.** Заметим, что граф является треугольным тогда и только тогда, когда каждое максимальное независимое множество графа является его независимым окрестностным множеством. Граф  $G$  назовём *1-треугольным*, если для каждого максимального независимого множества  $I$  графа  $G$  и каждого ребра  $uv \in E(G - I)$  найдётся единственная вершина  $w \in I$ , одновременно смежная с вершинами  $u$  и  $v$  (т. е. множество вершин  $\{u, v, w\}$  порождает треугольник в графе  $G$ ). Иными словами, как нетрудно видеть, граф является 1-треугольным, если и только если каждое его максимальное независимое множество является совершенным окрестностным. Каждый 1-треугольный граф, очевидно, является треугольным.

**Т е о р е м а 3.** *Для графа  $G$  следующие утверждения эквивалентны:*

- 1)  $G$  – 1-треугольный граф;
- 2)  $G$  –  $(K_4 - e)$ -свободный треугольный граф;
- 3)  $G$  –  $(K_4 - e)$ -свободный CIS-граф.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** 1)  $\Rightarrow$  2). Пусть  $G$  – 1-треугольный граф. Следовательно, он является треугольным. Требуется доказать, что в  $G$  нет порождённых подграфов, изоморфных  $K_4 - e$ . Пусть, напротив, порождённый подграф  $G(\{u, v, x, y\})$  изоморфен  $K_4 - e$ , причём вершины  $x$  и  $y$  не смежны. Рассмотрим произвольное максимальное независимое множество  $I$  в графе  $G$ , содержащее вершины  $x$  и  $y$ . Тогда ребро  $uv \in E(G - I)$  содержится по крайней мере в двух треугольниках  $G(\{u, v, x\})$  и  $G(\{u, v, y\})$ , что противоречит свойству 1-треугольности графа  $G$ .

2)  $\Rightarrow$  3). Пусть  $G - (K_4 - e)$ -свободный треугольный граф. Покажем, что он является CIS-графом. Рассмотрим произвольную максимальную клику  $C$  этого графа. Если  $|C| = 1$ , то единственная вершина этой клики – **изолированная и потому принадлежит каждому максимальному независимому множеству графа  $G$** . Иначе найдётся ребро  $uv \in E(G)$ , для которого  $u, v \in C$ . По теореме 2 замкнутое собственное окружение  $PN[uv]$  ребра  $uv$  является максимальной кликой. Поскольку каждая клика, содержащая вершины  $u$  и  $v$ , является подмножеством  $PN[uv]$ , имеем  $PN[uv] = C$ . Треугольное свойство графа  $G$  эквивалентно тому, что каждое максимальное независимое множество  $I$  графа  $G$  пересекается с замкнутым собственным окружением  $PN[e]$  каждого ребра  $e \in E(G)$ . В частности, каждое максимальное независимое множество  $I$  графа  $G$  пересекается с  $PN[uv] = C$ . Таким образом, каждая максимальная клика  $C \subseteq V(G)$  пересекается с каждым максимальным независимым множеством  $I \subseteq V(G)$ , т. е.  $G$  является CIS-графом.

3)  $\Rightarrow$  1). Пусть  $G - (K_4 - e)$ -свободный CIS-граф. Рассмотрим произвольное максимальное независимое множество  $I \subseteq V(G)$  и любое ребро  $e \in E(G)$ . По теореме 2 замкнутое собственное окружение  $PN[e]$  ребра  $e$  является максимальной кликой, поэтому в CIS-графе  $G$  максимальная клика  $PN[e]$  и максимальное независимое множество  $I$  имеют ровно одну общую вершину, т. е.  $|PN[e] \cap I| = 1$ . В силу произвольности  $I$  и  $e$  это эквивалентно тому, что граф  $G$  является 1-треугольным. Теорема доказана.

Порождённая цепь  $P_4 = (a, b, c, d)$  в графе  $G$  называется *плохой  $P_4$* , если в этом графе существует максимальное независимое множество  $I$ , содержащее вершины  $a$  и  $d$  и не содержащее ни одной вершины, смежной с обеими вершинами  $b$  и  $c$  одновременно [6].

В дальнейшем будем опираться на следующую характеристику треугольных графов, в которой нетрудно убедиться непосредственно.

**Т е о р е м а 4 ([6]).** *Граф  $G$  является треугольным тогда и только тогда, когда он не содержит плохих  $P_4$ .*

**С л е д с т в и е 4.** *Полный двудольный граф  $K_{m,n}$  является 1-треугольным для любых  $m, n \geq 1$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Граф  $K_{m,n}$  не содержит треугольников и поэтому является  $(K_4 - e)$ -свободным. Кроме того, он не содержит порождённых цепей  $P_4$  и поэтому является треугольным по теореме 4. Следовательно, по теореме 3 он является 1-треугольным. Следствие доказано.

**Т е о р е м а 5.** *Если связный 1-треугольный граф  $G$  содержит двухвершинную максимальную клику, не являющуюся симплициальной, то  $G$  является полным двудольным графом с долями мощности не менее 2.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Предположим, что вершины  $x$  и  $y$  образуют двухвершинную максимальную клику в графе  $G$ , не являющуюся симплициальной. Рассмотрим множества вершин  $X = N(y)$  и  $Y = N(x)$  (таким образом,  $x \in X$  и  $y \in Y$ ). Эти множества не пересекаются в силу максимальной клики  $\{x, y\}$ . Каждое из них содержит не менее двух вершин, иначе клика  $\{x, y\}$  была бы симплициальной.

Докажем, что каждая вершина множества  $X$  смежна с каждой вершиной множества  $Y$ . Это нужно доказать только для произвольных вершин  $x' \in X$  и  $y' \in Y$ , отличных от  $x$  и  $y$  соответственно. Предположим, что вершины  $x'$  и  $y'$  не смежны. Рассмотрим произвольное максимальное независимое множество  $I$  графа  $G$ , содержащее  $x'$  и  $y'$ . Множество  $I$  обладает тем свойством, что в нём нет вершины, которая вместе с  $x$  и  $y$  порождает треугольник в графе  $G$ . Но тогда порождённая цепь  $(x', y, x, y')$  является плохой  $P_4$ , что противоречит теореме 4.

Докажем далее, что  $X$  и  $Y$  – независимые множества вершин в графе  $G$ . Без ограничения общности проведём доказательство лишь для множества  $X$ . Итак, допустим, что две вершины  $x', x'' \in X$  смежны. В множестве  $Y$  выберем вершину  $y$  и произвольную отличную от неё вершину  $y'$ , тогда  $y$  и  $y'$  будут несмежны (иначе  $y' \in Y \cap N(y) = Y \cap X$ , что невозможно). В результате получим изоморфный  $K_4 - e$  порождённый подграф  $G(\{x', x'', y, y'\})$ , что противоречит свойству 1-треугольности графа  $G$  по теореме 3.

Наконец, предположим, что в графе  $G$  найдется вершина  $z$ , не принадлежащая множеству  $X \cup Y$ . В силу связности графа  $G$  без ограничения общности можно считать, что вершина  $z$  смежна с некоторой вершиной  $x^* \in X$ . При этом вершина  $z$  не смежна с вершиной  $x$ , так как  $z \notin Y = N(x)$ . Тогда порождённая цепь  $(z, x^*, y, x)$  является плохой  $P_4$ . Действительно, предполо-

жим, что в произвольном максимальном независимом множестве  $I$  графа  $G$ , содержащем вершины  $x$  и  $z$ , нашлась вершина  $w \in I$ , смежная одновременно с  $x^*$  и  $y$ . Тогда вершины  $x^* \in X$  и  $w \in N(y) = X$  смежны, что противоречит независимости множества  $X$ . Наличие указанной плохой  $P_4$  снова противоречит свойству 1-треугольности графа  $G$ .

Таким образом, граф  $G$  является полным двудольным графом с долями  $X = N(y)$  и  $Y = N(x)$ , при этом  $|X| \geq 2$  и  $|Y| \geq 2$ . Теорема доказана.

Отметим, что все полные двудольные графы вида  $K_{1,n}$  являются рёберно-симплициальными.

**Т е о р е м а 6** ([6]). Пусть  $G \cong K_{n_1} \times K_{n_2} \times \dots \times K_{n_k}$ ,  $k \geq 2$ ,  $n_i \geq 2$ . Граф  $G$  является треугольным тогда и только тогда, когда  $k = 2$  и  $n_1 = n_2$ , т. е.  $G \cong K_m \times K_m$  для некоторого целого числа  $m \geq 2$ .

**С л е д с т в и е 5.** Граф  $K_m \times K_m$  является 1-треугольным для любого целого числа  $m \geq 1$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Случай  $m = 1$  тривиален. Для случая  $m \geq 2$  граф  $G = K_m \times K_m$  является треугольным по теореме 6. Как нетрудно видеть, замкнутое собственное окружение каждого ребра графа  $G$  является максимальной кликой, поэтому по теореме 2 граф  $G - (K_4 - e)$ -свободный. Но тогда  $(K_4 - e)$ -свободный треугольный граф  $G$  является 1-треугольным по теореме 3. Следствие доказано.

Отметим, что декартово произведение  $K_m \times K_m$  двух полных графов порядка  $m$  изоморфно рёберному графу  $L(K_{m,m})$  от  $m$ -регулярного полного двудольного графа  $K_{m,m}$ .

**Характеризация 1-треугольных графов.** Напомним, что граф является рёберно-симплициальным, если каждое его ребро принадлежит подграфу, порождённому некоторой симплициальной кликой. Напомним также, что класс рёберно-симплициальных графов совпадает с классом доминантно-треугольных (и ирридантно-треугольных) графов.

**Т е о р е м а 7.** Для связного графа  $G$  следующие утверждения эквивалентны:

1)  $G$  – 1-треугольный граф.

2) Выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

(а)  $G$  – полный двудольный граф;

(б)  $G$  – декартово произведение  $K_m \times K_m$  двух полных графов равных порядков для некоторого натурального числа  $m$ ;

(в)  $G - (K_4 - e)$ -свободный рёберно-симплициальный граф.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** 2)  $\Rightarrow$  1). Покажем, что каждое из трёх условий утверждения 2) влечёт свойство 1-треугольности для графа  $G$ .

(а) Если  $G$  – полный двудольный граф, то он является 1-треугольным по следствию 4.

(б) Если граф  $G$  изоморфен  $K_m \times K_m$ , то он является 1-треугольным по следствию 5.

(в) Если граф  $G$  рёберно-симплициальный, то он является доминантно-треугольным и, следовательно, треугольным [18; 19]. В силу того, что  $G - (K_4 - e)$ -свободный граф,  $G$  является 1-треугольным по теореме 3.

1)  $\Rightarrow$  2). Непосредственная проверка показывает, что все связные графы порядка меньше четырёх являются 1-треугольными и рёберно-симплициальными. Пусть  $G$  – связный 1-треугольный граф порядка  $|G| \geq 4$ . Предположим, что  $G$  не является рёберно-симплициальным графом, иначе выполнено условие (в) утверждения 2).

Тогда в графе  $G$  существует несимплициальная максимальная клика  $C$ , т. е. обладающая тем свойством, что каждая её вершина принадлежит по крайней мере двум максимальным кликам этого графа. Обозначим  $k = |C|$ . Если  $k = 2$ , то по теореме 5 граф  $G$  является полным двудольным и, следовательно, выполнено условие (а) утверждения 2). Поэтому далее будем считать, что  $k \geq 3$ . Для каждой вершины  $v$  клики  $C$  зафиксируем клику  $C_v$  – произвольную из максимальных клик, отличных от  $C$  и содержащих  $v$  (согласно теореме 1,  $C \cap C_v = \{v\}$ ). Для удобства дальнейших рассуждений введём обозначение  $C'_v = C_v \setminus \{v\}$ . Тогда  $C'_v \cap C = \emptyset$  для всех  $v \in C$ .

Напомним, что 1-треугольный граф  $G$  является  $(K_4 - e)$ -свободным CIS-графом согласно теореме 3. По теореме 1 любые две его максимальные клики имеют не более одной общей вершины. По следствию 2 клики  $C_u$  и  $C_v$  не пересекаются для любых различных вершин  $u, v \in C$ . Это позволяет корректно ввести обозначение  $r(v') = v$  для всех вершин  $v'$  каждой клики  $C_v$ ,  $v \in C$ . По следствию 3 для любых двух различных клик  $C_u$  и  $C_v$ ,  $u, v \in C$ , никакие две различные вершины  $u', u'' \in C_u$  не смежны одновременно с одной и той же вершиной  $v' \in C_v$ .

В процессе доказательства теоремы все вспомогательные утверждения будут формулироваться в текущих предположениях: граф  $G$  – 1-треугольный,  $C$  – несимплициальная максимальная клика мощности  $k \geq 3$  в этом графе; для каждой вершины  $v$  клики  $C$  зафиксирована другая содержащая эту вершину максимальная клика  $C_v$ , причём  $C \cap C_v = \{v\}$  (клики  $C_v$ ,  $v \in C$ , попарно не пересекаются); введены обозначения  $C'_v = C_v \setminus \{v\}$  и  $r(v') = v$  для всех  $v' \in C_v$ .

**Л е м м а 1.** Пусть задано независимое множество  $I_0 \subseteq \bigcup_{v \in C} C'_v$ , содержащее по одной вершине некоторых из клик  $C'_v$ ,  $v \in C$  (возможно пустое). Обозначим  $Z(I_0) = C \setminus \{r(v') \mid v' \in I_0\}$ . Тогда множество  $Z(I_0)$  непусто, а для любой вершины  $z \in Z(I_0)$  существует независимое множество  $\mathcal{I}(I_0, z)$ , включающее  $I_0$  и содержащее по одной вершине из каждой клики  $C'_x$ ,  $x \in Z(I_0) \setminus \{z\}$ . Более того, существует такая биекция  $f_{\mathcal{I}} : C'_z \rightarrow \mathcal{I}(I_0, z)$ , для которой две произвольные вершины  $z' \in C'_z$  и  $w \in \mathcal{I}(I_0, z)$  смежны в графе  $G$  тогда и только тогда, когда  $f_{\mathcal{I}}(z') = w$ . Другими словами, подграф графа  $G$ , порождённый множеством рёбер  $\{z'w \mid z' \in C'_z, w \in \mathcal{I}(I_0, z)\}$ , является совершенным паросочетанием.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Если  $Z(I_0) = \emptyset$ , то  $I_0$  содержит по одной вершине из каждой клики  $C'_v$ ,  $v \in C$ . Но тогда после дополнения  $I_0$  до максимального независимого множества  $I'$  приходим к противоречию с теоремой 3, поскольку клика  $C$  не имеет общих вершин с  $I'$ , что невозможно в CIS-графе  $G$ .

Поэтому  $Z(I_0) \neq \emptyset$ . Введём обозначение  $C' = \{C'_v \mid v \in Z(I_0)\}$ . Занумеруем элементы множества  $C'$  натуральными числами от 1 до  $|C'|$  в произвольном порядке так, чтобы клика  $C'_z$  имела наибольший номер. Будем строить независимое множество  $I$ , начиная с множества вершин  $I_0$  и последовательно, пока это возможно, добавляя в него по одной вершине  $x'$ , не смежной с ранее выбранными вершинами, из каждой клики  $C'_x \in C'$  в порядке возрастания номеров клик.

Если бы, действуя по указанной схеме, удалось включить во множество  $I$  по одной вершине из каждой клики  $C'_x \in C'$ , то после дополнения  $I$  до максимального независимого множества  $I'$  снова получили бы противоречие с теоремой 3.

Таким образом, описанный процесс построения множества  $I$  останавливается на некоторой клике  $C'_x \in C'$  по той причине, что каждая вершина из  $C'_x$  смежна с некоторой вершиной из  $I$ . Введём отображение  $f : C'_x \rightarrow I$ , которое ставит в соответствие каждой вершине  $x' \in C'_x$  некоторую смежную с ней вершину  $f(x') \in I$ . Отображение  $f$  инъективно, так как наличие двух различных вершин  $x', x'' \in C'_x$ , одновременно смежных с  $f(x') = f(x'') \in V(G) \setminus C_x$ , противоречит следствию 1. Обозначим через  $I^*$  образ множества  $C'_x$  при отображении  $f$ . Тогда сужение  $f : C'_x \rightarrow I^*$  будет биекцией.

Предположим теперь, что имеется клика  $C'_y$ ,  $y \in Z(I_0)$ , отличная от  $C'_x$ , для которой  $I^* \cap C'_y = \emptyset$ . Тогда вершина  $y$  не смежна ни с одной вершиной из  $I^*$  по следствию 1. Поэтому, дополнив множество  $I^* \cup \{y\}$  до максимального независимого множества  $I'$ , получим  $I' \cap C_x = \emptyset$ , что невозможно в CIS-графе  $G$ .

Из этого следует, что процесс построения множества  $I$  не мог остановиться раньше, чем на клике  $C'_z$  с наибольшим номером, поэтому  $x = z$ . Также из этого следует, что  $I \setminus I^* = \emptyset$ , поэтому  $f : C'_z \rightarrow I$  – требуемая биекция. Таким образом, можно положить  $\mathcal{I}(I_0, z) = I$  и  $f_{\mathcal{I}} = f$ . Лемма доказана.

**С л е д с т в и е 6.** Для любой вершины  $v \in C$  выполняется соотношение

$$|C_v| = |C'_v| + 1 = |C| = k.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Построим по лемме 1 независимое множество  $I = \mathcal{I}(\emptyset, v)$ . Из существования биекции  $f_{\mathcal{I}}$  между  $C'_v$  и множеством  $I$ , содержащим ровно по одной вершине каждой из остальных клик  $C_u$ ,  $u \neq v$ , следует, что

$$|C'_v| = |I| = |C \setminus \{v\}| = |C| - 1 = k - 1.$$

Следствие доказано.

**С л е д с т в и е 7.** Каждая вершина из любой клики  $C_x$  смежна ровно с одной вершиной из каждой другой клики  $C_y$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Любая вершина  $x' \in C_x$  не может быть смежна с двумя различными вершинами клики  $C_y$  по следствию 3. Поэтому достаточно показать, что каждая вершина  $x' \in C_x$

смежна хотя бы с одной вершиной клики  $C_y$ . Это верно для вершины  $x$ , которая смежна с вершиной  $y \in C_y$ . Рассмотрим произвольную вершину  $x' \in C'_x$ . Построим согласно лемме 1 независимое множество  $\mathcal{I}(\{x'\}, y)$ . Это множество будет содержать вершину  $x'$ , с которой будет смежна вершина  $y' = f_{\mathcal{I}}^{-1}(x') \in C'_y \subseteq C_y$ . Следствие доказано.

**С л е д с т в и е 8.** Пусть  $x, y, z$  – произвольные попарно различные вершины клики  $C$ . Тогда любые две вершины  $y' \in C'_y$  и  $z' \in C'_z$ , одновременно смежные с вершиной  $x' \in C'_x$ , смежны между собой.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Предположим противное: пусть вершины  $y'$  и  $z'$  несмежны. По лемме 1 построим независимое множество  $I = \mathcal{I}(\{y', z'\}, x)$ . Тогда вершина  $x'$  будет смежна по меньшей мере с двумя вершинами  $y', z' \in I$  – противоречие с утверждением леммы 1. Следствие доказано.

Обозначим порождённый подграф  $G\left(\bigcup_{v \in C} C_v\right)$  через  $H$  и полностью опишем его структуру. Для этого пронумеруем вершины клики  $C$  произвольным образом натуральными числами от 1 до  $k$ . Пусть  $\alpha(v)$  – номер вершины  $v$  в клике  $C$  согласно этой нумерации. Для всех вершин  $v'$  каждой клики  $C'_v, v \in C$ , положим  $\alpha(v') = \alpha(v)$ . Зафиксируем произвольную клику  $C_v, v \in C$ , и также пронумеруем её вершины натуральными числами от 1 до  $k$  (независимо от номера вершины  $v$  в клике  $C$ ). Пусть  $\beta(v')$  – номер вершины  $v'$  в клике  $C_v$  согласно этой нумерации. Для каждой вершины  $u' \in C_u, u \neq v$ , положим  $\beta(u') = \beta(v')$ , где  $v'$  – единственная вершина из клики  $C_v$ , смежная с  $u'$  по следствию 7. Тогда вершины с одинаковым значением  $\alpha$  образуют клики  $C_v, v \in C$ , по определению значений  $\alpha$ , а вершины с одинаковым значением  $\beta$ , отличные от вершин клики  $C$ , образуют клики по следствию 8. Между вершинами порождённого подграфа  $H$  нет других рёбер по следствию 7.

Таким образом, две вершины  $u$  и  $v$  графа  $H$  смежны тогда и только тогда, когда  $\alpha(u) = \alpha(v)$  или  $\beta(u) = \beta(v)$ . Поэтому  $H \cong K_k \times K_k$ .

Далее будем обозначать через  $v_{i,j}, 1 \leq i, j \leq k$ , ту единственную вершину  $x$  графа  $H$ , для которой  $\alpha(x) = i$  и  $\beta(x) = j$ . Введём обозначения для клик  $R_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,k}\}, 1 \leq i \leq k$ , и  $Q_j = \{v_{1,j}, v_{2,j}, \dots, v_{k,j}\}, 1 \leq j \leq k$ .

Каждая клика  $R_i, 1 \leq i \leq k$ , является максимальной в графе  $G$  по построению (она совпадает с максимальной кликой  $C_v$  для той вершины  $v \in C$ , для которой  $\alpha(v) = i$ ). Покажем, что каждая клика  $Q_j, 1 \leq j \leq k$ , также является максимальной в графе  $G$ . Предположим противное: пусть, без ограничения общности, клика  $Q_1$  не является максимальной, т. е. найдётся вершина  $s \in V(G) \setminus V(H)$ , для которой  $Q_1 \subseteq N(s)$ . Для каждого  $i \in \{1, \dots, k\}$  вершина  $s$  не может быть смежна ни с одной из вершин  $v_{i,j}, 2 \leq j \leq k$ , по следствию 1, поскольку она уже смежна с другой вершиной  $v_{i,1}$  максимальной клики  $R_i$ . Но тогда произвольное максимальное независимое множество, содержащее независимое множество  $\{s, v_{2,2}, v_{3,3}, \dots, v_{k,k}\}$ , не будет пересекаться с максимальной кликой  $R_1$ , что невозможно в CIS-графе  $G$ .

Осталось показать, что  $G = H$ , т. е. что в графе  $G$  нет вершин, не принадлежащих порождённому подграфу  $H$ . Предположим, что в  $G$  имеется вершина  $t \notin V(H)$ . В силу связности графа  $G$  без ограничения общности можно считать, что вершина  $t$  смежна в графе  $G$  хотя бы с одной вершиной подграфа  $H$ . По следствию 1 вершина  $t$  не может быть смежна одновременно с двумя вершинами  $u$  и  $v$ , принадлежащими одной максимальной клике  $R_i$  или  $Q_j, 1 \leq i, j \leq k$ . Ввиду этого, опять же без ограничения общности, будем считать, что  $N(t) \cap V(H) = \{v_{1,1}, v_{2,2}, \dots, v_{r,r}\}$  для некоторого  $r \leq k$  (этого можно добиться перестановкой номеров внутри  $\alpha$ - и/или  $\beta$ -нумерации вершин, что эквивалентно перенумерации клик  $R_i$  или  $Q_j$ ). Но тогда произвольное максимальное независимое множество, содержащее независимое множество  $\{t, v_{2,k}, v_{3,2}, v_{4,3}, \dots, v_{k,k-1}\}$  (напомним, что  $k \geq 3$ ), не будет пересекаться с максимальной кликой  $R_1$ , что невозможно в CIS-графе  $G$ .

Таким образом,  $G = H \cong K_m \times K_m$  при  $m = k$  и выполнено условие (б) утверждения 2). Теорема доказана.

По аналогии с классом 1-треугольных графов можно ввести классы  $k$ -треугольных графов для  $k > 1$ . А именно, граф  $G$  назовём  $k$ -треугольным, если для каждого максимального независимого множества  $I$  графа  $G$  и каждого ребра  $uv \in E(G - I)$  число вершин  $w \in I$ , одно-

временно смежных с вершинами  $u$  и  $v$  (т. е. для которых множество вершин  $\{u, v, w\}$  порождает треугольник в графе  $G$ ), лежит в пределах от 1 до  $k$  включительно. Задача характеристики  $k$ -треугольных графов для  $k > 1$  является открытой.

Работа выполнена при частичной поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф15МЛД-022).

### Список использованной литературы

1. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев [и др.]. – М.: Наука, 1990. – 384 с.
2. DeTemple, D. Graphs associated with triangulations of lattice polygons / D. DeTemple, J. M. Robertson // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. – 1989. – Vol. 47, N 3. – P. 391–398.
3. DeTemple, D. Partition graphs / D. DeTemple, F. Harary, J. Robertson // Soochow J. Math. – 1987. – Vol. 13, N 2. – P. 121–129.
4. On the recognition of general partition graphs / T. Kloks [et al.] // Lect. Notes Comput. Sci. – 2003. – Vol. 2880. – P. 273–283.
5. McAvaney, K. A characterization and hereditary properties for partition graphs / K. McAvaney, J. Robertson, D. DeTemple // Discrete Math. – 1993. – Vol. 113, N 1–3. – P. 131–142.
6. Miklavič, S. Equistable graphs, general partition graphs, triangle graphs, and graph products / S. Miklavič, M. Milanič // Discrete Appl. Math. – 2011. – Vol. 159, N 11. – P. 1148–1159.
7. Cerioli, M. R. Structural results for general partition, equistable and triangle graphs / M. R. Cerioli, T. L. Martins // Electron. Notes Discrete Math. – 2015. – Vol. 49. – P. 713–718.
8. Recent examples in the theory of partition graphs / D. W. DeTemple [et al.] // Discrete Math. – 1993. – Vol. 113, N 1–3. – P. 255–258.
9. Зверович, И. Е. О графах разбиений / И. Е. Зверович, Ю. Л. Орлович // Докл. НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 4. – С. 38–42.
10. Orlovich, Yu. L. Independent domination in triangle graphs / Y. L. Orlovich, I. E. Zverovich // Electron. Notes Discrete Math. – 2007. – Vol. 28. – P. 341–348.
11. Mahadev, N. V. R. Equistable graphs / N. V. R. Mahadev, U. N. Peled, F. Sun // J. Graph Theory. – 1994. – Vol. 18, N 3. – P. 281–299.
12. Levit, V. E. Equistable simplicial, very well-covered, and line graphs / V. E. Levit, M. Milanič // Discrete Appl. Math. – 2014. – Vol. 165. – P. 205–212.
13. Milanič, M. Equistable graphs and counterexamples to three conjectures on equistable graphs / M. Milanič, N. Trotignon // ArXiv e-prints (arXiv:1407.1670) [Electronic resource]. – Mode of access: <http://arxiv.org/abs/1407.1670>. – Date of access: 17.05.2016.
14. Boros, E. On equistable, split, CIS, and related classes of graphs / E. Boros, V. Gurvich, M. Milanič // ArXiv e-prints (arXiv:1505.05683) [Electronic resource]. – Mode of access: <http://arxiv.org/abs/1505.05683>. – Date of access: 17.05.2016.
15. Sampathkumar, E. The neighbourhood number of a graph / E. Sampathkumar, P. S. Neeralagi // Indian J. Pure Appl. Math. – 1985. – Vol. 16. – P. 126–132.
16. Sampathkumar, E. Independent, perfect and connected neighbourhood numbers of a graph / E. Sampathkumar, P. S. Neeralagi // J. Combin. Inf. Syst. Sci. – 1994. – Vol. 19, N 3–4. – P. 139–145.
17. Bollobás, B. Graph-theoretic parameters concerning domination, independence, and irredundance / B. Bollobás, E. J. Cockayne // J. Graph Theory. – 1979. – Vol. 3, N 3. – P. 241–249.
18. Картынный, Ю. А. Доминантно-треугольные графы и графы верхних границ / Ю. А. Картынный, Ю. Л. Орлович // Докл. НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 1. – С. 16–25.
19. When are chordal graphs also partition graphs? / C. Anbeek [et al.] // Australas. J. Combin. – 1997. – Vol. 16. – P. 285–293.
20. Simplicial graphs / G. A. Cheston [et al.] // Congr. Numer. – 1988. – Vol. 67. – P. 105–113.
21. Cheston, G. A. A survey of the algorithmic properties of simplicial, upper bound and middle graphs / G. A. Cheston, T. S. Jap // J. Graph Algorithms Appl. – 2006. – Vol. 10, N 2. – P. 159–190.

Поступило в редакцию 11.05.2016



УДК 519.872

*М. А. МАТАЛЫЦКИЙ***ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ  
В ТРАНСПОРТНОЙ ЛОГИСТИКЕ***(Представлено членом-корреспондентом Ю. С. Хариным)**Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь  
m.matalytski@gmail.com*

В сообщении представлены методы анализа марковских сетей массового обслуживания с доходами, которые применяются при прогнозировании ожидаемых доходов логистических транспортных систем.

*Ключевые слова:* логистическая транспортная система, сеть массового обслуживания, прогнозирование ожидаемых доходов.

*М. А. MATALYTSKI***PROBABILISTIC ANALYSIS OF STOCHASTIC MODELS IN TRANSPORT LOGISTICS***Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus  
m.matalytski@gmail.com*

The article presents the methods of analysis of the Markov queueing networks with incomes that are used in forecasting expected incomes of logistics transportation systems.

*Keywords:* logistics transportation system, queueing network, forecasting expected revenues.

**Введение, постановка задачи.** В последнее время большое внимание уделяется математическому моделированию и системному анализу различных экономических процессов и объектов. Математические, в частности, стохастические, модели позволяют изучать свойства и поведение реальных моделируемых объектов, не прибегая к практическим опытам, которые часто невозможно или нецелесообразно проводить. Одной из областей с широким приложением стохастических методов и моделей стала транспортная логистика.

В настоящее время осуществляется становление нового научного направления – математической логистики [1], занимающейся разработкой адекватных математических моделей функционирования логистических систем, методов их исследования, оптимизации и управления, базирующихся на использовании современного аппарата системного анализа, стохастического и компьютерного моделирования, других разделов математики и информатики.

Потоки транспортных средств (заявок), поступающих в случайные моменты времени, случайные длительности интервалов времени их обслуживания, важность рассмотрения различных производителей, складов и потребителей продукции (систем обслуживания (СМО)) как единой сети предопределили необходимость использования сетей массового обслуживания (МО) для разработки моделей функционирования логистических транспортных систем (ЛТС). Сеть МО представляет собой совокупность СМО, между которыми циркулируют заявки, переходя из одной СМО в другую.

Для различных ЛТС актуальным является решение проблем, тесно связанных с оценкой их производительности с учетом стоимости и прогнозированием доходов. Это привело к использованию новых математических моделей – марковских сетей с доходами, которые отличаются от классических тем, что требуют кроме изучения случайных процессов обслуживания заявок учитывать доходы, приносимые системам обслуживания этими заявками. В данной работе такие сети применяются при решении задач прогнозирования ожидаемых доходов в ЛТС.

Под состоянием сети МО с однотипными заявками будем понимать вектор

$$k(t) = (k, t) = (k_1, k_2, \dots, k_n, t) = (k_1(t), k_2(t), \dots, k_n(t)), \quad (1)$$

где  $k_i(t)$  – число заявок (в очереди и на обслуживании) в момент времени  $t$  в системе  $S_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Пространство состояний  $i$ -й СМО,  $Z_i$  – некоторое подмножество точек с целочисленными неотрицательными координатами одномерного евклидова пространства, пространство состояний сети  $Z = Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_n$ .

Будем рассматривать экспоненциальную сеть, когда параметр входящего потока заявок зависит от времени, а параметры обслуживания заявок в СМО сети зависят от числа заявок в этих СМО. Это означает, что на интервале времени  $[t, t + \Delta t]$  в сеть поступает заявка с вероятностью  $\lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$ ; если в момент времени  $t$  на обслуживании в  $i$ -й СМО находится  $k_i(t)$  заявок, то на интервале  $[t, t + \Delta t]$  обслуживание заявки закончится с вероятностью  $\mu_i(k_i(t))\Delta t + o(\Delta t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Пусть  $v_i(k, t)$  – полный ожидаемый доход, который получает система  $S_i$  за время  $t$ , если в начальный момент времени сеть находится в состоянии  $k$ , предположим, что эта функция дифференцируема по  $t$ . Нас будут интересовать методы нахождения функций  $v_i(k, t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , в различных ситуациях. В последней части сообщения проведем асимптотический анализ поведения ожидаемых доходов в замкнутой сети с доходами при большом числе заявок и параметрах, зависящих от времени.

**1. Случай, когда доходы от переходов между состояниями сети являются детерминированными функциями, зависящими от состояний сети и времени.** Рассмотрим вначале случай, когда СМО сети являются однолинейными. Обозначим через  $r_i(k)$  – доход системы  $S_i$  в единицу времени, когда сеть находится в состоянии  $k$ ;  $r_{0i}(k + I_i, t)$  – доход системы  $S_i$ , когда сеть совершает переход из состояния  $(k, t)$  в состояние  $(k + I_i, t + \Delta t)$  за время  $\Delta t$ , где  $I_i$  –  $n$ -вектор, состоящий из нулей, за исключением компоненты с номером  $i$ , которая равна 1;  $-R_{i0}(k - I_i, t)$  – доход этой системы, если сеть совершает переход из состояния  $(k, t)$  в состояние  $(k - I_i, t + \Delta t)$ ;  $r_{ij}(k + I_i - I_j, t)$  – доход системы  $S_i$  (расход или убыток системы  $S_j$ ), когда сеть изменяет свое состояние из  $(k, t)$  на  $(k + I_i - I_j, t + \Delta t)$  за время  $\Delta t$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ . Обозначим через  $p_{ij}$  вероятность перехода заявок после обслуживания из системы  $S_i$  в систему  $S_j$ ,  $i, j = \overline{0, n}$ , считая  $S_0$  внешней СМО рассматриваемой сети.

Пусть сеть находится в состоянии  $(k, t)$ . В течение интервала времени  $\Delta t$  она может остаться в этом состоянии или перейти, например, в состояния  $(k - I_i, t + \Delta t)$ ,  $(k + I_i, t + \Delta t)$ ,  $(k + I_i - I_j, t + \Delta t)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ . Если сеть остается в состоянии  $(k, t + \Delta t)$ , ожидаемый доход системы  $S_i$  составит  $r_i(k)\Delta t$  плюс ожидаемый доход  $v_i(k, t)$ , который она получит за оставшиеся  $t$  единиц времени. Вероятность такого события равна  $1 - \left( \lambda(t) + \sum_{j=1}^n \mu_j(k_j(t))u(k_j(t)) \right) \Delta t + o(\Delta t)$ , где  $u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$  – функция Хэвисайда. Если же сеть перейдет в состояние  $(k + I_i, t + \Delta t)$  с вероятностью  $\lambda(t)p_{0i}\Delta t + o(\Delta t)$ , доход системы  $S_i$  составит  $[r_{0i}(k + I_i, t) + v_i(k + I_i, t)]$ , а если в состоянии  $(k - I_i, t + \Delta t)$  с вероятностью  $\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{i0}\Delta t + o(\Delta t)$ , то доход этой системы составит  $-R_{i0}(k - I_i, t) + v_i(k - I_i, t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Аналогично, если сеть переходит из состояния  $(k, t)$  в состояние  $(k + I_i - I_j, t + \Delta t)$  с вероятностью  $\mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji}\Delta t + o(\Delta t)$ , она приносит системе  $S_i$  доход в размере  $r_{ij}(k + I_i - I_j, t)$  плюс ожидаемый доход за оставшееся время, если бы начальным состоянием сети было состояние  $(k + I_i - I_j)$ . Аналогично можно рассмотреть и другие возможные переходы из состояния  $(k, t)$  в состояния  $(k - I_j, t + \Delta t)$ ,  $(k + I_j, t + \Delta t)$ ,  $(k - I_i + I_j, t + \Delta t)$ ,  $(k + I_c - I_s, t + \Delta t)$ ,  $j, c, s \neq i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Поэтому, используя формулу полной вероятности для условного математического ожидания, для ожидаемого дохода системы  $S_i$  получаем следующее утверждение.

**Т е о р е м а 1.** Ожидаемый доход  $v_i(k, t)$  системы  $S_i$  удовлетворяет системе разностно-дифференциальных уравнений (РДУ):

$$\begin{aligned}
\frac{dv_i(k, t)}{dt} = & - \left[ \lambda(t) + \sum_{j=1}^n \mu_j(k_j(t)) \right] v_i(k, t) + \\
& \sum_{j=1}^n \left[ \lambda(t) p_{0j} v_i(k + I_j, t) + \mu_j(k_j(t)) u(k_j(t)) p_{j0} v_i(k - I_j, t) \right] + \\
& \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[ \mu_j(k_j(t)) u(k_j(t)) p_{ji} v_i(k + I_i - I_j, t) + \mu_i(k_i(t)) u(k_i(t)) p_{ij} v_i(k - I_i + I_j, t) \right] + \\
& \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[ \mu_j(k_j(t)) u(k_j(t)) p_{ji} r_{ij}(k + I_i - I_j, t) - \mu_i(k_i(t)) u(k_i(t)) p_{ij} r_{ji}(k - I_i + I_j, t) \right] + \\
& \sum_{\substack{c, s=1 \\ c, s \neq i}}^n \mu_s(k_s(t)) u(k_s(t)) p_{sc} v_i(k + I_c - I_s, t) + \lambda(t) p_{0i} r_{0i}(k + I_i, t) - \\
& \mu_i(k_i(t)) u(k_i(t)) p_{i0} R_{i0}(k - I_i, t) + r_i(k).
\end{aligned} \tag{2}$$

**З а м е ч а н и е.** Систему уравнений (2) можно получить, если доходы от переходов между состояниями сети имеют вид  $r_{0i}(k + I_i, t + \Delta t)$ ,  $R_{i0}(k - I_i, t + \Delta t)$ ,  $r_{ij}(k + I_i - I_j, t + \Delta t)$ , т. е. ещё зависят и от  $\Delta t$ , и эти функции являются дифференцируемыми по времени  $t$ . Это можно проверить, разложив данные функции в ряд Тейлора в окрестности точки  $t$  и проведя доказательство аналогичным образом.

Число уравнений в системе уравнений (2) равно числу состояний сети, т. е. равно бесконечности для открытых сетей. Если интенсивности  $\lambda(t) = \lambda$ ,  $\mu_i(k_i(t)) = \mu_i(k_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , не зависят от времени, то в [2] для решения системы РДУ типа (2) предложена методика, основанная на применении многомерных  $z$ -преобразований. Введя в рассмотрение многомерные  $z$ -преобразования для ожидаемых доходов систем сети  $\varphi_i(z, t) = \sum_{k_j=0, j=1, n}^{\infty} v_i(k, t) \prod_{l=1}^n z_l^{k_l}$ ,  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ ,  $|z| < 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,

для них получены соотношения, на основе которых предложен алгоритм нахождения ожидаемых доходов. Для замкнутой сети система уравнений (2) может быть сведена к системе конечно-го числа линейных неоднородных ОДУ с постоянными коэффициентами, которую в матричной форме можно записать в виде

$$\frac{dW_i(t)}{dt} = Q_i(t) + A_i W_i(t), \tag{3}$$

где  $W_i^T(t) = (v_i(1, t), v_i(2, t), \dots, v_i(L, t))$  – искомый вектор доходов системы  $S_i$ ;  $L$  – число состояний сети. Решение системы (3) можно найти, используя прямой метод (с помощью матричной экспоненты) или метод преобразований Лапласа [3; 4].

**2. Случай, когда доходы от переходов между состояниями сети являются случайными величинами.** Отметим, что НМ-сети можно использовать не только для прогнозирования ожидаемых доходов ЛТС, но и для проектирования площадей складских помещений, нахождения количества бригад транспортно-складских рабочих, занимающихся погрузкой и разгрузкой грузов. Приведём следующий пример. Пусть в состав ЛТС входят  $n$  складов  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , между которыми осуществляется перевозка грузов. Для погрузки и разгрузки автомобилей на складе  $S_i$  создано  $m_i$  бригад,  $i = \overline{1, n}$ . Для простоты предположим, что одна и та же бригада занимается разгрузкой автомобиля и после этого погрузкой его новой продукцией для дальнейшего транспортирования, чтобы простой автомобиля был минимальным. Транспортировка товара от одного склада к другому приносит последнему некоторый случайный доход (увеличивает занятую площадь склада на эту величину), и соответственно, доход первого склада уменьшается на эту СВ, хотя может быть и наоборот, для модели это не играет роли. Рассмотрим динамику изменения доходов системы  $S_i$  сети (занятой площади склада  $S_i$  ЛТС). Обозначим через  $W_i(t)$  доход системы  $S_i$

в момент времени  $t$ , а через  $v_{i0} = W_i(0)$  её доход в начальный момент времени. Тогда её доход в момент времени  $t + \Delta t$  можно представить в виде

$$W_i(t + \Delta t) = W_i(t) + \Delta W_i(t, \Delta t), \quad (4)$$

где  $\Delta W_i(t, \Delta t)$  – изменение дохода СМО  $S_i$  на интервале времени  $[t, t + \Delta t)$ . Для нахождения этой величины выпишем события, которые могут произойти за время  $\Delta t$ , и изменение доходов системы  $S_i$ , связанное с этими событиями.

1. В систему  $S_i$  из внешней среды может поступить заявка (на склад  $S_i$  прибывает автомобиль), которая принесет ей доход (занимаемую площадь)  $r_{0i}$ , где  $r_{0i}$  – случайная величина (СВ) с математическим ожиданием (м. о.)  $M\{r_{0i}\} = a_{0i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

2. Заявка из системы  $S_i$  может уйти во внешнюю среду, при этом её доход уменьшится на величину (занимаемую площадь)  $R_{i0}$ , где  $R_{i0}$  – СВ с м. о.  $M\{R_{i0}\} = b_{i0}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

3. Заявка из системы  $S_j$  может перейти в систему  $S_i$ , при этом доход системы  $S_i$  возрастет на величину (занимаемую площадь)  $r_{ji}$ , а доход  $S_j$  (т. е. занятая площадь склада  $S_j$ ) уменьшится на эту величину, где  $r_{ji}$  – СВ с м. о.  $M\{r_{ji}\} = a_{ji}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $i \neq j$ .

4. Заявка из системы  $S_i$  переходит в систему  $S_j$ , при этом доход  $S_i$  уменьшится на величину (занимаемую площадь)  $R_{ij}$ , а доход  $S_j$  (занятая площадь склада  $S_j$ ) возрастет на эту величину, где  $R_{ij}$  – СВ с м. о.  $M\{R_{ij}\} = b_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $i \neq j$ .

5. На отрезке времени  $[t, t + \Delta t)$  изменения состояния системы  $S_i$  не произойдет (занятая площадь склада  $S_i$  не изменится),  $i = \overline{1, n}$ .

Вероятности этих событий приведены в п. 1. Будем считать, что интервалы времени обслуживания заявки в каждой линии системы  $S_i$  (интервалы «разгрузки–погрузки» одного автомобиля на складе  $S_i$ ) распределены по показательному закону с параметром  $\mu_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Для ожидаемых доходов  $v_i(t) = M\{W_i(t)\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , из (4) получаем следующее соотношение:

$$v_i(t + \Delta t) = v_i(t) + M\{\Delta W_i(t, \Delta t)\} = v_i(t) + [\lambda(t)p_{0i}a_{0i} - \mu_i \left( p_{i0}b_{i0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_{ij}b_{ij} \right) \min(k_i(t), m_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j p_{ji}a_{ji} \min(k_j(t), m_j)] \Delta t + o(\Delta t).$$

Усреднив это выражение по  $k_i(t)$ , перенося  $v_i(t)$  в левую часть и поделив обе части на  $\Delta t$ , при  $\Delta t \rightarrow 0$  получим систему дифференциальных уравнений (ДУ), решения которой имеют вид

$$v_i(t) = v_i(0) + p_{0i}a_{0i} \int_0^t \lambda(s) ds - \mu_i \left( p_{i0}b_{i0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_{ij}b_{ij} \right) \int_0^t M \min(k_i(s), m_i) ds + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j p_{ji}a_{ji} \int_0^t M \min(k_j(s), m_j) ds, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Приближенные выражения для нахождения  $M \min(k_i(s), m_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , приведены в [1]. Приведем здесь два случая, когда соотношение (5) является точным. Пусть  $m_i = 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и однолинейные СМО сети функционируют в условиях высокой нагрузки [1; 5], т. е.  $k_i(t) > 0 \quad \forall t > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , что эквивалентно тому, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} P\{k_i(t) = 0\} = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , или коэффициенты загрузки СМО больше единицы. В этом случае  $M \min(k_i(s), m_i) = 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и

$$v_i(t) = v_i(0) + p_{0i}a_{0i} \int_0^t \lambda(s) ds - \left[ \mu_i p_{i0}b_{i0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\mu_i p_{ij}b_{ij} - \mu_j p_{ji}a_{ji}) \right] t, \quad i = \overline{1, n}.$$

Второй случай, когда число линий обслуживания в каждой СМО больше или равно числу заявок в сети, например, все СМО сети являются бесконечнолинейными,  $m_i = \infty$ ,  $i = \overline{1, n}$ . В данном случае  $M \min(k_i(s), m_i) = Mk_i(s) = N_i(s)$ , где  $N_i(s)$  – среднее число заявок (ожидающих и обслуживающихся) в системе  $S_i$  в момент времени  $s$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и

$$v_i(t) = v_i(0) + p_{0i} a_{0i} \int_0^t \lambda(s) ds - \mu_i \left( p_{i0} b_{i0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_{ij} b_{ij} \right) \int_0^t N_i(s) ds + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j p_{ji} a_{ji} \int_0^t N_j(s) ds, \quad i = \overline{1, n}.$$

Методы нахождения величин  $N_i(s)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , описаны в [1].

**3. Асимптотический анализ ожидаемых доходов в замкнутой НМ-сети, когда число линий обслуживания и вероятности переходов заявок между системами зависят от времени.** В ЛТС на практике общее число транспортных средств, передвигающихся между различными объектами, и количество погрузочно-разгрузочных бригад (рабочих или, например, действующих погрузочно-разгрузочных железнодорожных путей на станциях) зависят от времени. Поэтому актуальной является следующая задача.

Рассмотрим сеть МО, состоящую из  $n+1$  СМО  $S_0, S_1, \dots, S_n$ , общее число однотипных заявок в которой в момент времени  $t$  составляет  $K(t)$ , при этом  $K(t)$  является кусочно-постоянной функцией времени с  $q$  интервалами постоянства:

$$K(t) = \begin{cases} K_1, & t \in [T_0, T_1), \\ K_2, & t \in [T_1, T_2), \\ \dots & \\ K_q, & t \in [T_{q-1}, T], \end{cases}$$

где  $K_l$  – число заявок в сети на  $l$ -м интервале времени  $[T_{l-1}, T_l)$ ,  $l = \overline{1, q}$ . В связи с достаточно высокой стоимостью транспортных средств и относительно долгим периодом их эксплуатации, число таких средств в ЛТС меняется через определенные значительные промежутки времени, т. е. интервалы постоянства достаточно велики (на практике обычно 1–2 года). Под системой  $S_0$  понимается внешняя среда, а под системами  $S_1, S_2, \dots, S_n$  – конкретные СМО сети, в которых производится обслуживание заявок. Пусть  $m_i(t)$  – число линий обслуживания в системе  $S_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , положим,  $m_0(t) = K(t)$  и времена обслуживания заявок каждой из линий распределены по показательному закону с интенсивностью  $\mu_i(t)$ , также зависящей от времени,  $i, j = \overline{0, n}$ . Заявки на обслуживание выбираются в соответствии с дисциплиной FIFO. Заявка, обслуживание которой в системе  $S_i$  закончилось, с вероятностью  $p_{ij}(t)$  переходит в систему  $S_j$ ,  $i, j = \overline{0, n}$ . Матрица вероятностей переходов  $P(t) = \|p_{ij}(t)\|$ ,  $i, j = \overline{0, n}$ , является в каждый момент времени матрицей вероятностей переходов неприводимой марковской цепи,  $0 \leq p_{ij}(t) \leq 1$ ,  $\sum_{j=0}^n p_{ij}(t) = 1$ .

Состояние сети в момент времени  $t$  описывается вектором (1), который образует  $n$ -мерный марковский процесс с непрерывным временем и конечным числом состояний. Очевидно, что число заявок в системе  $S_0$  равно  $k_0(t) = K(t) - \sum_{i=1}^n k_i(t)$ . Основная задача исследования заданной сети состоит в асимптотическом анализе процесса ожидаемых доходов сети при большом числе заявок.

Обозначим через  $V_l(k, t)$  полный ожидаемый доход, который получит сеть за время  $t$  на  $l$ -м интервале времени, если в начальный момент этого интервала она находится в состоянии  $k$ . Очевидно, что  $V_l(k, t) = \sum_{i=0}^n v_{il}(k, t)$ , где  $v_{il}(k, t)$  – ожидаемый доход, который получает система  $S_i$  за время  $t$  на  $l$ -м интервале времени, если в начальный момент интервала сеть находится в состоянии  $k$ . В течение малого промежутка времени  $\Delta t$  сеть может остаться в состоянии  $(k, t + \Delta t)$  либо совершить переход в состояние  $(k + I_i - I_j, t + \Delta t)$ ,  $i, j = \overline{0, n}$ , где  $I_0$  –  $n$ -вектор, состоящий из нулей.

**Т е о р е м а 2.** Плотность распределения дохода на  $l$ -м промежутке времени  $p_{vl}(x_l, t)$  с точностью до членов порядка малости  $O(\varepsilon_l^2)$ ,  $\varepsilon_l = \frac{1}{K_l}$ , аппроксимируется плотностью вероятностей, определяемой уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial p_{vl}(x_l, t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^n A_{il}(x_l, t) \frac{\partial p_{vl}(x_l, t)}{\partial x_{il}} + \frac{\varepsilon_l}{2} \sum_{i,j=1}^n B_{ijl}(x_l, t) \frac{\partial^2 p_{vl}(x_l, t)}{\partial x_{il} \partial x_{jl}} + K_l \sum_{i,j=0}^n \mu_j(t) p_{ji}(t) \min(x_{jl}, l_{jl}(t)) r_{jil}(t) + r_l(t), \quad (6)$$

в точках существования производных, где

$$A_{il}(x_l, t) = \sum_{j=1}^n \mu_j(t) p_{ji}^*(t) \min(x_{jl}, l_{jl}(t)) + \mu_0(t) p_{0i}(t) \left( 1 - \sum_{j=1}^n x_{jl} \right), \quad (7)$$

$p_{ji}^*(t) = \begin{cases} p_{ji}(t) - 1, & j = i, \\ p_{ji}(t), & j \neq i, \end{cases}$   $q_{ji}^*(t) = \begin{cases} 1 + p_{ji}(t), & j = i, \\ p_{ji}(t), & j \neq i, \end{cases}$   $l_{jl}(t) = \frac{m_j(t)}{K_l}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $B_{ijl}(x_l, t)$  – кусочно-линейная функция относительно  $x_l$ ,

$$B_{iil}(x_l, t) = \sum_{j=0}^n \mu_j(t) q_{ji}^*(t) \min(x_{jl}, l_{jl}(t)), \quad B_{ijl}(x_l, t) = -\mu_j(t) p_{ij}(t) \min(x_{il}, l_{il}(t)), \quad l = \overline{1, q}. \quad (8)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Будем считать, что если на интервале времени  $[t, t + \Delta t]$  сеть совершает переход из состояния  $(k, t)$  в состояние  $(k + I_i - I_j, t + \Delta t)$  с вероятностью  $\mu_j(t) p_{ji}(t) \min(k_j(t), m_j(t)) \Delta t + o(\Delta t)$ , то её доход в момент времени  $t + \Delta t$  составит  $R_{jil}(t)$  плюс ожидаемый доход  $V_l(k + I_i - I_j, t)$ , который она получает за оставшееся время  $t$ , если бы начальным было состояние  $(k + I_i - I_j)$ . Кроме того, будем считать, что сеть получает доход в размере  $R(t)$  за единицу времени в течение пребывания её в состоянии  $(k, t)$ . Сеть остаётся в состоянии  $(k, t)$  в течение малого промежутка времени  $\Delta t$  с вероятностью  $1 - \sum_{i=0}^n \mu_i(t) \min(k_i(t), m_i(t)) \Delta t + o(\Delta t)$ , при этом её доход составит  $R(t) \Delta t + V_l(k, t)$ .

Тогда полный ожидаемый доход  $V_l(k, t + \Delta t)$  в момент времени  $t + \Delta t$  удовлетворяет следующей системе разностных уравнений:

$$V_l(k, t + \Delta t) = \left\{ 1 - \sum_{i=0}^n \mu_i(t) \min(k_i(t), m_i(t)) \Delta t \right\} (R(t) \Delta t + V_l(k, t)) + \sum_{i,j=0}^n \mu_j(t) p_{ji}(t) \min(k_j(t), m_j(t)) \Delta t (R_{jil}(t) + V_l(k + I_i - I_j, t)) + o(\Delta t),$$

которая может быть сведена к системе РДУ:

$$\frac{dV_l(k, t)}{dt} = \sum_{i,j=0}^n \mu_j(t) p_{ji}(t) \min(k_j(t), m_j(t)) (V_l(k + I_i - I_j, t) - V_l(k, t)) + \sum_{i,j=0}^n \mu_j(t) p_{ji}(t) \min(k_j(t), m_j(t)) R_{jil}(t) + R(t). \quad (9)$$

Далее рассмотрим случай большого числа заявок в сети; положим, что  $K_l$  достаточно велико,  $1 \ll K_l < N$ . Будем использовать технику, предложенную в [6], при нахождении плотности распределения вероятностей состояний замкнутой сети МО. Перейдем к вектору относительных переменных

$$\xi_l(t) = (\xi_l, t) = \left( \frac{k_1(t)}{K_l}, \frac{k_2(t)}{K_l}, \dots, \frac{k_n(t)}{K_l} \right) = (\xi_{1l}(t), \xi_{2l}(t), \dots, \xi_{nl}(t)).$$

Возможные значения вектора  $\xi_l(t)$  принадлежат ограниченному замкнутому множеству  $G_l = \left\{ x_l = (x_{1l}, x_{2l}, \dots, x_{nl}) : x_{il} \geq 0, \sum_{i=1}^n x_{il} \leq 1 \right\}$ , в котором они располагаются в узлах  $n$ -мерной решетки на расстоянии  $\varepsilon_l = \frac{1}{K_l}$  друг от друга. При увеличении значений  $K_l$  число узлов решетки возрастает и можно считать, что вектор  $\xi_l(t)$  имеет непрерывное распределение в области  $G_l$ . При этих предположениях можем считать, что полный ожидаемый доход сети непрерывно изменяется в зависимости от начального состояния  $(x_l, t)$ . Поэтому можем ввести в рассмотрение функцию плотности распределения (концентрации) ожидаемого дохода  $p_{vl}(x_l, t)$  в области  $G_l$  [1]. Она определяется как следующий предел:

$$p_{vl}(x_l, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(x_{1l} \leq \xi_{1l}(t) \leq x_{1l} + \varepsilon_l, \dots, x_{nl} \leq \xi_{nl}(t) \leq x_{nl} + \varepsilon_l)}{\varepsilon_l^n}. \quad (10)$$

Очевидно, что плотность распределения дохода  $p_{vl}(x_l, t)$ , по аналогии с плотностью распределения вероятности, будет обладать следующими свойствами:

- 1)  $\iint_{G_l} \dots \int p_{vl}(x_l, t) dx_l = V_{\text{sum } l}$ , где  $V_{\text{sum } l}$  – суммарный доход в области  $G_l$ ;
- 2) доход сети при условии изменения вектора состояния сети по области  $D_l$  равен

$$V(\xi_l \in D_l, t) = \iint_{D_l} \dots \int p_{vl}(x_l, t) dx_l.$$

В качестве начального условия для уравнения (6) можно взять  $p_{vl}(x_l, t_0) = p_{v0l}(x_l)$ , где  $p_{v0l}(x_l)$  – некоторая известная плотность распределения.

Из (10) следует, что для  $V_l(k, t)$  справедлива следующая аппроксимация при  $K_l \rightarrow \infty$ :

$$V_l(k, t) = V_l(x_l K_l, t) = \varepsilon_l^n p_{vl}(x_l, t) \text{ или } p_{vl}(x_l, t) = K_l^n V_l(x_l K_l, t). \quad (11)$$

Тогда  $\frac{\partial V_l(k, t)}{\partial t} = \frac{\partial V_l(x_l K_l, t)}{\partial t} = \varepsilon_l^n \frac{\partial p_{vl}(x_l, t)}{\partial t}$ . Кроме того, при  $K_l \rightarrow \infty$  доходы  $R_{ji}(t)$  и  $R(t)$  удовлетворяют следующим асимптотическим равенствам:

$$K_l^n R_{ji}(t) = r_{jil}(t), \quad K_l^n R(t) = r_l(t). \quad (12)$$

Уравнение для плотности распределения дохода с учетом (9)–(11) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_l^n \frac{\partial p_{vl}(x_l, t)}{\partial t} &= \varepsilon_l^{n-1} \sum_{i,j=0}^n \mu_j(t) p_{ji}(t) \min(x_{jl}, l_{jl}(t)) (p_{vl}(x_l + e_{il} - e_{jl}, t) - p_{vl}(x_l, t)) + \\ &\quad \varepsilon_l^{n-1} \sum_{i,j=0}^n \mu_j(t) p_{ji}(t) \min(x_{jl}, l_{jl}(t)) r_{jil}(t) + r_l(t) \end{aligned}$$

или с учетом (12)

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{vl}(x_l, t)}{\partial t} &= K_l \sum_{i,j=0}^n \mu_j(t) p_{ji}(t) \min(x_{jl}, l_{jl}(t)) (p_{vl}(x_l + e_{il} - e_{jl}, t) - p_{vl}(x_l, t)) + \\ &\quad K_l \sum_{i,j=0}^n \mu_j(t) p_{ji}(t) \min(x_{jl}, l_{jl}(t)) r_{jil}(t) + r_l(t), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $l_{jl} = \frac{m_j(t)}{K_l}$ ,  $e_{jl} = \varepsilon_l l_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ . По условию теоремы, мы можем разложить функцию  $p_{vl}(x_l + e_{il} - e_{jl}, t)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(x_l, t)$ , используя члены до второго порядка включительно:

$$p_{vl}(x_l + e_{il} - e_{jl}, t) = p_{vl}(x_l, t) + \varepsilon_l \left( \frac{\partial p_{vl}(x_l, t)}{\partial x_{il}} - \frac{\partial p_{vl}(x_l, t)}{\partial x_{jl}} \right) + \varepsilon_l^2 \left( \frac{\partial^2 p_{vl}(x_l, t)}{\partial x_{il}^2} - 2 \frac{\partial^2 p_{vl}(x_l, t)}{\partial x_{il} \partial x_{jl}} + \frac{\partial^2 p_{vl}(x_l, t)}{\partial x_{jl}^2} \right) + o(\varepsilon_l^2), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Поэтому уравнение (13) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{vl}(x_l, t)}{\partial t} &= \sum_{i,j=0}^n \mu_j(t) p_{ji}(t) \min(x_{jl}, l_{jl}(t)) \left[ \left( \frac{\partial p_{vl}(x_l, t)}{\partial x_{il}} - \frac{\partial p_{vl}(x_l, t)}{\partial x_{jl}} \right) + \varepsilon_l^2 \left( \frac{\partial^2 p_{vl}(x_l, t)}{\partial x_{il}^2} - 2 \frac{\partial^2 p_{vl}(x_l, t)}{\partial x_{il} \partial x_{jl}} + \frac{\partial^2 p_{vl}(x_l, t)}{\partial x_{jl}^2} \right) \right] + \\ &K_l \sum_{i,j=0}^n \mu_j(t) p_{ji}(t) \min(x_{jl}, l_{jl}(t)) r_{jil}(t) + r_l(t). \end{aligned}$$

Последнее уравнение с точностью до членов порядка  $O(\varepsilon_l^2)$  можем записать в более компактном виде (6), используя обозначения (7), (8). Теорема доказана.

Опишем теперь как можно найти выражение для общего ожидаемого дохода сети. Учитывая (8), выражение  $\frac{\varepsilon_l}{2} \sum_{i,j=1}^n B_{ijl}(x_l, t) \frac{\partial^2 p_{vl}(x_l, t)}{\partial x_{il} \partial x_{jl}}$  можно отнести к  $O(\varepsilon_l^2)$ . Поэтому будем рассматривать следующее уравнение:

$$\frac{\partial p_{vl}(x_l, t)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n A_{il}(x_l, t) \frac{\partial p_{vl}(x_l, t)}{\partial x_{il}} + K_l \sum_{i,j=0}^n \mu_j(t) p_{ji}(t) \min(x_{jl}, l_{jl}(t)) r_{jil}(t) + r_l(t).$$

Проинтегрировав обе части этого уравнения по  $x_l = (x_{1l}, x_{2l}, \dots, x_{nl})$  в области  $G_l$  и разделив обе части уравнения на объем области  $G_l$ , равный  $m(G_l)$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{m(G_l)} \iint_{G_l} \dots \int \frac{\partial p_{vl}(x_l, t)}{\partial t} dx_l &= - \frac{1}{m(G_l)} \sum_{i=1}^n \iint_{G_l} \dots \int A_{il}(x_l, t) \frac{\partial p_{vl}(x_l, t)}{\partial x_{il}} dx_l + \\ &\frac{K_l}{m(G_l)} \sum_{i,j=0}^n \mu_j(t) p_{ji}(t) \iint_{G_l} \dots \int \min(x_{jl}, l_{jl}(t)) dx_l r_{jil}(t) + \\ &\frac{K_l}{m(G_l)} \sum_{i=0}^n \mu_0(t) p_{0i}(t) r_{0il}(t) \iint_{G_l} \dots \int \left( 1 - \sum_{j=1}^n x_{jl} \right) dx_l + \frac{r_l(t)}{m(G_l)} \iint_{G_l} \dots \int dx_l. \end{aligned} \quad (14)$$

Будем предполагать, что в замкнутой области  $G_l$  функция  $p_{vl}(x_l, t)$  и ее частная производная  $\frac{\partial p_{vl}(x_l, t)}{\partial t}$  являются непрерывными. Тогда в левой части последнего равенства допустима перемена порядка интегрирования и дифференцирования [7] и

$$\frac{1}{m(G_l)} \iint_{G_l} \dots \int \frac{\partial p_{vl}(x_l, t)}{\partial t} dx_l = \frac{1}{m(G_l)} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{G_l} \dots \int p_{vl}(x_l, t) dx_l = \frac{d}{dt} \overline{v_{G_l}}(t),$$

где  $\overline{v_{G_l}}(t)$  – среднее по  $x_l$  значение дохода при условии изменения начального состояния  $x_l$  в области  $G_l$ .

Рассмотрим интегралы в правой части (14). Используем интегрирование по частям, а также предположим, что выполняются граничные условия [8]:  $A_{il}(x_l, t) p_{vl}(x_l, t) \Big|_{x_l \in \Gamma(G_l)} = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , где  $\Gamma(G_l)$  – граница области  $G_l$ , т. е.  $A_{nl}(x_l, t) p_{vl}(x_l, t) \Big|_{x_{nl}=0}^{x_{nl}=1-x_{1l}-x_{2l}-\dots-x_{n-1,l}} = 0$ ,  $A_{n-1,l}(x_l, t) p_{vl}(x_l, t) \Big|_{x_{n-1,l}=0}^{x_{n-1,l}=1-x_{1l}-x_{2l}-\dots-x_{n-2,l}-x_{nl}} = 0, \dots, A_{1l}(x_l, t) p_{vl}(x_l, t) \Big|_{x_{1l}=0}^{x_{1l}=1-x_{2l}-x_{3l}-\dots-x_{nl}} = 0, \dots$ , ко-



торые означают, что не допускается поток дохода через границу области  $G_l$  или что в граничных точках области  $G_l$  поставлены отражающие экраны. Тогда, учитывая, что  $\frac{\partial A_{il}(x_l, t)}{\partial x_{il}}$  не зависят от  $x_{jl}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , получаем

$$\frac{1}{m(G_l)} \iint_{G_l} \dots \int A_{il}(x_l, t) \frac{\partial p_{vl}(x_l, t)}{\partial x_{il}} dx_l = - \frac{\partial A_{il}(x_l, t)}{\partial x_{il}} \overline{v_{G_l}}(t), \quad i = \overline{1, n},$$

т. е. приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{v_{G_l}}(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_{il}(x_l, t)}{\partial x_{il}} \overline{v_{G_l}}(t) + \frac{K_l}{m(G_l)} \sum_{i,j=0}^n \mu_j(t) p_{ji}(t) r_{jl}(t) \iint_{G_l} \dots \int \min(x_{jl}, l_{jl}(t)) dx_l + \\ &\frac{K_l}{m(G_l)} \sum_{i=0}^n \mu_0(t) p_{0i}(t) r_{0il}(t) \iint_{G_l} \dots \int \left( 1 - \sum_{j=1}^n x_{jl} \right) dx_l + \frac{r_l}{m(G_l)} \iint_{G_l} \dots \int dx_l, \quad l = \overline{1, q}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (7) видим, что коэффициенты  $A_{il}(x_l, t)$  представляют собой кусочно-линейные по  $x_{jl}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , функции, т. е. (15) – это ДУ с кусочно-постоянной правой частью. Обозначим множество индексов компонент вектора  $x_l = (x_{1l}, x_{2l}, \dots, x_{nl})$  через  $\Omega_l = \{1, 2, \dots, n\}$ . Разобьем  $\Omega_l$  на два непересекающихся множества  $\Omega_{0l}(\tau)$ ,  $\Omega_{1l}(\tau)$  такие, что  $\Omega_{0l}(\tau) = \{j : l_{jl}(t) < x_{jl} \leq 1\}$ ,  $\Omega_{1l}(\tau) = \{j : 0 \leq x_{jl} \leq l_{jl}(t)\}$ ,  $\tau$  – номер разбиения. При фиксированном  $t$  число разбиений такого типа равно  $2^n$ ,  $\tau = \overline{1, 2^n}$ . Каждое разбиение будет задавать в множестве  $G_l$  непересекающиеся области  $G_{l\tau}$  такие, что  $G_{l\tau} = \{x_l(t) : l_{jl}(t) < x_{jl} \leq 1, j \in \Omega_{0l}(\tau); 0 \leq x_{jl} \leq l_{jl}(t), j \in \Omega_{1l}(\tau); \sum_{i=1}^n x_{il} \leq 1\}$ ,  $\tau = \overline{1, 2^n}$ ,  $\bigcup_{\tau=1}^{2^n} G_{l\tau} = G_l$ . Теперь в каждой из области разбиения фазового пространства можем записать явный вид (15) и при определенных начальных условиях найти средний ожидаемый доход для каждой из областей  $G_{l\tau}$ .

**Пример.** Транспортное предприятие (ТП, система  $S_3$ ), в распоряжении которого имеется большое число автомобилей (заявок), посылает их для выполнения ряда определенных перевозок между различными городами (внешняя среда, система  $S_0$ ). После этого они возвращаются на базу ТП, предварительно пройдя в двух пунктах (системы  $S_1$  и  $S_2$ ) технический осмотр, который может включать и ремонт автомобилей. Количество функционирующих линий обслуживания в пунктах  $S_1$  и  $S_2$  в момент времени  $t$  равно соответственно  $m_1(t)$  и  $m_2(t)$ . В системе  $S_3$  осуществляется загрузка автомобилей перед выходом в рейс, которой занимаются  $m_3(t)$  бригад погрузки (линий обслуживания).

Аналогичная ситуация может возникнуть, когда автомобили возвращаются из  $S_0$  и разгружаются на двух складах ТП (системы  $S_1$  и  $S_2$ ); в этом случае  $m_1(t)$  и  $m_2(t)$  – количество бригад разгрузки соответственно на складе  $S_1$  и  $S_2$ .

В данном случае матрица  $P(t)$  имеет вид

$$P(t) = \|p_{ij}(t)\|_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & p_{01}(t) & p_{02}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_{01}(t) + p_{02}(t) = 1, \quad \forall t \in [0, T].$$

Пусть изменение параметров сети носит сезонный характер, например, они могут принимать одни значения в осенне-зимний период и другие – в весенне-летний. Положим, что  $q = 2$ ,  $T_1 = \frac{T}{2}$ ,

$$\mu_j(t) = \begin{cases} \mu_j^{(1)}, & t \in \left[0, \frac{T}{2}\right], \\ \mu_j^{(2)}, & t \in \left[\frac{T}{2}, T\right], \end{cases} \quad j = \overline{0, 3}, \quad m_j(t) = \begin{cases} m_j^{(1)}, & t \in \left[0, \frac{T}{2}\right], \\ m_j^{(2)}, & t \in \left[\frac{T}{2}, T\right], \end{cases} \quad j = \overline{1, 3},$$

$$p_{0i}(t) = \begin{cases} p_{0i}^{(1)}, & t \in \left[0, \frac{T}{2}\right), \\ p_{0i}^{(2)}, & t \in \left[\frac{T}{2}, T\right], \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Пусть также доходы от переходов между состояниями сети являются кусочно-постоянными функциями с двумя интервалами постоянства:  $r_{ji1}(t) = r_{ji}^{(1)}$ ,  $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right)$ ,  $r_{ji2}(t) = r_{ji}^{(2)}$ ,  $t \in \left[\frac{T}{2}, T\right]$ ,  $i, j = \overline{0, 3}$ ,  $r_1(t) = r^{(1)}$ ,  $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right)$ ,  $r_2(t) = r^{(2)}$ ,  $t \in \left[\frac{T}{2}, T\right]$ .

Найдем ожидаемый доход сети  $\overline{v}_1(t)$ , например, на интервале  $\left[0, \frac{T}{2}\right)$ . Решение уравнения (15) на этом интервале времени имеет вид

$$\overline{v}_1(t) = \left(v_0^{(1)} + \frac{r_1}{\mu_0^{(1)}}\right) e^{\mu_0^{(1)}t} - \frac{r_1}{\mu_0^{(1)}}, \quad t \in \left[0, \frac{T}{2}\right),$$

где  $\overline{v}_1(0) = v_0^{(1)}$ ,

$$r_1 = \frac{1}{m_1(G_{11})} \left[ \mu_1^{(1)} m_1^{(1)} r_{13}^{(1)} + \mu_2^{(1)} m_2^{(1)} r_{23}^{(1)} + \mu_3^{(1)} m_3^{(1)} r_{30}^{(1)} + \frac{K_1 \mu_0^{(1)}}{24} \left( p_{01}^{(1)} r_{01}^{(1)} + p_{02}^{(1)} r_{02}^{(1)} \right) \times \right. \\ \left. (1 - l_{11} - l_{21})^2 ((1 - l_{11} - l_{21})^2 - 4(1 - l_{11} - l_{21})l_{31} + 6l_{31}^2) + r^{(1)} \right], \\ m_1(G_{11}) = \frac{1}{6} (1 - l_{11} - l_{21})^2 (1 - l_{11} - l_{21} - 3l_{31}), \quad l_{i1} = \frac{m_i^{(1)}}{K_1}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

### Список использованной литературы

1. Маталыцкий, М. А. Математический анализ НМ-сетей и их применение в транспортной логистике / М. А. Маталыцкий, О. М. Китурко. – Гродно: ГрГУ, 2015.
2. Matalytski, M. A. Application of a z-transforms method for investigation of Markov G-networks / M. A. Matalytski, V. V. Naumenko // J. of Applied Mathematics and Computational Mechanics. – 2014. – Vol. 13, N 1. – P. 61–73.
3. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Физматлит, 2004.
4. Маталыцкий, М. А. Марковские сети массового обслуживания произвольной топологии с доходами / М. А. Маталыцкий, Е. В. Колузаева // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 4. – С. 10–17.
5. Вишневецкий, В. М. Теоретические основы проектирования систем / В. М. Вишневецкий. – М.: Техносфера, 2003.
6. Медведев, Г. А. Об оптимизации замкнутой системы массового обслуживания / Г. А. Медведев // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1975. – № 6. – С. 65–73.
7. Кудрявцев, Л. Д. Математический анализ / Л. Д. Кудрявцев. – М.: Высш. шк., 1993. – Т. 2.
8. Гардинер, К. В. Стохастические методы в естественных науках / К. В. Гардинер. – М.: Мир, 1986.

Поступило в редакцию 27.01.2016

УДК 510.5

В. Г. НАЙДЕНКО

РЕКУРСИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КЛАССА СЛОЖНОСТИ  $NP \cap coNP$ *(Представлено академиком И. В. Гайшуном)**Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
vladimir.naidenko@gmail.com*

Впервые получена рекурсивная представимость одного из базовых классов сложности  $NP \cap coNP$  с использованием полиномиальных недетерминированных машин Тьюринга.

*Ключевые слова:* вычислительная сложность, рекурсивная представимость.

V. G. NAIDENKO

RECURSIVE PRESENTATION OF THE COMPLEXITY CLASS  $NP \cap coNP$ *Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
vladimir.naidenko@gmail.com*

Using nondeterministic polynomial time Turing machines, a recursive presentation of the complexity class  $NP \cap coNP$  has been constructed for the first time.

*Keywords:* computational complexity, recursive presentation.

Класс сложности  $NP \cap coNP$  занимает важное положение в теории вычислительной сложности и играет исключительную роль в криптографии с открытым ключом [1], поскольку последняя во многом основана на задаче факторизации, лежащей в  $NP \cap coNP$ . По определению, язык находится в  $NP \cap coNP$ , если существуют две недетерминированные полиномиальные машины Тьюринга: одна машина для распознавания языка, а вторая машина для распознавания дополнения этого языка. Такие машины называются комплементарными друг другу. Однако требование комплементарности препятствует эффективной характеристике класса  $NP \cap coNP$ . Так, Wojciech Kowalczyk [2] показал, что представление языков из  $NP \cap coNP$  с помощью пар комплементарных машин весьма затруднительно. А именно, если  $NP \cap coNP$  не содержит полной проблемы, то невозможно рекурсивно перечислить все языки из  $NP \cap coNP$  с помощью пар комплементарных машин. Из этого вытекает следующее утверждение. Какую бы мощную формальную математическую теорию (типа арифметики Пеано, теории множеств Цермело–Френкеля и т. д.) мы не взяли, всегда найдется такая пара  $(T, M)$  полиномиальных недетерминированных машин Тьюринга, что невозможно доказать их комплементарность в рамках этой теории, а следовательно, доказать принадлежность распознаваемого машиной  $T$  языка классу  $NP \cap coNP$ . В связи с этим ведущими специалистами в теории вычислительной сложности предполагалось крайне маловероятным нахождение какого-либо рекурсивного представления класса сложности  $NP \cap coNP$  [3; 4]. Так, Президент Европейской ассоциации по логике и информатике профессор Andrzej Dawar в своей работе [3] предполагал, что классы сложности, определяемые семантическими ограничениями на удостоверяющие машины, такие как, например, классы  $NP \cap coNP$  и  $RP$ , не допускают очевидных рекурсивных представлений: «...complexity classes that are defined by semantic restrictions on the witnessing machines, such as  $NP \cap coNP$  and  $RP$ , do not admit obvious recursive presentations or complete problems and to prove that they do would require fundamental new characterizations of

these classes», «...the natural set of witnesses for  $NP \cap coNP$  is not recursively enumerable». Кроме того, он считал, что нахождение рекурсивного представления для класса  $NP \cap coNP$  требует фундаментально новой характеристики данного класса и явится главным прорывом в теории сложности: «Thus, finding a recursively enumerable set of witnesses would require a fundamentally new characterization of the class and would be a major breakthrough in complexity theory».

Цель исследования – найти рекурсивное представление класса сложности  $NP \cap coNP$ .

Дадим необходимые определения. Пусть  $\Sigma$  – конечный алфавит. Как обычно, через  $\Sigma^*$  обозначим множество всех слов (или конечных цепочек) в алфавите  $\Sigma$ . Языком называется некоторое подмножество множества  $\Sigma^*$ . Через  $|w|$  обозначим длину слова  $w$ . Язык  $L$  распознается машиной Тьюринга  $T$ , если  $T$  допускает слово  $w$  (т. е. если  $T$  останавливается на входе  $w$  в специальном допускающем состоянии) тогда и только тогда, когда  $w$  принадлежит  $L$ . Через  $T(w)$  обозначим предикат, который принимает значение ИСТИНА, если  $T$  допускает слово  $w$ ; в противном случае, значение  $T(w)$  – ЛОЖЬ.

Множество языков  $\{L_i \mid i=1, 2, \dots\}$  называется рекурсивно представимым, если существует рекурсивное перечисление машин Тьюринга  $\{T_i \mid i=1, 2, \dots\}$  такое, что выполняются два условия:

1) Для каждого языка из  $\{L_i \mid i=1, 2, \dots\}$  существует машина Тьюринга из  $\{T_i \mid i=1, 2, \dots\}$ , распознающая этот язык.

2) Для каждой машины Тьюринга из  $\{T_i \mid i=1, 2, \dots\}$  существует распознаваемый ею язык из  $\{L_i \mid i=1, 2, \dots\}$ .

Перейдем к рассмотрению класса сложности  $NP \cap coNP$ . Для каждой пары полиномиальных недетерминированных машин Тьюринга  $(T, M)$  сопоставим следующий язык:

$$L_{T,M} \triangleq \{x \in \Sigma^* \mid T(x) \wedge (\forall y \in \Sigma^*)[|y| > \log_2(\log_2(|x|+1)+1) \vee (T(y) \Leftrightarrow \neg M(y))]\}. \quad (1)$$

Покажем, что язык  $L_{T,M}$  принадлежит классу  $NP$ . Сначала оценим количество времени, достаточное для проверки условия, входящего в определение (1):

$$(\forall y \in \Sigma^*)[|y| > \log_2(\log_2(|x|+1)+1) \vee (T(y) \Leftrightarrow \neg M(y))]. \quad (2)$$

Заметим, нам необходимо проверить соотношение  $T(y) \Leftrightarrow \neg M(y)$  для всех цепочек  $y$  достаточно малой длины, т. е. для  $|y| \leq \log_2(\log_2(|x|+1)+1)$ . Отметим, что проверка отдельного условия  $T(y) \Leftrightarrow \neg M(y)$  занимает экспоненциальное время по длине  $|y|$ . Но поскольку длина  $|y|$  достаточно мала, то общее время проверки условия (2) будет полиномиально по длине входа  $|x|$ . Следовательно, язык  $L_{T,M}$  принадлежит классу  $NP$  и можно представить некоторую полиномиальную недетерминированную машину Тьюринга  $D_{T,M}$  для распознавания языка. Работа машины  $D_{T,M}$  на входной цепочке  $x \in \Sigma^*$  описывается следующим образом.

Для всех цепочек  $y \in \Sigma^*$  таких, что  $|y| \leq \log_2(\log_2(|x|+1)+1)$ , машина  $D_{T,M}$  моделирует работу машин  $T$  и  $M$  на входе  $y$ . Если для некоторой цепочки  $y$  окажется, что либо обе машины  $T$  и  $M$  допускают  $y$ , либо обе отвергают  $y$ , то  $D_{T,M}$  отвергает входную цепочку  $x$  и завершает работу. Иначе, после проверки всех цепочек  $y$ , машина  $D_{T,M}$  начинает работать в точности как машина  $T$  на входе  $x$ .

Справедлива следующая теорема.

**Т е о р е м а.** Пусть  $\{(T_i, M_i) \mid i=1, 2, \dots\}$  – рекурсивное перечисление всех пар полиномиальных недетерминированных машин Тьюринга. Тогда, взяв рекурсивное перечисление  $\{D_{T_i, M_i} \mid i=1, 2, \dots\}$ , получим рекурсивное представление класса сложности  $NP \cap coNP$  с помощью этих полиномиальных недетерминированных машин Тьюринга.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Сначала покажем, что любой язык  $L_{T,M}$  из перечисления  $\{L_{T_i, M_i} \mid i=1, 2, \dots\}$  находится в классе  $NP \cap coNP$ . Заметим, что если соотношение  $T(y) \Leftrightarrow \neg M(y)$  выполняется вообще для всех цепочек  $y$  (независимо от их длин), то язык  $L_{T,M}$  по определению будет принадлежать классу  $NP \cap coNP$  (поскольку в этом случае  $L_{T,M}$  будет распознаваться машиной  $T$ , а его дополнение – машиной  $M$ ). В противном случае, язык  $L_{T,M}$  будет конечным множеством, и следовательно, опять  $L_{T,M} \in NP \cap coNP$ . Таким образом, в любом случае мы доказали принадлежность  $L_{T,M}$  классу  $NP \cap coNP$ .

Осталось показать, что любой язык  $L$  из  $\text{NP} \cap \text{coNP}$  находится в перечислении  $\{L_{T_i, M_i} \mid i=1, 2, \dots\}$ . Поскольку  $L \in \text{NP} \cap \text{coNP}$ , то существуют полиномиальные недетерминированные машины Тьюринга  $T$  и  $M$ , распознающие язык  $L$  и его дополнение  $\Sigma^* \setminus L$  соответственно. Так как  $\{(T_i, M_i) \mid i=1, 2, \dots\}$  – рекурсивное перечисление всевозможных пар полиномиальных недетерминированных машин Тьюринга, то из этого перечисления найдется такая пара  $(T_i, M_i)$ , что  $T_i = T$  и  $M_i = M$ . Поскольку условие  $T_i(y) \Leftrightarrow \neg M_i(y)$  выполняется для всех цепочек  $y \in \Sigma^*$  (независимо от их длин), то условие (2) будет выполняться для всех входных цепочек  $x \in \Sigma^*$ . Поэтому язык  $L_{T_i, M_i}$  распознается не только машиной  $D_{T_i, M_i}$ , но и машиной  $T_i$ . Следовательно,  $L = L_{T_i, M_i}$ , так как  $T_i = T$ . Таким образом,  $L \in \{L_{T_i, M_i} \mid i=1, 2, \dots\}$ .

Итак, мы показали, что  $\{L_{T_i, M_i} \mid i=1, 2, \dots\} = \text{NP} \cap \text{coNP}$ . Следовательно,  $\{D_{T_i, M_i} \mid i=1, 2, \dots\}$  – рекурсивное представление класса сложности  $\text{NP} \cap \text{coNP}$ . Теорема доказана.

Таким образом, впервые получено фундаментально новое описание задач из класса  $\text{NP} \cap \text{coNP}$ . При этом не требуется использование комплементарных пар машин Тьюринга для этой цели. Отметим, что проблема установления комплементарности пары машин Тьюринга алгоритмически неразрешима, что крайне затрудняет (если не делает невозможным) доказательство принадлежности многих задач классу  $\text{NP} \cap \text{coNP}$ . Разработанная нами характеристика задач из класса  $\text{NP} \cap \text{coNP}$  использует без каких-либо ограничений любые пары машин Тьюринга, что дает возможность нахождения множества новых задач в  $\text{NP} \cap \text{coNP}$ . С учетом центральной роли класса  $\text{NP} \cap \text{coNP}$  в криптографии с открытым ключом, новая характеристика имеет не только фундаментальное, но и важное прикладное значение. Кроме того, рекурсивное представление может быть использовано для логической характеристики данного класса сложности [5].

Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция».

### Список использованной литературы

1. Brassard, G. A Note on Cryptography and  $\text{NP} \cap \text{CoNP}$ -P / G. Brassard, S. Fortune, J. Hopcroft // Technical Report TR-338, Department of Computer Science, Cornell University. – Ithaca; N.Y., 1978.
2. Kowalczyk, W. Some Connections between Representability of Complexity Classes and the Power of Formal Systems of Reasoning / W. Kowalczyk // Proceedings of the Mathematical Foundations of Computer Science. – 1984. – P. 364–369.
3. Dawar, A. On Complete Problems, Relativizations and Logics for Complexity Classes / A. Dawar // Lecture Notes in Computer Science. – 2010. – Vol. 6300. – P. 201–207.
4. Papadimitriou, Ch. On the Complexity of the Parity Argument and Other Inefficient Proofs of Existence / Ch. Papadimitriou // J. of Computer and System Sciences. – 1994. – Vol. 48, N 3. – P. 498–532.
5. Naidenko, V. Logics for complexity classes / V. Naidenko // Logic J. of the IGPL. – 2014. – Vol. 22, N 6. – P. 1075–1093.

Поступило в редакцию 15.02.2016

УДК 511.42

А. В. ЛУНЕВИЧ

**РАЗМЕРНОСТЬ ХАУСДОРФА МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ,  
КОМПЛЕКСНЫХ И  $p$ -АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ С ЗАДАННЫМ ПОРЯДКОМ  
ПРИБЛИЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ЧИСЛАМИ**

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
lunevichav@gmail.com

В данной работе найдено значение размерности Хаусдорфа множества точек  $(x, z, \omega)$  из пространства действительных, комплексных и  $p$ -адических чисел, которые с заданным порядком приближаются алгебраическими числами.

Основу доказательства составляет метрическая теорема о точном порядке совместного приближения нуля в этом пространстве и построение регулярной системы из действительных алгебраических чисел, комплексных алгебраических чисел и  $p$ -адических алгебраических чисел из  $\mathbb{Q}_p$ .

*Ключевые слова:* размерность Хаусдорфа, регулярные системы чисел и векторов, совместные приближения.

A. V. LUNEVICH

**HAUSDORFF DIMENSION OF THE SET OF REAL, COMPLEX AND  $p$ -ADIC NUMBERS  
WITH A GIVEN ORDER OF THE ALGEBRAIC NUMBER APPROXIMATION**

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
lunevichav@gmail.com*

In this article we found the value of the Hausdorff dimension of a set of points in the space of real, complex and  $p$ -adic numbers that are approximated with a given order by algebraic numbers.

The proof is based both on the metric theorem on the exact order of a simultaneous approximation of zero in this space and on the construction of a regular system of real algebraic numbers, complex algebraic numbers and  $p$ -adic algebraic numbers of  $\mathbb{Q}_p$ .

*Keywords:* Hausdorff dimension, regular systems of numbers and vectors, simultaneous approximations.

**Введение.** Пусть

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_j \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq j \leq n,$$

полином степени  $n$  и высоты  $H = H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} \{ |a_j| \}$ . Используя принцип ящиков Дирихле, нетрудно доказать, что при  $w < n$  неравенство

$$|P(x)| < H^{-w} \tag{1}$$

имеет бесконечно много решений в полиномах  $P \in \mathbb{Z}[x]$  ( $\deg P \leq n$ ) для всех  $x \in \mathbb{R}$  [1].

Определим  $L_n(w)$  как множество точек  $x \in \mathbb{R}$ , для которых неравенство (1) имеет бесконечно много решений в полиномах  $P \in \mathbb{Z}[x]$ . Равенство  $\dim L_1(w) = \frac{2}{w}$  при  $w > 2$  независимо друг от друга доказали Ярник [2] и Безикович [3]. В 1932 г. К. Малер [4] предположил, что если  $w > n$ , то мера множества  $L_n(w)$  равна 0. Его предположение доказал В. Г. Спринджук [5]. Позже Бейкер и Шмидт [6] получили точное значение размерности Хаусдорфа множества действительных

чисел, приближаемых алгебраическими действительными числами. Затем было доказано [7], что значение размерности Хаусдорфа множества  $L_n(w)$  при  $w > n$  равно  $\frac{n+1}{w+1}$ . Кроме того, было найдено точное значение размерности Хаусдорфа множества точек евклидова пространства, приближаемых точками с рациональными координатами [8], и получена [9] оценка снизу размерности Хаусдорфа в случае приближения нулями невырожденных функций.

Пусть  $\mu_1(B)$  – мера Лебега некоторого измеримого множества  $B \subset \mathbb{R}$ ,  $\mu_2(D)$  – мера Лебега некоторого измеримого множества  $D \subset \mathbb{C}$  и  $\mu_3(E)$  – мера Хаара некоторого измеримого множества  $E \subset \mathbb{Q}_p$ . Определим  $\mu(A) = \mu(B \times D \times E) = \mu_1(B)\mu_2(D)\mu_3(E)$ , где  $A = B \times D \times E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$  – измеримое множество. Пусть  $w = (w_1, w_2, w_3)$  – вектор с действительными координатами, удовлетворяющий условию  $w_i > 0, i = 1, 2, 3$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** Пусть  $L \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$  – измеримое множество и  $F$  – счетное множество ограниченных подмножеств из  $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ . Для любого  $\rho > 0$   $\rho$ -покрытием множества  $F$  будем называть величину

$$V_\rho(F) = \sum_{E \in F} (a(E))^\rho,$$

где  $a(E) = \sup\{|x_1 - x_2|, |z_1 - z_2|, |\omega_1 - \omega_2|_p : x_1, x_2 \in E \cap \mathbb{R}, z_1, z_2 \in E \cap \mathbb{C}; \omega_1, \omega_2 \in E \cap \mathbb{Q}\}$ .

Для любого  $\eta > 0$  определим

$$m_\rho(\eta; L) = \inf_F \left\{ V_\rho(F) : \forall E \in F, a(E) \leq \eta, L \subset \bigcup_{E \in F} E \right\}.$$

Функцию

$$m_\rho(L) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} m_\rho(\eta; L)$$

назовем  $\rho$ -мерой множества  $L$ . Размерностью Хаусдорфа множества  $L$  называется величина

$$\dim L = \inf\{\rho : m_\rho(L) = 0\}.$$

Определим  $\mathcal{L}_{w,n}$  как множество точек параллелепипеда  $T = I \times K \times D$ , где  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $K \subset \mathbb{C}$ ,  $D \subset \mathbb{Q}_p$ , для которых система неравенств

$$|x - \alpha| < H^{-w_1-1}, |z - \beta| < H^{-w_2-1}, |\omega - \gamma|_p < H^{-w_3}$$

имеет бесконечно много решений в полиномах  $P \in \mathbb{Z}[x]$ , где  $\alpha, \beta, \gamma$  – корни полинома  $P$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{Z}$ ,  $\gamma \in \mathbb{Q}_p$  и

$$w_1 + 2w_2 + w_3 > n - 2, w_1, w_2, w_3 > 0.$$

Данная работа посвящена доказательству следующей теоремы.

**Т е о р е м а 1.** При  $n \geq 3$  верно равенство:

$$\dim \mathcal{L}_{w,n} = S_{w,n}. \quad (2)$$

Мы докажем теорему 1 в случае, когда

$$w_1 + 1 > w_2 + 1 > w_3. \quad (3)$$

Для других соотношений  $w_1, w_2, w_3$  доказательство будет аналогичным.

Используя (3), мы можем вычислить  $S_{w,n}$  и найти промежуток, которому он принадлежит:

$$S_{w,n} = \begin{cases} \frac{n+2+3w_1-2w_2-w_3}{w_1+1} \in [3; 4), & 2w_2+w_3 < n-1; \\ \frac{n+2+w_2-w_3}{w_2+1} \in (1; 3), & 2w_2+w_3 \geq n-1, w_3 < n+1; \\ \frac{n+1}{w_3} \in (0; 1], & w_3 \geq n+1. \end{cases}$$

Таким образом  $S_{w,n} \in (0; 4)$ .

Перед тем как перейти к доказательству теоремы, приведем некоторые вспомогательные рассуждения.

**Предварительные сведения.** Пусть  $P \in \mathbb{Z}[x]$  – неприводимый полином над  $\mathbb{Q}$  с высотой  $H = H(P)$  и корнями  $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}, \gamma \in \mathbb{Q}_p$ . Будем считать, что  $P$  – минимальный полином для алгебраических чисел  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Важным элементом доказательства теоремы 1 является построение регулярной системы векторов.

**Определение 2.** Счетное множество  $\Gamma$  точек  $\mathbf{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$  из некоторого параллелепипеда  $V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$  с вектор-функцией  $N(\mathbf{v}, x) = (N_0(\mathbf{v}), N_1(x), N_2(x), N_3(x))$  называется оптимальной регулярной системой, если существуют константы  $c_1 > 0, c_2 > 0$  и достаточно большое число  $M_0 = M_0(V, N(\mathbf{v}, x))$ , для которых при любом  $M > M_0$  можно выбрать точки  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t \in \Gamma$ , с условиями  $N_0(\mathbf{v}_i) \leq M, 1 \leq i \leq t$ , так, что параллелепипеды

$$\Pi(\mathbf{v}_i) = \{(x; z; \omega) : |x - \alpha_i| < N_1(M), |z - \beta_i| < N_2(M), |\omega - \gamma_i|_p < N_3(M)\}, \quad 1 \leq i \leq t,$$

не пересекаются, и

$$\frac{c_1 \mu(V)}{\mu(\Pi(\mathbf{v}_i))} < t < \frac{c_2 \mu(V)}{\mu(\Pi(\mathbf{v}_i))}.$$

Пусть вектор  $u = (u_1; u_2; u_3)$  такой, что  $u_1; u_2; u_3 > 0, u_1 + 2u_2 + u_3 = n - 2$ . В работе [10] было доказано, что для любого натурального числа  $Q$  система векторов  $\mathbf{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$  с функцией  $N(\mathbf{v}, x) = (H(\mathbf{v}), x^{-w_1-1}, x^{-w_2-1}, x^{-w_3})$ , где  $\alpha, \beta, \gamma$  – корни одного минимального многочлена степени  $n$  и высоты  $H(\mathbf{v}) < Q$ , образует регулярную систему. Это означает, что для любого фиксированного параллелепипеда  $T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$  существует не менее  $c_3 Q^{n+1} \mu(T)$  векторов  $\mathbf{v} = (\alpha, \beta, \gamma) \in T$ , таких, что параллелепипеды

$$\Pi(\mathbf{v}) = \{(x; z; \omega) : |x - \alpha| < Q^{-(u_1+1)}, |z - \beta| < Q^{-(u_2+1)}, |\omega - \gamma|_p < Q^{-u_3}\}$$

не пересекаются. Обозначим множество всех таких векторов  $\mathbf{v}$  через  $\Omega = \Omega(Q, n, T, w)$ .

Заметим, что в последние годы регулярные системы строятся на множествах малой меры [11].

Теперь перейдем к доказательству теоремы 1.

**Доказательство теоремы 1.** Докажем сначала, что

$$\dim \mathcal{L}_{w,n} \geq S_{w,n}. \quad (4)$$

Для каждого  $Q$  подберем такое  $k$ , что  $2^{k-1} \leq Q < 2^k$ . Тогда векторы  $\mathbf{v}$  из  $\Omega$  удовлетворяют условиям:

1) существует такое число  $k' = k'(n, T)$ , что для любого  $k \geq k'$  найдется не пустой набор векторов  $A_k(T) = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{t_k}\}$ , с условием  $H(\mathbf{v}_i) < 2^k, i = 1 \dots t_k$ ;

2) параллелепипеды

$$\Pi_k(\mathbf{v}_i, u) = \{(x; z; \omega) : |x - \alpha| < 2^{-(u_1+1)k}, |z - \beta| < 2^{-(u_2+1)k}, |\omega - \gamma|_p < 2^{-u_3k}\}$$

не пересекаются для всех  $\mathbf{v}_i \in A_k(T)$  и  $c_4 2^{(n+1)k} \mu(T) \leq t_k \leq c_5 2^{(n+1)k} \mu(T)$ .

Обозначим через  $G_k(\mathbf{v}, w)$  объединение наибольшего числа кубов со стороной  $2 \cdot 2^{-k(w_1+1)}$ , взятых внутри параллелепипеда  $\Pi_k(\mathbf{v}, w)$  так, что ни один новый куб со стороной  $2 \cdot 2^{-k(w_1+1)}$  не может пересекать сразу два куба из  $G_k(\mathbf{v}, w)$ . Очевидно, что множество  $G_k(\mathbf{v}, w)$  будет содержать не менее  $c_6 2^{k(3w_1-2w_2-w_3+1)}$  кубов. Для каждого вектора  $w$  можно подобрать вектор  $u = u(w)$  так, что  $\Pi_k(\mathbf{v}, w) \subset \Pi_k(\mathbf{v}, u)$ . При этом  $u_1, u_2, u_3$  вычисляются по-разному, в зависимости от соотношений между  $w_1, w_2, w_3$ . Возможны три случая:

1.  $w_2 + 1 < \frac{n+1}{4}$ , тогда  $u_1 \in [w_2; w_1]$  и  $u_i = w_i, i = 2, 3$ ;
2.  $w_2 + 1 > \frac{n+1}{4}, w_3 < \frac{n+1}{4}$ , тогда  $u_1 = u_2 \in [w_3 - 1; w_2]$  и  $u_3 = w_3$ ;
3.  $w_3 > \frac{n+1}{4}$ , тогда  $u_1 = u_2 = u_3 - 1 = \frac{n-3}{4}$ .



Рассмотрим третий случай (для других случаев доказательство будет аналогичным).

Выберем подмножество  $\tilde{A}_k(T) \subset A_k(T)$  так, что ни один параллелепипед  $\Pi_k((x_0; z_0; \omega_0), u)$ ,  $(x_0; z_0; \omega_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$  не может пересекать сразу два параллелепипеда  $\Pi_k(v, u)$  для всех  $v \in \tilde{A}_k(T)$ , и  $|\tilde{A}_k(T)| > c_7 2^{k(n+1)}$ . Существование множества  $\tilde{A}_k(T)$  следует из построения множества  $\Omega$ .

Предположим, что существует такое положительное число  $\delta$ , при котором  $\dim \mathcal{L}_{w,n} < \rho$ , где

$$\rho = \begin{cases} \frac{n+2+3w_1-2w_2-w_3}{w_1+1} - \delta \in (3; 4), & 2w_2+w_3 < n-1; \\ \frac{n+2+w_2-w_3}{w_2+1} - \delta \in (1; 3), & 2w_2+w_3 \geq n-1, w_3 < n+1; \\ \frac{n+1}{w_3} - \delta \in (0; 1), & w_3 \geq n+1. \end{cases}$$

Тогда существует некоторый счетный набор кубов  $F = \{E\} (E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p)$ , которыми можно покрыть все множество  $\mathcal{L}_{w,n}$ , и ряд  $\sum_{E \in F} (a(E))^\rho$  сходится. Без потери общности можно считать, что  $\sum_{E \in F} (a(E))^\rho < 1$ . Далее мы построим последовательности подмножеств  $J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \dots$  и натуральных чисел  $k' < k_0 < k_1 < k_2 < \dots$  по следующим правилам.

1. Пусть  $J_0 = T$ . Множество  $J_j$  ( $j \geq 1$ ) является объединением кубов, принадлежащих  $G_j$ , где  $G_j = \bigcup_{v \in \tilde{A}_{k_j}(J_{j-1})} (G_{k_j}(v, w))$ . Количество кубов в  $J_j$  обозначим  $m_j$ .

2.  $J_j$  не пересекается с  $E \in F$ , если  $a(E) > 2^{-k_j(w_1+1)}$ ,  $j \geq 1$ .

3.  $m_j > c_8 2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3-\delta(w_1+1))}$ ,  $j \geq 1$ .

Из построения следует, что  $J_\infty \subset \mathcal{L}_{w,n}$ ,  $J_\infty \neq \emptyset$ ,  $J_\infty \not\subset F$ , но это противоречит предполагаемому неравенству  $\dim \mathcal{L}_{w,n} < \rho$ . Таким образом, построив вышеописанные последовательности, мы докажем неравенство  $\dim \mathcal{L}_{w,n} < \rho$ , из которого очевидно следует неравенство (4).

Без потери общности можно считать, что  $\mu(T) = 1$  и  $\max_{E \in F} (a(E)) < 2^{-k_0(w_1+1)}$ , константа  $k_0$  будет определена позже. Разобьем  $F$  на подмножества  $F_j^1, F_j^2, F_j^3, j = 1, 2, \dots$ , следующим образом:

$$\begin{aligned} F_j^1 &= \{E \in F : 2^{-k_j(w_1+1)} < a(E) < 2^{-k_j(w_2+1)}\}; \\ F_j^2 &= \{E \in F : 2^{-k_j(w_2+1)} < a(E) < 2^{-k_j w_3}\}; \\ F_j^3 &= \{E \in F : 2^{-k_j w_3} < a(E) < 2^{-k_{j-1}(w_1+1)}\}. \end{aligned}$$

Обозначим через  $H_j$  объединение кубов из  $G_j$ , каждый из которых пересекается хотя бы с одним кубом из  $F_j^1 \cup F_j^2 \cup F_j^3$ . Объединение кубов из  $G_j \setminus H_j$  обозначим как  $J_j$ . Количество кубов в  $H_j$  и  $G_j$  обозначим  $h_j$  и  $g_j$  соответственно. Тогда  $J_j \subset J_{j-1}$ . Очевидно, что любой куб  $E$  из множества  $F_j^1 \cup F_j^2 \cup F_j^3$  не может пересекать сразу два куба из  $J_{j-1}$ . Используя это, мы можем оценить сверху количество кубов в  $H_j$  следующим образом:

$$c_9^{-1} h_j \leq \sum_{E \in F_j^1} (a(E))^3 2^{3k_j(w_1+1)} + \sum_{E \in F_j^2} a(E) 2^{k_j(3w_1-2w_2+1)} + \sum_{E \in F_j^3} (a(E))^4 2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3)}.$$

В зависимости от того, какому промежутку принадлежит  $\rho$ , получим следующие оценки.

Пусть  $\rho \in (0; 1)$   $\left( \rho = \frac{n+1}{w_3} - \delta \right)$ . Тогда, используя неравенство  $\sum_E (a(E))^\rho < 1$ , мы получим:

$$\begin{aligned}
c_9^{-1} h_j \leq & \sum_{E \in F_j^1} \left( (a(E))^p (a(E))^{3-p} 2^{3k_j(w_1+1)} \right) + \sum_{E \in F_j^2} \left( (a(E))^p (a(E))^{1-p} 2^{k_j(w_1+1)} 2^{k_j(2w_1-2w_2)} \right) + \\
& \sum_{E \in F_j^3} \left( (a(E))^p (a(E))^{4-p} 2^{k_j(n+1)} 2^{k_j(3w_1-2w_2-w_3+1)} \right) < \\
(2^{-k_j(w_2+1)})^{3-p} 2^{3k_j(w_1+1)} & + (2^{-k_j w_3})^{1-p} 2^{k_j(w_1+1)} 2^{k_j(2w_1-2w_2)} + (2^{-k_{j-1}(w_1+1)})^{4-p} 2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3)} < \\
2^{k_j \left( 3w_1+3-\frac{(3w_3-n-1)(w_2+1)}{w_3}-\delta(w_2+1) \right)} & + 2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3-\delta w_3)} + \\
2^{-k_{j-1} \left( \frac{(4w_3-n-1)(w_1+1)}{w_3} + \delta(w_1+1) \right)} & 2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3)}.
\end{aligned}$$

Так как  $\delta > 0$ , то при достаточно большом  $k_j$  получаем

$$h_j \leq 2c_9 2^{-k_{j-1} \left( 4(w_1+1) - \frac{(n+1)(w_1+1)}{w_3} + \delta(w_1+1) \right)} 2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3)}.$$

Если  $\rho$  принадлежит интервалам (1; 3) или (3; 4), то, проводя аналогичные вычисления, получаем оценки

$$\begin{aligned}
h_j & \leq 2c_9 2^{-k_{j-1} \left( 4(w_1+1) - \frac{(n+2+w_2-w_3)(w_1+1)}{w_2+1} + \delta(w_1+1) \right)} 2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3)}, \\
h_j & \leq 2c_9 2^{-k_{j-1} (4(w_1+1) - (n+2+3w_1-2w_2-w_3) + \delta(w_1+1))} 2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3)}
\end{aligned}$$

соответственно. Сравнивая эти три оценки, для любого  $\rho$  получаем

$$\begin{aligned}
h_j & \leq 2c_9 2^{-k_{j-1} (4(w_1+1) - (n+2+3w_1-2w_2-w_3) + \delta(w_1+1))} 2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3)} = \\
& 2c_9 2^{-k_{j-1} (w_1+2w_2+w_3-n+2+\delta(w_1+1))} 2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3)}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
g_1 & \geq c_6 c_7 2^{k_1(n+2+3w_1-2w_2-w_3)} \geq \\
4c_9 2^{-k_0(-n+2+w_1+2w_2+w_3+\delta(w_1+1))} 2^{k_1(n+2+3w_1-2w_2-w_3)} & \geq 2h_1
\end{aligned}$$

при достаточно большом  $k_0$ . Предположим, что

$$m_{j-1} > c_8 2^{k_{j-1}(n+2+3w_1-2w_2-w_3-\delta(w_1+1))}$$

для  $j > 1$ , тогда

$$\begin{aligned}
g_j & \geq m_{j-1} c_6 c_7 2^{-4k_{j-1}(w_1+1)} 2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3)} \geq \\
c_6 c_7 c_8 2^{-k_{j-1}(-n+2+w_1+2w_2+w_3+\delta(w_1+1))} 2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3)} & \geq 2h_j
\end{aligned}$$

при  $c_8 = \frac{4c_9}{c_6 c_7}$ , откуда следует, что

$$\begin{aligned}
m_j \geq g_j - h_j & \geq \frac{1}{2} g_j \geq 2c_9 2^{-k_{j-1}(-n+2+w_1+2w_2+w_3+\delta(w_1+1))} 2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3)} > \\
c_8 2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3-\delta(w_1+1))}. &
\end{aligned}$$

Полученное неравенство

$$m_j > c_8 2^{k_j(n+2+3w_1-2w_2-w_3-\delta(w_1+1))}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

завершает построение последовательностей  $J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \dots$  и  $k' < k_0 < k_1 < k_2 < \dots$ . Таким образом, мы доказали неравенство (4).

Противоположное неравенство

$$\dim \mathcal{L}_{w,n} \leq S_{w,n} \quad (5)$$

получается при помощи непосредственных вычислений [12].

Очевидно, из неравенств (4), (5) и следует необходимое равенство (2).

Теорема 1 доказана.

### Список использованной литературы

1. Касселс, Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений / Дж. В. С. Касселс. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1961.
2. Jarnik, V. Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Mass / V. Jarnik // Матем. сб. – М., 1929. – Т. 36. – С. 371–382.
3. Besicovitch, A. S. Sets of fractional dimension (IV): On rational approximations to real numbers / A. S. Besicovich // J. London Math. Soc. – 1934. – Vol. 9. – P. 126–131.
4. Mahler, K. Uber das Mass der Menge aller S-Zahlen / K. Mahler // Math. Ann. – 1932. – Vol. 3, N 106. – P. 131–139.
5. Спринджук, В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск: Наука и техника, 1967.
6. Baker, A. Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker, W. M. Schmidt // Proc. London Math. Soc. – 1970. – Vol. 3, N 21. – P. 1–11.
7. Берник, В. И. Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник // Acta Arithm. – 1983. – Vol. 42, N 3. – P. 219–253.
8. Rynne, P. Hausdorff dimension and generalized simultaneous diophantine approximation / P. Rynne // Bulletin of the London Mathematical Society. – 1998. – Vol. 30, N 4. – P. 365–376.
9. Dickinson, H. Extremal manifolds and Hausdorff dimension / H. Dickinson, M. Dodson // Duke Math. – 2000. – Vol. 101, N 2. – P. 271–281.
10. Bernik, V. I. A divergent Khitchine's theorem in the real, complex and p-adic fields / V. I. Bernik, N. Budarina, D. Dickinson // Lithuanian Mathematical J. – 2008. – Vol. 48, N 2. – P. 158–173.
11. Гётце, Ф. Алгебраические числа в коротких интервалах / Ф. Гётце, А. Г. Гусакова // Докл. НАН Беларуси. – 2014. – Т. 59, № 4. – С. 11–16.
12. Шамукова, Н. В. Об оценке сверху размерности Хаусдорфа в совместных приближениях алгебраическими числами / Н. В. Шамукова, Д. В. Коледа, А. В. Луневич // Материалы XII Междунар. конф. «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвящ. восьмидесятилетию проф. Виктора Николаевича Латышева. – Минск, 2014. – С. 99–100.

Поступило в редакцию 18.01.2016

## ФИЗИКА

УДК 538.9:544.023

Л. Л. ТРОЦЮК<sup>1</sup>, О. С. КУЛАКОВИЧ<sup>1</sup>, Е. В. ШАБУНЯ-КЛЯЧКОВСКАЯ<sup>1</sup>,  
С. В. ВАЩЕНКО<sup>2</sup>, академик С. В. ГАПОНЕНКО<sup>1</sup>

**ФОРМИРОВАНИЕ НАНОСТЕРЖНЕЙ ЗОЛОТА И ПЛЕНОК НА ИХ ОСНОВЕ  
ДЛЯ ПРИМЕНЕНИЯ В СПЕКТРОСКОПИИ  
ГИГАНТСКОГО КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ СВЕТА**

<sup>1</sup>Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
l.trotsiuk@ifanbel.bas-net.by; olga\_kul@imaph.bas-net.by; e.sh-k@ifanbel.bas-net.by; s.gaponenko@ifanbel.bas-net.by  
<sup>2</sup>Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
vash\_sv@mail.ru

Исследовано формирование наностержней золота и тонких пленок на их основе, приготовленных методом электростатического осаждения. Впервые на наностержнях золота получены спектры гигантского комбинационного рассеяния неорганических микрокристаллов малахита, а также органических несеросодержащих молекул митоксантрона и малахитового зеленого. Дополнительная процедура модификации данных пленок L-цистеином позволяет существенно расширить возможности использования наностержней золота для гигантского комбинационного рассеяния широкого ряда соединений.

*Ключевые слова:* наностержни золота, гигантское комбинационное рассеяние, тонкие пленки.

L. L. TROTSIUK<sup>1</sup>, O. S. KULAKOVICH<sup>1</sup>, E. V. SHABUNYA-KLYACHKOVSKAYA<sup>1</sup>,  
S. V. VASCHENKO<sup>2</sup>, S. V. GAPONENKO<sup>1</sup>

**FORMATION OF GOLD NANORODS AND GOLD NANOROD FILMS  
FOR SURFACE-ENHANCED RAMAN SCATTERING SPECTROSCOPY**

<sup>1</sup>B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
l.trotsiuk@ifanbel.bas-net.by; olga\_kul@imaph.bas-net.by; e.sh-k@ifanbel.bas-net.by; s.gaponenko@ifanbel.bas-net.by  
<sup>2</sup>Belarusian State University, Minsk, Belarus  
vash\_sv@mail.ru

The formation of gold nanorods as well as thin films prepared via electrostatic deposition of gold nanorods has been investigated. The obtained gold nanorods films have been used as substrates for the surface-enhanced Raman scattering analysis of sulfur-free organic molecules mitoxantrone and malachite green as well as inorganic malachite microcrystals for the first time. The additional modification of films with L-cysteine allows one to significantly extend the use of gold nanorods for the surface-enhanced Raman scattering analysis.

*Keywords:* gold nanorods, surface-enhanced Raman scattering, thin films.

**Введение.** Теория предсказывает возможность  $10^{14}$ -кратного усиления комбинационного рассеяния (ГКР) молекулами с помощью металлических наночастиц эллипсоидальной формы [1]. Для многих практических случаев ограничением для применения наночастиц золота сложной геометрии в ГКР-спектроскопии является наличие адсорбированного на их поверхности стабилизатора цетилтриметиламмония бромид (ЦТАБ) [2], используемого при синтезе. В большинстве работ, рассматривающих наностержни золота как ГКР-активные структуры, в качестве анализируемых тестовых веществ применялись меркапто-соединения (аминотифенолы, меркаптобензойная кислота и др.) [3–5]. Меркапто-группы, вытесняя с поверхности наностержней молекулы стабилизатора ЦТАБ способны ковалентно связываться с поверхностью наночастиц. Таким образом, обеспечивается непо-

средственный контакт анализируемых молекул с поверхностью металла, что является важным условием для эффективного гигантского комбинационного рассеяния, поскольку, согласно теории, интенсивность ГКР резко падает с увеличением расстояния «металл–аналит» [6].

Несмотря на значительный интерес к синтезу металлических наностержней, точный механизм образования золотых наностержней еще не установлен. В связи с этим изучение условий и закономерностей формирования наностержней золота является актуальной задачей. Цель данной работы заключалась в изучении формирования и возможностей регулирования морфологии и оптических свойств наностержней, получение на их основе пленок, а также проверка ГКР-активности пленок для органических и неорганических веществ, не содержащих меркапто-групп.

**Материалы и методы исследования.** Золи наностержней золота получали в результате двухстадийного синтеза [7]. Размер наностержней, а также соотношение длина/диаметр ( $L/d$ ) варьировали путем изменения объема раствора зародышей ( $n(\text{Au}^{3+}) : n(\text{Au}^{3+})_{\text{роста}} = 1 : 2000; 1 : 1700; 1 : 200$  в золях I, II, III соответственно), добавляемого к раствору роста, и концентрации восстановителя – аскорбиновой кислоты ( $[\text{Au}^{3+}] : [\text{АК}] = 1 : 1; 1 : 1,5$  и  $1 : 2$ ).

После окончания синтеза каждый золь промывали от избытка ЦТАБ с помощью трех циклов центрифугирования/редиспергирования. Морфологию наностержней золота изучали на электронном микроскопе S-806TEM/SEM (Hitachi, Japan). Спектры оптической плотности измеряли с помощью спектрофотометра Cary-500 (Varian, США).

Комбинационное рассеяние измеряли в конфигурации обратного рассеяния при комнатной температуре с использованием Nd:LSB-лазера (531 нм), спектрографа с дифракционной решеткой 1200 линий/мм (Solar ТП S3801, Беларусь) и высокочувствительной ПЗС-матрицы (Princeton Instruments, США), охлаждаемой жидким азотом.

**Результаты и их обсуждение.** *Исследование взаимосвязи условий синтеза и морфологии наностержней золота.* По данным работы [8] увеличение содержания аскорбиновой кислоты ведет к образованию более коротких наностержней. В то же время в работе [9] выявлено, что увеличение концентрации зародышей приводит к уменьшению соотношения длины стержня к его диаметру. В рамках данной работы исследовалось совместное влияние обоих факторов на морфологию наностержней золота.

Как видно из рис. 1, *а–в*, золи I, II и III различаются по размеру и форме частиц. Среднее отношение длины наностержней к диаметру ( $L/d$ ) уменьшается от золя I к золю III и составляет 4,3; 3,6 и 3,3 соответственно. Средняя длина стержней в золе I (рис. 1, *а*) составляет 60 нм, средний диаметр – 14 нм, выход наностержней – 80 %. В качестве примесных частиц образуются крупные агрегаты и небольшое количество наносфер золота. Выход стержнеобразных частиц в золе II (рис. 1, *б*) составляет 84 %. Из-за небольшого избытка аскорбиновой кислоты в золе II изменяется форма частиц: больше атомов золота осаждается на концах, чем на боках наностержней, образуется так называемая форма «собачьей кости». Средняя длина полученных частиц составляет 43 нм, диаметр – 12 нм. Золь III имеет высокое содержание сферических частиц (рис. 1, *в*). Выход наностержней составляет 56 %, выход сферических частиц ~40 %, оставшаяся часть приходится на агрегированные частицы. Средние размеры полученных наностержней составляют: длина – 30 нм, диаметр – 9 нм.

Оптические спектры поглощения золь наностержней имеют две характерные полосы (рис. 1). Более коротковолновой пик (в области 526–532 нм) соответствует поперечным колебаниям плазмонов, а длинноволновой (780–880 нм) – продольным [8].

*Получение оптически активных подложек.* Получение равномерных пленок на основе наностержней золота с высокой адгезией к подложке является актуальной задачей нанохимии.

Поскольку наностержни золота имеют положительный заряд, в настоящей работе для нанесения их на подложку был использован метод электростатического осаждения, основанный на физической сорбции наностержней на подготовленную и обладающую зарядом поверхность. Поверхность стекла обрабатывали в смеси  $\text{H}_2\text{SO}_4 : \text{H}_2\text{O}_2$  (4 : 1), после чего стекла приобретали слабый отрицательный заряд вследствие активации на их поверхности ОН-групп. Затем на сте-

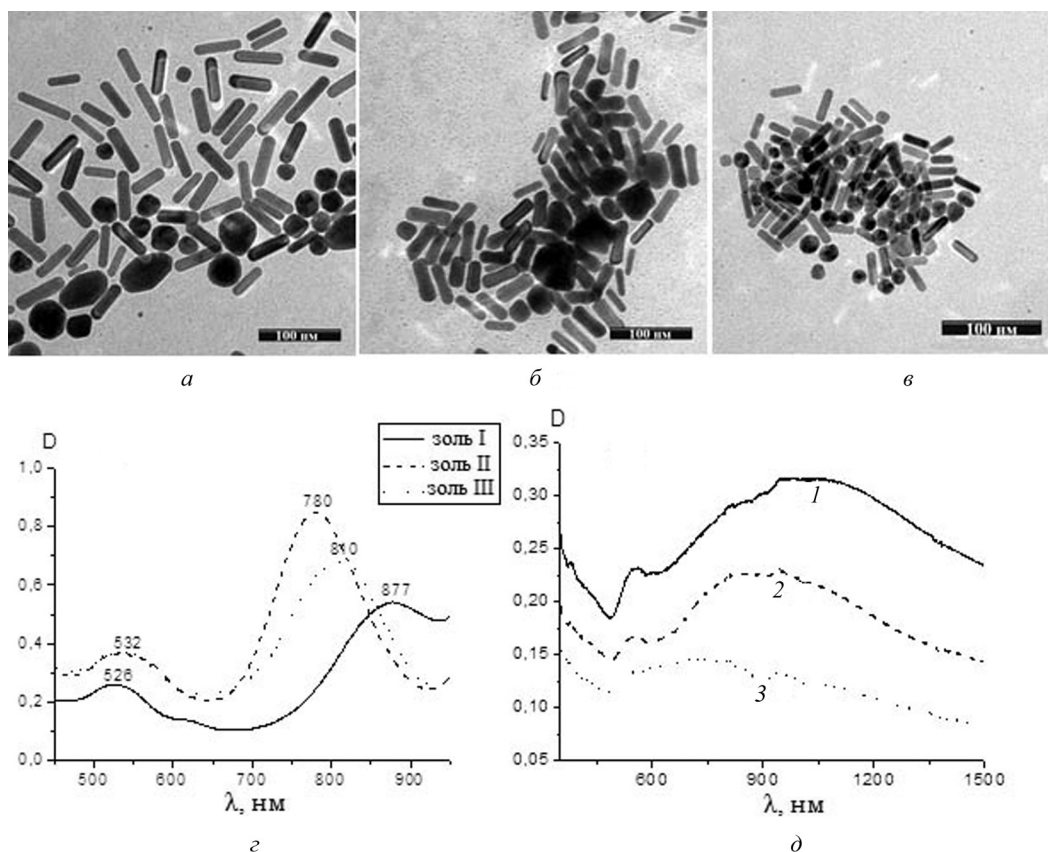


Рис. 1. Исследование золей и пленок наностержней золота: *a* – снимки просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ) золя I; *б* – ПЭМ-снимки золя II; *в* – ПЭМ-снимки золя III; *г* – оптические спектры золей наностержней золота; *д* – оптические спектры пленок на основе наностержней золота

клянные подложки осаждали подслои из полиэлектролитов, чтобы увеличить плотность заряда и добиться более эффективного осаждения наностержней. В качестве поликатиона использовали полидиаллилдиметиламмоний хлорид (ПДАДМАХ,  $M_w = 200000$  г/моль, Aldrich), а в качестве полианиона – полистиролсульфонат натрия (ПСС,  $M_w = 70000$  г/моль, Aldrich). Аналогичная по сути методика [10] позволяла ранее получать равномерные пленки сферических наночастиц золота и серебра с хорошей адгезией и устойчивые при хранении. Таким образом, наностержни золота осаждали в течение 24 ч на предварительно покрытую четырьмя слоями полиэлектролитов стеклянную поверхность. Попытка осадить наностержни непосредственно на отрицательно заряженную поверхность стекла не принесла результата, так же как и процесс осаждения наностержней на полиэлектролитную пленку, состоящую из двух слоев. С ростом толщины полиэлектролитной пленки увеличивается шероховатость ее поверхности, благодаря чему цепи полиэлектролитов могут взаимно проникать в соседние слои [11]. Это приводит к увеличению заряда пленки и благоприятно влияет на процесс осаждения наностержней.

В оптическом спектре полученных пленок I, II, III, (рис. 1, *д*), так же как и в спектре золей, наблюдаются два пика. В отличие от золей, эти полосы значительно уширены и сдвинуты в ИК-область. Это указывает на то, что в процессе образования пленок происходит агрегация частиц. Оптическая плотность пленок II и III оказалась значительно ниже, чем у пленки I, что, по-видимому, связано с содержанием в этих золях избыточного количества аскорбиновой кислоты, которая в растворе ЦТАБ диссоциирует в большей степени, чем в водном растворе. Образующиеся в результате диссоциации анионы могут частично экранировать положительный заряд наночастиц, что препятствует их электростатическому осаждению на подложках. Величина оптической плотности пленок 0,15–0,2 оказалась сравнима с величиной для многослойных пленок наностержней золота, полученной ранее чередованием слоев ПСС и золота [12].

Для медицинских и спектроскопических применений целесообразно модифицировать поверхность наностержней золота путем замены бислоя ЦТАБ молекулами меньших размеров [3; 4]. Для этого в данной работе подложки оставляли на сутки в 1 мМ раствора L-цистеина в вертикальном положении и промывали в воде. После модификации расстояние «металл–аналит» не превышало 1 нм.

*ГКР-спектроскопия на подложках из наностержней золота.* Для апробации ГКР-активных свойств подложек в качестве аналитов органической природы были использованы  $0,8 \cdot 10^{-5}$  М малахитовый зеленый,  $1,3 \cdot 10^{-5}$  М митоксантрон (интеркалятор ДНК, противоопухолевый препарат), а в качестве неорганических аналитов – микрокристаллы минерала малахита ( $1,5 \cdot 10^{-3}$  М). Следует отметить, что идентификация неорганических микрокристаллов методом гигантского комбинационного рассеяния на данный момент является нетривиальной задачей [13], в основном, из-за относительно большого размера микрочастиц (2–2,5 мкм) по сравнению с наноразмерными частицами металла.

Установлено, что все 3 типа подложек наностержней оказались эффективны при регистрации ГКР-спектров, однако максимальная интенсивность наблюдалась для подложки I, характеризующейся наиболее высоким значением оптической плотности, а также максимальным соотношением «длина/диаметр» наностержней. Следует отметить, что спектры комбинационного рассеяния для аналитов тех же концентраций в отсутствие пленок наностержней золота зарегистрировать не удалось из-за низкой интенсивности полос. Полученные результаты представлены на рис. 2, а. Для органических красителей (малахитовый зеленый, митоксантрон) наночастицы, стабилизированные ЦТАБ, проявляют большую ГКР-активность по сравнению с модифицированными L-цистеином. По-видимому, при нанесении аналита на подложку наностержней золота возможно частичное замещение молекул ЦТАБ на поверхности наностержней молекулами органических аналитов, что обеспечивает их непосредственный контакт с металлом, кроме того, может иметь место также химический механизм гигантского комбинационного рассеяния [14] в дополнение к электромагнитному.

Поскольку L-цистеин прочно связан с наностержнями за счет высокого сродства серы к золоту, в случае модифицированной L-цистеином подложки замещения его на молекулы аналита не происходит и интенсивность сигнала в этом случае меньше. В отличие от аналитов органической природы, оказалось, что в ГКР-спектре неорганического соединения малахита максимальную эффективность

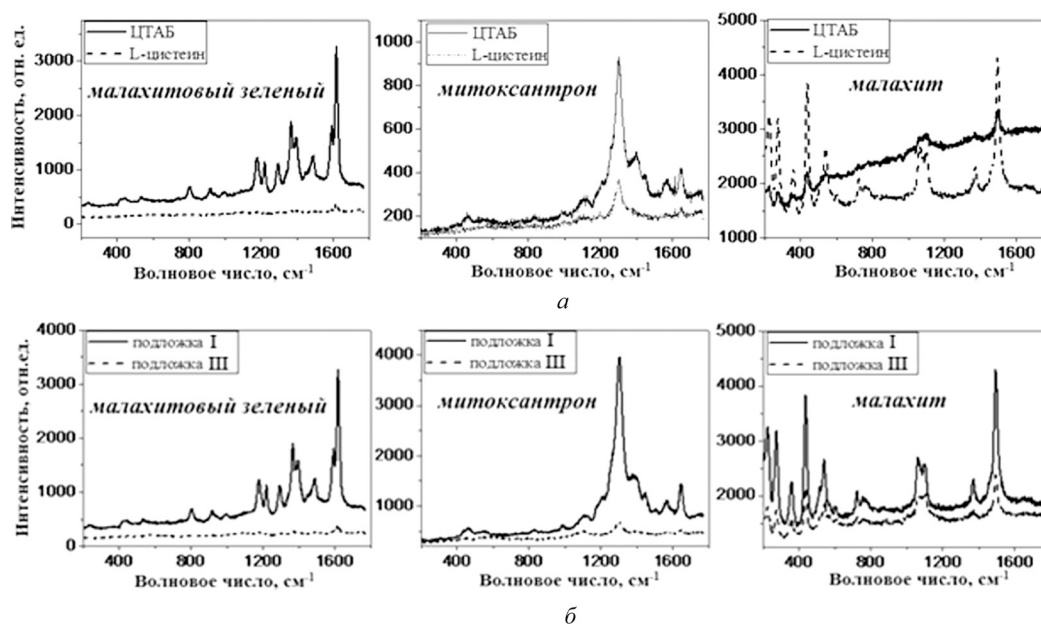


Рис. 2. ГКР-спектры аналитов: а – на подложках I, содержащих исходные наностержни (стабилизированные ЦТАБ), и на подложках, модифицированных L-цистеином; б – ГКР-спектры аналитов на подложках I и III, длина волны возбуждения  $\lambda_{\text{возб}} = 531$  нм

проявляют подложки, модифицированные L-цистеином: линии хорошо разрешились и значительно усилилась их интенсивность (рис. 2, а). Поскольку микрокристаллы малахита не могут замещать молекулы ЦТАБ на поверхности наностержней золота, они проявляют максимальную интенсивность на подложках, имеющих наименьшее расстояние до поверхности металла.

Для сравнения ГКР-активности подложек в зависимости от размера наностержней были получены ГКР-спектры на подложках I, содержащих наностержни с самым крупным размером, и III, с самым малым размером наностержней. При этом для малахитового зеленого и митоксантрона использовали пленки с наночастицами, стабилизированными ЦТАБ, а для малахита – модифицированные L-цистеином (рис. 2, б). Из рис. 2, б видно, что подложка I проявляет большую ГКР-активность, чем подложка III. Интенсивность полос в спектрах органических аналитов на подложке I приблизительно в 19–20 раз выше, чем на подложке III. Это может быть связано с тем, что, во-первых, пленки I типа характеризуются наибольшим значением оптической плотности (рис. 1, д), а следовательно, большей толщиной, а, во-вторых, они содержат наностержни наибольшего размера. Поскольку в длинных наностержнях доминирует эффективное рассеяние света, сигнал ГКР значительно усиливается. В спектрах неорганических аналитов подложка I также более эффективна для регистрации ГКР-спектров, однако разница между ней и подложкой III уже не столь существенна. Интенсивность ГКР-сигнала малахита на подложке I всего в 3–5 раз больше, чем на подложке III.

**Заключение.** Предложены методы получения пленок наностержней золота различной формы для плазмонного усиления комбинационного рассеяния света в молекулярной аналитической спектроскопии. Показано, что одновременное увеличение концентрации аскорбиновой кислоты и количества зародышей в ходе синтеза приводит к уменьшению размера наностержней и изменению их формы. Максимальные интенсивности ГКР-сигналов наблюдали при использовании подложек, характеризующихся наибольшим значением оптической плотности на длине волны возбуждения, а также самыми большими размерами наностержней. Установлено, что модифицированные L-цистеином наностержни обеспечивают большее усиление комбинационного рассеяния для неорганических микрокристаллов (за счет уменьшения расстояния «Au–аналит»), а ЦТАБ-стабилизированные наностержни более эффективны в ГКР-спектроскопии органических молекул, предположительно благодаря вкладу химического механизма усиления вследствие более тесного контакта «металл–аналит».

Разработанные методы приготовления золь и пленок позволяют варьировать положение плазмонной полосы в широком спектральном диапазоне (500–1200 нм), что важно для резонансного усиления комбинационного рассеяния, а также для плазмонного усиления фотолюминесценции, что будет предметом дальнейших исследований.

Работа была выполнена при поддержке БРФФИ (проект Ф15СО-034).

### Список использованной литературы

1. *Gaponenko, S. V.* Possible rationale for ultimate enhancement factor in single molecule Raman spectroscopy / S. V. Gaponenko, D. V. Guzatov // *Chemical Physics Letters*. – 2009. – Vol. 477. – P. 411–414.
2. *Gole, A.* Seed-mediated synthesis of gold nanorods: role of the size and nature of the seed / A. Gole, C. J. Murphy // *Chemistry of Materials*. – 2004. – Vol. 16. – P. 3633–3640.
3. *Nikoobakht, B.* Surface-enhanced Raman scattering studies on aggregated gold nanorods / B. Nikoobakht, M. A. El-Sayed // *The Journal of Physical Chemistry A*. – 2003. – Vol. 107. – P. 3372–3378.
4. Gold nanorods with finely tunable longitudinal surface plasmon resonance as SERS substrates / S. L. Smitha [et al.] // *Nanotechnology*. – 2011. – Vol. 22, N 26. – P. 265705.
5. Correlating the shape, surface plasmon resonance, and surface-enhanced Raman scattering of gold nanorods / H. Guo [et al.] // *The Journal of Physical Chemistry C*. – 2009. – Vol. 113, N 24. – P. 10459–10464.
6. Enhancement of Raman scattering of light by ultramarine microcrystals in presence of silver nanoparticles / E. V. Klyachkovskaya [et al.] // *Journal of Raman Spectroscopy*. – 2012. – Vol. 43, N 6. – P. 741–744.
7. *Huang, X.* Gold nanorods: from synthesis and properties to biological and biomedical applications / X. Huang, S. N. Retina, M. A. El-Sayed // *Advanced Materials*. – 2009. – Vol. 21, N 48. – P. 4880–4910.
8. *Vigderman, L.* Functional gold nanorods: synthesis, self-assembly, and sensing applications / L. Vigderman, B. P. Khanal, E. R. Zubarev // *Advanced Materials*. – 2012. – Vol. 24, N 36. – P. 4811–4841.



9. *Sau, T. K.* Seeded high yield synthesis of short Au nanorods in aqueous solution / T. K. Sau, C. J. Murphy // *Langmuir*. – 2004. – Vol. 20, N 15. – P. 6414–6420.
10. *Кулакович, О. С.* Формирование наноструктур на основе коллоидных частиц золота и полиэлектролитов / О. С. Кулакович // *Вестн. ГрГУ, сер. 2*. – 2005. – Т. 1, № 31. – С. 148–153.
11. Investigation of electrostatic interactions in polyelectrolyte multilayer films: binding of anionic fluorescent probes to layers assembled onto colloids / F. Caruso [et al.] // *Macromolecules*. – 1999. – Vol. 32, N 7. – P. 2317–2328.
12. Fabrication, characterization, and application in SERS of self-assembled polyelectrolyte-gold nanorod multilayered films / X. Hu [et al.] // *The Journal of Physical Chemistry B*. – 2005. – Vol. 109, N 41. – P. 19385–19389.
13. Enhanced Raman scattering of ultramarine on Au-coated Ge/Si-nanostructures / E. Klyachkovskaya [et al.] // *Plasmonics*. – 2011. – Vol. 6, N 2. – P. 413–418.
14. *Акципетров, О. А.* Гигантские нелинейно-оптические явления на поверхности металлов / О. А. Акципетров // *Соросовский образовательный журн.* – 2001. – № 7. – С. 109–116.

*Поступило в редакцию 15.02.2016*

УДК 539.216.2; 535.341

*В. Л. ШАПОШНИКОВ, А. В. КРИВОШЕЕВА, В. Е. БОРИСЕНКО*

## ЭЛЕКТРОННАЯ СТРУКТУРА И ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДВУМЕРНЫХ КРИСТАЛЛОВ SnS

(Представлено академиком С. В. Гапоненко)

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь*

*victor.shaposhnikov@gmail.com; anna@nano.bsuir.edu.by; borisenko@bsuir.by*

Теоретическим моделированием определена электронная структура и оптические свойства двумерных кристаллов сульфида олова (SnS). Рассмотрены низкотемпературная  $\alpha$ -SnS и высокотемпературная  $\beta$ -SnS фазы. Обнаружено, что все структуры являются полупроводниками и при увеличении толщины кристаллов характеризуются уменьшением ширины запрещенной зоны до значений, типичных для объемного материала. Рассчитанные значения коэффициентов отражения меньше значений в объемных материалах, а коэффициент поглощения света сопоставим с характеристиками объемного SnS и GaAs.

*Ключевые слова:* сульфид олова, двумерный кристалл, зонная структура, диэлектрическая функция, коэффициент отражения, коэффициент поглощения.

*V. L. SHAPOSHNIKOV, A. V. KRIVOSHEEVA, V. E. BORISENKO*

## ELECTRONIC STRUCTURE AND OPTICAL PROPERTIES OF TWO-DIMENSIONAL CRYSTALS OF SnS

*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus*

*victor.shaposhnikov@gmail.com; anna@nano.bsuir.edu.by; borisenko@bsuir.by*

The electronic band spectra and the optical properties of 2D crystals of tin sulfide (SnS) were investigated by means of *ab initio* simulation. Low-temperature ( $\alpha$ -SnS) and high-temperature ( $\beta$ -SnS) phases in the form of 2D crystals were considered. All compounds were found to be semiconductors. Their band gaps decrease upon increasing the number of monolayers approaching the values of bulk materials. Calculated reflection coefficients of the structures studied are lower than in bulk materials, and the light absorption coefficient has the same order of magnitude as in bulk SnS and GaAs.

*Keywords:* tin sulfide, two-dimensional crystal, band structure, dielectric function, reflection coefficient, absorption coefficient.

**Введение.** Развитие солнечной энергетики, получение, преобразование и накопление электрической энергии становится все более актуальным научным направлением, что объясняется истощением ископаемых ресурсов и поиском альтернативных источников энергии [1]. Наиболее эффективные солнечные элементы, использующие такие полупроводники, как  $\text{CuIn}_x\text{Ga}_{1-x}\text{Se}_2$ , CdTe, GaAs и другие, имеют в своем составе токсичные и/или редкие элементы. Аналогичным недостатком обладают термоэлектрические материалы, такие как халькогениды висмута  $\text{Bi}_2\text{Se}_3$  и их наноструктуры  $\text{Bi}_2\text{Te}_3/\text{Sb}_2\text{Te}_3$ , легированный таллием теллурид свинца  $\text{Tl:PbTe}$  и другие соединения. В отличие от этих материалов элементы, входящие в состав сульфида олова (SnS), обладающего привлекательными оптическими и электрическими свойствами, достаточно широко распространены в природе.

Сульфид олова существует в виде нескольких кристаллических фаз и допускает изменение стехиометрии от моносульфида (SnS) до дисульфида ( $\text{SnS}_2$ ) [2–5]. При этом ширина запрещенной зоны у этих полупроводников варьируется в пределах 0,3–2,9 эВ [6–9]. Наиболее привлекательным для солнечных элементов и датчиков ИК излучения представляется SnS, низкотемпературная ( $T < 870$  К)  $\alpha$ -фаза которого, судя по теоретическим оценкам, имеет ширину запрещенной

зоны 0,9–1,6 эВ, а высокотемпературная ( $T > 870$  К)  $\beta$ -фаза 0,3–0,6 эВ [9]. К тому же эксперименты [10] показали принципиальную возможность формирования высококачественных кристаллических слоев SnS путем эпитаксиального осаждения на слоистую подложку, при котором используется слабое ван-дер-ваальсово взаимодействие между слоями. По аналогии с классическими двумерными кристаллами полупроводниковых дихалькогенидов ( $\text{MoS}_2$ ,  $\text{MoSe}_2$ ,  $\text{WS}_2$ ,  $\text{WSe}_2$  и т. д.) [11; 12], между графеноподобными мономолекулярными слоями которых существует связь Ван-дер-Ваальса, такая структура открывает практические перспективы управления фундаментальными электронными и оптическими свойствами SnS при его формировании в виде двумерных кристаллов.

Цель работы – теоретическое моделирование атомарной структуры, электронных энергетических зон и оптических свойств двумерных кристаллов из SnS. При этом основное внимание уделено изменению этих свойств в зависимости от толщины монокристаллического слоя и ориентации его поверхности.

**Материалы и методы исследования.** Исследованы две орторомбические фазы моносulfида олова: низкотемпературная  $\alpha$ -SnS (пространственная группа  $Pbnm$ ) и высокотемпературная  $\beta$ -SnS ( $T > 870$  К) (пространственная группа  $Cmcm$ ). Теоретически рассчитанные ранее постоянные решетки имеют следующие величины:  $a = 11,416$  Å,  $b = 4,026$  Å,  $c = 4,413$  Å и  $a = 4,109$  Å,  $b = 11,765$  Å,  $c = 4,110$  Å для  $\alpha$ -SnS и  $\beta$ -SnS фаз соответственно [9]. Обе фазы имеют по 8 атомов в элементарной ячейке, в то время как варианты расположения атомов различны. Кристаллическая структура  $\alpha$ -SnS соответствует искаженной решетке  $\beta$ -SnS со смещенными атомными позициями атомов Sn.

Атомарная структура двумерных кристаллов SnS получена путем ограничения объема кристалла плоскостями вдоль одной из трех основных кристаллографических осей (001), (010) и (100) и последующей шестикратной трансляции элементарной ячейки в одном из направлений. Это соответствует толщине кристалла порядка 70 Å в одном направлении и 27 Å в двух других направлениях, поскольку обе фазы имеют две практически равные постоянные решетки (~4 Å), которые в три раза меньше третьей (~11,5 Å). Для устранения взаимодействия между мономолекулярными слоями использовали разделительный слой вакуума толщиной 10 Å. Оборванные связи на поверхности рассматривались замкнутыми на ближайшие соседние атомы. Позиции всех атомов в сформированных таким образом двумерных кристаллах подвергали релаксации.

Полную оптимизацию кристаллической структуры осуществляли в рамках теории функционала плотности, используя первопринципный метод псевдопотенциала (код VASP) с базисом на плоских волнах [13]. Обменно-корреляционное взаимодействие описывали в рамках обобщенного градиентного приближения (ОГП) [14]. Энергия отсечки была выбрана равной 320 эВ. Интеграцию по зоне Бриллюэна выполняли линейным методом тетраэдров. Самосогласование осуществляли на сетке из 100  $k$ -точек, равномерно распределенных в неприводимой части зоны Бриллюэна. Изменение позиций атомов прекращали, когда силы, действующие на них, становились меньше 0,05 эВ/Å.

Структуру электронных энергетических зон и оптические спектры рассчитывали с использованием метода линейаризованных присоединённых плоских волн (код WIEN2K) [15]. Для вычисления дипольных матричных элементов использовали сетку из 400  $k$ -точек. Межзонные вклады в мнимую часть диэлектрической функции ( $\epsilon_2$ ) вычисляли в приближении хаотических фаз, эффектами локального поля пренебрегали.

**Результаты и их обсуждение.** Проведенные расчеты показали, что обе исследуемые фазы объемного SnS являются непрямозонными полупроводниками, при этом значения ширины запрещенной зоны, вычисленные в рамках ОГП-подхода, равны 0,90 и 0,32 эВ для  $\alpha$ -SnS и  $\beta$ -SnS соответственно, в то время как экспериментальные значения составляют порядка 1,0–1,5 эВ [6–8]. Отличительной особенностью зонных структур этих материалов является то, что максимум валентной зоны (МВЗ) в них находится не в точке Г, как это обычно бывает в полупроводниках, таких как Si или GaAs. Минимум зоны проводимости (МЗП) для  $\beta$ -SnS находится в точке Г, в то время как у  $\alpha$ -SnS он расположен в направлении Г–У.

Энергетические зонные структуры двумерных кристаллов, состоящих из 6 мономолекулярных слоев SnS, представлены на рис. 1. Очевидно, что двумерные структуры в обеих фазах сохраняют свою полупроводниковую природу независимо от толщины или кристаллографической ориентации поверхности кристалла. Кроме того, кристаллы  $\beta$ -SnS с поверхностями (100) и (001) характеризуются прямым переходом в точке Г. Поведение верхней валентной зоны и нижней зоны проводимости для поверхностей  $\alpha$ -SnS (100) и  $\beta$ -SnS (010) практически повторяют аналогичное поведение в объемных материалах.

Анализ парциальных плотностей электронных состояний (ПЭС) показал, что независимо от фазы и кристаллографической ориентации, валентные зоны вблизи уровня Ферми ( $-2...0$  эВ) формируются в основном  $3p$ -электронами атомов серы, гибридованными с  $5s$ - и  $5p$ -электронами атомов олова. Зоны проводимости вблизи уровня Ферми в основном определяются  $5p$ -электронами олова с небольшим вкладом  $3p$ -электронов серы. Подобное поведение наблюдалось ранее для объемного SnS [9]. Кроме того, было установлено, что состояния вблизи уровня Ферми как для валентной зоны, так и зоны проводимости в основном определяются электронами атомов олова и серы, находящимися далеко от поверхности. Единственным исключением является двумерный кристалл  $\alpha$ -SnS (010), в котором поверхностные атомы играют главную роль. Анализ межатомных расстояний показал, что длина связи Sn-S на поверхности меньше, чем у глубоко лежащих атомов и в объемном соединении, за исключением поверхностей  $\alpha$ -SnS (100) и  $\beta$ -SnS (010), у которых эти значения оказались равны.

Зависимость ширины запрещенной зоны от толщины двумерного кристалла представлена на рис. 2. Для всех рассмотренных фаз и ориентаций поверхностей с ростом количества слоев наблюдается уменьшение величины энергетического зазора, что является следствием эффекта квантового ограничения. Как правило, значения ширины запрещенной зоны в наноструктурах при возрастании их толщины стремятся к соответствующим величинам в объемном соединении, а в случае с поверхностью  $\alpha$ -SnS (001) они оказываются еще меньше (рис. 2).

Полученные зависимости диэлектрической функции от энергии фотона однослойного двумерного кристалла SnS демонстрируют сильную анизотропию для обеих фаз и рассмотренных кристаллографических направлений (рис. 3).

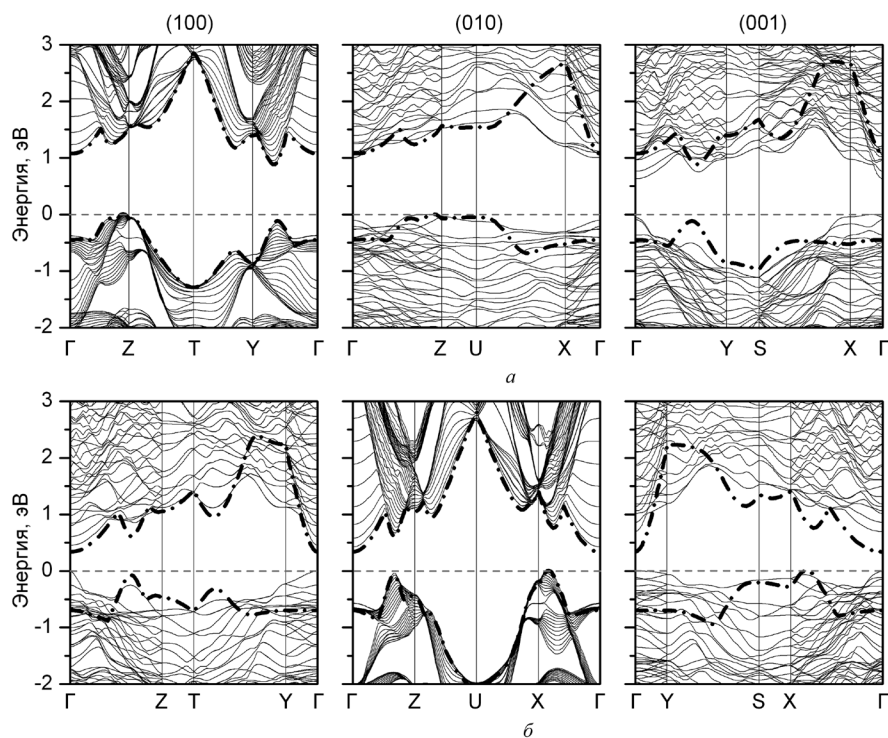


Рис. 1. Структура электронных энергетических зон в двумерных кристаллах сульфида олова  $\alpha$ -SnS (а) и  $\beta$ -SnS (б) с поверхностями (100), (010) и (001). Ноль на шкале энергии соответствует положению уровня Ферми. Штрих-пунктирной линией показаны положения верхней валентной зоны и нижней зоны проводимости в объемных материалах

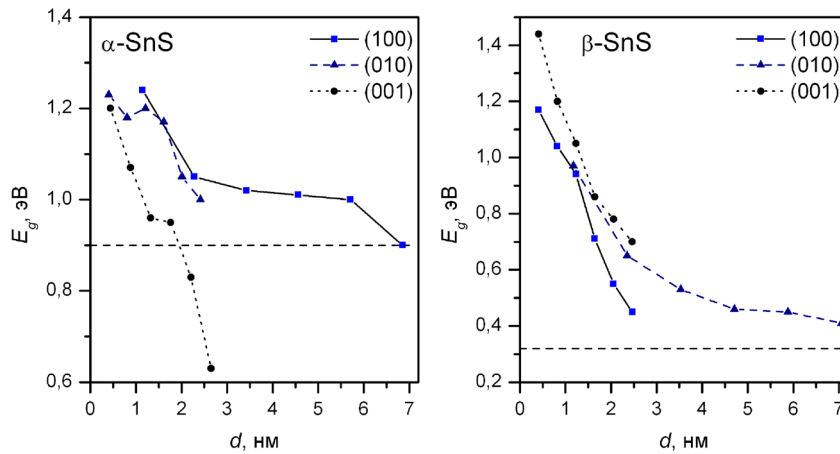


Рис. 2. Зависимость ширины запрещенной зоны ( $E_g$ ) в двумерном кристалле сульфида олова от его толщины ( $d$ ). Штриховая линия показывает соответствующие значения запрещенной зоны в объемном материале

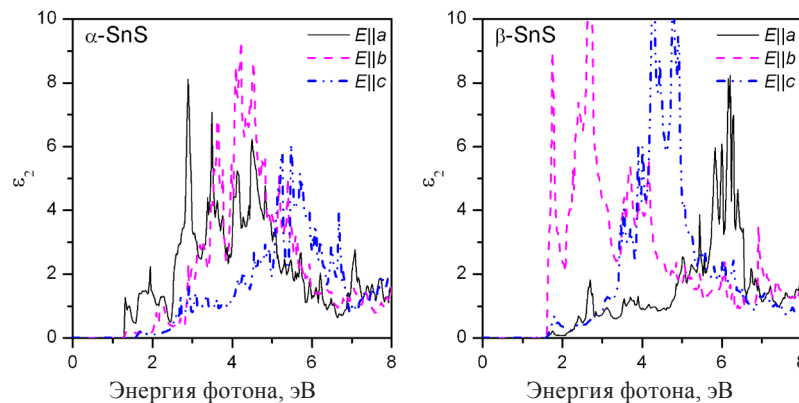


Рис. 3. Мнимая часть диэлектрической функции ( $\epsilon_2$ ) однослойного кристалла SnS с ориентацией поверхности (001) при различных направлениях поляризации света

Расчет диэлектрической функции кристаллов  $\alpha$ -SnS для поверхностей с ориентацией (001) и (010) также показал сильную анизотропию для трех направлений поляризации света, в то время как для поверхности (100) спектры для  $E||b$  и  $E||c$  почти идентичны и аналогичны спектрам для  $E||a$  и  $E||c$  в объемном  $\alpha$ -SnS. В случае  $\beta$ -SnS аналогичная ситуация наблюдается для кристаллов с поверхностью (010), у которых спектры для направлений поляризации света  $E||a$  и  $E||c$  практически совпадают и повторяют форму спектров для  $E||a$  и  $E||c$  в объемном  $\beta$ -SnS.

Важной особенностью оптических свойств исследуемых структур является то, что быстрый рост интенсивности спектральных линий  $\epsilon_2$  для  $E||a$  в  $\alpha$ -SnS (001) и  $E||a$  в  $\beta$ -SnS (001) соответствует первому прямому переходу в этих структурах. Таким образом, этот первый прямой переход оказывается разрешенным в дипольном приближении и имеет большие значения силы осциллятора.

Анализ спектральной зависимости коэффициента отражения ( $R$ ) поверхности двумерных кристаллов SnS (рис. 4, а) показывает, что в диапазоне энергий 0–5 эВ усредненные значения  $R$  оказываются в диапазоне 0,1–0,5 в зависимости от ориентации поверхности кристалла, в то время как для объемных соединений эти значения лежат в диапазоне 0,3–0,6. Меньшие значения коэффициента отражения говорят о перспективности данных структур для фотоэлектрических преобразователей энергии.

Расчитанные спектры поглощения двумерных кристаллов SnS, представленные на рис. 4, б, показывают, что коэффициенты поглощения этих структур, как и у объемных кристаллов SnS, достигают  $10^5 \text{ см}^{-1}$  в видимом диапазоне длин волн, т. е. имеют тот же порядок величин, что и у GaAs, который широко используется для создания солнечных элементов.

**Заключение.** Моделирование структуры электронных энергетических зон и оптических свойств двумерных кристаллов сульфида олова показало, что две его фазы –  $\alpha$ -SnS и  $\beta$ -SnS – об-

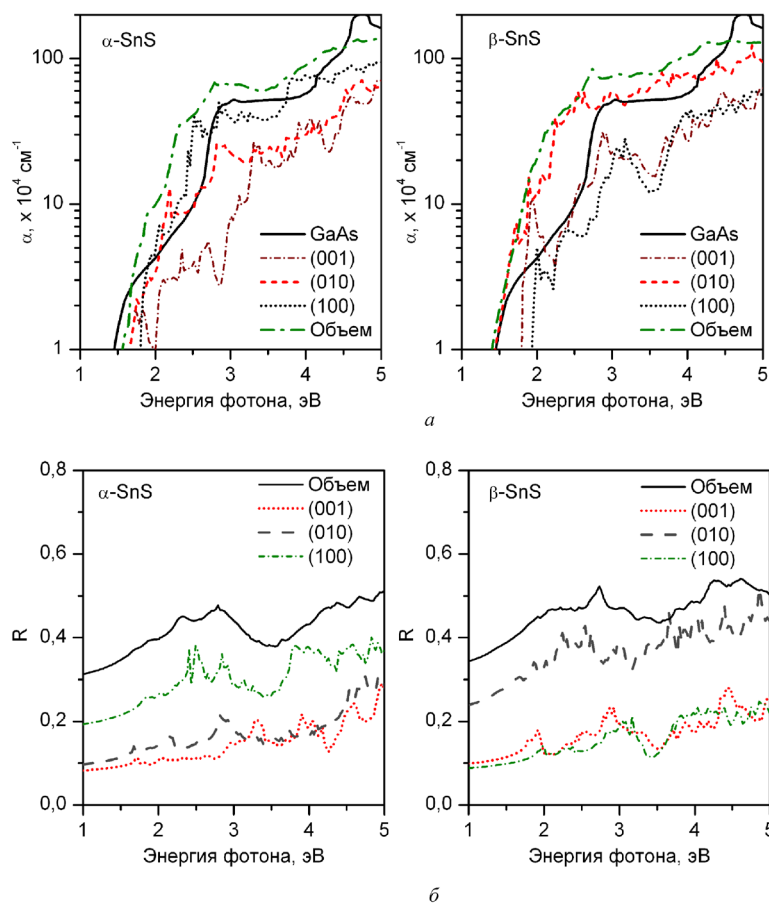


Рис. 4. Зависимость коэффициента отражения  $R$  (а) и коэффициента поглощения  $\alpha$  (б) однослойных кристаллов SnS от энергии фотонов при различных ориентациях поверхности, усредненные по трем направлениям поляризации света, в сравнении с объемным SnS (а, б) и данными для GaAs (б)

ладают полупроводниковыми свойствами, управлять которыми возможно заданием толщины этих кристаллов. Возможность получения на их основе эпитаксиальных структур с шириной запрещенной зоны, изменяемой от 0,4 до 1,4 эВ, при коэффициенте поглощения света ( $\sim 10^5 \text{ см}^{-1}$ ) в видимом диапазоне длин волн, сравнимом с коэффициентом поглощения света GaAs, указывает на их перспективность для высокоэффективных солнечных элементов.

Работа была выполнена в рамках задания 2.1.02 ГПНИ «Фотоника, опто- и микроэлектроника».

### Список использованной литературы

1. High-efficient low-cost photovoltaics: recent developments / eds. by V. Petrova-Koch, R. Hezel, A. Goetzberger. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – Vol. 140. – 228 p.
2. Madelung, O. Semiconductors: data handbook / O. Madelung. – Berlin-Heidelberg: Springer, 2004. – 691 p.
3. Thermoelectrics with earth abundant elements: low thermal conductivity and high thermopower in doped SnS / Q. Tan [et al.] // J. Mater. Chem. A. – 2014. – Vol. 2. – P. 17302–17306.
4. Vapor transport deposition and epitaxy of orthorhombic SnS on glass and NaCl substrates / A. Wangperawong [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2013. – Vol. 103, N 5. – P. 052105 (5).
5. Growth of high-quality SnS epitaxial films by  $\text{H}_2\text{S}$  flow pulsed laser deposition / F.-Y. Ran [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2014. – Vol. 104, N 7. – P. 072106 (4).
6. Optical properties of thermally evaporated SnS thin films / M. M. El-Nahass [et al.] // Optical Materials. – 2002. – Vol. 20, N 3. – P. 159–170.
7. Preparation and properties of SnS film grown by two-stage process / F. Jiang [et al.] // Appl. Surf. Sci. – 2011. – Vol. 257, N 11. – P. 4901–4905.
8. Cheng, Sh. Physical properties of very thin SnS films deposited by thermal evaporation / Sh. Cheng, G. Conibeer // Thin Solid Films. – 2011. – Vol. 520, N 2. – P. 837–841.

9. Structure, electronic and optical properties of tin sulfide / V. L. Shaposhnikov [et al.] // ScienceJet. – 2012. – Vol. 1. – P. 16 (4).
10. Molecular beam epitaxy growth of high quality p-doped SnS van der Waals epitaxy on a graphene buffer layer / W. Wang [et al.] // J. Appl. Phys. – 2012. – Vol. 111, N 9. – P. 093520 (8).
11. Vertical Heterostructures of layered metal chalcogenides by van der Waals epitaxy / X. Zhang [et al.] // Nano Lett. – 2014. – Vol. 14, N 6. – P. 3047–3054.
12. Band gap modifications of two-dimensional defected MoS<sub>2</sub> / A. V. Krivosheeva [et al.] // Int. J. Nanotechnol. – 2015. – Vol. 12, N 8/9. – P. 654–662.
13. Kresse, G. Efficient interactive schemes for ab initio total-energy calculations using a plane-wave basis set / G. Kresse, J. Furthmüller // Phys. Rev. B. – 1996. – Vol. 54, N 16. – P. 11169–11186.
14. Perdew, J. P. Generalized gradient approximation made simple / J. P. Perdew, K. Burke, M. Ernzerhof // Phys. Rev. Lett. – 1996. – Vol. 77, N 18. – P. 3865–3868.
15. WIEN2k, An augmented plane wave + local orbitals program for calculating crystal properties / P. Blaha [et al.] (Karlheinz Schwarz, Techn. Universität Wien, Austria), 2001. ISBN 3-9501031-1-2.

*Поступило в редакцию 29.06.2016*

УДК 535.3:539.216.2:53.085.343:535.542.1

Н. А. ХИЛО

## МОДИФИЦИРОВАННАЯ СХЕМА ОТТО ВОЗБУЖДЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПЛАЗМОНОВ

(Представлено членом-корреспондентом В. Н. Бельям)

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
n.khilo@dragon.bas-net.by

Предложен и исследован новый тип резонансного возбуждения поверхностных плазмонов, который характеризуется равенством фазовых скоростей и коэффициентов затухания плазмонов и возбуждающего поля. Показано, что такой резонанс может быть реализован в модифицированной схеме Отто, особенностью которой является наличие в переходном слое периодической системы клиньев, позволяющей формировать наклонную эванесцентную волну. Расчет схемы показал, что превышение усиления в рассматриваемой схеме в сравнении со стандартной схемой Отто может достигать двух порядков и выше.

*Ключевые слова:* поверхностные плазмоны, эванесцентное поле, плоские линзы.

N. A. KHILLO

## MODIFIED OTTO SCHEME FOR EXCITATION OF SURFACE PLASMONS

B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
n.khilo@dragon.bas-net.by

A new type of resonant excitation of surface plasmons is proposed and investigated which is characterized by the equality of the phase velocities and attenuation coefficients of the plasmons and an excitation field. It has been shown that this type of resonance can be realized by means of the modified Otto scheme. The peculiarity of this scheme is the presence in a transition layer of the periodic system of wedges allowing one to form an inclined evanescent wave. The calculation shows that the modified scheme can provide a local power gain of two orders greater as compared with the standard Otto scheme.

*Keywords:* surface plasmons, evanescent field, flat lens.

**Введение.** Призменная схема возбуждения поверхностных световых полей, в частности поверхностных плазмонов (ПП), широко используется в настоящее время (см., напр., [1–4]). Она реализуется, как известно, в конфигурациях Отто [5] и Крэтчмана [6]. В схеме Отто в процессе возбуждения ПП внешнее поле испытывает полное внутреннее отражение (ПВО) на выходной грани призмы и трансформируется в эванесцентное поле в переходном слое диэлектрика, граничащем со слоем металла или, в общем случае, со слоистой системой металл–диэлектрик (плоской линзой [7]). Фазовый синхронизм достигается за счет подбора угла падения плоской волны и при условии, что призма полного внутреннего отражения (ПВО-призма) имеет достаточно большой показатель преломления.

Однако в схемах Отто и Крэтчмана не реализуется полное равенство постоянной распространения ПП и волнового числа возбуждающего поля. Это вызвано тем, что ПП затухают вдоль направления распространения, в то время как возбуждающее поле однородно вдоль этого направления. Другими словами, постоянная распространения ПП является комплексной, а аналогичный параметр возбуждающего поля вещественный. В сообщении предлагается вариант оптической схемы, в которой возбуждающее поле также имеет комплексную постоянную распространения в плоскости линзы. За счет этого возможно достижение так называемого комплексного резонанса (КР), характеризуемого равенством как фазовых скоростей, так и коэффициентов затухания ПП и возбуждающего поля.



**Описание оптической схемы.** Предлагаемая призмная схема показана на рис. 1. Здесь ПВО-призма 2 соединена с плоской линзой 4 диэлектрическим переходным слоем с клиновидным профилем 3. Толщина клина линейно возрастает в направлении, совпадающем с направлением распространения ПП. Клиновидная область является периодической, формируя некоторую дифракционную решетку. В общем случае между клиньями может располагаться непрозрачный промежуток. Плоская линза представляет собой слоистую структуру металл–диэлектрик, граничащую на выходе, например, со слоем фоторезиста 5.

Входным полем в схеме является плоская волна 1, которая трансформируется на границе призма–клин в эванесцентное поле. Это поле падает наклонно на плоскую линзу и возбуждает плазмон в режиме нарушенного ПВО. Выходное поле является эванесцентным, а его интенсивность в условиях резонансного возбуждения ПП может, как известно [7], превышать интенсивность падающего поля. Поэтому важной характеристикой плоских линз является коэффициент усиления локального поля, равный отношению интенсивностей поля непосредственно на выходе линзы и падающего поля.

Цель работы – нахождение коэффициента усиления в модифицированной схеме Отто при реализации в ней указанного выше комплексного резонанса.

**Расчет и анализ схемы.** Рассчитывалась оптическая схема с ПВО-призмой из сапфира ( $n_{in} = 1,7937$ ), кварцевым переходным слоем, включающим клиновидные области ( $n_w = 1,47$ ), плоской двуслойной линзой  $Ag/SiO_2$  ( $n_{ag} = 0,07 + 1,64i$ ) с толщиной слоев 15/20 нм и слоем фоторезиста ( $n_{resist} = 1,65 + 7,26 \times 10^{-3}i$ ). Длина волны  $\lambda = 365$  нм.

Расчет проводился матричным методом с учетом всех действующих границ раздела. Основной переменной в формулах является продольная компонента волнового вектора, или продольное волновое число  $k_x = k_0 n_{in} \sin \theta_{in}$ , где  $n_{in}$  – вещественный показатель преломления призмы ввода (рис. 1, б),  $k_0 = 2\pi / \lambda$ ,  $\theta_{in}$  – угол падения плоской волны на клин. Применительно к описанию плазмонов это число будет называться также постоянной распространения. Кроме того, для удобства анализа будет использоваться соответствующая безразмерная величина  $n_x = n_{in} \sin \theta_{in}$  с сохранением названия в тех случаях, когда это не приведет к недоразумению.

На верхней грани клина (рис. 1, б) происходит ПВО, что приводит к экспоненциальному затуханию возбуждающего эванесцентного поля вдоль оси  $z$ . В схеме на рис. 1 компонента волнового вектора вдоль направления  $z$ , или поперечное волновое число в нормированном виде равно  $n_z = \sqrt{\epsilon_w - \epsilon_{in} \sin^2 \theta_{in}}$  или  $n_z = \sqrt{\epsilon_w - n_x^2}$ , где  $\epsilon_w$  – диэлектрическая проницаемость материала клина (кварц в рассматриваемом случае). В системе координат  $(x_1, z_1)$ , связанной с линзой, продольное волновое число возбуждающего поля равно

$$n_{x1} = n_x \cos \theta_w + i \sqrt{n_x^2 - \epsilon_w} \sin \theta_w, \quad (1)$$

где  $\theta_w$  – угол клина.

Из (1) видим, что продольное волновое число возбуждающего поля комплексное, вещественная и мнимая части которого зависят от угла падения на клин и от угла клина. Тем самым существует возможность достижения специфического резонанса, когда имеет место равенство  $n_{x1}$  и комплексной постоянной распространения ПП.

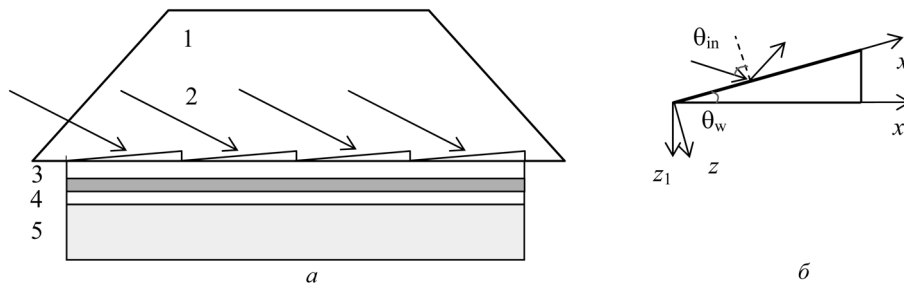


Рис. 1. Оптическая схема возбуждения поверхностных плазмонов наклонной эванесцентной волной: 1 – призма ПВО; 2 – возбуждающий световой пучок; 3 – переходный диэлектрический слой с клиновидной верхней поверхностью; 4 – слоистая МД-структура (плоская линза); 5 – выходная среда.  $\theta_{in}$  – угол падения на поверхность клина;  $\theta_w$  – угол клина;  $(x, z)$  и  $(x_1, z_1)$  – декартовы системы координат, связанные с клином и плоской линзой

При использовании матричного метода основной рассчитываемой величиной является матрица передачи слоистой системы  $\widehat{M}(n_x, \theta_w)$ . Если эта матрица известна, то амплитудные коэффициенты пропускания ( $t$ ) и отражения ( $r$ ) полей определяются по формулам  $t = M_{1,1}^{-1}$ ,  $r = M_{2,1} / M_{1,1}$ . КР по определению имеет место при таких значениях  $n_x = n_{x,\text{res}}$  и  $\theta_w = \theta_{w,\text{res}}$ , которые являются решением уравнения  $M_{1,1}(n_x, \theta_w) = 0$ . Отметим, что величина  $n_{x,\text{res}}$  здесь не является комплексной, так как относится к границе призма–клиновидный промежуточный слой. Как видим, в условиях КР имеет место полюс в коэффициентах пропускания и отражения. Поиск резонанса проводился численно сканированием плоскости  $(n_x, \theta_w)$  и определением точки, в которой имеет место максимум интенсивности выходного поля  $I_t(n_x, \theta_w)$  или же функции пропускания по интенсивности  $T(n_x, \theta_w)$ . Поиск показал, что в рассматриваемой схеме действительно наблюдается резкий пик функции  $T(n_x, \theta_w)$ . На рис. 2 показаны два одномерных сечения поверхности  $\log(T(n_x, \theta_w))$  плоскостями  $\theta_w = \theta_{\text{res}}$  и  $n_x = n_{x,\text{res}}$ , где  $n_{x,\text{res}} \approx 1,6604$  и  $\theta_{\text{res}} \approx 0,0141$ , или 0,81 град. Приведенное значение  $n_{x,\text{res}}$  соответствует углу падения  $\theta_{\text{in}} \approx 67,77$  град. Величины  $n_{x,\text{res}}$  и  $\theta_w$  являются приближенными и могут быть уточнены при увеличении точности численного расчета.

Как и ожидалось, максимальная интенсивность света на выходе при приближении к резонансу неограниченно растет с увеличением точности расчета, т. е. имеет место полюс функции пропускания  $T(n_x, \theta)$ . К примеру, на приведенном графике максимальное значение  $T(n_x, \theta)$  равно 8 в логарифмическом масштабе.

Ясно, что непосредственное принятие подобных результатов невозможно из-за нарушения закона сохранения энергии. Поэтому далее будут приведены соображения, позволяющие, по нашему мнению, привести результаты к физически обоснованным. Несложно видеть, что недостаток приведенного выше формализма состоит в том, что волновое число  $k_x$  (или  $n_x$ ) предполагается заданным точно. Однако при этом игнорируется неустранимая неопределенность волнового числа, выражаемая известной формулой  $\Delta n_H \approx \lambda / L$ , где  $L$  – размер апертуры, поперечно ограничивающей падающую плоскую волну. Следовательно, точка полюса не может быть фиксирована, и поэтому функция  $I_t(n_{x,\text{res}}, \theta_{w,\text{res}})$  не может быть интерпретирована как интенсивность прошедшего света в точке резонанса. Далее вместо интенсивности будем использовать более фундаментальную величину – амплитуду, или компоненты векторов электрического и магнитного полей волны. Рассмотрим, например, продольную компоненту электрического поля  $E_{t,z_1}(n_x, \theta)$  прошедшей ТН-волны. Внутри области неопределенности эту компоненту поля будем считать находящейся в состоянии линейной суперпозиции, в которую включаются состояния со всеми возможными значениями волнового числа в пределах области неопределенности, т. е. при  $n_x = (n_{x,\text{res}} \pm \Delta n_H)$ . Применительно к непрерывному спектру состояний получим тогда, что эффективное поле в области неопределенности в окрестности полюса будет иметь вид

$$\bar{E}_{t,z_1}(\theta_{\text{res}}) = \frac{1}{2\Delta n_H} \int_{n_{x,\text{res}} - \Delta n_H}^{n_{x,\text{res}} + \Delta n_H} E_{t,z_1}(n_x, \theta_{\text{res}}) dn_x. \quad (2)$$

Остальные компоненты прошедшего и компоненты отраженного полей рассчитываются аналогично.

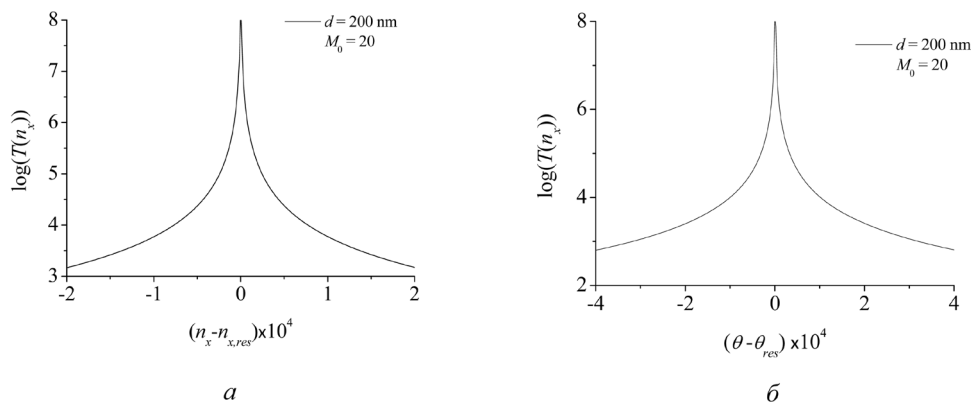


Рис. 2. Зависимость коэффициента пропускания плоской линзы от продольного волнового числа (а) и от угла наклона клина (б)

Используя (2) могут быть рассчитаны соответствующие интенсивность и мощность

$$\bar{I}_{t,z1}(\theta_{\text{res}}) = |\bar{E}_{t,z1}(\theta_{\text{res}})|^2 \quad \bar{P}_{t,z1}(\theta_{\text{res}}) = |\bar{E}_{t,z1}(\theta_{\text{res}})|^2 2\Delta n_H. \quad (3)$$

Отметим, что хотя формула для мощности в последней формуле относится к спектральным компонентам, она описывает также мощность прошедшего поля в пространственной области, что следует из теоремы Парсеваля.

Источником неопределенности волнового числа в рассматриваемой схеме будем считать ограниченность поперечного размера клина, а также решетки клиньев в целом. Тогда из-за дифракции плоская падающая волна трансформируется в поле, описываемое в спектральной области функцией

$$A_{\text{in}}(n_x) = \frac{L}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}\left(\frac{k_0(n_x - n_{x0})L}{2}\right), \quad (4)$$

где  $n_{x0} = n_{\text{in}} \sin(\theta_0)$  – волновое число, соответствующее падающей плоской волне;  $L$  – длина клина. Формула (4) описывает простейший случай одной щели (одного клина). Для линейной цепочки клиньев (дифракционная решетка) спектральная функция равна

$$A_{\text{in}}(n_x) = \frac{L}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}\left(\frac{\pi(n_x - n_{x0})L}{\lambda}\right) \sum_{m=-M_0}^{M_0} \exp\left(-\frac{2\pi i(n_x - n_{x0})m\Lambda}{\lambda}\right), \quad (5)$$

где число клиньев равно  $2M_0 + 1$ ;  $\Lambda = L + h$  – период решетки;  $h$  – ширина непрозрачного участка, разделяющего клинья.

Величина  $\Delta n_H$ , приведенная выше, соответствует первому нулю функции (4). В случае решетки применялась формула  $\Delta n_H \approx \lambda / (2M_0 + 1)\Lambda$ , где число  $(2M_0 + 1)$  равно количеству клиньев.

Расчет по формулам (2), (3) проводился численно. Интегрирование осуществлялось методом Ромберга для быстро растущих функций с сингулярной конечной точкой и также методом теории вычетов. В пределах погрешности численного расчета оба метода дают совпадающие результаты.

Результат расчета коэффициентов усиления локальной мощности для проходящего и отраженного полей и их зависимости от отклонения угла клина от резонансного значения показан на рис. 3. Здесь принималось  $M_0 = 5$ ,  $d = 150$  нм.

Из рис. 3 видим, что максимальное усиление прошедшего поля в рассматриваемой схеме относительно велико. Для сравнения, в соответствующей рис. 1 обычной схеме Отто усиление равно примерно 5. Следовательно, относительное увеличение локальной мощности может достигать здесь нескольких сотен. Однако следует иметь в виду, что усиление значительно падает при неточной величине угла клина (рис. 3, а), т. е. при  $\Delta\theta = \theta - \theta_{\text{res}} \neq 0$ . Так, при  $\Delta\theta \approx 0,5$  мрад усиление уменьшается в 4,6 раза. В целом закономерность такая, что уменьшение  $\Delta n_H$ , т. е. сужение спектра падающего поля, приводит к увеличению усиления только при уменьшении  $|\Delta\theta|$ .

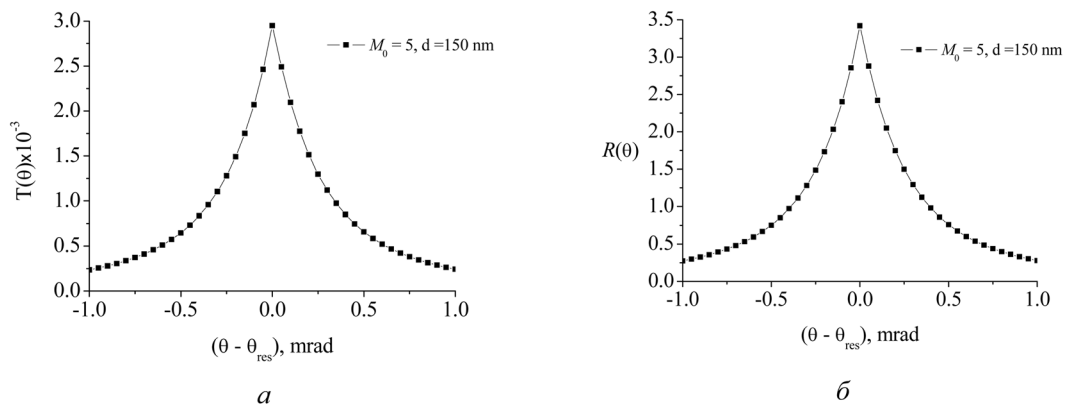


Рис. 3. Характерные значения коэффициентов усиления локальной мощности в проходящем (а) и отраженном свете (б) и их зависимость от отстройки угла конуса от резонансного. Схема содержит 11 клиньев, толщина плоского переходного слоя равна 150 нм

Усиление эванесцентного отраженного поля в рассматриваемом случае относительно мало (рис. 3, б). Однако это не является общей закономерностью. Расчет показал, что соотношение усиления в отраженном и проходящем полях можно регулировать путем изменения толщины  $d$  переходного слоя.

**Заключение.** В работе предложена модификация схемы Отто возбуждения плазмонов в слоистой структуре металл–диэлектрик. Основное ее отличие состоит в замене плоского переходного слоя слоем с клиновидной поверхностью. Модифицированная таким образом схема позволяет реализовать новый тип резонанса, который характеризуется совпадением двух комплексных величин – волнового числа возбуждающего поля и постоянной распространения поверхностного плазмона (так называемый комплексный резонанс (КР)). В условиях КР в френелевских коэффициентах пропускания и отражения появляется полюс, что формально приводит к бесконечной величине локальной интенсивности или мощности эванесцентных отраженного и проходящего полей.

Для восстановления конечности измеряемых величин привлечена идея о размытии точки полюса, неизбежно возникающем из-за неопределенности волнового числа. Описана процедура учета неопределенности, позволяющая устранить возникающие расходимости. Это позволило рассчитать усиление локального поля в условиях комплексного плазмонного резонанса. Оценка показала, что превышение усиления в рассматриваемой схеме в сравнении со стандартной схемой Отто может достигать двух порядков и выше. При этом для повышения усиления необходимо увеличение точности поддержания угла клина равным его резонансному значению.

Достоинством рассмотренной схемы в сравнении со схемами на основе локализованных плазмонов может быть сочетание в ней высокого усиления с плоской выходной поверхностью, что упрощает интерфейс с планарными схемами оптоэлектроники, интегральной и нелинейной оптики.

### Список использованной литературы

1. *Raether, H.* Surface plasmons on smooth and rough surfaces and on gratings / H. Raether. – Berlin: Springer, 1988.
2. *Майер, С. А.* Плазмоника: теория и приложения / С. А. Майер. – М.; Ижевск, 2011.
3. *Zayats, A. V.* Nano-optics of surface plasmon polaritons / A. V. Zayats, I. I. Smolyaninov, A. A. Maradudin // *Phys. Reports.* – 2004. – Vol. 408. – P. 131–314.
4. *Daghestani, H. N.* Theory and Applications of Surface Plasmon Resonance, Resonant Mirror, Resonant Waveguide Grating, and Dual Polarization Interferometry Biosensors. Review / H. N. Daghestani, B. W. Day // *Sensors.* – 2010. – Vol. 10. – P. 9630–9646.
5. *Otto, A.* Excitation of nonradiative surface plasma waves in silver by the method of frustrated total reflection / A. Otto // *Z. Phys.* – 1968. – Vol. 216. – P. 398–410.
6. *Kretschmann, E.* The determination of the Optical Constants of Metals by Excitation of Surface Plasmons / E. Kretschmann // *Z. Phys.* – 1971. – Vol. 241. – P. 313–324.
7. *Pendry, J. B.* Negative refraction makes a perfect lens / J. B. Pendry // *Phys. Rev. Lett.* – 2000. – Vol. 85. – P. 3966–3969.

Поступило в редакцию 15.06.2016

UDC 576:577:615.8:536.764

V. I. BAIKOV<sup>1</sup>, M. L. LEVIN<sup>1</sup>, N. V. GERASIMOVICH<sup>2</sup>, A. D. CHORNY<sup>1</sup>, A. A. MAKHANEK<sup>1</sup>

## SECOND-KIND PHASE TRANSITION IN HUMAN LYMPHOCYTES MEMBRANE STRUCTURES UNDER EXTREME GAS COLD EXPOSURE

(Communicated by Academician S. A. Chizhik)

<sup>1</sup>A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
baikov@hmti.ac.by; marklyn@belhard.com; anchor@hmti.ac.by; amakh@tut.by

<sup>2</sup>A. D. Sakharov International State Ecological Institute of the Belarusian State University, Minsk, Belarus  
nvgerasimovich@mail.ru

A thermodynamic analysis of the after-effects of low temperatures on the structural characteristics of membranes of peripheral blood lymphocytes of human was made. Structure changes in membranes are outlined using the theory of second-kind phase transitions. Based on the analysis made, the trend in raising the immunological status of the body of athletes after a whole-body cryotherapy course is explained from the viewpoint of decreasing a value of Young's modulus of peripheral blood lymphocytes, reducing the microviscosity of annular lipid of peripheral blood and of occurring processes similar to second-kind phase transitions in plasmic membranes of lymphocytes.

*Keywords:* cryotherapy, lymphocytes membrane, second-kind phase transition.

В. И. БАЙКОВ<sup>1</sup>, М. Л. ЛЕВИН<sup>1</sup>, Н. В. ГЕРАСИМОВИЧ<sup>2</sup>, А. Д. ЧОРНЫЙ<sup>1</sup>, А. А. МАХАНЕК<sup>1</sup>

## ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД ВТОРОГО РОДА В СТРУКТУРАХ МЕМБРАН ЛИМФОЦИТОВ ЧЕЛОВЕКА ПРИ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ ГАЗОВОМ ХОЛОДОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

<sup>1</sup>Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
baikov@hmti.ac.by; marklyn@belhard.com; anchor@hmti.ac.by; amakh@tut.by

<sup>2</sup>Международный государственный экологический институт им. А. Д. Сахарова БГУ, Минск, Беларусь  
nvgerasimovich@mail.ru

Проведен термодинамический анализ последствия влияния низких температур на структурные характеристики мембран лимфоцитов периферической крови организма человека. Структурные изменения мембран описаны следуя теории о фазовых переходах второго рода. На основе проведенного анализа тенденция повышения иммунологического статуса организма (на примере спортсменов) после прохождения курса общей криотерапии объясняется с точки зрения уменьшения значения модуля Юнга лимфоцитов периферической крови, снижения микровязкости аннулярного липида периферической крови и прохождением в плазматических мембранах лимфоцитов процессов, подобных фазовым переходам второго рода.

*Ключевые слова:* криотерапия, мембраны лимфоцитов, фазовый переход второго рода.

**Introduction.** Top-class sports at an elite level exerts an inhibitory effect on the immune system, which leads to the body's adaptation disturbances and, accordingly, to the decrease in sports results [1]. It is found that the frequency of acute and chronic diseases of athletes in top competition form sharply increases [2]. This reduces their athletic potential and the ability to achieve the best sports result. Thus, the immune system is one of the key systems that provide the body's healthy and normal metabolism during intense physical exercises [3]. The study of the mechanisms of the body's stability to the action of various physical factors is of great social and medical significance. Owing to this, of special interest are low-temperature treatment methods [4]. The application of whole-body gas cryotherapy (WBG) showed that in the first instance, it has a non-specific generally stimulating effect on the human body and allows the polar states of the most important body systems to be corrected [5]. For example, it is adopted to treat allergy and immunodeficiency. In this case, the scheme of procedures in the both cases is the same, but as a result, the activity of the immune system moves to the normal state of the human

body. The decisive role in the effects achieved is played by the receptor reaction and then by the vascular response to cooling [6]. The analysis of the dynamics of immunological indices of a cellular component shows that the body's immunological status raises after a course of whole-body cryotherapy of both men and women; at the same time, the gain of magnitude of their physical efficiency is seen [7; 8]. However the literature lacks for the information about the molecular mechanisms of the WBGC effects.

In this connection, the objective of the present work was to make a thermodynamic analysis of the after-effects of low temperatures on the structural characteristics of membranes of peripheral blood lymphocytes of donors.

**Materials and methods.** In works [9; 10], the influence of whole-body aerocryotherapy on the structural-functional state of the peripheral blood lymphocytes of elite athletes is analyzed.

Whole-body cryotherapy sessions took place in the Cryospice sauna of the Medizintechnik Firm (FRG). First, elite athletes in groups of 3–4 persons were for 30 sec in the pre-chamber with an air temperature of  $-60\text{ }^{\circ}\text{C}$ , then they entered the main chamber with a temperature of  $-110\text{ }^{\circ}\text{C}$  according to the recommendations [11] allowing for the individual characteristics of patients. The whole-body cryotherapy course included 10 procedures. The blood sampling was made prior to a WBGC course, just after it, and 3 weeks later. For tests, blood was sampled in 10 ml plastic tubes (EDTA was used as anticoagulant). Lymphocytes were isolated according to the standard methods [12]. The number of viable cells found from the trypan blue test (0.2 % solution of dye) was at least 96 % in control.

The elastic properties of the cellular membrane of peripheral blood lymphocytes were determined by the atomic-force microscopy method and were assessed with the use of Young's modulus  $E$  that characterizes the ability of a cell to deform (table 1).

**Table 1. Elastic properties of the cellular membrane of peripheral blood lymphocytes**

Index	Prior to WBGC course	After WBGC course	3 weeks later after WBGC course
$E$ , kPa	$197.89 \pm 23.49$	$98.59 \pm 16.25$	$150.37 \pm 20.73$

Many cells of the body respond to changing the environment through involving the internal adaptation mechanisms that have not been fully investigated up to now. Adaptation reactions of cells are either short, or long; in the first case, the adaptation is provided mainly by membrane mechanisms. It is found that the viable cell functions are strongly affected by the phase state of membrane lipids that ensure fluidity, stability, and permeability of biological membranes [13].

The analysis of the structure state of plasmic membranes of peripheral blood lymphocytes showed that the polarity values of annular lipid (PAL) and lipid bilayer (PLB) of lymphocyte membranes underwent cryotherapy practically did not change in comparison with those obtained prior to the low-temperature impact (table 2).

**Table 2. WBGC influence on the indices of the structure state of lymphocyte membranes, rel. unit**

Conditions	Index				Quenching degree of protein fluorescence, %
	Polarity		Microviscosity		
	annular lipid	lipid bilayer	annular lipid	lipid bilayer	
Prior to WBGC course	$0.76 \pm 0.04$	$0.96 \pm 0.2$	$0.68 \pm 0.02$	$0.70 \pm 0.01$	$41.38 \pm 4.82$
After WBGC course	$0.74 \pm 0.04$	$0.88 \pm 0.08$	$0.25 \pm 0.02^*$	$0.52 \pm 0.03^*$	$22.67 \pm 3.85^*$
3 weeks later after WBGC course	$0.75 \pm 0.01$	$1.09 \pm 0.05$	$0.20 \pm 0.03^*$	$0.54 \pm 0.04^*$	$18.86 \pm 5.20^*$

Note. \* – the values are reliable at  $p \leq 0.05$ .

The study of the microviscosity of annular lipid of plasma membranes of peripheral blood lymphocytes after cryotherapy revealed a reliable decrease in this index by a factor of more than 2.5 in comparison with its value prior to the temperature impact. It was also found that the degree of quenching tryptophan fluorescence due to pyrene decreased by a factor of approx. 2 in comparison with its value prior to cryotherapy. The similar behavior was observed 3 weeks later after WBGC (table 2).

It is known [13; 14] that in biological membranes the bilayer is micro heterogeneous, and the formation of lipid molecule clusters in this layer contributes to the emergence of such a phenomenon as phase separation in the membrane. Lateral separation of lipid molecules in the bilayer plane is an important feature of the membrane.

It is also shown [14] that a number of biophysical factors help change – increasing or decreasing a phase transition temperature in the membranes of peripheral blood lymphocytes of patients.

Based on the analysis of the experimental data [9; 10], the following conclusions can be made:

1. Significant differences in the indices of Young's modulus (twice) and the annular lipid microviscosity (by a factor of more than 2.5) of the cytoplasmic membrane of peripheral blood lymphocytes after a WBGC course in comparison with its value prior to the temperature impact reflect the changes in the molecular structure of the membrane that occur when affected by WBGC.

2. The changes in the structure of the lymphocytic membranes of human peripheral blood occur in the physiologic temperature region and persist for a long time.

Following Landau's theory [15], call such a change in the membrane structure the second-kind phase transition and describe it. The body's state changes at phase transitions. This state can be characterized by a certain internal parameter.

Represent a lymphocyte in the form of an isotropic solid cylinder of length  $L$  at elastic deformation conditions when acted upon by a tensile (compressive) external force  $f$ . The governing equation of thermodynamics for such a system, written in terms of the Gibbs energy, is of the form:

$$d\Phi(T, p, l) = -SdT + Vdp + fdl,$$

or in the alternative form

$$d\Phi^*(T, p, f) = -SdT + Vdp - ldf,$$

where the analog of the Gibbs energy  $\Phi^*(T, p, f) = \Phi(T, p, l) - f(l - l_0)$ .

It is obvious that the tensile (compressive) force  $f$  acting upon the cylinder can be expressed as follows:

$$f = \tau\Sigma, \quad (1)$$

where  $\Sigma$  is the cross-sectional area of the cylinder and  $\tau$  is the force per unit cross-sectional area (stress). In practice, the change in body sizes under deformation is usually expressed through a relative elongation:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}.$$

Here  $l_0$  and  $l$  is the cylinder length in the absence and in the presence of load, respectively.

The equation of state of an elastically deformable solid cylinder, which is widely used in the theory of elasticity, is represented by Hooke's law:

$$\tau = E\varepsilon, \quad (2)$$

where  $E$  is the modulus of elastic stresses (Young's modulus). Then for the analog of the Gibbs energy, taking into account formulas (1), (2), the expression is obtained:

$$\Phi^*(T, p, \tau) = \Phi(T, p, \varepsilon) - \tau\varepsilon V_0,$$

where  $V_0$  is the cylinder volume in the absence of load.

Now describe the behavior of lymphocytes. Experience shows that, when the physiological temperature  $\theta$  decreases, the state of lymphocytes changes continuously, but at some value of  $\theta$  lymphocytes acquire a qualitatively new property – Young's modulus  $E$  for them sharply decreases. Consider a lymphocyte near the temperature  $\theta$  when the change of Young's modulus is not happening yet. In this case, the relative elongation  $\varepsilon$  can be considered small and the function  $\Phi(T, p, \varepsilon)$  can be expanded in a power series of  $\varepsilon$ . This series will not contain odd powers since the Gibbs energy  $\Phi$  cannot depend on the sign of  $\varepsilon$ :  $\varepsilon > 0$  at tension,  $\varepsilon < 0$  at compression. Then not limiting to the terms not exceeding  $\varepsilon^4$ , we have

$$\Phi^*(T, p, \tau) = \Phi_0(T, p) + \frac{1}{2}\alpha(T, p)\varepsilon^2 + \frac{1}{4}\beta(T, p)\varepsilon^4 - \tau\varepsilon V_0. \quad (3)$$

The conditions of equilibrium and stability of such a thermodynamic system require the first derivative with respect to  $\varepsilon$  be equal to zero:

$$\frac{\partial\Phi^*}{\partial\varepsilon} = \alpha(T, p)\varepsilon + \beta(T, p)\varepsilon^3 - \tau V_0 = 0, \quad (4)$$

and the second derivative be greater than zero:

$$\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\varepsilon^2} = \alpha(T, p) + 3\beta(T, p)\varepsilon^2 > 0. \quad (5)$$

**Lymphocytes not exposed to stress ( $\tau = 0$ ).** Analyze the applied field influence on the properties of phase transition of lymphocytes. For lymphocytes not exposed to stress ( $\tau = 0$ ), from equation (4) we have

$$\varepsilon(\alpha + \beta\varepsilon^2) = 0.$$

This expression has two roots

$$\varepsilon = 0, \quad \varepsilon^2 = -\alpha/\beta.$$

If  $\alpha(T, p) > 0$ , then the state of equilibrium  $\varepsilon = 0$  is stable since for it

$$\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\varepsilon^2} = \alpha(T, p) > 0.$$

Therefore, at  $\alpha(T, p) > 0$  Young's modulus  $E$  does not change and phase transition is not observed. The second solution  $\varepsilon^2 = -\alpha/\beta$  in this case is unstable since for it

$$\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\varepsilon^2} = \alpha - 3\alpha = -2\alpha < 0.$$

For  $\alpha(T, p) < 0$  the solution becomes stable

$$\varepsilon = \sqrt{-\alpha/\beta},$$

provided that  $\beta(T, p) > 0$ . This is what we will assume. Thus, we have a spontaneous change of Young's modulus or the second-kind phase transition.

The equation  $\alpha(T, p) = 0$  yields the line of the points of the phase transition  $\theta(p)$  on the  $(T, p)$  plane. For temperatures  $T$  close the phase transition temperature  $\theta$ , it can be assumed

$$\alpha(T, p) = \alpha'(p)(T - \theta),$$

at that  $\alpha'(p) > 0$ . The coefficient  $\beta(T, p)$  can be replaced by  $\beta(p) = \beta(\theta, p)$ . Expansion (3) then assumes the form:

$$\Phi^*(T, p, \tau) = \Phi(T, p) + \frac{1}{2}\alpha'(p)(T - \theta)\varepsilon^2 + \frac{1}{4}\beta(p)\varepsilon^4 - \tau\varepsilon V_0. \quad (6)$$

It is known that second-kind phase transitions are characterized by a specific heat jump. Define this jump in the considered case, i.e., at  $\tau = 0$ . Then proceeding from equation (6) and considering relation (4), we arrive at:

$$S = -\frac{\partial\Phi^*}{\partial T} = \left(\frac{\partial\Phi^*}{\partial T}\right) + \left(\frac{\partial\Phi^*}{\partial\varepsilon}\right)\left(\frac{d\varepsilon}{dT}\right) = -\frac{\partial\Phi}{\partial T} - \frac{1}{2}\alpha'(p)\varepsilon^2 = S_0 - \frac{1}{2}\alpha'(p)\varepsilon^2.$$

In the phase where Young's modulus does not change, we have  $\varepsilon = 0$  and  $S = S_0$  and in the phase where it changes, we obtain:

$$\varepsilon^2 = -\frac{\alpha'(p)}{\beta(p)}(T - \theta) \quad (7)$$



and

$$S = S_0 + \frac{\alpha'(p)}{2\beta(p)}(T - \theta). \quad (8)$$

Directly at the phase transition point, expression (8) reduces to  $S = S_0$ . Now the heat capacity of the both phases at the transition point for  $p$  and  $\tau$  ( $\tau = 0$ ) can be determined as:

$$C_P = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p.$$

For the phase where Young's modulus changes, upon differentiation of expression (8), we have:

$$C_P = C_{P0} + \frac{\alpha'^2(p)}{2\beta(p)}\theta.$$

For the phase where Young's modulus does not change,  $S = S_0$  and hence  $C_P = C_{P0}$ . Hence, the heat capacity jump is found

$$C_P - C_{P0} = \frac{\alpha'^2(p)}{2\beta(p)}\theta.$$

Since  $\alpha'(p) > 0$  and  $\beta(p) > 0$ , at the transition point  $C_P > C_{P0}$ , i. e., heat capacity grows.

**Lymphocytes exposed to stress ( $\tau \neq 0$ ).** Consider how the properties of phase transition of lymphocytes exposed to the action of the tensile (compressive) applied field  $\tau$  change. In this case, we should proceed from expansion (6) showing that the condition of equilibrium (4) of such a system is of the form:

$$\alpha'(p)(T - \theta)\varepsilon + \beta(p)\varepsilon^3 = \tau V_0. \quad (9)$$

Then, an arbitrarily small force  $\tau$  leads to the fact that the parameter  $\varepsilon$  becomes different from zero over the entire temperature range, i.e., the difference between the both phases disappears. Hence, a discrete point of phase transition also disappears – transition ‘diffuses’. In particular, instead of the heat capacity jump there appears an anomaly existing within some temperature interval. Assess the order of magnitude of this interval. We will proceed from the requirement  $\alpha'(p)(T - \theta)\varepsilon \sim \tau V_0$ .

The value of the parameter  $\varepsilon$  will be defined from formula (7):

$$\varepsilon \sim \sqrt{\frac{\alpha'(p)}{\beta(p)}(T - \theta)}.$$

Then we will have (fig. 1)

$$T - \theta \sim \tau^{2/3} \frac{\beta^{1/3}(p)V_0^{2/3}}{\alpha'(p)}.$$

To analyze the phase transition quantitatively, the conditions of equilibrium (9) and stability (5) must be studied. Define the susceptibility of lymphocytes to the action of the applied field as a derivative

$$\xi = \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_{\tau \rightarrow 0}.$$

Differentiating relation (9) yields

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = \frac{V_0}{\alpha'(p)(T - \theta) + 3\beta(p)\varepsilon^2}.$$

From here, as  $\tau \rightarrow 0$ , for the phase where Young's modulus for lymphocytes does not change, i. e.,  $\varepsilon = 0$  and  $\theta > T$ , we obtain

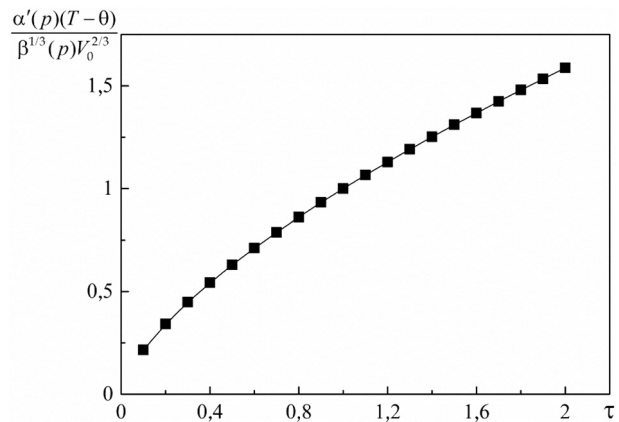


Fig. 1. Anomaly of the temperature range of heat capacity jump vs. the applied field action

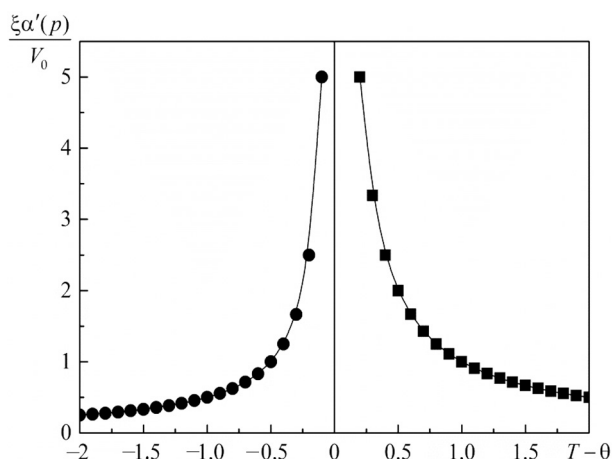


Fig. 2. Lymphocyte susceptibility vs. the difference between the considered temperature and the phase transition temperature

$$\xi = -\frac{V_0}{2\alpha'(p)(T - \theta)}$$

Hence, the susceptibility of lymphocytes to the action of the applied field is inversely proportional to the difference between the temperature considered and the phase transition temperature (fig. 2).

Thus, it seems possible to follow the trend: raising the immunological status of the body of athletes after a whole-body cryotherapy course → decreasing a value of Young's modulus of peripheral blood lymphocytes → reducing the microviscosity of annular lipid of peripheral blood → second-kind phase transition in plasmic membranes of lymphocytes.

Tables 1 and 2 demonstrate that after the WBGC course, the structural and mechanical properties of membranes gradually return to their initial state. It can be assumed that the thermodynamic state of cell membrane structures under the action of extreme cold exposure to the human body is unstable.

Within the framework of the above-mentioned approach it is assumed to study the dependence of the second-kind phase transition temperature and the change of the heat capacity of structure components of blood cell membranes on the concentration of certain biochemical substances [14] determined on the basis of the common blood analysis and the hormone and immune status of patients undergone the WBGC course.

## References

1. *Suzdalnitsky, R. S.* Manifestation of immunodificient states in sports and their corrections / R. S. Suzdalnitsky // Selected Lectures on Sports Medicine. – Moscow: Natyurmort, 2003. – P. 119–134.
2. *Mackinnon, L. T.* Immunity in athletes / L. N. Mackinnon // Int. J. Sports Med. – 1997. – Vol. 18, N 1. – P. 62–68.
3. *Taimazov, V. A.* Sports and immunity / V. A. Taimazov, V. N. Tsygan, E. G. Mokeeva. – Saint-Petersburg: Olimp, 2003. – 200 p.
4. *Portnov, V. V.* Whole-body and local air-cryotherapy / V. V. Portnov // 2nd revised, expanded ed. – Moscow, 2008. – 51 p.
5. *Kiryanova, V. V.* Clinical aspects of use of whole-body cryotherapy / V. V. Kiryanova // Proc. II Scientific-Practical Conference “Cryotherapy in Russia”, 14 May 2009. – Saint-Petersburg, 2009. – P. 127–131.
6. *Belous, A. M.* Cryobiology / A. M. Belous, V. I. Grishchenko. – Kiev: Navukova dumka, 1994. – 432 p.
7. *Dragun, V. L.* Cryotherapy is a new method of increasing the physical performance and adaptative capabilities of the body / V. L. Dragun, M. L. Levin, E. A. Lositsky // Ekolog. Vest. – 2011. – Vol. 17, N 3. – P. 68–74.
8. Whole-body cryotherapy in athletes / G. Banfi [et al.] // Sports Med. – 2010. – P. 509–517.
9. Influence of whole-body aerocryotherapy on the structural and functional state of membranes of peripheral blood lymphocytes of athletes / M. L. Levin [et al.] // VI International Scientific-Practical Conference “Cryotherapy in Russia”, 16 May 2013. – Saint-Petersburg, 2013. – P. 44–50.
10. Physical-chemical characteristics of membranes of peripheral blood lymphocytes upon whole-body cryotherapy / N. V. Gerasimovich [et al.] // Ekolog. Vest. – 2014. – Vol. 28, N 2. – P. 50–53.
11. A way of increasing the physical performance of an athlete (variants) / V. L. Dragun [et al.] // Eurasian Patent No. 019337. – Date of Grant of Patent 28.02.2014 // EAPO Bulletin “Inventions (Eurasian Applications and Patents)”. – 2014. – N 2.
12. Lymphocytes. Methods / ed. G. G. Klaus. – Oxford: Oxford University Press, 1990.
13. *Gennis, R. B.* Biomembranes: molecular structure and functions / R. B. Gennis. – New York: Springer-Verlag, 1997.
14. *Kharakoz, D. P.* On a possible role of the “liquid–solid” phase transition in biological membranes / D. P. Kharakoz // Uspekhi Biologicheskoi Khimii. – 2001. – N 41. – P. 333–364.
15. *Landau, L. D.* Statistical physics / L. D. Landau, E. M. Lifshits. – Moscow: Nauka Press, 1976. – 583 p.

Received 30.05.2016

УДК 539.12

Е. М. ОВСИЮК<sup>1</sup>, О. В. ВЕКО<sup>2</sup>, Я. А. ВОЙНОВА<sup>3</sup>, В. В. КИСЕЛЬ<sup>4</sup>, В. М. РЕДЬКОВ<sup>5</sup>

**КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ЭЛЕКТРОНА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ,  
УЧЕТ АНОМАЛЬНОГО МАГНИТНОГО МОМЕНТА**

(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)

<sup>1</sup>Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Беларусь

e.ovsiyuk@mail.ru

<sup>2</sup>Гимназия г. Калинковичи, Калинковичи, Беларусь

vekolga@mail.ru

<sup>3</sup>Кочищанская средняя школа Ельского района, Беларусь

voinyuschka@mail.ru

<sup>4</sup>Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

vasiliy\_bspu@mail.ru

<sup>5</sup>Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь

v.redkov@dragon.bas-net.by

Уравнение Дирака для частицы со спином 1/2 и аномальным магнитным моментом решено в присутствии внешнего однородного магнитного поля. После разделения переменных задача сведена к обыкновенным дифференциальным уравнениям 4-го порядка, они решены с использованием метода факторизации. Выведены обобщенные формулы, описывающие уровни Ландау для частицы со спином половина в магнитном поле, учитывающие наличие у частицы аномального магнитного момента. Построены соответствующие волновые функции.

*Ключевые слова:* электрон, аномальный магнитный момент, магнитное поле, точные решения.

E. M. OVSIYUK<sup>1</sup>, O. V. VEKO<sup>2</sup>, Y. A. VOYNOVA<sup>3</sup>, V. V. KISEL<sup>4</sup>, V. M. RED'KOV<sup>5</sup>

**QUANTUM MECHANICS OF THE ELECTRON IN THE MAGNETIC FIELD,  
TAKING INTO ACCOUNT OF THE ANOMALOUS MAGNETIC MOMENT**

<sup>1</sup>Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Belarus

e.ovsiyuk@mail.ru

<sup>2</sup>Gymnasium, Kalinkovichi, Belarus

vekolga@mail.ru

<sup>3</sup>Secondary school, Kochischany, Yelsk region, Belarus

voinyuschka@mail.ru

<sup>4</sup>Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

vasiliy\_bspu@mail.ru

<sup>5</sup>B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

v.redkov@dragon.bas-net.by

The Dirac equation for spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment is solved in presence of the external uniform magnetic field. After separation of the variables, the problem is reduced to a 4-order ordinary differential equation, which is solved exactly with the use of the factorization method. A generalized formulas for Landau energy levels are found. Solutions are expressed in terms of confluent hypergeometric functions.

*Keywords:* electron, anomalous magnetic moment, magnetic field, exact solutions.

Уравнение Дирака для частицы со спином 1/2 с аномальным магнитным моментом в римановом пространстве–времени (при использовании тетрадного формализма) может быть представлено в виде [1–3]

$$\left\{ \gamma^c \left[ i \left( e_{(c)}^\beta \partial_\beta + \frac{1}{2} \sigma^{ab} \gamma_{abc} \right) - \frac{e}{\hbar c} A_c \right] - i\lambda \frac{2e}{Mc^2} \sigma^{\alpha\beta}(x) F_{\alpha\beta}(x) - \frac{Mc}{\hbar} \right\} \Psi = 0. \quad (1)$$

Отметим, размерности входящих в уравнение величин:

$$\left[ \frac{Mc}{\hbar} \right] = l^{-1}, \quad \left[ \frac{e}{\hbar c} A \right] = l^{-1}, \quad \left[ \frac{e}{\hbar c} F \right] = l^{-2}, \quad \left[ \frac{eF}{Mc^2} \right] = l^{-1};$$

соответственно свободный параметр  $\lambda$  – безразмерный. Рассмотрим это уравнение в однородном магнитном поле с использованием цилиндрических координат и тетрады. С учетом равенства

$$\sigma^{\alpha\beta}(x)F_{\alpha\beta}(x) = 2\sigma^{\phi r}F_{\phi r} = i\gamma^2\gamma^1B = iB\Sigma_3$$

получаем (пусть  $\Psi = \varphi / \sqrt{r}$ ):

$$\left[ i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} + \gamma^2 \left( \frac{i\partial_\phi}{r} + \frac{eBr}{2} \right) + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} + \lambda \frac{2eB}{Mc^2} \Sigma_3 - \frac{Mc}{\hbar} \right] \varphi = 0. \quad (2)$$

Подстановка для волновой функции следующая:

$$\varphi = e^{-i\epsilon t} e^{im\phi} e^{ikz} \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \\ f_3(r) \\ f_4(r) \end{pmatrix}, \quad \left[ \epsilon\gamma^0 + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} - \gamma^2 \mu(r) - k\gamma^3 + \Gamma\Sigma_3 - M \right] \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \\ f_3(r) \\ f_4(r) \end{pmatrix} = 0, \quad (3)$$

где использованы обозначения

$$\frac{m}{r} - \frac{eBr}{2} \Rightarrow \mu(r), \quad \lambda \frac{2eB}{Mc^2} \Rightarrow \Gamma, \quad \frac{Mc}{\hbar} \Rightarrow M, \quad \frac{\epsilon}{\hbar c} \Rightarrow \epsilon. \quad (4)$$

Далее, учитывая явный вид матриц Дирака в спинорном представлении, получаем 4 радиальных уравнения

$$\begin{aligned} -i \left( \frac{d}{dr} + \mu \right) f_4 + (\epsilon + k) f_3 + (\Gamma - M) f_1 &= 0, & -i \left( \frac{d}{dr} - \mu \right) f_3 + (\epsilon - k) f_4 - (\Gamma + M) f_2 &= 0, \\ +i \left( \frac{d}{dr} + \mu \right) f_2 + (\epsilon - k) f_1 + (\Gamma - M) f_3 &= 0, & +i \left( \frac{d}{dr} - \mu \right) f_1 + (\epsilon + k) f_2 - (\Gamma + M) f_4 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Пробуем наложить линейное ограничение (по аналогии со случаем частицы без аномального магнитного момента)  $f_3 = Af_1$ ,  $f_4 = Af_2$ ; уравнения (5) принимают вид

$$\begin{aligned} -i \left( \frac{d}{dr} + \mu \right) f_2 + \left[ \epsilon + k + \frac{(\Gamma - M)}{A} \right] f_1 &= 0, & +i \left( \frac{d}{dr} + \mu \right) f_2 + [\epsilon - k + (\Gamma - M)A] f_1 &= 0, \\ -i \left( \frac{d}{dr} - \mu \right) f_1 + \left[ \epsilon - k - \frac{(\Gamma + M)}{A} \right] f_2 &= 0, & +i \left( \frac{d}{dr} - \mu \right) f_1 + [\epsilon + k - (\Gamma + M)A] f_2 &= 0. \end{aligned}$$

Здесь (1) и (3), а также (2) и (4) будут совпадать, если выполняются соотношения

$$\epsilon + k + \frac{(\Gamma - M)}{A} = -[\epsilon - k + (\Gamma - M)A], \quad \epsilon - k - \frac{(\Gamma + M)}{A} = -[\epsilon + k - (\Gamma + M)A];$$

их можно переписать так:

$$2\epsilon = (M - \Gamma) \left( A + \frac{1}{A} \right), \quad 2\epsilon = (M + \Gamma) \left( A + \frac{1}{A} \right).$$

Очевидно, что эти уравнения не совместны. Таким образом, при учете взаимодействия через аномальный магнитный момент невозможно диагонализировать оператор спиральности. Вследствие этого, возникающая система четырех зацепляющихся уравнений первого порядка (5) является сложной для анализа

Обратимся к полученным четырем уравнениям, их можно представить в виде двух линейных систем:

$$(\Gamma - M)f_1 + (\epsilon + k)f_3 = i \left( \frac{d}{dr} + \mu \right) f_4 = iD_+ f_4,$$

$$\begin{aligned}
+(\varepsilon - k)f_1 + (\Gamma - M)f_3 &= -i\left(\frac{d}{dr} + \mu\right)f_2 = -iD_+f_2, \\
-(\Gamma + M)f_2 + (\varepsilon - k)f_4 &= i\left(\frac{d}{dr} - \mu\right)f_3 = iD_-f_3, \\
+(\varepsilon + k)f_2 - (\Gamma + M)f_4 &= -i\left(\frac{d}{dr} - \mu\right)f_1 = -iD_-f_1.
\end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}
f_1 &= +i\frac{(\varepsilon + k)D_+f_2 + (\Gamma - M)D_+f_4}{(\Gamma - M)^2 - (\varepsilon^2 - k^2)}, \quad f_3 = -i\frac{(\Gamma - M)D_+f_2 + (\varepsilon - k)D_+f_4}{(\Gamma - M)^2 - (\varepsilon^2 - k^2)}; \\
f_2 &= +i\frac{(\varepsilon - k)D_-f_1 - (\Gamma + M)D_-f_3}{(\Gamma + M)^2 - (\varepsilon^2 - k^2)}, \quad f_4 = -i\frac{-(\Gamma + M)D_-f_1 + (\varepsilon + k)D_-f_3}{(\Gamma + M)^2 - (\varepsilon^2 - k^2)}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Отмечаем равенства

$$D_+D_- = \frac{d^2}{dr^2} - \mu' - \mu^2, \quad D_-D_+ = \frac{d^2}{dr^2} + \mu' - \mu^2.$$

С помощью (6) исключим переменные  $f_1, f_3$  в уравнениях выше:

$$\begin{aligned}
-\frac{\Gamma + M}{\Gamma - M}f_2 + \frac{\varepsilon - k}{\Gamma - M}f_4 &= \frac{D_-D_+f_2}{(\Gamma - M)^2 - (\varepsilon^2 - k^2)} + \frac{\varepsilon - k}{\Gamma - M}\frac{D_-D_+f_4}{(\Gamma - M)^2 - (\varepsilon^2 - k^2)}, \\
f_2 - \frac{\Gamma + M}{\varepsilon + k}f_4 &= \frac{D_-D_+f_2}{(\Gamma - M)^2 - (\varepsilon^2 - k^2)} + \frac{\Gamma - M}{\varepsilon + k}\frac{D_-D_+f_4}{(\Gamma - M)^2 - (\varepsilon^2 - k^2)}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Вычтем из первого уравнения второе, отсюда следует

$$f_2 = \frac{1}{2\Gamma(\varepsilon + k)}\left(\Gamma^2 - M^2 - k^2 + \varepsilon^2 + \frac{d^2}{dr^2} + \mu' - \mu^2\right)f_4.$$

Полученное выражение для  $f_2$  подставим в первое уравнение (7):

$$\begin{aligned}
-\frac{d^4f_4}{dr^4} + \left[\frac{e^2B^2}{2}r^2 - eB(2m-1) - 2(\Gamma^2 - M^2 - k^2 + \varepsilon^2) + 2\frac{m(m+1)}{r^2}\right]\frac{d^2f_4}{dr^2} + \\
\left[e^2B^2r - 4\frac{m(m+1)}{r^3}\right]\frac{df_4}{dr} + \left[-\frac{e^4B^4}{16}r^4 + \frac{e^2B^2}{4}(eB(2m-1) + 2(\Gamma^2 - M^2 - k^2 + \varepsilon^2))r^2 - \right. \\
\left. eB(2m-1)(\Gamma^2 - M^2 - k^2 + \varepsilon^2) - (\Gamma^2 + M^2 + k^2 - \varepsilon^2)^2 + 4\Gamma^2M^2 - \frac{e^2B^2}{4}(6m^2 - 2m - 1) + \right. \\
\left. \frac{m(m+1)(eB(2m-1) + 2(\Gamma^2 - M^2 - k^2 + \varepsilon^2))}{r^2} - \frac{m(m-2)(m+3)(m+1)}{r^4}\right]f_4 = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Можно получить уравнение 4-го порядка для функции  $f_2$ . Для этого (7) представим в виде

$$\begin{aligned}
-\frac{\Gamma + M}{\varepsilon - k}f_2 + f_4 &= \frac{1}{\varepsilon - k}\frac{(\Gamma - M)D_-D_+f_2}{(\Gamma - M)^2 - (\varepsilon^2 - k^2)} + \frac{D_-D_+f_4}{(\Gamma - M)^2 - (\varepsilon^2 - k^2)}, \\
\frac{\varepsilon + k}{\Gamma - M}f_2 - \frac{\Gamma + M}{\Gamma - M}f_4 &= \frac{1}{\Gamma - M}\frac{(\varepsilon + k)D_-D_+f_2}{(\Gamma - M)^2 - (\varepsilon^2 - k^2)} + \frac{D_-D_+f_4}{(\Gamma - M)^2 - (\varepsilon^2 - k^2)}.
\end{aligned}$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим

$$f_4 = \frac{1}{2\Gamma(\varepsilon - k)}\left(\Gamma^2 - M^2 - k^2 + \varepsilon^2 + \frac{d^2}{dr^2} + \mu' - \mu^2\right)f_2.$$

Полученное выражение для  $f_4$  подставим во второе уравнение (7)

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 f_2}{dr^4} + \left[ -\frac{e^2 B^2}{2} r^2 + eB(2m-1) + 2(\Gamma^2 - M^2 - k^2 + \varepsilon^2) - 2\frac{m(m+1)}{r^2} \right] \frac{d^2 f_2}{dr^2} + \\ & \left[ -e^2 B^2 r + 4\frac{m(m+1)}{r^3} \right] \frac{df_2}{dr} + \left[ \frac{e^4 B^4}{16} r^4 - \frac{e^2 B^2}{4} (eB(2m-1) + 2(\Gamma^2 - M^2 - k^2 + \varepsilon^2)) r^2 + \right. \\ & eB(2m-1)(\Gamma^2 - M^2 - k^2 + \varepsilon^2) + (\Gamma^2 + M^2 + k^2 - \varepsilon^2)^2 - 4\Gamma^2 M^2 + \frac{e^2 B^2}{4} (6m^2 - 2m - 1) - \\ & \left. \frac{m(m+1)(eB(2m-1) + 2(\Gamma^2 - M^2 - k^2 + \varepsilon^2))}{r^2} + \frac{m(m-2)(m+3)(m+1)}{r^4} \right] f_2 = 0. \end{aligned}$$

Замечаем, что уравнения для  $f_2$  и  $f_4$  одинаковы. Поэтому достаточно рассмотреть одно из них. Для исследования уравнения 4-го порядка будем использовать метод факторизации:

$$\widehat{F}_4(r) f(r) = \widehat{f}_2(r) \widehat{g}_2(r) f(r) = 0,$$

$$\widehat{f}_2(r) \equiv \frac{d^2}{dr^2} + P_0 r^2 + P_1 + \frac{P_2}{r^2}, \quad \widehat{g}_2(r) = \frac{d^2}{dr^2} + Q_0 r^2 + Q_1 + \frac{Q_2}{r^2}.$$

Вычислив оператор

$$\widehat{F}_4 = \left[ \frac{d^2}{dr^2} + P_0 r^2 + P_1 + \frac{P_2}{r^2} \right] \left[ \frac{d^2}{dr^2} + Q_0 r^2 + Q_1 + \frac{Q_2}{r^2} \right]$$

и сопоставив с оператором из (8), найдем два набора числовых коэффициентов:

$$1) \quad P_0 = -\frac{1}{4} B^2 e^2, \quad P_2 = -m(m+1),$$

$$P_1 = eB \left( m - \frac{1}{2} \right) + \Gamma^2 - M^2 - k^2 + \varepsilon^2 + 2\Gamma \sqrt{\varepsilon^2 - k^2},$$

$$Q_0 = -\frac{1}{4} B^2 e^2, \quad Q_2 = -m(m+1),$$

$$Q_1 = eB \left( m - \frac{1}{2} \right) + \Gamma^2 - M^2 - k^2 + \varepsilon^2 - 2\Gamma \sqrt{\varepsilon^2 - k^2};$$

и

$$2) \quad P_0 = -\frac{1}{4} B^2 e^2, \quad P_2 = -m(m+1),$$

$$P_1 = eB \left( m - \frac{1}{2} \right) + \Gamma^2 - M^2 - k^2 + \varepsilon^2 - 2\Gamma \sqrt{\varepsilon^2 - k^2},$$

$$Q_0 = -\frac{1}{4} B^2 e^2, \quad Q_2 = -m(m+1),$$

$$Q_1 = eB \left( m - \frac{1}{2} \right) + \Gamma^2 - M^2 - k^2 + \varepsilon^2 + 2\Gamma \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}.$$

Таким образом, предстоит решить два дифференциальных уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{B^2 e^2 r^2}{4} + eB \left( m - \frac{1}{2} \right) + \Gamma^2 - M^2 - k^2 + \varepsilon^2 + \right. \\ & \left. 2\Gamma \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} - \frac{m(m+1)}{r^2} \right) f = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{B^2 e^2 r^2}{4} + eB \left( m - \frac{1}{2} \right) + \Gamma^2 - M^2 - k^2 + \varepsilon^2 - 2\Gamma \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} - \frac{m(m+1)}{r^2} \right) g = 0.$$

Рассмотрим первое уравнение (9). Перейдем в нем к переменной  $x = eBr^2 / 2$ :

$$\left[ x \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{df}{dx} + \left[ -\frac{x}{4} + \frac{4\Gamma \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} + (2m-1)eB + 2(\Gamma^2 - M^2 - k^2 + \varepsilon^2)}{4eB} - \frac{1}{4} \frac{m(m+1)}{x} \right] f \right] = 0.$$

Будем искать решение в виде  $f = x^a e^{bx} F$ :

$$\begin{aligned} & x \frac{d^2 F}{dx^2} + \left( \frac{1}{2} + 2a + 2bx \right) \frac{dF}{dx} + \left[ \left( b^2 - \frac{1}{4} \right) x + \right. \\ & \left. \frac{2eBb(4a+1) + 4\Gamma \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} + (2m-1)eB + 2(\Gamma^2 - M^2 - k^2 + \varepsilon^2)}{4eB} + \right. \\ & \left. \frac{1}{4} \frac{(2a+m)(2a-m-1)}{x} \right] F = 0. \end{aligned}$$

При  $a, b$ , выбранных согласно

$$a = -\frac{1}{2}m, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2}m, \quad b = -\frac{1}{2},$$

уравнение упрощается

$$\begin{aligned} & x \frac{d^2 F}{dx^2} + \left( \frac{1}{2} + 2a - x \right) \frac{dF}{dx} - \\ & \frac{eB(4a+1) - 4\Gamma \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} - (2m-1)eB - 2(\Gamma^2 - M^2 - k^2 + \varepsilon^2)}{4eB} F = 0 \end{aligned}$$

и является уравнением для вырожденной гипергеометрической функции с параметрами

$$\alpha = \frac{eB(4a+1) - 4\Gamma \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} - (2m-1)eB - 2(\Gamma^2 - M^2 - k^2 + \varepsilon^2)}{4eB}, \quad \gamma = \frac{1}{2} + 2a.$$

Чтобы построить решения, отвечающие связанным состояниям, следует использовать положительные значения параметра  $a$  и отрицательные значения параметра  $b$  (для определенности предполагаем, что  $eB > 0$ ):

$$a = -\frac{m}{2}, \quad (m < 0);$$

$$a = \frac{m}{2} + \frac{1}{2} > 0 \quad (m \geq 0).$$

Условие обрыва ряда до полинома  $\alpha = -n$  (пусть  $\varepsilon^2 - k^2 = \lambda$ ) или

$$\frac{eB(4a+1) - 4\Gamma \sqrt{\lambda} - (2m-1)eB - 2(\Gamma^2 - M^2) - 2\lambda}{4eB} = -n$$

даст правило квантования для значений энергии:

$$a + \frac{1}{2} - \frac{m}{2} + \frac{M^2 - \Gamma^2}{2eB} + n = \frac{\Gamma \sqrt{\lambda}}{eB} + \frac{\lambda}{2eB}.$$

Отсюда получаем

$$(\sqrt{\lambda} + \Gamma)^2 = N, \quad N = M^2 + 2eB \left( a + \frac{1}{2} - \frac{m}{2} + n \right), \quad \lambda = (\sqrt{N} - \Gamma)^2 > 0.$$

Далее находим формулу для разрешенных значений энергии

$$\varepsilon^2 - k^2 = \left( \sqrt{M^2 + 2eB \left( a + \frac{1}{2} - \frac{m}{2} + n \right)} - \Gamma \right)^2.$$

В зависимости от значения  $a$  получаем два выражения для  $N$ :

$$m < 0, \quad a = -\frac{m}{2}, \quad \varepsilon^2 - k^2 = \left( \sqrt{M^2 + 2eB \left( \frac{1}{2} - m + n \right)} - \Gamma \right)^2;$$

$$m \geq 0, \quad a = \frac{m}{2} + \frac{1}{2}, \quad \varepsilon^2 - k^2 = \left( \sqrt{M^2 + 2eB(1+n)} - \Gamma \right)^2.$$

Фактически, исследованный случай отвечает первому варианту факторизации оператора 4-го порядка:

$$1) \quad \lambda = (\sqrt{N} - \Gamma)^2.$$

Другая возможная факторизация отличается лишь заменой  $\Gamma \Rightarrow -\Gamma$ . Поэтому без каких-либо вычислений можно получить решения и второго типа:

$$2) \quad \lambda = (\sqrt{N} + \Gamma)^2.$$

Это означает, что для частицы с аномальным магнитным моментом есть две серии уровней энергии, формально различающиеся знаком при параметре  $\Gamma$ .

Таким образом, уравнение Дирака для частицы со спином  $1/2$  и аномальным магнитным моментом решено в присутствии внешнего однородного магнитного поля. Выведены обобщенные формулы, описывающие уровни Ландау для частицы со спином половина в магнитном поле, учитывающие наличие у частицы аномального магнитного момента. Построены соответствующие волновые функции.

### Список использованной литературы

1. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 496 с.
2. Кисель, В. В. Теория Петраша для частицы со спином  $1/2$  в искривленном пространстве–времени / В. В. Кисель, Н. Г. Токаревская, В. М. Редьков. – Препринт № 737 / Институт физики НАН Беларуси. – Минск, 2002. – 25 с.
3. Теория Петраша для частицы со спином  $1/2$  в искривленном пространстве–времени / А. А. Богуш [и др.] // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2002. – № 1. – С. 63–68.

Поступило в редакцию 21.03.2016



## ХИМИЯ

УДК 547.592.13+547.594.3

Н. Г. ВАСИЛЬЕВА, И. И. ПЕТРУСЕВИЧ, Т. С. ХЛЕБНИКОВА, академик Ф. А. ЛАХВИЧ

СИНТЕЗ 2-АЦИЛЦИКЛОПЕНТАН-1,3-ДИОНОВ С НАСЫЩЕННОЙ C<sub>9</sub>-C<sub>22</sub> АЦИЛЬНОЙ ЦЕПЬЮИнститут биоорганической химии НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
ogeikovas@gmail.com; khlebnicova@iboch.bas-net.by; lakhvich@iboch.bas-net.by

Описан синтез новых 2-ацилциклопентан-1,3-дионов с насыщенной C<sub>9</sub>-C<sub>12</sub> ацильной цепью O-ацилированием циклопентан-1,3-диона хлорангидридами соответствующих карбоновых кислот в присутствии пиридина в хлороформе с последующей O-C-изомеризацией образующихся енолацилатов под действием ацетонциангидрина в среде ацетонитрила в присутствии триэтиламина.

**Ключевые слова:** циклопентан-1,3-дион, O-ацилирование, енолацилаты, O-C-изомеризация, 2-ацилциклопентан-1,3-дионы, β-трикетоны.

N. H. VASILYEVA, I. I. PETRUSEVICH, T. S. KHLEBNICOVA, F. A. LAKHVICH

SYNTHESIS OF 2-ACYLCYCLOPENTANE-1,3-DIONES WITH A SATURATED C<sub>9</sub>-C<sub>12</sub> ACYL CHAINInstitute of Bioorganic Chemistry of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
ogeikovas@gmail.com; khlebnicova@iboch.bas-net.by; lakhvich@iboch.bas-net.by

The synthesis of new 2-acylcyclopentane-1,3-diones with a saturated C<sub>9</sub>-C<sub>12</sub> acyl chain was described. The compounds were synthesized by the O-acylation of cyclopentane-1,3-dione with appropriate acyl chlorides in the presence of pyridine in chloroform, followed by the O-C-isomerization of the prepared enol acylates under the action of acetone cyanohydrin in acetonitrile in the presence of triethylamine.

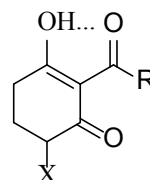
**Keywords:** cyclopentane-1,3-dione, O-acylation, enol acylates, O-C-isomerization, 2-acylcyclopentane-1,3-diones, β-triketones.

Циклические β-трикетоны (2-ацилциклогексан-1,3-дионы и 2-ацилциклопентан-1,3-дионы) и близкие им по структуре ацилфлороглюцины, флавоноиды и изофлавоноиды составляют огромную группу природных поликетидов, продуцируемых растениями, микроорганизмами, насекомыми и проявляющих широкий спектр биологической активности [1–5]. Многие из этих соединений и их синтетических производных нашли применение в качестве агрохимических и фармацевтических препаратов [6–8].

С другой стороны, полифункциональность и высокая реакционная способность указанных соединений обеспечивают богатые возможности для их модификации и использование в качестве весьма универсальных синтетических блоков (синтонов) для получения других классов биологически активных веществ (стероидов, простагландинов, антибиотиков, феромонов и кайромонов насекомых и т. д.) [9–13].

Систематические исследования в этом направлении ведутся в Институте биоорганической химии НАН Беларуси.

Ранее нами описан синтез целого ряда выделенных из насекомых 2-ацилциклогексан-



X = H, OH; R = углеводородный фрагмент (C<sub>11</sub>-C<sub>17</sub>) насыщенных, моно- и диеновых карбоновых кислот

Рис. 1. 2-Ацилциклогексан-1,3-дионы с C<sub>12</sub>-C<sub>18</sub> боковой ацильной цепью

1,3-дионон (рис. 1), на основе которых были созданы экологически безопасные феромонные ловушки для борьбы с вредителями плодово-ягодных культур и продовольственных запасов [14].

С целью поиска новых биологических соединений осуществлен синтез ранее неизвестных 2-ацилциклопентан-1,3-диононов с насыщенной  $C_9-C_{22}$  ацильной цепью. О-Ацилированием циклопентан-1,3-дионона (**1**) хлорангидридами соответствующих кислот (**2**) в присутствии пиридина в хлороформе с последующей О-С-изомеризацией полученных енолацилатов (**3а-и**) под действием ацетонциангидрина в среде ацетонитрила в присутствии триэтиламина при комнатной температуре синтезированы целевые  $\beta$ -трикетоны циклопентанового ряда (**4а-и**) (рис. 2).

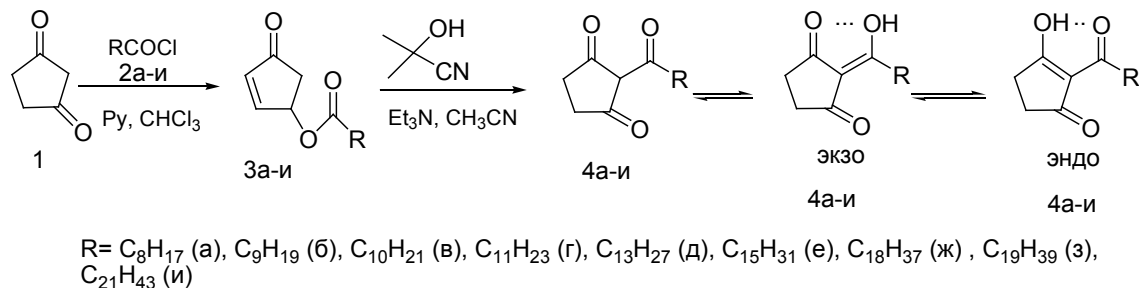


Рис. 2. Синтез 2-ацилциклопентан-1,3-диононов с  $C_9-C_{22}$  насыщенной ацильной цепью

Совокупность данных ИК и ЯМР  $^1H$  спектров синтезированных веществ (**3а-и**) и (**4а-и**), а также их сравнение с имеющимися литературными данными для аналогичных соединений с ненасыщенной боковой ацильной цепью [15] подтверждают их структуры.

Так, в ИК спектрах енолацилатов (**3а-и**) наблюдается полоса при  $1775-1780\text{ см}^{-1}$ , что соответствует карбонильному поглощению сложных виниловых эфиров. В интервале  $1700-1705\text{ см}^{-1}$  имеется интенсивная полоса поглощения, соответствующая поглощению сопряженного карбонила. К характеристическим полосам также следует отнести полосу поглощения в области  $1165-1170\text{ см}^{-1}$ , обусловленную поглощением связи С-О-енолэфиров.

ЯМР  $^1H$  спектры енолацилатов (**3а-и**) характеризуются наличием резонансного сигнала винильного протона в области  $\delta 6,2$  м. д. в виде синглета, сигналов протонов метиленов цикла в диапазоне  $\delta 2,28-2,45$  м. д. в виде триплетов ( $J 6,5$  Гц), а также сигнала протонов терминальной  $CH_3$ -группы длинноцепочечных насыщенных жирных кислот в виде триплета при  $\delta 0,88$  м. д. и протонов  $CH_2$ -группы, непосредственно связанной с карбонильной группой ацильного остатка кислоты при  $2,76$  м. д. Химические сдвиги протонов метиленовых фрагментов алкильного остатка наблюдаются при  $1,27-1,7$  м. д. в виде мультиплетов.

В ИК спектрах 2-ацилциклопентан-1,3-диононов (**4а-и**) в области  $1680-1705\text{ см}^{-1}$  имеется интенсивная полоса поглощения, которая соответствует поглощению свободной сопряженной карбонильной группы. Для  $\beta$ -трикетонов (**4а-и**) в области  $1580-1630\text{ см}^{-1}$  наблюдаются две узкие полосы поглощения вместо одной уширенной полосы (как у циклогексановых  $\beta$ -трикарбонильных соединений [14]), что объясняется наличием у них двух типов хелатированных (эндо- и экзо-енольных форм) карбонильных групп (рис. 2). В ЯМР  $^1H$  спектрах 2-ацилциклопентан-1,3-диононов (**4а-и**) отсутствует сигнал винильного протона в области  $\delta 6,0$  м. д. и наблюдается резонансный сигнал енольного протона в виде синглета в области  $\delta 15,0$  м. д., что указывает на то, что синтезированные  $\beta$ -трикетоны (**4а-и**) существуют в растворе в полностью енолизованной форме.

По данной схеме получен ряд других 2-ацилциклопентан-1,3-диононов с насыщенной ацильной цепью. Структуре и биологической активности всех полученных соединений будет посвящено отдельное сообщение.

**Экспериментальная часть.** Спектры ЯМР  $^1H$  записывали на приборе фирмы Bruker BioSpin AVANCE 500 (500 МГц) в дейтерохлороформе с ТМС в качестве внутреннего стандарта. ИК спектры получали на приборе UR-20 в пленке или в таблетках KBr. Температуры плавления определяли на блоке Voëtius. Элементный анализ выполняли на CHNS-O анализаторе Eurovector EA3000. Протекание реакций контролировали методом ТСХ на пластинах Silufol UV-254 в системе гексан-эфир (1 : 1). Очистку синтезируемых соединений проводили методом колоночной хроматографии с использованием в качестве элюента смеси эфир-гексан.

**Методика получения енолацилатов (3а–и).** К перемешиваемой смеси 0,001 моль циклопентан-1,3-диола (1) и 0,001 моль пиридина в сухом хлороформе прикапывали раствор 0,0011 моль хлорангидрида соответствующей кислоты в хлороформе при комнатной температуре на протяжении 1,5 ч. Реакционную смесь перемешивали 1,5 ч, затем обрабатывали разбавленной соляной кислотой, водой, насыщенным раствором соды, водой (по 50 мл). Органический слой сушили над сульфатом магния, отфильтровывали осушитель, растворитель удаляли на ротаторном испарителе. После очистки остатка методом колоночной хроматографии кристаллизацией (эфир–гексан) выделяли конечные продукты в виде бесцветных кристаллов.

**(3-Оксоциклопент-1-енил)нонаоат (3а).** Выход 90 %. Т. пл. 45–48 °С. ИК ( $\nu$ , см<sup>-1</sup>, КВг): 1170, 1705, 1775. Спектр ЯМР <sup>1</sup>H ( $\delta$ , м. д.): 0,89 (3H, т,  $J$  6,5 Гц); 1,34 (10H, м); 1,70 (2H, м); 2,28 (2H, т,  $J$  7,5 Гц); 2,45 (2H, т,  $J$  5,0 Гц); 2,76 (2H, т,  $J$  5,0 Гц); 6,23 (1H, с). Найдено, %: С 70,52; Н 9,32. C<sub>14</sub>H<sub>22</sub>O<sub>3</sub>. Вычислено, %: С 70,56; Н 9,30.

**(3-Оксоциклопент-1-енил)декаоат (3б).** Выход 92 %. Т. пл. 42–44 °С. ИК ( $\nu$ , см<sup>-1</sup>, КВг): 1170, 1710, 1775. Спектр ЯМР <sup>1</sup>H ( $\delta$ , м. д.): 0,89 (3H, т,  $J$  6,5 Гц); 1,34 (12H, м); 1,70 (2H, м); 2,28 (2H, т,  $J$  7,5 Гц); 2,43 (2H, т,  $J$  5,0 Гц); 2,75 (2H, т,  $J$  5,0 Гц); 6,23 (1H, с). Найдено, %: С 71,31; Н 9,57. C<sub>15</sub>H<sub>24</sub>O<sub>3</sub>. Вычислено, %: С 71,39; Н 9,59.

**(3-Оксоциклопент-1-енил)ундекаоат (3в).** Выход 89 %. Т. пл. 40–42 °С. ИК ( $\nu$ , см<sup>-1</sup>, КВг): 1170, 1705, 1775. Спектр ЯМР <sup>1</sup>H ( $\delta$ , м. д.): 0,88 (3H, т,  $J$  6,5 Гц); 1,27 (14H, м); 1,70 (2H, м); 2,28 (2H, т,  $J$  7,0 Гц); 2,45 (2H, т,  $J$  5,0 Гц); 2,76 (2H, т,  $J$  5,0 Гц); 6,23 (1H, с). Найдено, %: С 72,11; Н 9,82. C<sub>16</sub>H<sub>26</sub>O<sub>3</sub>. Вычислено, %: С 72,14; Н 9,84.

**(3-Оксоциклопент-1-енил)додекаоат (3г).** Выход 83 %. Т. пл. 53–55 °С. ИК ( $\nu$ , см<sup>-1</sup>, КВг): 1170, 1705, 1780. Спектр ЯМР <sup>1</sup>H ( $\delta$ , м. д.): 0,88 (3H, т,  $J$  6,5 Гц); 1,27 (16H, м); 1,70 (2H, м); 2,28 (2H, т,  $J$  7,5 Гц); 2,45 (2H, т,  $J$  5,0 Гц); 2,76 (2H, т,  $J$  5,0 Гц); 6,23 (1H, с). Найдено, %: С 72,86; Н 10,01. C<sub>17</sub>H<sub>28</sub>O<sub>3</sub>. Вычислено, %: С 72,82; Н 10,06.

**(3-Оксоциклопент-1-енил)тетрадекаоат (3д).** Выход 83 %. Т. пл. 53–56 °С. ИК ( $\nu$ , см<sup>-1</sup>, КВг): 1170, 1705, 1780. Спектр ЯМР <sup>1</sup>H ( $\delta$ , м. д.): 0,88 (3H, т,  $J$  6,5 Гц); 1,27 (20H, м); 1,70 (2H, м); 2,28 (2H, т,  $J$  7,5 Гц); 2,45 (2H, т,  $J$  5,0 Гц); 2,76 (2H, т,  $J$  5,0 Гц); 6,23 (1H, с). Найдено, %: С 73,92; Н 10,31. C<sub>19</sub>H<sub>32</sub>O<sub>3</sub>. Вычислено, %: С 73,98; Н 10,46.

**(3-Оксоциклопент-1-енил)гексадекаоат (3е).** Выход 72 %. Т. пл. 44–48 °С. ИК ( $\nu$ , см<sup>-1</sup>, КВг): 1170, 1705, 1775. Спектр ЯМР <sup>1</sup>H ( $\delta$ , м. д.): 0,88 (3H, т,  $J$  6,5 Гц); 1,28 (24H, м); 1,70 (2H, м); 2,45 (2H, т,  $J$  5,0 Гц); 2,53 (2H, т,  $J$  7,5 Гц); 2,75 (2H, т,  $J$  5,0 Гц); 6,23 (1H, с). Найдено, %: С 74,92; Н 10,75. C<sub>21</sub>H<sub>36</sub>O<sub>3</sub>. Вычислено, %: С 74,95; Н 10,78.

**(3-Оксоциклопент-1-енил)нонадекаоат (3ж).** Выход 80 %. Т. пл. 74–77 °С. ИК ( $\nu$ , см<sup>-1</sup>, КВг): 1170, 1705, 1775. Спектр ЯМР <sup>1</sup>H ( $\delta$ , м. д.): 0,88 (3H, т,  $J$  6,5 Гц); 1,28 (30H, м); 1,70 (2H, м); 2,45 (2H, т,  $J$  5,0 Гц); 2,53 (2H, т,  $J$  7,5 Гц); 2,75 (2H, т,  $J$  5,0 Гц); 6,23 (1H, с). Найдено, %: С 76,12; Н 11,16. C<sub>24</sub>H<sub>42</sub>O<sub>3</sub>. Вычислено, %: С 76,14; Н 11,18.

**(3-Оксоциклопент-1-енил)эйкозаноат (3з).** Выход 87 %. Т. пл. 71–73 °С. ИК ( $\nu$ , см<sup>-1</sup>, КВг): 1170, 1705, 1775. Спектр ЯМР <sup>1</sup>H ( $\delta$ , м. д.): 0,88 (3H, т,  $J$  6,5 Гц); 1,28 (32H, м); 1,70 (2H, м); 2,45 (2H, т,  $J$  5,0 Гц); 2,53 (2H, т,  $J$  7,5 Гц); 2,75 (2H, т,  $J$  5,0 Гц); 6,23 (1H, с). Найдено, %: С 76,42; Н 11,28. C<sub>24</sub>H<sub>44</sub>O<sub>3</sub>. Вычислено, %: С 76,48; Н 11,30.

**(3-Оксоциклопент-1-енил)докозаноат (3и).** Выход 89 %. Т. пл. 77–78 °С. ИК ( $\nu$ , см<sup>-1</sup>, КВг): 1165, 1705, 1765. Спектр ЯМР <sup>1</sup>H ( $\delta$ , м. д.): 0,88 (3H, т,  $J$  6,5 Гц); 1,25 (36H, м); 1,70 (2H, м); 2,45 (2H, т,  $J$  5,0 Гц); 2,53 (2H, т,  $J$  7,5 Гц); 2,75 (2H, т,  $J$  5,0 Гц); 6,23 (1H, с). Найдено, %: С 77,02; Н 11,30. C<sub>27</sub>H<sub>48</sub>O<sub>3</sub>. Вычислено, %: С 77,09; Н 11,50.

**Синтез 2-ацилциклопентан-1,3-дионов (4а–и).** К раствору 0,001 моль енолацилата циклопентан-1,3-диола (3а–и) в 10 мл ацетонитрила прибавляли 0,002 моль триэтиламина и 0,3 мл ацетонциангидрина. Реакционную смесь перемешивали в течение суток при комнатной температуре, затем упаривали на ротаторном испарителе. Остаток растворяли в 100 мл хлороформа, обрабатывали разбавленной соляной кислотой (1 : 10, 2 × 50 мл), водой (2 × 50 мл), сушили сульфатом магния. После фильтрования осушителя и удаления хлороформа на ротаторном испарителе кристаллизацией остатка (эфир–гексан) получали конечные продукты (4а–и).

**2-Нонаноилциклопентан-1,3-дион (4а).** Выход 74 %. Т. пл. 35–38 °С. ИК ( $\nu$ , см<sup>-1</sup>, КВг): 1590, 1630, 1700. Спектр ЯМР <sup>1</sup>H ( $\delta$ , м. д.): 0,88 (3H, т,  $J$  6,5 Гц); 1,30 (10H, м); 1,64 (2H, м); 2,52 (2H, т,

$J$  6,0 Гц); 2,76 (2H, т,  $J$  6,0 Гц); 2,91 (2H, т,  $J$  7,5 Гц); 15,02 (1H, с). Найдено, %: C 70,52; H 9,32.  $C_{14}H_{22}O_3$ . Вычислено, %: C 70,56; H 9,30.

**2-Деканоилциклопентан-1,3-дион (4б).** Выход 76 %. Т. пл. 25–27 °С. ИК ( $\nu$ ,  $cm^{-1}$ , KBr): 1590, 1630, 1700. Спектр ЯМР  $^1H$  ( $\delta$ , м.д.): 0,88 (3H, т,  $J$  6,5 Гц); 1,30 (12H, м); 1,64 (2H, м); 2,52 (2H, т,  $J$  6,0 Гц); 2,76 (2H, т,  $J$  6,0 Гц); 2,91 (2H, т,  $J$  7,5 Гц); 15,02 (1H, с). Найдено, %: C 71,31; H 9,57.  $C_{15}H_{24}O_3$ . Вычислено, %: C 71,39; H 9,59.

**2-Ундеканоилциклопентан-1,3-дион (4в).** Выход 76 %. Т. пл. 105–107 °С. ИК ( $\nu$ ,  $cm^{-1}$ , KBr): 1590, 1630, 1700. Спектр ЯМР  $^1H$  ( $\delta$ , м.д.): 0,89 (3H, т,  $J$  6,5 Гц); 1,27 (14H, м); 1,64 (2H, м); 2,53 (2H, т,  $J$  6,0 Гц); 2,76 (2H, т,  $J$  6,0 Гц); 2,92 (2H, т,  $J$  7,5 Гц); 15,07 (1H, с). Найдено, %: C 72,11; H 9,82.  $C_{16}H_{26}O_3$ . Вычислено, %: C 72,14; H 9,84.

**2-Додеканоилциклопентан-1,3-дион (4г).** Выход 86 %. Т. пл. 28–31 °С. ИК ( $\nu$ ,  $cm^{-1}$ , плёнка): 1590, 1625, 1705. Спектр ЯМР  $^1H$  ( $\delta$ , м.д.): 0,88 (3H, т,  $J$  6,5 Гц); 1,25 (16H, м); 1,63 (2H, м); 2,52 (2H, т,  $J$  6,0 Гц); 2,75 (2H, т,  $J$  6,0 Гц); 2,91 (2H, т,  $J$  7,5 Гц); 15,08 (1H, с). Найдено, %: C 72,86; H 10,01.  $C_{17}H_{28}O_3$ . Вычислено, %: C 72,82; H 10,06.

**2-Тетрадеканоилциклопентан-1,3-дион (4д).** Выход 94 %. Т. пл. 45–47 °С. ИК ( $\nu$ ,  $cm^{-1}$ , KBr): 1595, 1630, 1695. Спектр ЯМР  $^1H$  ( $\delta$ , м.д.): 0,88 (3H, т,  $J$  6,5 Гц); 1,25 (20H, м); 1,63 (2H, м); 2,52 (2H, т,  $J$  6,0 Гц); 2,75 (2H, т,  $J$  6,0 Гц); 2,91 (2H, т,  $J$  7,5 Гц); 15,13 (1H, с). Найдено, %: C 73,92; H 10,31.  $C_{19}H_{32}O_3$ . Вычислено, %: C 73,98; H 10,46.

**2-Гексадеканоилциклопентан-1,3-дион (4е).** Выход 85 %. Т. пл. 36–39 °С. ИК ( $\nu$ ,  $cm^{-1}$ , KBr): 1580, 1620, 1680. Спектр ЯМР  $^1H$  ( $\delta$ , м.д.): 0,89 (3H, т,  $J$  6,5 Гц); 1,26 (24H, м); 1,64 (2H, м); 2,52 (2H, т,  $J$  6,0 Гц); 2,76 (2H, т,  $J$  6,0 Гц); 2,92 (2H, т,  $J$  7,5 Гц); 15,08 (1H, с). Найдено, %: C 74,92; H 10,75.  $C_{21}H_{36}O_3$ . Вычислено, %: C 74,95; H 10,78.

**2-Нонадеканоилциклопентан-1,3-дион (4ж).** Выход 76 %. Т. пл. 66–69 °С. ИК ( $\nu$ ,  $cm^{-1}$ , KBr): 1580, 1620, 1700. Спектр ЯМР  $^1H$  ( $\delta$ , м.д.): 0,88 (3H, т,  $J$  6,5 Гц); 1,25 (30H, м); 1,63 (2H, м); 2,35 (2H, т,  $J$  7,5 Гц); 2,52 (2H, т,  $J$  6,0 Гц); 2,75 (2H, т,  $J$  6,0 Гц); 15,14 (1H, с). Найдено, %: C 76,12; H 11,16.  $C_{24}H_{42}O_3$ . Вычислено, %: C 76,14; H 11,18.

**2-Эйкозаноилциклопентан-1,3-дион (4з).** Выход 89 %. Т. пл. 54–55 °С. ИК ( $\nu$ ,  $cm^{-1}$ , KBr): 1580, 1620, 1700. Спектр ЯМР  $^1H$  ( $\delta$ , м.д.): 0,88 (3H, т,  $J$  6,5 Гц); 1,25 (32H, м); 1,63 (2H, м); 2,35 (2H, т,  $J$  7,5 Гц); 2,52 (2H, т,  $J$  6,0 Гц); 2,75 (2H, т,  $J$  6,0 Гц); 15,14 (1H, с). Найдено, %: C 76,42; H 11,28.  $C_{24}H_{44}O_3$ . Вычислено, %: C 76,48; H 11,30.

**2-Докозаноилциклопентан-1,3-дион (4и).** Выход 78 %. Т. пл. 51–53 °С. ИК ( $\nu$ ,  $cm^{-1}$ , KBr): 1580, 1620, 1700. Спектр ЯМР  $^1H$  ( $\delta$ , м.д.): 0,88 (3H, т,  $J$  6,5 Гц); 1,25 (42H, м); 1,63 (2H, м); 2,35 (2H, т,  $J$  7,5 Гц); 2,52 (2H, т,  $J$  6,0 Гц); 2,75 (2H, т,  $J$  6,0 Гц); 15,14 (1H, с). Найдено, %: C 77,02; H 11,30.  $C_{27}H_{48}O_3$ . Вычислено, %: C 77,09; H 11,50.

### Список использованной литературы

1. Рубинов, Д. Б. 2-Ацилциклоалкан-1,3-дионы: нахождение в природе, биологическая активность, биогенез, химический синтез / Д. Б. Рубинов, И. Л. Рубинова, А. А. Ахрем // ХПС. – 1995. – Т. 31, № 5. – С. 635–663.
2. Ляхвич, Ф. А. Циклические  $\beta$ -трикетоны в природе. Выделение, структура и биологическая активность / Ф. А. Ляхвич, Т. С. Хлебникова // Весці АН Беларусі. Сер. хім. навук. – 1996. – № 4. – С. 101–119.
3. Antifungal cyclopentenones from *Piper coruscans* / X.-C. Li [et al.] // J. Am. Chem. Soc. – 2004. – Vol. 126. – P. 6872–6873.
4. Ciochina, R. Polycyclic polyprenylated acylphloroglucinols / R. Ciochina, R. B. Grossman // Chem. Rev. – 2006. – Vol. 106, N 9. – P. 3963–3986.
5. Andersen, Ø. M. Flavonoids: Chemistry, biochemistry and application / Ø. M. Andersen, K. R. Markham. – Boca Raton: CRS Press, 2006.
6. Modern Crop Protection Compounds / Ed. W. Kramer, U. Schirmer, P. Jeschke, M. Witschel. – Weinheim: WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2011.
7. Phase I dose-escalation studies of SNX-5422, an orally bioavailable heat shock protein 90 inhibitor, in patients with refractory solid tumours / R. Infante [et al.] // Eur. J. Cancer. – 2014. – Vol. 50, N 17. – P. 2897–2904.
8. NTBC therapy for tyrosinemia type I: how much is enough? / H. El-Karakasy [et al.] // Eur. J. Pediatr. – 2010. – Vol. 169, N 6. – P. 689–693.
9. Rubinov, D. B. Chemistry of 2-Acylcycloalkane-1,3-diones / D. B. Rubinov, I. L. Rubinova, A. A. Akhrem // Chem. Rev. – 1999. – Vol. 99, N 4. – P. 1047–1065.
10. Schmidt, A. General strategy for the synthesis of  $B_1$  phytoprostanes, dinor isoprostanes, and analogs / A. Schmidt, W. Boland // J. Org. Chem. – 2007. – Vol. 72. – P. 1699–1706.

11. *Хлебникова, Т. С.* Синтез природных и родственных им биоактивных веществ на основе производных циклических  $\beta$ -дикетоннов / Т. С. Хлебникова, Ф. А. Лахвич // *Итоги и перспективы развития биоорганической химии в Республике Беларусь.* – Минск, 1998. – С. 157–182.
12. *Хлебникова, Т. С.* Катионные комплексы платины (II) с производными 2-ацил-1,3-циклопентан-1,3-дионов / Т. С. Хлебникова, И. В. Меркушин, Ф. А. Лахвич // *ЖОХ.* – 2006. – Т. 76, вып. 5. – С. 705–712.
13. *Хлебникова, Т. С.* Синтез 13-аза-14-окса- и 13,14-диазапростаноидов / Т. С. Хлебникова, Ф. А. Лахвич // *ЖОрХ.* – 2000. – Т. 36, вып. 11. – С. 1642–1647.
14. *Лахвич, Ф. А.* Синтез кайромонов *Lepidoptera* и их аналогов ряда 2-ацилциклогексан-1,3-дионов с насыщенной боковой ацильной цепью / Ф. А. Лахвич, И. И. Петрусевич, А. Н. Сергеева // *ЖОрХ.* – 1995. – Т. 31, вып. 11. – С. 1643–1649.
15. *Меркушин, И. В.* Синтез 2-ацилциклопентан-1,3-дионов с ненасыщенной боковой ацильной цепью / И. В. Меркушин // *Весті НАН Беларусі. Сер. хім. навук.* – 2005. – № 5. – С. 82–84.

*Поступило в редакцию 02.12.2015*

УДК 541.128

Т. В. СВИРИДОВА<sup>1</sup>, А. С. ЛОГВИНОВИЧ<sup>1</sup>, Т. М. ЯКИМЕНКО<sup>1</sup>, А. И. КОКОРИН<sup>2</sup>,  
член-корреспондент Д. В. СВИРИДОВ<sup>1</sup>

## СОЛЬВОТЕРМИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ МОЛИБДЕН-ВАНАДИЕВЫХ КАТАЛИЗАТОРОВ НА НОСИТЕЛЯХ ИЗ ДИОКСИДА КРЕМНИЯ

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

sviridova@bsu.by; logvinovich2357@gmail.com; Yakimenko\_TM@mail.ru; sviridov@bsu.by

<sup>2</sup>Институт химической физики им. Н. Н. Семёнова Российской академии наук, Москва, Россия  
alex-kokorin@yandex.ru

Продемонстрирована возможность сольвотермического осаждения смешанного оксида молибдена-ванадия на инертный носитель из диоксида кремния в виде мезопористых гранул и наночастиц за счет поликонденсации смешанной молибден-ванадиевой кислоты в контролируемых условиях. Показано, что полученные нанесенные катализаторы, представляющие собой твердый раствор  $V_2O_5 : MoO_3$ , характеризуются высокой активностью в реакции окисления тиафена при температуре 250 °С, что позволяет использовать их в качестве основы перспективных систем десульфирования углеводородного сырья.

*Ключевые слова:* катализ, смешанный оксид, молибден, ванадий, химическое осаждение.

T. V. SVIRIDOVA<sup>1</sup>, A. S. LOGVINOVICH<sup>1</sup>, T. M. YAKIMENKO<sup>1</sup>, A. I. KOKORIN<sup>2</sup>, D. V. SVIRIDOV<sup>1</sup>

## SOLVOTHERMAL SYNTHESIS OF SILICA-SUPPORTED MOLYBDENUM-VANADIUM CATALYSTS

<sup>1</sup>Belarusian State University, Minsk, Belarus

sviridova@bsu.by; logvinovich2357@gmail.com; Yakimenko\_TM@mail.ru; sviridov@bsu.by

<sup>2</sup>N. N. Semenov Institute of Chemical Physics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
alex-kokorin@yandex.ru

The possibility of solvothermal deposition of mixed oxide of molybdenum-vanadium on an inert silica carrier (mesoporous grains, nanoparticles) via the polycondensation of mixed molybdenum-vanadium acid under controlled conditions has been demonstrated. It is shown that the obtained catalysts representing the solid  $V_2O_5 : MoO_3$  solution exhibit the high activity in the reaction of thiophene oxidation at 250 °C and can be used for desulphation of hydrocarbons.

*Keywords:* catalysis, mixed oxide, molybdenum, vanadium, chemical precipitation.

**Введение.** Смешанные оксиды молибдена и ванадия находят широкое применение в качестве гетерогенных катализаторов парциального окисления углеводородов и обессеривания углеводородного сырья [1–4]. Традиционным способом получения указанных смешанных оксидов является высокотемпературное разложение смеси молибдатов и ванадатов аммония [2; 3]. Такой подход обеспечивает, однако, сравнительно небольшой выход двойных оксидов (представляющих собой собственно каталитически активную фазу [1]) и не позволяет добиться высоких значений соотношения «поверхность/объем». Это делает актуальной разработку методов получения молибден-ванадиевых катализаторов в виде высокоактивных фаз двойных оксидов, нанесенных на инертные подложки.

Цель настоящей работы состояла в разработке сольвотермического метода химического осаждения смешанных оксидов молибдена-ванадия на мезопористых и нанодисперсных носителях из диоксида кремния и изучение их каталитических свойств в модельных реакциях селективного окисления углеводородов и серосодержащих органических соединений молекулярным кислородом. Отличительной особенностью сольвотермического синтеза, базирующегося на термоиндуцированной поликонденсации оксокислот в водных растворах [5], является возможность

управления размерно-морфологическими характеристиками частиц получаемой оксидной фазы и получения широкого круга смешанооксидных фаз, включая изоморфно-замещенные структуры, характеризующиеся случайным расположением атомов молибдена и ванадия в решетке оксида [4–6]. Последнее обстоятельство обеспечивает существенное повышение концентрации центров V(IV), что благоприятным образом сказывается на каталитической активности смешанного оксида.

**Материалы и методы исследования.** В качестве подложек для нанесения оксидов молибдена-ванадия использовали мезопористые гранулы из диоксида кремния, имеющие удельную поверхность  $95 \text{ м}^2/\text{г}$ , а также строго сферические частицы  $\text{SiO}_2$  (Nanophase Technologies Corp) со средним размером  $\sim 10 \text{ нм}$ .

Поскольку полученные при высокой температуре пористые гранулы имеют гидрофобную поверхность, то предварительно они были подвергнуты гидрофилизации за счет сонохимической обработки (ультразвуковой генератор Bandelin мощностью  $2700 \text{ Вт}$  при  $22 \text{ кГц}$ ) в течение  $5 \text{ мин}$  в водно-спиртовой смеси ( $9 : 1$ ). Условия и состав раствора для сонохимической обработки подбирали таким образом, чтобы обеспечить осаждение пленки оксида на поверхности пористого носителя с максимальной кроющей способностью.

Прекурсором при синтезе оксидов молибдена-ванадия в водной среде служила смешанная молибден-ванадиевая кислота (мольное соотношение  $\text{V} : \text{Mo} = 1 : 1$ , концентрация  $0,2 \text{ моль}/\text{дм}^3$ ), полученная из смеси растворов парамолибдата и ванадата аммония методом ионного обмена с использованием катионита КУ-2 в Н-форме.

Электронно-микроскопическое исследование было выполнено с помощью микроскопа Leo-1420 с рентгеновским микроанализатором Rontec, позволяющим определять элементный состав отдельных морфологических элементов на исследуемой поверхности. Спектры комбинационного рассеяния (КР) были получены с помощью КР-микроскопа Nanofinder ТП.

Каталитические свойства полученных нанесенных смешанных оксидов были исследованы в диапазоне температур  $200\text{--}320 \text{ }^\circ\text{C}$  с помощью реактора проточного типа со стационарным слоем катализатора. Смесь паров бензола и тиофена ( $2 \text{ мас. } \%$ ) подавали в реактор вместе с воздухом (соотношение компонентов паровоздушной смеси  $1 : 10$ ) со скоростью  $70 \text{ мл}/\text{мин}$ . Анализ жидких продуктов реакции осуществляли методом газожидкостной хроматографии с использованием капиллярной колонки длиной  $50 \text{ м}$  и плазменно-ионизационного детектора. Количество катализатора составляло  $0,25 \text{ г}$  в расчете на  $\text{MoO}_3 : \text{V}_2\text{O}_5$ .

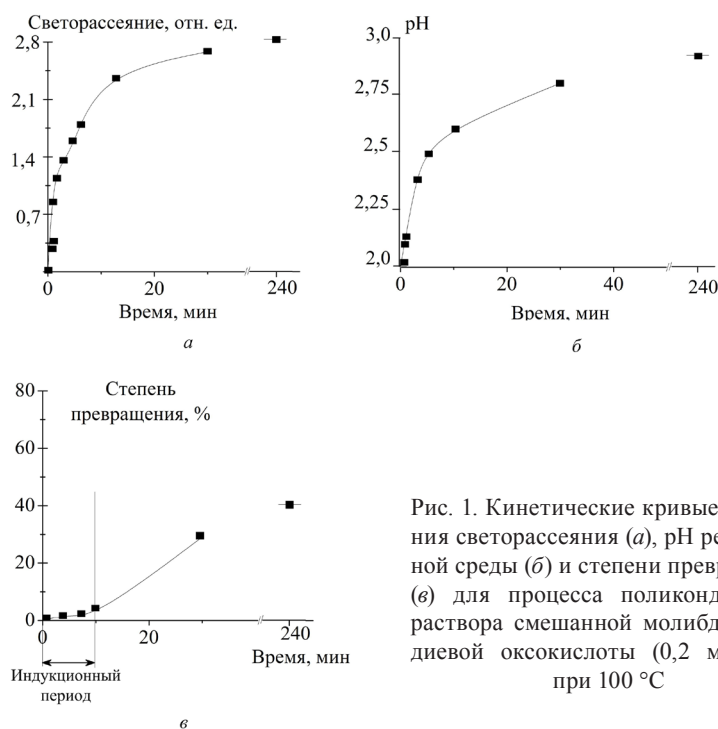


Рис. 1. Кинетические кривые изменения светорассеяния (а), pH реакционной среды (б) и степени превращения (в) для процесса поликонденсации раствора смешанной молибден-ванадиевой оксокислоты ( $0,2 \text{ моль}/\text{дм}^3$ ) при  $100 \text{ }^\circ\text{C}$

**Результаты и их обсуждение.** Кинетика термостимулированных поликонденсационных процессов в растворе смешанной молибден-ванадиевой оксокислоты при 100 °С была изучена путем измерения величины светорассеяния (дает информацию об образовании олигомерных коллоидных частиц в растворе), величины рН реакционной среды и степени конверсии оксокислоты (определяется количеством образующейся оксидной фазы, способной к седиментации). Выполненное исследование показало, что в результате протекания полимеризационно-поликонденсационных процессов, сопровождающихся быстрым увеличением светорассеяния и снижением кислотности среды (рис. 1), в растворе происходит накопление олигомеров, способных к дальнейшей полимеризации, однако в течение достаточно продолжительного индукционного периода (в данных условиях – 10–15 мин) отсутствуют признаки фазообразования. Таким образом, в пределах этого временного окна можно осуществить осаждение смешанного оксида на поверхности инертного носителя, внесенного в раствор оксокислоты, причем такое осаждение не будет сопровождаться формированием частиц дисперсной фазы в объеме раствора.

Выполненное электронно-микроскопическое исследование (рис. 2) показало, что осаждающиеся пленки смешанного оксида молибдена-ванадия (продолжительность осаждения 10 мин) являются неоднородными и характеризуются наличием большого числа непокрытых участков. В то же время трехкратное повторение операции осаждения дает плотную беспористую пленку с высокой кроющей способностью (рис. 2). В случае осаждения смешанного оксида на нанодисперсные сферолиты из диоксида кремния уже на первом этапе наблюдается образование частиц типа «ядро–оболочка», а повторение операции осаждения ведет к агрегации таких частиц с формированием сращенных образований размером 30–40 мкм (рис. 2).

В спектрах КР смешанного оксида  $\text{MoO}_3 : \text{V}_2\text{O}_5$ , осажженного на пористый диоксид кремния (рис. 3), пик, соответствующий колебаниям кислородных мостиков [6], лежит при  $860 \text{ см}^{-1}$ , т. е. при больших частотах, чем в индивидуальном оксиде ванадия, что указывает на наличие большого числа групп V–O–Mo, являющихся результатом изоморфного замещения части ионов ванадия в решетке  $\text{V}_2\text{O}_5$  на ионы молибдена. Замещение такого рода характерно для смешанных оксидов  $\text{MoO}_3 : \text{V}_2\text{O}_5$ , формирующихся в сольво-термических условиях [4; 7], причем получаемые таким образом твердые растворы отличаются высокой каталитической активностью в реакциях окисления серосодержащих органических соединений молекулярным кислородом [4; 7]. Как видно из рис. 4, катализаторы  $(\text{MoO}_3 : \text{V}_2\text{O}_5) / \text{SiO}_2$  в области низких температур демонстрируют незначительную активность в реакции окисления бензола (степень конверсии бензола не превышает 0,5–0,8 %), что находится в хорошем соответствии с результатами наших предыдущих исследований [4]. В то же время в присутствии таких катализаторов степень превращения тифена,

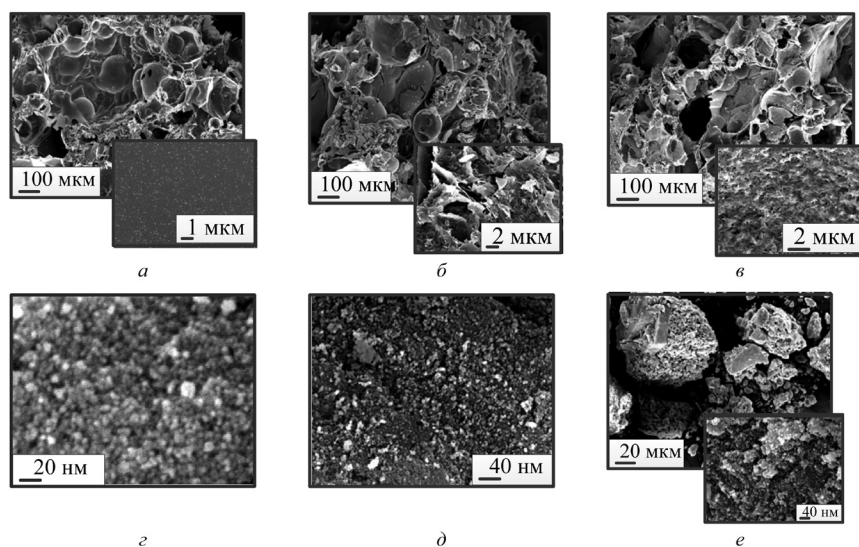


Рис. 2. Электронно-микроскопические изображения поверхности гидрофилизированных гранул (а–в) и наночастиц (г–е) диоксида кремния до (а, г) и после (б, д) однократного химического осаждения смешанного оксида  $\text{MoO}_3 : \text{V}_2\text{O}_5$  в течение 10 мин; после трехкратного осаждения (в, е)



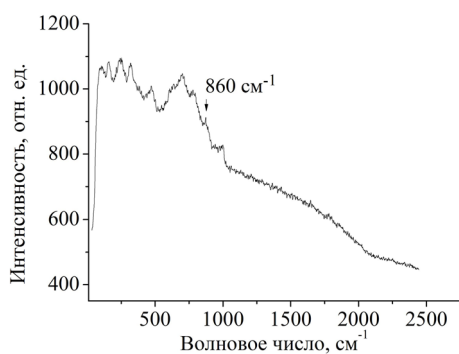


Рис. 3. Спектр комбинационного рассеяния смешанного оксида  $\text{MoO}_3 : \text{V}_2\text{O}_5$ , нанесенного на мезопористый носитель из диоксида кремния

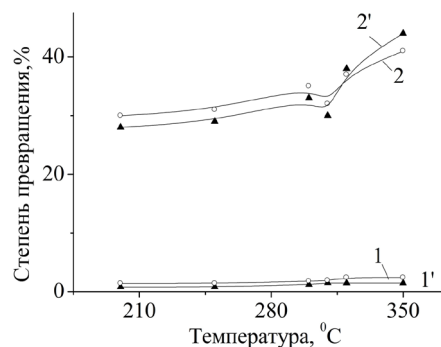


Рис. 4. Зависимость степени конверсии бензола (1, 1') и тиофена (2, 2') от температуры для смешанного оксида  $\text{MoO}_3 : \text{V}_2\text{O}_5$ , нанесенного на мезопористые гранулы (1, 2) и наносферолиты (1', 2') из диоксида кремния

введенного в бензол, достигает 40 % уже при малых температурах (250 °C). Это позволяет рассматривать смешанные оксиды молибдена-ванадия на инертном носителе, полученные методом химического осаждения из растворов смешанных оксокислот в сольвотермических условиях, в качестве перспективного гетерогенного катализатора десульфирования углеводородного сырья. При этом переход к нанесенным катализаторам позволяет существенно снизить расход активного смешанного оксида и открывает возможность управления его морфологией и величиной удельной поверхности.

Работа выполнена в рамках проекта БРФФИ (грант X15-078).

### Список использованной литературы

1. Surface active sites of  $\text{V}_2\text{O}_5\text{-MoO}_3$  catalyst / A. Satsuma [et al.] // *J. Phys. Chem.* – 1989. – Vol. 93. N 4. – P. 1484–1490.
2. Окисление бензола в присутствии тиофена на ванадий-молибденовом катализаторе / Т. В. Свиридова [и др.] // *Хим. физика.* – 2013. – Т. 32, № 5. – С. 50–54.
3. Окисление додекана на ванадий-молибденовом катализаторе / Т. В. Свиридова [и др.] // *Хим. физика.* – 2012. – Т. 31, № 11. – С. 28–32.
4. Окисление бензола и тиофена на смешанном наноструктурированном ванадий-молибденовом оксиде / Т. В. Свиридова [и др.] // *Хим. физика.* – 2013. – Т. 32, № 4. – С. 29–34.
5. *Livage, J. Sol-gel chemistry of transition metal oxides / J. Livage, M. Henry, C. Sanchez // Progr. Solid State Chem.* – 1988. – Vol. 18. – P. 259–341.
6. *Авдеев, В. И. Моделирование активных центров нанесенных катализаторов  $\text{V}_2\text{O}_5/\text{SiO}_2$  и  $\text{V}_2\text{O}_5/\text{TiO}_2$ . Теоретический анализ оптических свойств методом DFT / В. И. Авдеев, Г. М. Жидомиров // Журнал структурной химии.* – 2005. – Т. 46. – С. 599–612.
7. *Sviridova, T. V. Nano- and microcrystals of molybdenum trioxide and metal-matrix composites on their basis / T. V. Sviridova, L. I. Stepanova, D. V. Sviridov // Molybdenum: Characteristics, Production and Applications / ed. by M. Ortiz [et al.]. – NY, 2012. – P. 147–179.*

Поступило в редакцию 20.01.2016

УДК 577.112.854:577.125:577.152.31

*Н. М. ЛИТВИНКО<sup>1</sup>, Л. А. СКОРОСТЕЦКАЯ<sup>1</sup>, Т. Г. ГУДКО<sup>1</sup>, М. М. ТИМОХОВА<sup>1</sup>,  
В. С. КАМЫШНИКОВ<sup>2</sup>, Е. И. ВИЖИНИС<sup>2</sup>, член-корреспондент А. В. ВОРОБЕЙ<sup>2</sup>*

### СУПРАМОЛЕКУЛЯРНЫЙ КОМПЛЕКС ЖИРНОЙ КИСЛОТЫ С ГЕМОГЛОБИНОМ КАК ИНДИКАТОР ФОСФОЛИПОЛИЗА ДЛЯ ВЫЯВЛЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ПАНКРЕАТИТА

<sup>1</sup>Институт биоорганической химии НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
*al\_h@mail.ru; lydias@tut.by; tatsianagudko@gmail.com*

<sup>2</sup>Белорусская медицинская академия последипломного образования, Минск, Беларусь  
*kafdiag@mail.ru; kafdiag@mail.ru; Varabeiproct@tut.by*

Проведено изучение супрамолекулярного комплекса жирной кислоты с гемоглобином как индикатора фосфолиполиза на разных стадиях экспериментального острого некротизирующего панкреатита. Установлено, что амплитуда разностного спектра гемоглобина в присутствии миристиновой, олеиновой и пальмитиновой кислот или их смеси зависит от длины углеводородной цепочки жирной кислоты и наличия в ней двойных связей. Обнаружено полное соответствие динамики изменения активности панкреатической фосфолипазы (ФЛА<sub>2</sub>) патоморфологической картины развития патологии поджелудочной железы и ее лечения. Показано, что тест-система определения активности ФЛА<sub>2</sub> по измерению дифференциального спектра гемоглобина в диапазоне волн 403–423 нм, возникающего при образовании его супрамолекулярного комплекса с жирными кислотами, может использоваться для диагностики тяжелых форм некротизирующего панкреатита в качестве информативного лабораторного теста.

*Ключевые слова:* фосфолиполиз, фосфолипаза А<sub>2</sub>, тест-система для фотометрического определения активности, жирные кислоты, гемоглобин, экспериментальная модель острого некротизирующего панкреатита, поджелудочная железа.

*N. M. LITVINKO<sup>1</sup>, L. A. SKOROSTETSKAYA<sup>1</sup>, T. G. GUDKO<sup>1</sup>, M. M. TSIMOKHOVA<sup>1</sup>,  
V. S. KAMYSHNIKOV<sup>2</sup>, E. I. VIZHINIS<sup>2</sup>, V. A. VOROBEY<sup>2</sup>*

### SUPRAMOLECULAR COMPLEX OF FATTY ACID WITH HEMOGLOBIN AS AN INDICATOR OF PHOSPHOLIPOLYSIS TO IDENTIFY EXPERIMENTAL PANCREATITIS

<sup>1</sup>*Institute of Bioorganic Chemistry of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
al\_h@mail.ru; lydias@tut.by; tatsianagudko@gmail.com*

<sup>2</sup>*Belarusian Medical Academy of Post-Graduate Education, Minsk, Belarus  
kafdiag@mail.ru; kafdiag@mail.ru; Varabeiproct@tut.by*

The study of the supramolecular complex of fatty acid with hemoglobin as an indicator of phospholipolysis at different stages of experimental acute necrotizing pancreatitis was carried out. It is found that the amplitude of the differential spectrum of hemoglobin in the presence of myristic, oleic and palmitic acids or mixtures thereof depends on the length of hydrocarbon chains of fatty acids and on the presence of double bonds. Full compliance of the dynamics of changes in the phospholipase A<sub>2</sub> activity with a pathomorphological picture of the development of pathology of the pancreas and its treatment is found. It is shown that the test system for determining the activity of phospholipase A<sub>2</sub> through the measurement of the differential spectrum of hemoglobin in the wavelength range 403–423 nm during the formation of the supramolecular complex of hemoglobin with fatty acids can be used for the diagnosis of severe forms of necrotizing pancreatitis as an informative laboratory test.

*Keywords:* phospholipolysis, phospholipase A<sub>2</sub>, test-system for photometric determination activity, fatty acid, hemoglobin, experimental model of acute necrotizing pancreatitis, the pancreas.

**Введение.** Проведение биохимических исследований на основе новых, принципиально отличающихся от традиционных, ферментативных средств тестирования воспалительных и деструктивных изменений в поджелудочной железе (ПЖ) при моделировании острого панкреатита (ОП) является актуальной задачей современной инженерной энзимологии, в частности энзимодиагностики [1]. Ее решение позволит своевременно выявлять степень структурно-функционального ущерба от феномена гиперферментемии, наблюдаемого в процессе развития ОП, и возможность

его компенсации; предотвратить формирование синдрома полиорганной недостаточности, при котором запускаются различные механизмы, реализующиеся на клиническом уровне в виде тяжелых, чаще всего гнойно-септических осложнений; непредсказуемый и зачастую неблагоприятный исход заболевания, его высокую летальность [2].

В Институте биоорганической химии НАН Беларуси разработана и предложена для диагностики воспалительных процессов желудочно-кишечного тракта оригинальная тест-система ФЛА<sub>2</sub>-ФОА по выявлению липолитической активности в биологическом материале, основанная на реакции превращения гемоглобина в гемихром под действием жирной кислоты, отщепляемой фосфолипазой А<sub>2</sub> (КФ 3.1.1.4, ФЛА<sub>2</sub>) от субстрата [3; 4]. Для проведения множественного анализа достаточно 50–100 мкл сыворотки крови [5]. Однако возможности тест-системы ФЛА<sub>2</sub>-ФОА для оценки степени тяжести ОП не исследованы.

Цель работы – изучение супрамолекулярного комплекса жирной кислоты с гемоглобином как индикатора фосфолиполиза на разных стадиях экспериментального острого некротизирующего панкреатита (ОМП).

Выбор этой тест-системы в качестве индикатора ОМП обусловлен ее высокой специфичностью, быстротой проведения реакции, простотой в исполнении и небольшими объемами анализируемого материала [6].

**Экспериментальная часть.** Активность ФЛА<sub>2</sub> сыворотки крови крыс определяли по накоплению во времени продукта гидролиза экзогенно добавленного димиристоилфосфатидилхолина (ДМФХ, фирмы Sigma) – жирной кислоты, которая взаимодействовала с гемоглобином (Hb, фирмы Sigma) как индикатором фосфолиполиза. Об образовании супрамолекулярного комплекса жирной кислоты с гемоглобином судили по характерным изменениям его электронного спектра в области полосы Core.

Перед началом эксперимента на спектрофотометре Specord uv-vis (Германия) в режиме пропускания ( $T$  75–125 %) в диапазоне 390–450 нм регистрировали нулевую линию, показывающую исходное состояние электронного спектра в момент полного тождества кювет с реакционной смесью, общим объемом по 2 мл в каждой, включающей 0,05 М трис-НСl-буферный раствор, 1 мМ CaCl<sub>2</sub>, и сыворотку крови крыс (конечная концентрация – 10 мкл исходной сыворотки на 1 мл реакционной смеси). Для инициации реакции в опытную кювету спектрофотометра, содержащую сыворотку крови (в случае построения калибровочной кривой – жирную кислоту), соль кальция (кофактор) и Hb, добавляли 8 мМ раствор смешанных мицелл субстрата (ДМФХ) с дезоксихолатом натрия (ДОХ, соотношение 1/3,4 (моль/моль)). В контрольную кювету, также содержащую сыворотку крови, вместо субстрата добавляли буферный раствор. Кюветы на время реакции помещали в термостат (37 °С).

Дифференциальные спектры Hb характеризовали в единицах оптической плотности как разность поглощения ( $\Delta D$ ) в диапазоне длин волн 403–423 в опытной кювете против контрольной через 60 и 100 мин от начала реакции.

Активность ФЛА<sub>2</sub> выражали в международных единицах (МЕ/л) по формуле

$$\text{Акт (МЕ/л)} = 100\Delta D / kt \text{ (мин)},$$

где  $k$  – коэффициент линейного уравнения, найденный по калибровочному графику;  $t$  – время реакции (60 или 100 мин);  $\Delta D$  – значение, полученное к этому времени; 100 – пересчет на 1 мл сыворотки.

По принятым критериям одна международная единица активности ФЛА<sub>2</sub> (МЕ/л) соответствует количеству мкмоль продукта (миристиновой кислоты), полученного при гидролизе субстрата (синтетического димиристоилфосфатидилхолина, ДМФХ) сывороточной ФЛА<sub>2</sub> за 1 мин.

Все полученные данные обрабатывали при помощи общепринятых методов вариационной биологической статистики с использованием критерия Стьюдента.

ОМП моделировали путем перевязки панкреатобилиарного протока у места впадения его в стенку двенадцатиперстной кишки крыс, производили забор крови для биохимического анализа степени фосфолиполиза через одни, двое и трое суток после лапаротомии и сравнивали с группой контрольных животных. Группу наблюдения составили 70 экспериментальных животных

(крысы). Три группы животных получали лечение ОП ксефокамом, лизиним-эсцинатом, лейкоцимом [1].

**Результаты и их обсуждение.** Повышение уровня панкреатической фосфолипазы  $A_2$  (КФ 3.1.1.4., ФЛА<sub>2</sub> IB) при патологии желудочно-кишечного тракта считается идеальным показателем деструктивных процессов ПЖ, поэтому определение в крови ее активности (концентрации) является объективным маркером диагностики панкреатитов [7].

Ранее нами показано, что во время образования супрамолекулярного комплекса гемоглобина с ЖК в процессе фосфолиполиза происходит превращение гемопротеина в окисленную низкоспиновую форму – гемихром, интенсивность возникающего дифференциального спектра которого прямо пропорциональна концентрации жирной кислоты в пробе и, следовательно, активности панкреатической ФЛА<sub>2</sub> [8].

Каждый дифференциальный спектр Нб характеризовался максимумом ( $\lambda = 423$ ), минимумом ( $\lambda = 403$ ) и расстоянием между ними ( $\Delta T$ ). Единицы пропускания  $\Delta T$  переводили в единицы поглощения  $\Delta D$  по формуле  $\Delta D = 2 - \lg(100 - T / 3)$ . Откладывая по оси абсцисс время взаимодействия гемоглобина с ЖК, отщепленной от субстрата ФЛА<sub>2</sub>, а по оси ординат значение  $\Delta D$ , получали кинетическую кривую, отражающую накопление продукта за единицу времени ( $V_0 = \Delta P / \Delta t$ ), т. е. начальную скорость реакции, и характеризующуюся определенным тангенсом угла наклона. Повышение концентрации фермента в реакционной смеси приводило к возрастанию угла наклона кинетической кривой (тангенса), т. е. увеличению скорости реакции [5; 8] (рис. 1).

Имеются данные, что воспалительный процесс в желудочно-кишечном тракте, развивавшийся в результате экспериментального перитонита у крыс, сопровождается высвобождением из фосфолипидов под действием ФЛА<sub>2</sub>, главным образом, миристиновой (МК, С14 : 0), пальмитиновой (ПК, С16 : 0) и олеиновой (ОК, 18 : 1) кислот [9]. Поэтому именно эти ЖК исследовали в качестве компонента супрамолекулярного комплекса с гемоглобином и стандарта для калибровочных кривых при создании оптимальных условий использования тест-системы ФЛА<sub>2</sub>-ФОА для оценки воспалительного процесса при моделировании экспериментального ОНП.

Обнаруженные различия в величине тангенса угла наклона кривых, отражающих изменение  $\Delta D$  ( $D_{403-423} = D_{1(403)} + D_{2(423)}$ ) в ответ на внесение мицелл субстрата с разными встроенными жирными кислотами, свидетельствовали о том, что амплитуда разностного спектра Нб зависит от длины углеводородной цепочки ЖК и наличия в ней двойных связей (рис. 2, а).

До сих пор считалось, что наибольший эффект на спектральные изменения Нб оказывала ОК [10]. Однако это преимущество нивелировалось способностью ОК подвергаться перекисному окислению вследствие имеющейся ненасыщенной связи, что могло вносить фактор нестабильности в тест-систему. По полученным нами данным максимальное воздействие на спектральные изменения Нб оказывала смесь ОК и ПК в соотношении соответственно 60 и 40 % (моль/моль), характерном для природного ФХ (рис. 2, а). В случае использования ПК обнаружилась ее склонность к агрегированию. МК – кислота с самой короткой углеводородной цепочкой, хотя и характеризовалась меньшей величиной тангенса угла наклона кинетической кривой, но наблюдаемый

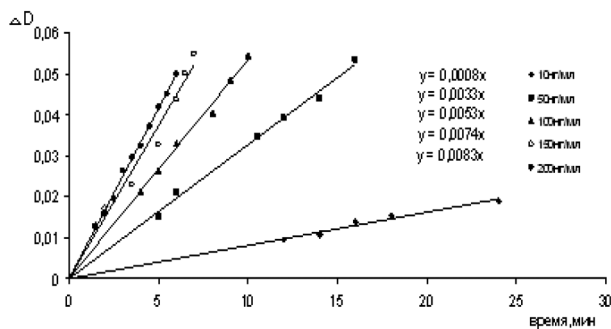


Рис. 1. Кинетика липолитической реакции при различных концентрациях фермента в условиях инициации реакции субстратом. Условия реакции: [ФХ] = 0,1 мМ; [ДОХ] = 0,3 мМ; [Нб] = 5 мкМ; [Ca<sup>2+</sup>] = 1 мМ; 0,05М Трис-НСl буферный раствор, pH 8,0, *t* комн.

линейный прирост  $\Delta D$  охватывал более широкий диапазон концентраций, что обуславливало выбор в качестве субстрата ДМФХ.

При встраивании в межфазную поверхность смеси жирных кислот в соотношении 60 % ОК и 40 % ПК (моль/моль), наряду со значительным увеличением интенсивности разностного спектра Нб в области полосы Соре, в отличие от другого продукта фосфолиполиза – лизофосфатидилхолина (ЛФХ), наблюдается сдвиг частоты («голубой сдвиг»), что в совокупности является физической основой при обнаружении панкреатита, диагностируемого по спектрофотометрическому измерению уровня ФЛА<sub>2</sub> в крови (рис. 2, б).

Добавление липидных эффекторов (ФХ, ЛФХ, ЖК) к гемоглобину практически не сказывается на поглощении Нб в области минимума дифференциального спектра при  $\lambda = 405$  нм (рис. 3, а).

Измерение поглощения Нб в области максимума при длине волны 423 нм обнаруживает существенное увеличение оптической плотности в присутствии жирной кислоты (рис. 3, б). Это позволяет перейти от использования импортного спектрофотометра Spesord uv-vis к однолучевому отечественному спектрофотометру Solar PV 1251 С – традиционному прибору клинических диагностических лабораторий для выявления образования супрамолекулярного комплекса Нб с ЖК.

Проведенные патоморфологические исследования свидетельствовали о поэтапном развитии ОНП подобно происходящему в организме больного человека: отек, инфильтрация, некроз (рис. 4).

Увеличение по сравнению с контролем (рис. 5, столбик 1) активности ФЛА<sub>2</sub> в крови крыс после лапаротомии (рис. 5, столбик 2), дальнейшее ее повышение при развитии ОНП (рис. 5, столбик 3) и снижение до исходных величин при действии лекарственных средств (рис. 5, столбики 4–6) обнаружили полное соответствие динамики изменения активности ФЛА<sub>2</sub> морфологической картине развития патологии ПЖ (рис. 4) и ее лечения [1].

Исследование активности ФЛА<sub>2</sub> показало, что, в среднем, статистически достоверная ( $p < 0,05$ ) активация ФЛА<sub>2</sub> наблюдается на первые (47,7 МЕ/л) и вторые (53,4 МЕ/л) сутки после моделирования ОП при контрольных значениях – 15,2 МЕ/л. Сыворотка крови отдельных особей характеризовалась максимальным увеличением активности ФЛА<sub>2</sub> на вторые сутки до 97,4 МЕ/л, что соответствовало данным об увеличении в 2–20 раз активности панкреатической ФЛА<sub>2</sub> в крови крыс с экспериментальным ОП [11].

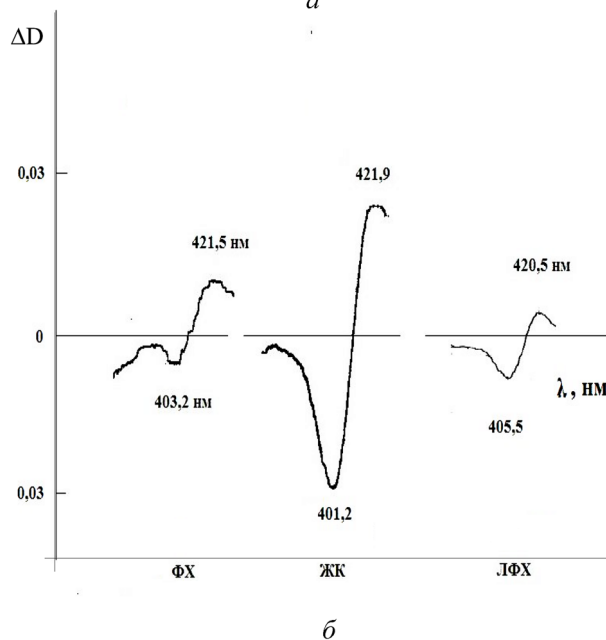
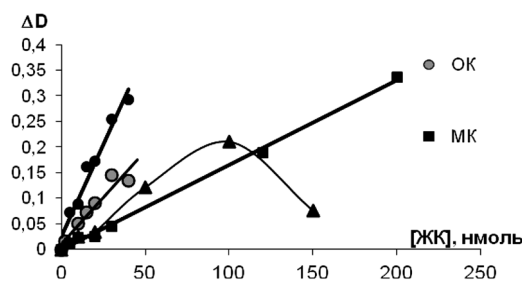
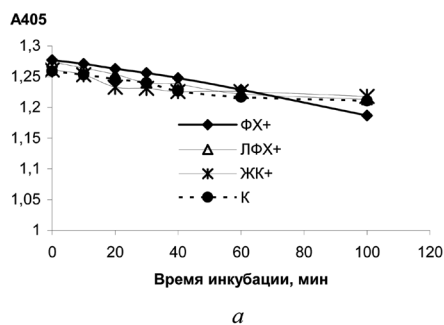


Рис. 2. Зависимость  $\Delta D$  дифференциального спектра гемоглобина от концентрации жирной кислоты. Условия реакции:  $[ФХ] = 0,1$  мМ,  $[ДОХ] = 0,3$  мМ,  $[Нб] = 5$  мкМ,  $[Ca^{+2}] = 1$  мМ,  $t = 37$  °С (а); «голубой сдвиг» (б) экстремума и увеличение интенсивности разностного спектра Нб в области полосы встраивания в межфазную поверхность смеси жирных кислот (ЖК = 60 % ОК + 40 % ПК, моль/моль) в соотношении, характерном для природного фосфатидилхолина (ФХ) яичного желтка

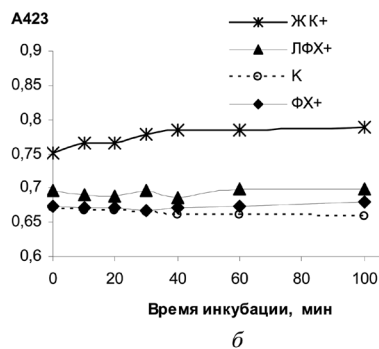


Рис. 3. Изменение интенсивности поглощения гемоглобина в области минимума (403 нм, а) и максимума (423 нм, б) дифференциального спектра под влиянием ФХ и продуктов его ферментативного гидролиза, измеренных на однолучевом отечественном спектрофотометре Solar PV 1251 С

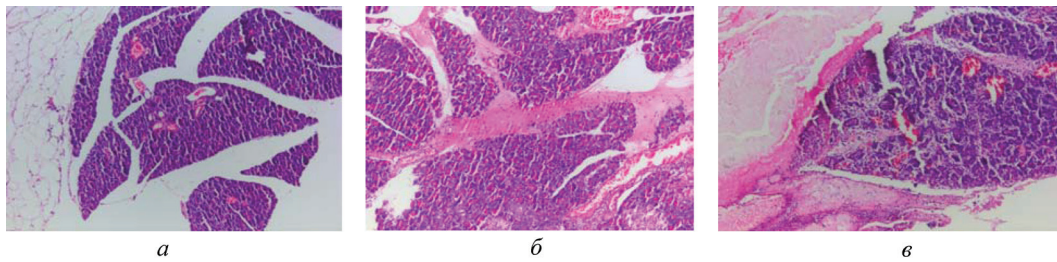


Рис. 4. Морфологическая картина неизменной ПЖ (*а*); после лигирования билиопанкреатического протока: через сутки (*б*) и трое суток (*в*). Имеется интерстициальный отек, лейкоцитарная инфильтрация, нарушение кровоснабжения. Окраска гематоксилином и эозином. Увеличение 200

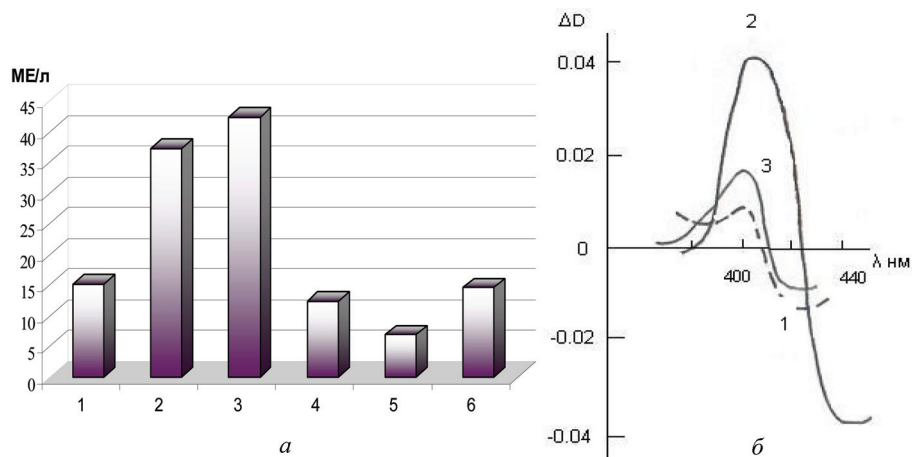


Рис. 5. *а* – Активность ФЛА<sub>2</sub> в сыворотке крови крыс: интактные животные (*1*); в день лапаротомии (*2*); экспериментальный панкреатит (*3*); после лечения ксефокамом (*4*); лизином-эсцинатом (*5*); лейкоцимом (*6*). Представлены средние данные за трое суток. Изменения достоверны по отношению к контролю ( $p < 0,05$ );

*б* – Дифференциальные спектры, полученные для интактных животных (*1*), животных с экспериментальным панкреатитом (*2*) и после лечения ксефокамом (*3*). Условия реакции: [ДМФХ] = 0,039 мМ, [ДОХ] = 0,136 мМ, [Hb] = 5 мкМ, [Ca<sup>2+</sup>] = 1 мМ, 10 мкл сыворотки крови крыс/мл реакционной смеси, время реакции 100 мин,  $t = 37^{\circ}\text{C}$

Полученные результаты позволили установить существенную особенность динамики изменения активности ФЛА<sub>2</sub>, кардинально отличающую таковую от динамики изменения показателей других общепринятых лабораторных тестов диагностики острого панкреатита [1] и служащую научным обоснованием использования теста определения активности ФЛА<sub>2</sub> для выявления процессов деструкции в поджелудочной железе. Панкреатическая ФЛА<sub>2</sub> как фермент, гидролизующий фосфолипиды – основную составляющую биологической мембраны, при гиперактивации отражает поражение мембран клеток, вызванное некробиотическим процессом, тогда как все остальные ферментативные (и многие неферментативные) тесты – преимущественно общий отклик организма на развитие воспалительного процесса в поджелудочной железе [1]. В пользу данного объяснения свидетельствует и то, что положительный лечебный эффект оказали те испытанные в ходе настоящей работы лекарственные препараты, под влиянием которых у животных не наблюдалось увеличения активности ФЛА<sub>2</sub> (рис. 5, столбики 4–6) в динамике развития некротизирующего панкреатита. Это служит научным обоснованием возможности дальнейшего использования в медицинской практике нового метода диагностики панкреатита – определения активности ФЛА<sub>2</sub>, оказавшей выраженный эффект в опытах на животных.

**Заключение.** Результаты экспериментальных исследований показали реальную возможность использования разработанной тест-системы определения активности ФЛА<sub>2</sub>, реализуемого с применением созданного набора реагентов ФЛА<sub>2</sub>-ФОА, в клиничко-лабораторной практике в процессе дифференциальной диагностики тяжелых форм некротизирующего панкреатита в качестве информативного лабораторного теста.

Уникальный принцип работы набора реагентов ФЛА<sub>2</sub>-ФОА – развитие дифференциального спектра гемоглобина в диапазоне волн 403–423 нм, возникающего при образовании его супрамо-

лекулярного комплекса с жирными кислотами, отщепляемыми под действием ФЛА<sub>2</sub> от субстрата (мицеллы димиристоилфосфатидилхолина и дезоксихолата натрия), позволяет регистрировать спектральные изменения не только на двухлучевом приборе Specord uv-vis, но и адекватно при одной длине волны 423 нм в области максимума на однолучевом спектрофотометре Solar отечественного производства, что значительно облегчит проведение биохимического анализа и обеспечит раннюю диагностику ОП.

### Список использованной литературы

1. Значимость исследования активности фосфолипазы А<sub>2</sub> как биомаркера процессов деструкции поджелудочной железы при остром некротизирующем панкреатите / В. А. Воробей [и др.] // Лаб. диагн. – 2015. – № 3–4 (15–16). – С. 104–113.
2. Острый панкреатит: пособие для врачей / М. И. Филимонов [и др.]; под ред. акад. РАН и РАМН В. С. Савельева. – М., 2000.
3. Способ определения активности фосфолипазы А<sub>2</sub> в сыворотке крови: пат. 12552 Республики Беларусь: МПК (2006) С 12Q 1/34 / Н. М. Литвинко, Л. А. Скоростецкая, С. В. Кучуро, Г. Н. Рахуба, дата публ.: 30.10.2009.
4. Способ диагностики панкреатита по уровню А<sub>2</sub> фосфолипазной активности сыворотки крови: пат. 13143 Республики Беларусь: МПК (2009), А 61В 5/145, С 12Q 1/34 / Н. М. Литвинко, Л. А. Скоростецкая; дата публ.: 30.04.2010.
5. Разработка отечественных тест-систем нового поколения для фотометрического определения активности панкреатической фосфолипазы А<sub>2</sub> в крови / Н. М. Литвинко [и др.] // ARS Medica. – 2011. – № 13(49). – С. 66–75.
6. Разработка и освоение новой биохимической тест-системы для выявления воспалительных процессов желудочно-кишечного тракта с использованием ключевых ферментов-маркеров / Н. М. Литвинко [и др.] // Наука – инновационному развитию общества / Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: В. Г. Гусаков [и др.]. – Минск: Беларуская навука, 2014. – С. 218–228.
7. Nevalainen, N. J. The role of phospholipase A<sub>2</sub> in human acute pancreatitis / N. J. Nevalainen // Klin. Wochenschr. – 1989. – Vol. 67. – P. 180–182
8. Апробация новой тест-системы в модельных экспериментах на клиническом материале / Н. М. Литвинко [и др.] // Лаб. диагн. – 2014. – № 4 (12). – С. 49–56.
9. Осочук, С. С. Изменения липидной композиции микросом печени крыс при экспериментальном перитоните / С. С. Осочук, Н. Ю. Коневалова // Новости хирургии. – 2006. – Т. 14, № 2. – С. 2–6.
10. Андреев, Г. М. Превращение гемоглобина в гемихром при взаимодействии со свободными жирными кислотами: автореф. дис. ... канд. хим. наук: (02.00.10) / Г. М. Андреев; АН БССР, Ин-т биорган. химии. – Минск, 1988.
11. Pathophysiological role of secretory type I and II phospholipase A<sub>2</sub> in acute pancreatitis: an experimental study in rats / W. Uhl [et al.] // Gut. – 1997. – Vol. 40, N 3. – P. 386–392.

Поступило в редакцию 31.12.2015

**БИОЛОГИЯ**

УДК 591.65:632.7 (476)

*Д. Г. ЖОРОВ, Ф. В. САУТКИН, С. В. БУГА***СОВРЕМЕННАЯ СТРУКТУРА КОМПЛЕКСА ЧУЖЕРОДНЫХ ВИДОВ СОСУЩИХ ЧЛЕНИСТОНОГИХ-ФИТОФАГОВ ФАУНЫ БЕЛАРУСИ***(Представлено членом-корреспондентом В. П. Семенченко)**Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
ZhorovDG@mail.ru; fvsautkin@gmail.com; aphids@tut.by*

К настоящему времени комплекс чужеродных видов сосущих членистоногих-фитофагов фауны Беларуси включает 61 вид насекомых и клещей из 35 родов, 12 семейств и 4 отрядов. Установлены основные регионы-доноры инвазивных видов сосущих членистоногих-фитофагов, которыми являются страны Южной, Западной и Северной Европы (19), меньшее число происходит из Средиземноморья (12), Северной Америки (11) и Центральной Азии (7); дальневосточное происхождение имеет лишь 2 вида инвайдеров. К числу криптогенных отнесено 7 видов сосущих насекомых и клещей, чужеродных для фауны Беларуси.

*Ключевые слова:* вредители, биологические инвазии, географическое распространение, эрифиоидные клещи, гемиптероидные насекомые.

*D. G. ZHOV, F. V. SAUTKIN, S. V. BUGA***ACTUAL STRUCTURE OF THE COMPLEX OF ALIEN SPECIES OF SUCKING PHYTOPHAGOUS ARTHROPODS IN THE FAUNA OF BELARUS***Belarusian State University, Minsk, Belarus  
ZhorovDG@mail.ru; fvsautkin@gmail.com; aphids@tut.by*

At present, the complex of alien species of sucking phytophagous arthropods in the fauna of Belarus includes 61 species of insects and mites from 35 genera, 12 families and 4 orders. The majority of them have the European (19 species) origin, and a smaller number is due to the Mediterranean (12), North American (11) origin. Seven invasive species are cryptogenic.

*Keywords:* pests, geographical distribution, biological invasions, Eriophyoidea, Hemipteroidea.

**Введение.** Проблема инвазий чужеродных для региональных фаун и флор биологических видов в последние десятилетия приобрела характер одной из наиболее острых глобальных проблем [1; 2]. В 2002 г. была принята Стратегия по инвазийным видам Европы [2], направленная на ограничение их распространения и обусловленного ими экономического и экологического ущерба. Проблема биологических инвазий в силу, прежде всего, географического положения Республики Беларусь, через территорию которой пролегают международные и трансрегиональные транспортные коридоры, весьма актуальна и для нашей страны. Интенсификация трансграничных транспортных потоков создает предпосылки для непреднамеренного завоза все новых, чужеродных для фауны Беларуси, видов наземных беспозвоночных животных. Ряд проникших на Европейский континент видов-вселенцев осуществляют дальнейшее распространение самостоятельно, с воздушными потоками или иными способами. Многие из них, являясь растительноядными формами, пополняют число фитофагов – вредителей сельскохозяйственных и декоративных культур, иных культивируемых и хозяйственно ценных растений. В этом отношении показателен пример Японии, где на рубеже тысячелетия из 198 адвентивных видов насекомых 72 % принадлежали к категории «вредных» – вредителей либо переносчиков возбудителей заболева-



ний [3]. При этом одной из первостепенных задач исследований видов-вселенцев является организация мониторинга инвазионных процессов. Такой мониторинг необходим для определения инвазионных коридоров, установления скорости проникновения чужеродных видов в новые экосистемы, прогноза инвазий в будущем и разработки превентивных мер контроля за нежелательными вселенцами [1].

Цель сообщения – обобщить сведения о современном составе комплекса чужеродных видов сосущих членистоногих-фитофагов фауны Беларуси.

**Материалы и методы исследований.** В основу работы положен фактический материал (сборы и учеты сосущих членистоногих, а также вызываемых ими повреждений), собранный в 2011–2015 гг. на территории всех административных областей Республики Беларусь, ландшафтно-географических провинций [4], лесорастительных зон [5] и районов интродукции древесных растений [6] Беларуси. Кроме того, были учтены результаты энтомо-акарологических исследований, выполненных на кафедре зоологии Белорусского государственного университета за период с 1993 г.

Идентификация таксономической принадлежности сосущих членистоногих осуществлялась по имаго, в том числе смонтированным в заключающих средах (тотальные микроскопические препараты) с использованием современных определителей, включая размещенные в on-line доступе [7–9]. Систематика гемиптероидных насекомых в целом унифицирована по on-line базе данных Fauna Europaea [10], географическое распространение видов приведено с учетом данных указанных выше источников. Авторы глубоко признательны канд. биол. наук О. И. Бородину (ГНПО «НПЦ НАН Беларуси по биоресурсам», Минск) и PhD L. Serbina (Natural History Museum of Basel, Switzerland) за консультации по цикадовым и псиллидам, входящим в состав рассматриваемого комплекса.

**Результаты и их обсуждение.** По результатам проведенных исследований и анализа данных прошлых лет был подготовлен (таблица) таксономический список чужеродных для фауны Беларуси видов сосущих членистоногих-фитофагов, который включает 61 вид насекомых и клещей, относящихся к 35 родам, 12 семействам, 4 отрядам и 2 классам.

**Таксономический состав и регионы происхождения чужеродных видов сосущих членистоногих-фитофагов фауны Беларуси**

Инвайдер	Регион происхождения
Отряд Acariformes	
<i>Aceria cephalonia</i> (Nalepa, 1922)	Западная и Южная Европа
<i>Aceria erineae</i> (Nalepa, 1891)	Средиземноморье
<i>Aceria loewi</i> (Nalepa, 1890)	криптогенный вид
<i>Aceria macrorhyncha</i> (Nalepa, 1889)	Западная и Южная Европа
<i>Aceria pseudoplatani</i> (Corti, 1905)	Западная и Южная Европа
<i>Aculus hippocastani</i> (Fockeu, 1890)	Южная Европа
<i>Eriophyes prunianus</i> Nalepa, 1926	Южная Европа
<i>Vasates quadripedes</i> (Shimer, 1869)	Северная Америка
Отряд Auchenorrhyncha	
<i>Stictocephala bisonia</i> Kopp & Yonke, 1977	Северная Америка
<i>Iguttetix oculata</i> (Lindberg, 1929)	Восточная Азия (Дальний Восток)
Отряд Sternorrhyncha	
<i>Parthenolecanium fletcheri</i> (Cockerell, 1893)	Северная Америка
<i>Pinnaaspis buxi</i> (Bouché, 1851)	Средиземноморье
<i>Psylla buxi</i> Linnaeus, 1758	Средиземноморье
<i>Adelges laricis</i> Vallot, 1836	Западная и Северная Европа
<i>Cholodkovskya viridana</i> (Cholodkovsky, 1896)	Западная и Северная Европа
<i>Pemphigus borealis</i> Tullgren, 1909	Восточная Азия (Дальний Восток)
<i>Pemphigus immunis</i> Buckton, 1896	Средиземноморье
<i>Pemphigus spyrothecae</i> Passerini, 1856	Средиземноморье

Инвайдер	Регион происхождения
<i>Chromaphis juglandicola</i> Kaltenbach, 1843	Средиземноморье
<i>Drepanosiphum platanoidis</i> Schrank, 1801	Западная и Южная Европа
<i>Appendiseta robiniae</i> (Gillette, 1907)	Северная Америка
<i>Myzocallis komareki</i> Pašek, 1954	Средиземноморье
<i>Myzocallis walshii</i> Monell, 1879	Северная Америка
<i>Panaphis juglandis</i> (Goeze, 1778)	Средиземноморье
<i>Phyllaphis fagi</i> Linnaeus, 1767	Западная и Южная Европа
<i>Therioaphis tenera</i> Aizenberg, 1956	Центральная Азия
<i>Tinocallis saltans</i> (Nevsky, 1929)	Северная Америка
<i>Periphyllus acericola</i> (Walker, 1848)	Западная и Южная Европа
<i>Cinara confinis</i> Koch, 1856	Западная и Северная Европа
<i>Cinara cuneomaculata</i> del Guercio, 1909	Западная и Северная Европа
<i>Cinara cupressi</i> Buckton, 1881	криптогенный вид
<i>Cinara larcis</i> Hartig, 1839	Западная и Северная Европа
<i>Eulachnus rileyi</i> Williams, 1910	Средиземноморье
<i>Acyrtosiphon caraganae</i> Cholodkovsky, 1907	Центральная Азия
<i>Aphis catalpae</i> Mamontova, 1953	криптогенный вид
<i>Aphis craccivora</i> Koch, 1854	Северная Америка
<i>Aphis gossypii</i> Glover, 1877 (1854)	криптогенный вид
<i>Aphis intybi</i> Koch, 1855	Средиземноморье
<i>Aphis spiraecola</i> Patch, 1914	криптогенный вид
<i>Aphis spiraephaga</i> F. P. Müller, 1961	Западная Европа
<i>Brachycaudus divaricatae</i> Shaposhnikov, 1956	Прикаспийский регион (север Передней Азии)
<i>Brachycaudus spiraeae</i> Börner, 1932	Западная Европа
<i>Brachycaudus prunicola</i> Kaltenbach, 1843	Южная Европа
<i>Capitophorus elaeagni</i> del Guercio, 1894	Центральная Азия
<i>Capitophorus hippophaes</i> Walker, 1858	Центральная Азия
<i>Capitophorus pakansus</i> Hottes & Frison, 1931	Центральная Азия
<i>Capitophorus similis</i> van der Goot, 1915	Центральная Азия
<i>Cryptomyzus ribis</i> Linnaeus, 1758	Северная Америка
<i>Elatobium abietinum</i> Walker, 1863	Северная Америка
<i>Hyadaphis tataricae</i> Aizenberg, 1935	Урал и Приуралье
<i>Impatiensium asiaticum</i> Nevsky, 1929	Центральная Азия
<i>Macrosiphum albifrons</i> Essig, 1911	Северная Америка
<i>Myzus cerasi</i> Fabricius, 1775	Южная Европа
<i>Myzus ligustri</i> Mosley, 1841	Западная и Южная Европа
<i>Myzus lythri</i> Schrank, 1801	Средиземноморье
<i>Myzus padellus</i> Hille Ris Lambers & Rogerson, 1946	криптогенный вид
<i>Myzus pruniavium</i> Börner, 1926	Южная Европа
<i>Semiaphis lonicerina</i> Shaposhnikov, 1952	Урал и Приуралье
<i>Uroleucon cichorii</i> (Koch, 1855)	Средиземноморье
<i>Uroleucon erigeronense</i> (Thomas, 1878)	Северная Америка
Отряд Thysanoptera	
<i>Dendrothrips ornatus</i> (Jablonowski, 1894)	криптогенный вид

В составе комплекса 8 видов эрифиоидных (четырёхногих, галловых) клещей (Arachnida: Acariformes) семейства Eriophiidae, в их числе к роду *Aceria* Keifer принадлежат 5 видов, к родам *Aculus* Keifer, *Eriophyes* von Siebold и *Vasates* Shimer – по одному. Сосущие насекомые надотряда гемиптероидных (Insecta: Hemipteroidea) представлены грудохоботными (Sternorrhyncha) и шеехоботными (Auchenorrhyncha) равнокрылыми насекомыми, а также трипсами (Thysanoptera). При этом к шеехоботным принадлежат всего лишь 2 вида инвайдеров – цикадка *I. oculata* из семейства настоящих цикадок (Cicadellidae) и горбатка-буйвол (*S. bisonia*) из семейства горбатов (Membracidae). Отряд бахромчатокрылых насекомых, или трипсов (Thysanoptera) представлен

единственным видом – липовым трипсом (*D. ornatus*) из семейства настоящих трипсов (Thripidae).

Большинство в составе рассматриваемого комплекса составляют грудохоботные насекомые. Среди них кокциды (Coccinea, или Coccidomorpha) представлены 1 видом щитовок рода *Pinnaspis* Cockerell из семейства диаспиновых щитовок (Diaspididae) и одним видом ложнощитовок рода *Parthenolecanium* Šulc из семейства ложнощитовок (Coccidae). Из листоблошек, или псиллид (Psyllinea, или Psyllomorpha) в составе комплекса присутствует единственный вид – самшитовая листоблошка (*P. buxi*) из семейства Psyllidae. Среди тлей (Aphidinea, или Aphidomorpha) большинство видов принадлежат к числу настоящих тлей (Aphidoidea), и лишь 2 вида семейства Adelgidae – к хермесам (Phylloxeroidea). Характерным является представительство большинства родов единичными видами, исключение составляют роды *Myzocallis* Passerini и *Brachycaudus* van der Goot (по 3 вида), *Capitophorus* van der Goot (4 вида) и *Myzus* Passerini (5 видов). В целом наибольшим числом видов (27) представлено семейство Aphididae s. str., что хорошо согласуется с ранее публиковавшимися [11; 12] данными по адвентивной фракции рецентной афидофауны Беларуси.

В рамках настоящего исследования были обобщены сведения о географическом происхождении (первичных, естественноисторически сложившихся ареалах) чужеродных для фауны Беларуси видов наземных членистоногих. Для ряда видов происхождение остается неясным, и их в рамках подобных исследований принято относить к числу криптогенных. В представленном в таблице списке таких видов всего 7 – это тли *A. spiraeicola*, *A. catalpae*, *A. gossypii*, *C. cupressi* и *M. padellus*, трипс *D. ornatus* и галловый клещ *A. loewi*. Несмотря на наличие прямого трансконтинентального транзита и отсутствие государственной границы с Российской Федерацией, с Дальнего Востока (включая дальневосточные регионы России) к нам проникло лишь 2 чужеродных вида насекомых – цикадка *I. oculata* и тля *P. borealis*. Выходцами из регионов Северной Америки является 11 видов насекомых и клещей: *A. craccivora*, *A. robiniae*, *C. ribis*, *E. abietinum*, *M. albifrons*, *M. walshii*, *P. fletcheri*, *S. bisonia*, *T. saltans*, *U. erigeronense* и *V. quadripedes*. Из Центральной Азии к нам проникло 7 видов насекомых (*A. caraganae*, *C. elaeagni*, *C. hippophaes*, *C. pakansus*, *C. similis*, *I. asiaticum*, *Th. tenera*), и несколько больше, 12 видов (клещ *A. erinea*, тли *A. intybi*, *Ch. juglandicola*, *E. rileyi*, *M. komareki*, *M. lythri*, *P. juglandis*, *P. immunis*, *P. spirothecae*, *U. cichorii*, щитовка *P. buxi*, листоблошка *P. buxi*), из Средиземноморья (в широком смысле, включая Область Древнего Средиземья). Отдельно можно выделить Прикаспийский регион (имея ввиду север Передней Азии), откуда происходит алычевая, или алычево-дремовая тля (*B. divaricatae*), а также Урал и Приуралье, где простирается естественный ареал жимолости татарской (*L. tatarica*), которая является кормовым растением тлей *H. tataricae* и *S. lonicerina*. И, наконец, наибольшее число инвайдеров происходит из различных регионов Южной, Западной и Северной Европы, что представляется вполне закономерным, учитывая географическое положение нашей страны.

**Заключение.** Таким образом, по результатам выполненных исследований в составе комплекса чужеродных видов сосущих членистоногих-фитофагов фауны Беларуси представляется возможным констатировать 61 вид насекомых и клещей, соответствующих категории инвазивных. Среди них 8 видов эрифиоидных клещей (Arachnida: Acariformes), 50 видов грудохоботных (Insecta: Sternorrhyncha) и 2 вида шеехоботных (Auchenorrhyncha) насекомых, 1 вид трипсов (Thysanoptera). Выполненный хронологический анализ показал, что основными регионами – донорами инвазивных видов сосущих членистоногих-фитофагов являются страны Южной, Западной и Северной Европы (19), меньшее число видов происходит из Средиземноморья (12), Северной Америки (11) и Центральной Азии (7), тогда как дальневосточное происхождение имеет лишь 2 вида инвайдеров. К числу криптогенных отнесено 7 видов сосущих насекомых и клещей, чужеродных для фауны Беларуси.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке БРФФИ (проекты Б14МВ-013 и Б15-063).

### Список использованной литературы

1. Семенченко, В. П. Проблема чужеродных видов в фауне и флоре Беларуси / В. П. Семенченко, А. В. Пугачевский // Наука и инновации. – 2006. – № 10 (44). – С. 15–20.

2. A global strategy on invasive alien species / eds. J. A. McNeely [et al.]. – IUCN, Gland, Switzerland, 2001. – 50 p.
3. *Ижевский, С. С.* Инвазии: неизбежность и контроль / С. С. Ижевский // Экологическая безопасность и инвазии чужеродных организмов: сб. материалов круглого стола Всероссийской конференции по экологической безопасности. – Москва, 2002. – С. 49–61.
4. *Марцинкевич, Г. И.* Теоретические проблемы и результаты комплексного географического районирования территории Беларуси / Г. И. Марцинкевич [и др.] // Выбранные научные работы Белорусского государственного университета. – 2001. – Т. 7. – С. 333–356.
5. *Юркевич, Д. И.* Растительность Белоруссии, ее картографирование, охрана и использование / Д. И. Юркевич, Д. С. Голод, В. С. Адерихо. – Минск: Наука и техника, 1979. – 248 с.
6. *Нестерович, Н. Д.* Интродукционные районы и древесные растения для зеленого строительства в Белорусской ССР / Н. Д. Нестерович. – Минск: Наука и техника, 1981. – 111 с.
7. Aphids on the World's Plants: An online identification and information guide [Electronic resource] / ed. R. Blackman. – London: Natural History Museum, 2012. – Mode of access: <http://www.aphidsonworldsplants.info>. – Date of access: 12.11.2015.
8. *Ouvrard, D.* Taxonomic checklist of the world's whiteflies (Insecta: Hemiptera: Aleyrodidae) [Electronic resource] / D. Ouvrard, J. H. Martin. – Mode of access: <http://www.hemiptera-databases.com>. – Date of access: 15.11.2015.
9. *Percy, D. M.* Psyllids or 'jumping plant lice' (Psylloidea, Hemiptera) [Electronic resource] / D. M. Percy. – Mode of access: <http://www.psyllids.org/>. – Date of access: 15.11.2015.
10. Fauna Europaea [Electronic resource]. – 2000–2013. – Mode of access: <http://www.faunaeur.org>. – Date of access: 08.11.2015.
11. *Buga, S. V.* Expansion of new species of aphids on the trees with respect to plant introduction activity in Belarus / S. V. Buga // Aphids and Other Homopterous Insects. – 1999. – Vol. 7. – P. 57–60.
12. *Буга, С. В.* Дендрофильные тли Беларуси / С. В. Буга. – Минск: БГУ, 2001. – 98 с.

Поступило в редакцию 21.03.2016

УДК 635.64: 577.21: 631.547.66: 547.979.8

В. Ф. АДЖИЕВА<sup>1</sup>, Н. А. НЕКРАШЕВИЧ<sup>1</sup>, О. Г. БАБАК<sup>1</sup>, Л. А. МИШИН<sup>2</sup>,  
член-корреспондент А. В. КИЛЬЧЕВСКИЙ<sup>1</sup>

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОЛЕКУЛЯРНЫХ МАРКЕРОВ ДЛЯ СОЗДАНИЯ ЛЕЖКИХ ГИБРИДОВ ТОМАТА С ВЫСОКИМ СОДЕРЖАНИЕМ КАРОТИНОИДОВ

<sup>1</sup>Институт генетики и цитологии НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
*Adjieva\_vika@mail.ru; natali.n25@mail.ru; babak\_olga@mail.ru; A.Kilchevsky@igc.bas-net.by*

<sup>2</sup>Институт овощеводства НАН Беларуси, Самохваловичи, Беларусь  
*leo123@tut.by*

Протестирована коллекция томата с применением функциональных ПЦР маркеров к генам, детерминирующим содержание каротиноидов и период сохранности плодов. Выделенные в результате ДНК-типирования источники селекционно-ценных генов использовались в скрещивании высококароотиновых линий и лежких тестеров по схеме топкроссов. Изучена комбинационная способность линий и тестеров по признаку «массовая концентрация β-каротина», выделены образцы с высоким содержанием β-каротина и ликопина.

*Ключевые слова:* томат, мутантные гены, период сохранности плодов, каротиноиды, комбинационная способность.

V. F. AJYIEVA<sup>1</sup>, N. A. NEKRASHEVICH<sup>1</sup>, O. G. BABAK<sup>1</sup>, L. A. MISHIN<sup>2</sup>, A. V. KILCHEVSKY<sup>1</sup>

## USE OF MOLECULAR MARKERS FOR THE DEVELOPMENT OF LONG-STORAGE TOMATO HYBRIDS WITH A HIGH CAROTENOID CONTENT

<sup>1</sup>Institute of Genetics and Cytology of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
*Adjieva\_vika@mail.ru; natali.n25@mail.ru; babak\_olga@mail.ru; A.Kilchevsky@igc.bas-net.by*

<sup>2</sup>Institute of vegetable growing of the National Academy of Sciences of Belarus, Samokhvalovichy, Belarus  
*leo123@tut.by*

A collection of tomato genotypes was tested by functional PCR markers for the genes determining a carotenoid content and a period of fruit preservation. Identified as a result of DNA-typing sources of breeding the valuable genes were used for high carotene content line crossing and long-storage testers according to the top-cross scheme. The combining ability of lines and testers on the basis of “mass concentration of β-carotene” features was studied and the specimens with a high concentration of β-carotene and lycopene were selected.

*Keywords:* tomato, mutant genes, fruit storage life, carotenoids, combinational ability.

**Введение.** Углубленное изучение природных антиоксидантов позволило установить их важную роль в профилактике ряда заболеваний [1; 2]. Томат – ценный источник β-каротина, ликопина, аскорбиновой кислоты и флавоноидов. В последние годы во многих странах мира наряду с приоритетными направлениями селекции томата (продуктивность, устойчивость к патогенам, высокая адаптивность и др.) активно развивается селекция на повышенное содержание каротиноидов. Работы по получению форм томата с высоким содержанием пигментов ведутся в России [3], Болгарии [4; 5], Приднестровье [6], Украине [7] и других странах. Однако в Беларуси имеются единичные примеры подобных работ [8]. Селекция на повышенное содержание каротиноидов связана с трудностями отбора по фенотипу. Большинство генов, определяющих биосинтез каро-

тиноидов, фенотипически проявляются на поздних стадиях развития растений, что существенно замедляет и удорожает селекционный процесс. Применение маркер-ассоциированной селекции позволит сократить период создания высококаротиновых форм томата за счет оценки большого количества материала на ранних стадиях развития и повысить эффективность отбора.

Гены *B*, *og<sup>c</sup>*, *t*, *gf*, *hp-1*, *hp-2* и другие модифицируют физиолого-биохимические процессы при созревании плодов, позволяя создавать сорта с измененным и повышенным содержанием каротиноидов. В последние годы большое внимание уделяется получению гибридов с длительным периодом сохранности плодов. Гены *rin*, *nor* и *nor<sup>d</sup>* получили наибольшее применение в селекционной практике. Однако рядом исследователей отмечаются недостатки лежких плодов: недостаточная пигментация, низкое содержание каротиноидов [9; 10]. В связи с этим для повышения эффективности использования генов, детерминирующих сохранность плодов томата, представляет интерес их комбинирование с генами, контролирующими содержание каротиноидов. Для этого в 2009 г. нами был создан ряд гибридов, сочетающих гены, изменяющие содержание каротиноидов (*B*, *og<sup>c</sup>*, *t*, *gf-3*) и период сохранности плодов томата (*nor*, *nor<sup>d</sup>*, *rin*).

**Материалы и методы исследования.** Объектом исследования являлись 10 родительских форм и 24 гибрида  $F_1$ , полученных в результате скрещивания высококаротиновых и лежких образцов томата. Массовую концентрацию  $\beta$ -каротина определяли спектрофотометрическим методом с дополнительной очисткой при помощи колончатой хроматографии [11]. Хроматографический анализ содержания ликопина проводили методом ВЭЖХ на хроматографе Shimadzu LC-20 Prominence (Япония) [12]. В качестве стандарта применялись препараты  $\beta$ -каротин и ликопин (Bio Chemika). Идентификацию каротиноидов осуществляли по времени их удерживания и УФ-спектрам. Содержание пигментов выражали в мг/100 г сырой массы. Для оценки комбинационной способности родительских форм по признаку «массовая концентрация  $\beta$ -каротина» использовали модель R. E. Comstock, H. F. Robinson [13].

**Результаты и их обсуждение.** Результаты определения массовой концентрации  $\beta$ -каротина и ликопина в плодах изучаемых форм представлены в табл. 1. В 2010 г. по содержанию  $\beta$ -каротина четыре гибридные комбинации и две материнские линии статистически значимо превосходили стандартный гибрид  $F_1$  Старт. Комбинации Луч  $\times$  Мо 948, Луч  $\times$  Лонг кипер, Флайме  $\times$  Мо 950, Флайме  $\times$  Лонг кипер были получены на основе линий Луч и Флайме, которые несут в своем генотипе ген *B*, детерминирующий высокое содержание  $\beta$ -каротина. Для этих гибридных комбинаций содержание  $\beta$ -каротина колебалось от 3,8 до 3,95 мг/100 г, что превышало содержание данного пигмента в стандарте на 32–38 %.

В 2011 г. из-за сложных погодных условий изучаемые генотипы накопили в среднем на 26,7 % меньше  $\beta$ -каротина, чем в 2010 г., причем содержание пигмента у стандарта  $F_1$  Старт осталось практически на одном уровне. В связи с этим лишь одна гибридная комбинация Луч  $\times$  Мо 950 и две материнские линии Черный принц (*gf-3*) и Флайме (*B*) статистически значимо превосходили стандарт по изучаемому признаку.

По результатам двухлетних наблюдений выделились комбинации Бония  $\times$  Лонг кипер, Черный принц  $\times$  Мо 950, Черный принц  $\times$  Лонг кипер, а также комбинации, полученные на основе линий Луч и Флайме, за исключением гибрида Луч  $\times$  Мо 577. Массовая концентрация  $\beta$ -каротина в плодах данных форм превышала среднее значение признака стандарта  $F_1$  Старт (табл. 1).

Результаты анализа содержания ликопина в изучаемых формах томата представлены в табл. 1. Ликопин является преобладающим каротиноидом в красноплодных сортах томата. Содержание этого пигмента в плодах варьирует от 0,5 мг/100 г для желтоплодных до 3–7 мг/100 г для красноплодных сортов. По содержанию ликопина выделились линии Бония (*og<sup>c</sup>*) и Черный принц (*gf-3*), несущие гены, повышающие содержание этого пигмента, а также гибриды, полученные на их основе. У линий концентрация ликопина оказалась максимальной и равнялась 8,2 и 11,8 мг/100 г соответственно, что превосходило стандартный гибрид  $F_1$  Старт на 58–127 %. У гибридных комбинаций содержание данного пигмента достигало 6,2–7,6 мг/100 г, что превышало стандарт по данному признаку на 19–46 %.

В табл. 2 представлены эффекты ОКС  $g_i$  и варианты СКС  $\sigma_{S_i}^2$  по массовой концентрации  $\beta$ -каротина, характеризующие родительские линии как компоненты скрещивания.

Т а б л и ц а 1. Массовая концентрация  $\beta$ -каротина и ликопина в плодах родительских форм и гибридов  $F_1$  томата, мг/100 г сырой массы

Наименование образца	Массовая концентрация $\beta$ -каротина			Содержание ликопина
	2010 год	2011 год	Среднее	
Yellow oxyheart $\times$ Мо 577	2,67	2,08	2,38	3,3
Yellow oxyheart $\times$ Мо 948	2,10	2,16	2,13	3,7
Yellow oxyheart $\times$ Мо 950	2,37	1,89	2,13	5,3
Yellow oxyheart $\times$ Лонг кипер	3,17	1,77	2,47	5,6
Бония $\times$ Мо 577	2,87	1,50	2,19	7,1
Бония $\times$ Мо 948	2,20	1,73	1,97	7,6
Бония $\times$ Мо 950	3,00	2,23	2,62	6,5
Бония $\times$ Лонг кипер	3,70	2,33	3,02	6,5
Черный принц $\times$ Мо 577	3,10	1,93	2,52	4,7
Черный принц $\times$ Мо 948	2,63	2,13	2,38	6,2
Черный принц $\times$ Мо 950	3,50	1,97	2,74	6,9
Черный принц $\times$ Лонг кипер	3,70	2,27	2,99	7,2
Золотой $\times$ Мо 577	2,40	1,70	2,05	4,1
Золотой $\times$ Мо 948	3,90*	1,40	2,65	4,8
Золотой $\times$ Мо 950	2,57	1,57	2,07	3,9
Золотой $\times$ Лонг кипер	2,73	1,90	2,32	5,6
Луч $\times$ Мо 577	2,43	1,67	2,05	1,8
Луч $\times$ Мо 948	3,80	2,53	3,17	3,3
Луч $\times$ Мо 950	3,68	3,63*	3,66	2,9
Луч $\times$ Лонг кипер	3,95*	2,07	3,01	3,5
Флайме $\times$ Мо 577	3,20	2,57	2,89	2,3
Флайме $\times$ Мо 948	3,20	2,80	3,00	3,0
Флайме $\times$ Мо 950	3,83*	2,20	3,02	3,7
Флайме $\times$ Лонг кипер	3,90*	2,83	3,37	3,5
Yellow oxyheart ( <i>t</i> )	2,53	2,07	2,30	0,2
Бония ( <i>og<sup>c</sup></i> )	2,63	2,53	2,58	8,2
Черный принц ( <i>gf-3</i> )	5,30**	3,53*	4,42	11,8
Золотой	0,27	0,21	0,24	0,1
Луч ( <i>B</i> )	3,37	2,90	3,14	2,0
Флайме ( <i>B</i> )	4,80**	3,40*	4,10	2,1
Мо 577 ( <i>rin</i> )	0,80	1,30	1,05	0,0
Мо 948 ( <i>nor</i> )	1,43	1,41	1,42	1,4
Мо 950 ( <i>nor<sup>d</sup></i> )	1,77	2,34	2,06	3,9
Лонг кипер	3,03	2,60	2,82	6,0
Старт $F_1$ (стандарт)	2,87	2,60	2,74	5,2
НСР <sub>0,05</sub>	0,96	0,65	–	–

Примечания: \* –  $P < 0,05$ ; \*\* –  $P < 0,01$ .

Т а б л и ц а 2. Эффекты ОКС ( $g$ ), вариансы СКК ( $\sigma_{S_i}^2$ ) и средние значения массовой концентрации  $\beta$ -каротина ( $x_i$ ) в плодах линий и тестеров томата

Родительская форма	Показатель массовой концентрации каротина					
	$x_i$		$g_i$		$\sigma_{S_i}^2$	
	2010 г.	2011 г.	2010 г.	2011 г.	2010 г.	2011 г.
<i>Линии</i>						
Yellow oxyheart ( <i>t</i> )	2,53	2,1	–0,45	–0,15	0,6	0,2
Бония ( <i>og<sup>c</sup></i> )	2,63	2,5	–0,18	–0,17	0,4	0,2
Черный принц ( <i>gf-3</i> )	5,30	3,5	0,11	–0,04	0,2	0,1
Золотой	0,27	0,2	–0,23	–0,48	1,7	0,2
Луч ( <i>B</i> )	3,37	2,9	0,34	0,36	0,7	1,6
Флайме ( <i>B</i> )	4,80	3,4	0,41	0,48	0,0	0,4
<i>Тестеры</i>						
Мо 577 ( <i>rin</i> )	0,80	1,3	–0,28	–0,21	1,0	0,6
Мо 948 ( <i>nor</i> )	1,43	1,4	–0,15	0,01	2,2	0,2
Мо 950 ( <i>nor<sup>d</sup></i> )	1,77	2,3	0,03	0,13	0,3	1,5
Лонг кипер	3,03	2,6	0,40	0,08	0,4	0,5

Образцы Флайме и Луч, для которых отмечено высокое значение признака на протяжении двух лет исследования, имели и самые высокие эффекты ОКС, что свидетельствует о целесообразности их использования в селекции с целью получения гибридов с высоким содержанием  $\beta$ -каротина.

Среди тестеров сорт Лонг кипер имел максимальную ОКС в 2010 г. и относительно высокую ОКС в 2011 г. Форма Мо 950 также обладала высокими значениями признака и эффектами ОКС на протяжении двух лет исследования. Выявлено наименьшее ингибирующее действие Мо 950 с геном *nor<sup>d</sup>* на содержание  $\beta$ -каротина в гибридном потомстве по сравнению с лежкими тестерами Мо 577 (*rin*) и Мо 948 (*nor*), что позволяет характеризовать эту форму как перспективную для селекции лежких томатов с высоким качеством плодов.

**Закключение.** Выделены гибриды томата, превосходящие стандарт по массовой концентрации  $\beta$ -каротина: Бония  $\times$  Лонг кипер, Черный принц  $\times$  Мо 950, Черный принц  $\times$  Лонг кипер, а также большинство комбинаций, полученных на основе линий Луч и Флайме. Превышение данных гибридов над средним значением признака у стандарта равнялось 22,6–33,6 %. Достоверно превосходили стандарт по этому признаку линии Луч и Флайме с геном *B*, контролирующим высокое содержание  $\beta$ -каротина.

По содержанию ликопина отмечены линии Черный принц (*gf-3*) и Бония (*og<sup>c</sup>*), а также гибриды, полученные на их основе, которые на 19–46 % превысили стандарт по данному признаку. Форма Черный принц с геном *gf-3* превосходила стандарт по комплексу каротиноидов –  $\beta$ -каротин и ликопин.

Оценка комбинационной способности родительских форм по массовой концентрации  $\beta$ -каротина позволила выделить линии Флайме и Луч, которые обладали высокими значениями признака и эффектами ОКС, что свидетельствует о целесообразности их использования в селекции на получение гибридов с высоким содержанием  $\beta$ -каротина. Среди тестеров отмечены образцы с высокой ОКС – Лонг кипер и Мо 950. Мутантная лежкая форма Мо 950 (*nor<sup>d</sup>*) обладала высоким значением признака и ОКС, что характеризует ее как перспективную для селекции лежких томатов с высоким качеством плодов.

Проведенное исследование позволило установить, что в результате скрещивания форм с генами, контролирующими содержание каротиноидов (*B*, *og<sup>c</sup>*, *t*, *gf-3*) и период сохранности плодов томата (*nor*, *nor<sup>d</sup>*, *rin*), удалось частично уменьшить отрицательные плеiotропные эффекты последних: недостаточную пигментацию лежких плодов, низкое содержание каротиноидов. Выделены гибридные комбинации, сочетающие высокое содержание каротиноидов с длительным периодом сохранности плодов [14], что подтверждает целесообразность скрещивания высококаротиновых и лежких образцов томата в селекции на качество плодов.

### Список использованной литературы

1. *Minhthy, L. N.* Lycopene: Chemical and Biological Properties / L. N. Minhthy, S. J. Schwartz // *Foodthechnology*. – 1999. – Vol. 53. – P. 38–45.
2. *Southon, S.* Increased fruit and vegetable consumption within the EU: potential health benefits / S. Southon // *Food Research International*. – 2000. – Vol. 33. – P. 211–217.
3. Особенности наследования скороспелости и содержания ликопина у гибридов F<sub>1</sub> томата / И. Ю. Кондратьева [и др.] // *Вестн. Рос. акад. сельскохозяйственных наук*. – 2011. – № 5. – С. 46–48.
4. *Тодоров, Т. В.* Невен – нов сорт домати с повишено съдържание на  $\beta$ -каротин / Т. В. Тодоров // *Растениеведни науки*. – София, 2001. – № 38. – С. 262–264.
5. Study on the variability of lycopene and  $\beta$ -carotene content in tomato (*Lycopersicon esculentum* Mill.) / N. Tomlekova [et al.] // *ActaHorticulturae*. – 2007. – Vol. 729. – P. 101–104.
6. *Выродова, А. П.* Окраска плодов томата определяет их биологическую ценность / А. П. Выродова, О. Е. Яновчик // *Картофель и овощи*. – 2009. – № 2. – С. 30.
7. *Кузменский, А. В.* Эффекты межгенного взаимодействия гена повышенной пигментации *hp-2dg* с геном *B* (*Beta-carotene*) у томата / А. В. Кузменский // *Цитология и генетика*. – 2008. – № 5. – С. 32–40.
8. *Мишин, Л. А.* Селекция томата для условий Беларуси / Л. А. Мишин // *Эффективное овощеводство в современных условиях: материалы науч.-практ. конф., Минск, июль 2005 г.; редкол.: А. А. Аутко [и др.]*. – Минск: Белпринт, 2005. – 304 с.
9. *Гурин, М. В.* Изучение вегетационного периода у гибридов F<sub>1</sub> томата с генами лежкости / М. В. Гурин // *Современные тенденции в селекции и семеноводстве овощных культур. Традиции и перспективы: материалы междунар. науч.-практ. конф., Москва, 2–4 авг. 2010 г.: в 2 ч.* / ВНИИССОК; редкол.: В. Ф. Пивоваров [и др.]. – Москва, 2010. – Ч. 2. – С. 220–229.



10. Кузёменский, А. В. Эффективность взаимодействия гена лежкости *alc* (*alcobaça*) с генами повышенной пигментации плода / А. В. Кузёменский // Цитология и генетика. – 2007. – № 6. – С. 34–43.
11. Продукты переработки плодов и овощей. Метод определения каротина: ГОСТ 8756.22–88. – Введ. 06.03.1980. – М.: Издательство стандартов, 1992. – 4 с.
12. Булда, О. В. Содержание ликопина и других каротиноидов в плодах томата (*Lycopersicon Esculentum* L.) белорусской и зарубежной селекции / О. В. Булда, Л. А. Мишин, Г. Н. Алексейчук // Весці НАН Беларусі. Сер. агр. навук. – 2009. – № 1. – С. 36–41.
13. Comstock, R. E. The components of genetic variance in populations of biparental progenies and their use in estimating the average degree of dominance / R. E. Comstock, H. F. Robinson // Biometrics. – 1948. – Vol. 4, N 3. – P. 254–266.
14. Наследование признака «период сохранности плодов» у топкроссных гибридов F<sub>1</sub> томата (*Solanum lycopersicum* L.) / В. Ф. Аджиева [и др.] // Овощеводство. – 2012. – Т. 19. – С. 7–15.

Поступило в редакцию 27.06.2016

УДК 575.22:631.52:633.111.1

М. Н. ШАПТУРЕНКО<sup>1</sup>, С. В. ВАКУЛА<sup>1</sup>, В. КОРЗУН<sup>2</sup>, академик Л. В. ХОТЫЛЕВА<sup>1</sup>

## SNP-АНАЛИЗ ГЕНЕТИЧЕСКОГО РАЗНООБРАЗИЯ ПШЕНИЦЫ БЕЛАРУСИ

<sup>1</sup>Институт генетики и цитологии НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
m.shapturenko@igc.by; svettera@yandex.ru; l.khotyleva@igc.by

<sup>2</sup>KWS LOCHOW GmbH, Берген, Германия  
viktor.korzun@kws-lochow.de

Проведено изучение генетического разнообразия пшеницы Беларуси на основе высокопропускного SNP маркирования. В целом из 384 использованных маркеров в исследуемой коллекции типирован 331 локус. Генофонды озимых и яровых сортов достоверно различаются по частотам 248 вариантов 174 SNP. Генетическая структура белорусских сортов обнаруживает значительное сходство с образцами российской и украинской селекции, но при этом обладает значительным запасом разнообразия, которое представляет хороший потенциал для создания новых высокопродуктивных адаптированных форм.

*Ключевые слова:* пшеница (*Triticum aestivum* L.), генетическое разнообразие, SNP-маркеры.

M. N. SHAPTURENKO<sup>1</sup>, S. V. VAKULA<sup>1</sup>, V. KORZUN<sup>2</sup>, L. V. KHOTYLEVA<sup>1</sup>

## HIGH-THROUGHPUT SNP ARRAY FOR GENETIC DIVERSITY EVALUATION WITHIN HEXAPLOID WHEAT IN BELARUS

<sup>1</sup>Institute of Genetics and Cytology of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
m.shapturenko@igc.by; svettera@yandex.ru; l.khotyleva@igc.by

<sup>2</sup>KWS LOCHOW GmbH, Bergen, Germany  
viktor.korzun@kws-lochow.de

We used a high-throughput array to evaluate the diversity of hexaploid wheat growing in Belarus under the breeding program through 384 gene-associated SNPs. The gene pool of winter and spring varieties are significantly different in frequency of 248 variants from 174 SNPs. The genetic structure of the Belarusian population of wheat has appeared similar to the Russian and Ukrainian varieties and is essentially different from west-European varieties. But it has a high variability and, consequently, a good genetic potential for the improvement through breeding.

*Keywords:* wheat (*Triticum aestivum* L.), genetic diversity, SNP-markers.

**Введение.** Мягкая пшеница *Triticum aestivum* L. ( $2n = 42$ ) является естественным аллополиплоидом с геномной формулой ВВААDD [1]. Ее геном содержит около  $17,3 \cdot 10^9$  п. н. ДНК, из которых 80 % приходится на повторяющиеся последовательности [2].

Генетическое разнообразие пшеницы служит источником вариаций для селекции, обуславливая создание новых форм хозяйственно ценных растений с улучшенными свойствами. Узкая генетическая основа снижает эффективность селекции, поскольку не позволяет преодолеть уязвимость к неблагоприятным факторам и ограничивает возможности комбинаторики наследственного материала при гибридизации. В связи с этим важное значение приобретает сохранение генетических ресурсов и оценка их разнообразия для дальнейшего использования в практических целях [3].

В Беларуси пшеница является одной из основных зерновых культур наряду с ячменем, рожью и тритикале. Преимущественно сельскохозяйственное производство обеспечивает потребности государства в зерне, за исключением высококачественных элитных сортов. В последнее десятилетие структура зерновых культур значительно изменилась в пользу высокоурожайных сортов пшеницы на 19 % (с 20,1 до 32,1 %) за счет сокращения посевных площадей ржи [4]. Это вызвало изменения общей урожайности зерновых культур. В 2014 г. площадь под пшеницей в Беларуси составила около 500 тыс. га, две трети из которых были засеяны озимыми сортами.

В до- и послевоенные годы, вплоть до середины 1980-х годов, селекция пшеницы в Беларуси практически не развивалась [5], но ежегодно около 100 тыс. га засеивались российскими, украинскими и польскими сортами. Производство местной пшеницы имело низкую конкурентоспособность за счет экспорта высококачественного зерна сильной пшеницы из различных регионов бывшего СССР [6]. Селекция пшеницы в Беларуси начала интенсивно развиваться лишь после распада СССР. На основе гибридизации и отбора были созданы перспективные местные сорта, обогащенные ценным генетическим материалом зарубежных форм.

На сегодняшний день многочисленные местные и иностранные образцы составляют основу белорусского генофонда пшеницы, но при этом имеется недостаточно информации об их разнообразии и возможных генетических связях. Настоящая работа нацелена на оценку генетического пула возделываемой в Беларуси пшеницы с использованием высокопропускной технологии SNP-маркирования.

**Материалы и методы исследования.** Проводили сравнительный анализ 64 образцов гексаплоидной пшеницы белорусской селекции и 27 сортов, представляющих разнообразие 5 европейских стран (Украина, Германия, Россия, Польша, Великобритания).

Для оценки генетической структуры коллекции мы использовали 384 ген-ассоциированных SNP, отобранных из нескольких тысяч полиморфизмов, типизируемых с использованием технологии 9K iSelect по принципу равномерного распределения по геному и максимального отражения генетической дифференциации согласно Cavanagh и соавт. (2013) [7].

Для обработки первичных данных SNP-типирования использовали программный пакет GENEPOP [8]. Для биаллельных SNP маркеров рассчитывали: частоты минорных аллелей (MAF – minor allele frequency); наблюдаемую гетерозиготность (He); информативность (PIC – polymorphism information content); индивидуальное ( $1-Q_{intra}$ ) и групповое ( $\pi$ ,  $1-Q_{inter}$ ) генетическое разнообразие, индивидуальный (Fis) и субпопуляционный (Fst) индексы фиксации, логарифмическое правдоподобие ( $G$ ) [9–12].

Кластерный анализ выполняли при помощи программного пакета DarWin 3.0.

**Результаты и их обсуждение.** Согласно определению Brookes (1999) [13], SNPs (single nucleotide polymorphisms) – это однонуклеотидные позиции в геномной ДНК, для которых в некоторой популяции имеются различные варианты (аллели), причем редкий аллель встречается с частотой выше 1 %. Ограничения по частоте встречаемости противопоставляют SNP точечным мутациям и предполагают их использование в качестве генетических маркеров. По сравнению с другими молекулярными методами оценки полиморфизма (RAPD, SSR, ISSR, AFLP) использование SNP-маркеров является наиболее прогрессивным и информативным подходом, практически полная автоматизация которого дает возможность проанализировать одновременно несколько тысяч SNP.

В нашем исследовании из 384 использованных SNP в общей сложности генотипирован 331 (86 %). Из них 295 с известной локализацией, распределенные по 21 хромосоме, и 36 с неустановленной локализацией, которые в совокупности представили варибельность 97 % локусов (таблица). Выявленные полиморфизмы включали 80,8 % транзиций и 19,2 % трансверсий. Покрываемость хромосом маркерами ранжировалась от 1 для 4D до 26 для 5B с последующим распределением по геномам: А-геном – 129, В-геном – 138 и D-геном – 28 SNP. Распределение маркеров по гомеологичным группам хромосом в основном было равномерным, за исключением 4-й группы.

Большинство SNP выявляли высокий полиморфизм. Однако наблюдались некоторые различия в его изменчивости между яровой и озимой пшеницей. Самый высокий уровень полиморфизма выявлен в группе озимой пшеницы. Но наибольшая вариация по геномам и гомеологичным группам хромосом характеризует яровые формы.

Показатели информационного содержания, наблюдаемые в нашем исследовании, значимо колебались с высокой долей маркеров со значениями PIC, превышающими 0,35 (61,9 %) (рис. 1). Также наблюдалось их варьирование по хромосомам и геномам. Наиболее информативные SNP (PIC > 0,4) были локализованы на хромосомах 7D, 6B и 3A.

Средние значения PIC для маркеров с известной хромосомной локализацией также были рассчитаны отдельно для каждой из подгрупп в соответствии с типом вегетации. В результате мы

**Распределение SNP маркеров по геномам и гомеологичным группам хромосом**

Хромосома	Кол-во SNP	% от общего числа	Яровая пшеница		Озимая пшеница		Общий полиморфизм	
			Полиморфные SNPs, %	Мономорфные SNPs, %	Полиморфные SNPs, %	Мономорфные SNPs, %		
А-геном	1	20	6,0	90	10	100	0	100
	2	14	4,2	71,4	28,6	100	0	100
	3	19	5,7	100	0	100	0	100
	4	15	4,5	100	0	100	0	100
	5	21	6,3	90,5	9,5	100	0	100
	6	17	5,1	88,2	11,8	100	0	100
	7	23	6,9	82,6	17,4	86,9	13	95,7
Итого	129	39,0	89,0	11,0	98,1	1,9	99,4	
В-геном	1	21	6,3	90,5	9,5	100	0	100
	2	25	7,6	84	16	96	4	96
	3	25	7,6	92	8	96	4	96
	4	11	3,3	100	0	100	0	100
	5	26	7,9	92,3	7,7	92,3	7,7	92,3
	6	17	5,1	94,1	5,9	100	0	100
	7	13	3,9	92,3	7,7	100	100	100
Итого	138	41,7	92,2	7,8	97,8	16,5	97,8	
D-геном	1	7	2,1	85,7	14,3	85,7	14,3	85,7
	2	6	1,8	83,3	16,7	100	0	100
	3	3	0,9	66,7	33,3	100	0	100
	4	1	0,3	100	0	100	0	100
	5	2	0,6	50	50	100	0	100
	6	4	1,2	50	50	75	25	75
	7	5	1,5	80	20	100	100	100
Итого	28	8,5	73,7	26,3	94,4	19,9	94,4	
НЛ	36	10,9	77,8	22,2	97,2	2,8	97,2	
Средняя			83,2	16,9	96,9	10,3	97,2	

Примечание. НЛ – маркеры с неустановленной локализацией.

выяснили, что наблюдаемый уровень информационного содержания варьирует не только в зависимости от хромосомной локализации, но также зависит от анализируемой подгруппы. Наиболее высокий уровень выявлен у озимой пшеницы для SNP, покрывающих 7D и 2A хромосомы, тогда как для яровой наиболее информативные маркеры были локализованы на 4A и 7A хромосомах.

Наблюдаемая частота минорных аллелей (MAF) была смещена в сторону аллелей с  $MAF > 0,25$ . Из 331 маркера, только 8 (2,4 %) имели  $MAF \leq 0,05$  и 236 (71,3 %) –  $MAF \geq 0,2$ , что подтвердило

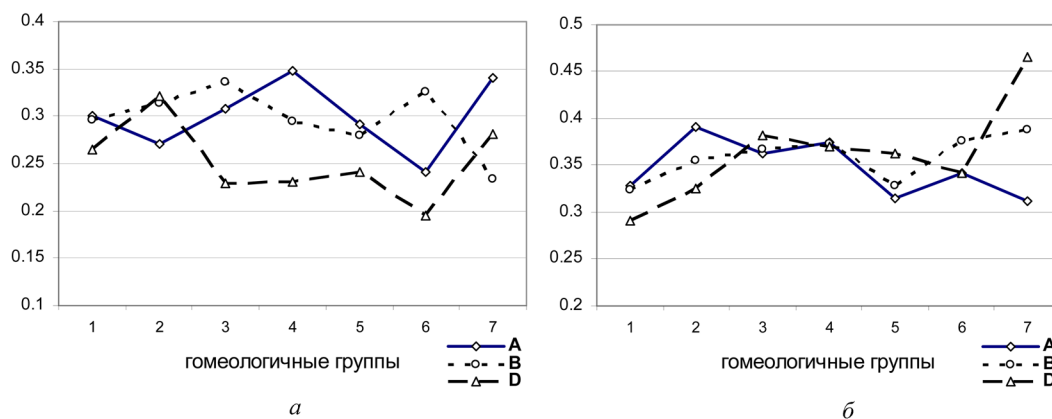


Рис. 1. Распределение средних значений PIC по гомеологичным группам хромосом и геномам у яровой (а) и озимой (б) пшеницы

их высокую дифференцирующую способность для тестирования сортов пшеницы. Основные локусы с редкими аллелями расположены на хромосомах 3D, 4B, 5A, 6D.

Распределение MAF в подгруппах также выявило различия (рис. 2): у озимой пшеницы, характеризующейся высоким общим полиморфизмом SNP, были представлены высокие частоты аллелей с MAF более 0,25, тогда как для яровой пшеницы отмечено преобладание мономорфных маркеров и распространенность SNP с MAF менее 0,25.

Распределение MAF в подгруппах и генеральной совокупности значимо коррелирует ( $r = 0,53$ ;  $0,85$  для яровой и озимой пшеницы соответственно). Слабая связь ( $r = 0,29$ ) MAF между озимыми и яровыми формами указывает на дифференциальное накопление SNP в результате длительной селекции этой культуры. Мы нашли 72,5 % совпадения аллелей озимых и яровых образцов, в то время как 27,5 % локусов выявляли переключение частот. Таким образом, наши результаты показали некоторые общие и специфические закономерности разнообразия гаплотипов у яровых и озимых образцов, что предполагает влияние различных сил отбора, которые, возможно, действовали в определенных областях генома пшеницы на протяжении селекции.

Усредненное генетическое разнообразие по индивидуальным сортам (1-Qintra) составило 0,19, статистика изменчивости по отдельным локусам (1-Qintra среднее на локус SNP) немного ниже, но, с учетом округления, также составляет 0,19. Незначительный перевес гетерозиготных локусов в геноме яровых пшениц в сравнении с озимыми отражает более низкое значение медианы признака ( $1-Qintra^{\text{Мед-Озимые}} = 0,05$ ;  $1-Qintra^{\text{Мед-Яровые}} = 0,04$ ).

Полученные результаты показывают, что генетическое разнообразие ( $\pi$ ) яровых пшениц ниже как общего значения всей совокупности (0,37), так и показателя озимых пшениц (0,36). В работе С. R. Cavanagh и соавт. (2013) значения  $\pi$  составляли для культурных сортов 0,36 и для ландрас – 0,34. Таким образом, генетическое разнообразие, представленное белорусским генофондом, согласуется с данными о «мировом» уровне генетического разнообразия пшеницы. Распределение индексов Fis соответствует более высокой доле низкочастотных минорных аллелей и высокой гетерозиготности яровых пшениц.

G-тест логарифмического правдоподобия позволил оценить достоверность различий распределения частот аллелей озимых и яровых сортов пшениц. Субпопуляции достоверно различаются по 248 (77 %) из 322 полиморфных локусов. Среднее значение индексов Fst и Fit составляют 0,16 и 0,53 соответственно. Генетическая дифференциация высокодостоверна и значима.

Оценка аллельного состава генома пшеницы и последующий кластерный анализ с использованием метода ближайших соседей (neighbor-joining) позволили провести простую дифференциацию, которая отражает деление образцов коллекции по типу озимость/яровость, что также указывает на связь отдельных SNP с данным признаком (рис. 3).

Большинство корней иерархического дерева имеют бутстреп значение более 50 %. Кластер 1 (озимая пшеница) подразделяется на две подгруппы (I-a, I-б). Первая (I-a) представлена белорусскими сортами, которые были введены в сельскохозяйственное производство до 2000 г. Эта подгруппа также включает российский сорт Льговская-4 и несколько украинских образцов, которые формируют топологически дискретные подкластеры.

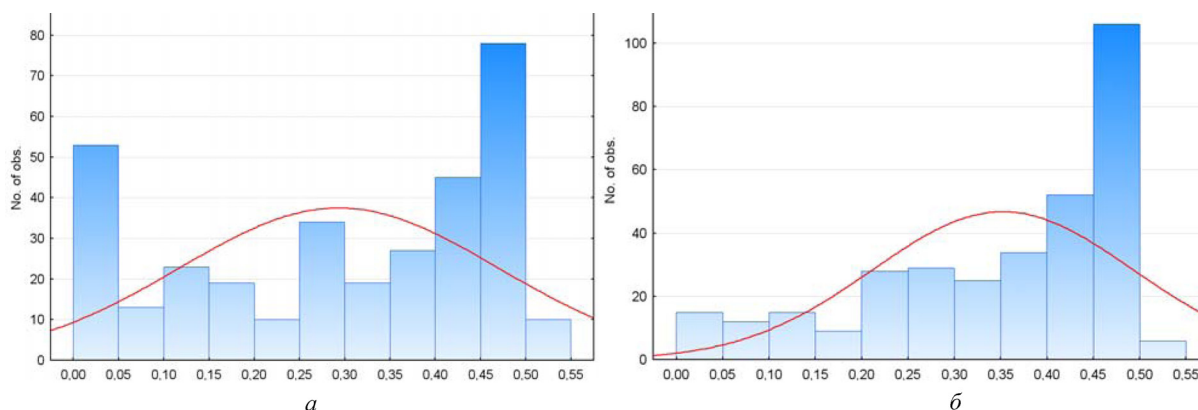


Рис. 2. Распределение частот минорных аллелей (MAF) у яровой (а) и озимой (б) пшеницы

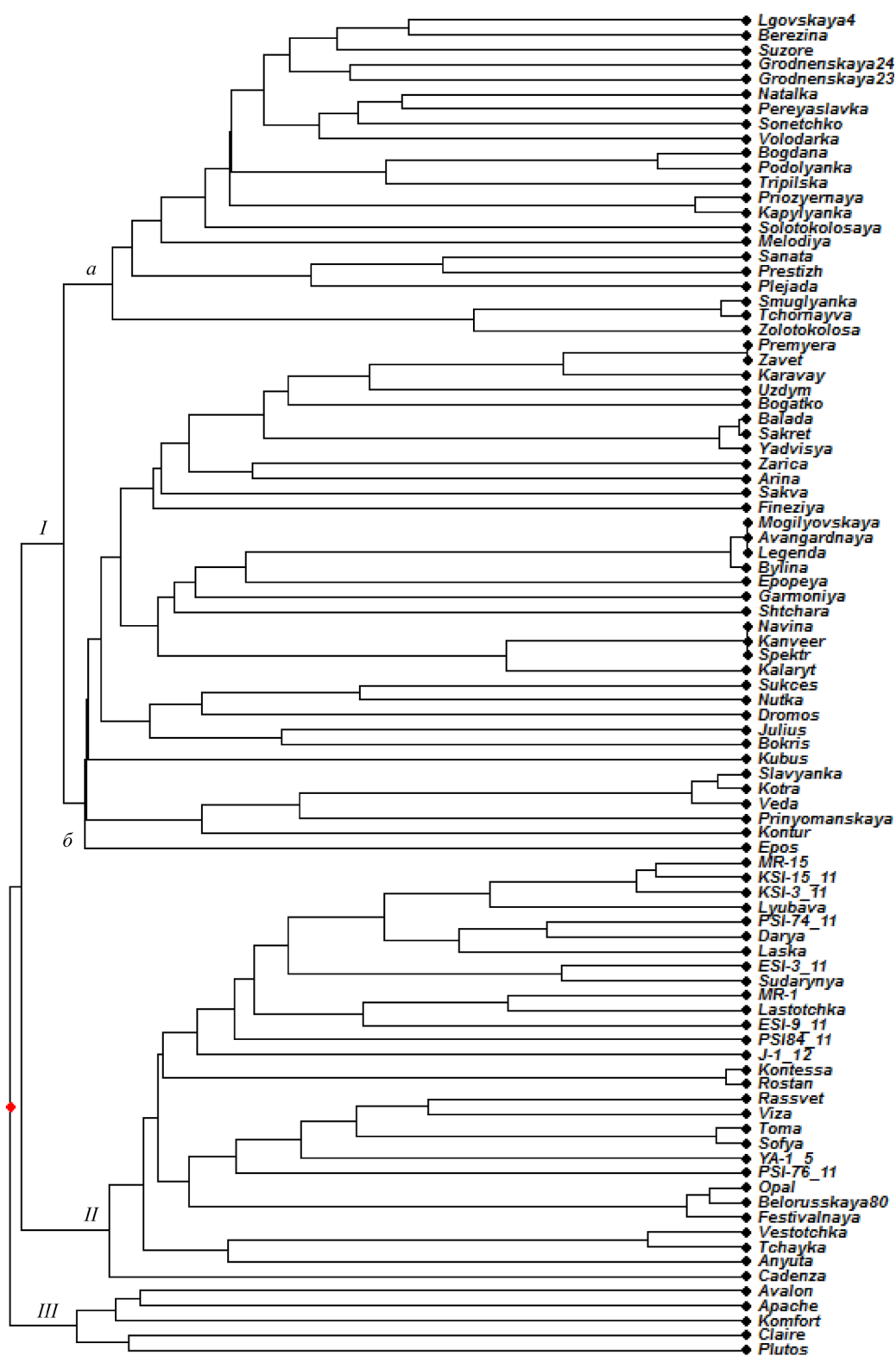


Рис. 3. Топологическая дифференциация образцов пшеницы, выполненная по данным SNP анализа

Вторую подгруппу (I-б) составляют белорусские сорта, введенные в сельскохозяйственное производство после 2000 г., а также образцы польской (Sukcess, Nutka, Кобра, Богатко, Саква, Finezia) и немецкой (Dromos, Bokris, Kubus) селекции. Интересен факт обнаружения генетически идентичных белорусских сортов, которые, возможно, получены из сестринских линий, характеризующихся высокой генетической общностью.

Кластер 2 включает разнообразие яровой пшеницы, преимущественно белорусской селекции, а также шотландский образец Cadenza и немецкий сорт Opal, который был использован при создании отечественных сортов Белорусская 80 и Фестивальная. Последний получен в результате отбора эуплоидного потомства моносомных растений пшеницы Opal.

Кластер 3 образуют современные высокоурожайные сорта английской, шотландской и немецкой селекции, а также один из недавно созданных белорусскими селекционерами сортов – Комфорт.

**Заключение.** Результаты проведенного исследования позволяют сделать вывод о высоком генетическом разнообразии пшеницы, возделываемой на территории Беларуси, что связано с особенностями отечественной селекции этой культуры, которая начала активно развиваться только в 1980-е годы. Посевные площади Беларуси того времени были заняты российскими и украинскими сортами, которые активно использовались в селекционной работе. Это подтверждается данными SNP маркирования, на основании которого отечественные сорта раннего периода (сортосмена 1985–2000 гг.) объединены в общую подгруппу (I-a) с украинскими сортами.

Период сортосмены 2000–2013 гг. характеризуется активным привлечением в селекционную работу генетического разнообразия Польши, Германии и других европейских стран. Вместе с тем проявляется тенденция использования близкородственного материала и, вероятно, сестринских линий, о чем свидетельствует наличие групп полной идентичности.

Действительно, на сегодняшний день селекционные центры Беларуси имеют хороший потенциал для улучшения пшеницы, но разнообразие должно быть систематизировано на платформе ДНК-типирования, которое может обеспечить более эффективное использование существующих генетических ресурсов в селекции.

### Список использованной литературы

1. *Feldman, M.* Origin of cultivated wheat / M. Feldman // The world wheat book: a history of wheat breeding / eds. by A. P. Bonjean, W. J. Angus. – Paris, France: Lavoisier Publishing, 2001. – P. 3–56.
2. *Bennett, M. D.* Nuclear DNA amounts in angiosperms / M. D. Bennett, I. J. Leitch // Ann. Bot. – 1995. – Vol. 76. – P. 113–176.
3. *Börner, A.* Preservation of plant genetic resources in the biotechnology era / A. Börner // Biotechnology J. – 2006. – № 1. – P. 1393–1404.
4. Перепланировка посевных площадей: суть и особенности реформы // Есть вопрос: архив интервью, статей и заметок [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://vorposy.info/?p=675>. – Дата доступа: 15.08.2016.
5. *Гриб, С. И.* Прогресс в селекции яровой пшеницы в Беларуси / С. И. Гриб // Весці НАН Беларусі. Сер. аграрн. навук. – 2009. – № 3. – С. 37–41.
6. *Коптик, И. К.* Научно-методические подходы и результаты в селекции озимой мягкой пшеницы (*Triticum aestivum* L.) в Республике Беларусь / И. К. Коптик // Весці НАН Беларусі. Сер. аграрн. навук. – 2010. – № 1. – С. 47–54.
7. Genome-wide comparative diversity uncovers multiple targets of selection for improvement in hexaploid wheat landraces and cultivars / C. R. Cavanagh [et al.] // PNAS. – 2013. – Vol. 110. – P. 8057–8062.
8. *Rousset, F.* genepop'007: a complete re-implementation of the genepop software for Windows and Linux / F. Rousset // Mol. Ecol. Resources. – 2008. – Vol. 8. – P. 103–106.
9. *Wright, S.* Evolution and the Genetics of Populations / S. Wright. – Chicago: Univ. of Chicago Press, 1969. – Vol. 2: the Theory of Gene Frequencies. – P. 294–295.
10. *Bryc, K.* Novel Approach to Estimating Heterozygosity from Low-Coverage Genome Sequence / K. Bryc, N. Patterson, D. Reich // Genetics. – 2013. – Vol. 195. – P. 553–561.
11. Construction of a genetic linkage map in man using restriction fragment length polymorphisms / D. Botstein [et al.] // Am. J. Hum. Genet. – 1980. – Vol. 32. – P. 314–331.
12. *Weir, B. S.* Estimating F-Statistics for the Analysis of Population-Structure / B. S. Weir, C. C. Cockerham // Evolution. – 1984. – Vol. 38. – P. 1358–1370.
13. *Brookes, A. J.* The essence of SNPs / A. J. Brookes // Gene. – 1999. – Vol. 234. – P. 177–186.

Поступило в редакцию 13.06.2016

## МЕДИЦИНА

УДК 618.19–006:576.5.577.3

Н. А. ШУКАНОВА<sup>1</sup>, Л. В. ДУБОВСКАЯ<sup>1</sup>, Ю. С. БАКАКИНА<sup>1</sup>, М. А. МАРТЫНОВА<sup>1</sup>,  
Н. А. КОЗЛОВСКАЯ<sup>2</sup>, Е. В. ШАПОВАЛ<sup>2</sup>, И. М. БУШМАКИНА<sup>1</sup>, М. М. МОЛЧАН<sup>1</sup>

## ПРОГНОСТИЧЕСКИЕ ФАКТОРЫ ПРИ ЛЕЧЕНИИ РАКА МОЛОЧНОЙ ЖЕЛЕЗЫ

(Представлено членом-корреспондентом Е. И. Слобожаниной)

<sup>1</sup>Институт биофизики и клеточной инженерии НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
natashu2006@yandex.ru; dubovsk@mail.ru; bakakinay@mail.ru; martynova@ibp.org.by  
<sup>2</sup>РНПЦ онкологии и медицинской радиологии им. Н. Н. Александрова, Минск, Беларусь  
oncomammolog@tut.by; jaklin60@rambler.ru

Установлено, что активность бутирилхолинэстеразы в цельной крови пациенток с доброкачественными опухолями молочной железы ниже по сравнению с этим показателем при злокачественных образованиях ( $P < 0,001$ ). На гель-электрофореграммах плазмы крови пациенток с раком молочной железы обнаружено изменение белковой экспрессии и появление новых белковых онкомаркеров, которые зависят от молекулярно-генетического подтипа опухоли. Выявленные различия позволят разработать дополнительные методы диагностики и прогнозирования результатов терапии.

**Ключевые слова:** рак молочной железы, фиброаденома, кровь, протеомное профилирование, холинэстеразы, потенциальные онкомаркеры.

N. A. SHUKANOVA<sup>1</sup>, L. V. DUBOVSKAYA<sup>1</sup>, Y. S. BAKAKINA<sup>1</sup>, M. A. MARTYNOVA<sup>1</sup>, N. A. KAZLOUSKAYA<sup>2</sup>,  
E. V. SHAPOVAL<sup>2</sup>, I. M. BUSHMAKINA<sup>1</sup>, M. M. MOLCHAN<sup>1</sup>

## PROGNOSTIC FACTORS IN THE TREATMENT OF BREAST CANCER

<sup>1</sup>Institute of Biophysics and Cell Engineering of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
natashu2006@yandex.ru; dubovsk@mail.ru; bakakinay@mail.ru; martynova@ibp.org.by  
<sup>2</sup>N. N. Alexandrov National Cancer Centre of Belarus, Minsk, Belarus  
oncomammolog@tut.by; jaklin60@rambler.ru

It was shown that the butyrylcholinesterase activity in the blood of women with non-malignant breast cancer was lower as compared to patients with malignant breast cancer ( $P < 0,001$ ). Using two dimensional gel-electrophoresis method it was found that blood plasma proteomic maps are different for patients with various molecular subtypes of breast cancer. Identified differences consist in the appearance of additional new proteins and changes in the expression of proteins present in norm. Current data provide an advance to develop supplemental methods of breast cancer diagnosis and prognosis of the therapy outcomes.

**Keywords:** breast cancer, fibroadenoma, blood, proteome profiling, cholinesterases, potential oncomarkers.

**Введение.** Холинэстеразы принадлежат к классу гидролаз карбоновых кислот. Эти ферменты условно можно разделить на два типа: ацетилхолин-ацетилгидролазу (КФ 3.1.1.7), которая гидролизует преимущественно ацетилхолин и чаще всего называется ацетилхолинэстеразой (АХЭ), и ацилхолин-ацилгидролазу (КФ 3.1.1.8), расщепляющую такие сложные эфиры холина, как бутирилхолин и пропионилхолин [1]. Тривиальным названием последней является холинэстераза с синонимами «сывороточная холинэстераза», «холинэстераза II» и «бутирилхолинэстераза» (БуХЭ). В возбудимых тканях основной функцией АХЭ является участие в холинэргической нейротрансмиссии. Экспрессированная во многих типах невозбудимых тканей АХЭ играет существенную роль в процессах пролиферации, дифференцировки и миграции клеток [2] и проявляет аномальные свойства в злокачественных новообразованиях различной этиологии [3–4].



В раковой опухоли молочной железы ее активность в 2 раза выше, чем в соседней здоровой ткани [3], поэтому исследование этого параметра в первичной культуре из трепан-биоптатов злокачественной ткани молочной железы позволяет прогнозировать ответ опухоли пациентки на полихимиотерапию [5].

Биохимическая роль БуХЭ до конца не выяснена. В экстремальных условиях фермент выполняет недостаток АХЭ. При отравлении организма фосфорорганическими соединениями и карбамидами выполняет защитную функцию, участвует в процессах биотрансформации ксенобиотиков [6].

Определение активности холинэстераз в цельной крови, плазме или сыворотке крови пациентов с различными заболеваниями имеет большое диагностическое и прогностическое значение. Например, при заболеваниях печени, бронхиальной астме, инфаркте миокарда, ожогах, травматическом шоке и других стрессовых состояниях активность БуХЭ ( $A_{\text{БуХЭ}}$ ) в крови уменьшается, а при тиреотоксикозе и некоторых заболеваниях почек повышается [7]. В настоящее время интенсивно изучается роль холинэстераз в онкогенезе различной этиологии и возможность использования такого параметра, как активность этих ферментов в крови онкологических пациентов в качестве прогностических биомаркеров при индивидуальной терапии. Показано, что у больных плоскоклеточным раком полости рта  $A_{\text{БуХЭ}}$  в сыворотке крови значительно выше, чем у здоровых людей ( $P < 0,0001$ ), и **возрастает с увеличением стадии заболевания. Такие же изменения  $A_{\text{БуХЭ}}$  обнаружены в слюне пациентов с распространенным злокачественным новообразованием в полости рта, что позволило авторам считать слюну потенциальным неинвазивным показателем при скрининге этого заболевания [8].**

Есть сведения о возможной роли предоперационного уровня БуХЭ в крови пациентов со светлоклеточным раком почки в качестве независимого предикта общей выживаемости после нефрэктомии [9]. Обнаружено увеличение активности АХЭ ( $A_{\text{АХЭ}}$ ) в цельной крови пациентов с раком легкого [10].

Злокачественная опухоль молочной железы имеет существенные различия в морфологическом строении, рецепторном статусе и молекулярно-генетических признаках. В зависимости от рецепторного статуса эстрогенов (ER) и прогестерона (PR) и наличия гена *HER2*, кодирующего белок – рецептор человеческого эпидермального фактора роста 2 типа (Her-2/neu), в клиниках выделяют 4 основных молекулярно-генетических подтипа рака молочной железы (РМЖ): люминальный А (люмА), люминальный Б (люмБ), Her2-положительный (Her2+) и базально-подобный или трижды негативный (ТН). При малигнизации молочной железы в крови пациенток меняется протеомный профиль: появляются новые белки-онкомаркеры и увеличивается или снижается синтез других. Например, в протеиновом составе плазмы крови женщин со злокачественными новообразованиями в молочной железе отмечается значительная экспрессия таких белков, как гаптоглобин  $\alpha$ -1, кластерин, мультимеры транстиретаина, С-реактивный белок и фетуин А [11].

Сложность поиска новых алгоритмов диагностики, выбора тактики лечения и мониторинга индивидуального состояния пациентки с РМЖ в период лечения и ремиссии определяется высокой гетерогенностью опухоли и остается крайне актуальной задачей в настоящее время.

Цель исследования – сопоставить активность холинэстераз в цельной крови и определить протеомный профиль онкомаркеров в плазме крови пациенток с доброкачественной опухолью молочной железы фиброаденомой (ФА) и РМЖ различных молекулярно-генетических подтипов для разработки дополнительных методов диагностики и персонализированного подхода к лечению РМЖ.

**Материалы и методы исследования.** Объектом исследования служила кровь пациенток с первично верифицированным диагнозом РМЖ ( $n = 37$ ) или ФА ( $n = 27$ ). Во всех случаях было выполнено стандартное гистологическое исследование и методом иммуногистохимии определен уровень экспрессии гормональных рецепторов ER, PR и показатель Her-2/neu в злокачественно трансформированных клетках.

Забор венозной крови проводили в раствор антикоагулянта этилендиаминтетрауксусной кислоты (ЭДТА). Плазму крови получали центрифугированием (1500g, 15 мин) аккуратно перемешанных образцов крови. Активность холинэстераз в разведенной в 1000 раз цельной крови

определяли методом с использованием реактива Элмана [5]. При анализе  $A_{\text{АХЭ}}$  в качестве субстрата использовали ацетилтиохолин (1 ммоль/л) и ингибитор БУХЭ – tetraisopropyl pyrophosphogamide (iso – OMPA) в конечной концентрации 30 мкмоль/л. Для определения  $A_{\text{БУХЭ}}$  субстратом был выбран бутирилтиохолин (1 ммоль/л), а ингибитором АХЭ – 1,5-Bis(4-allyldimethylammoniumphenyl)pentan-3-one (BW284c51) в концентрации 10 мкмоль/л. После добавления ингибитора и субстрата регистрировали оптическую плотность при  $\lambda = 436$  нм каждые 5 мин. Активность холинэстераз выражали в относительных единицах увеличения оптической плотности раствора  $\Delta D$  в минуту, учитывая в каждом образце содержание гемоглобина, измеренного гемихромным методом при  $\lambda = 540$  нм. Фотометрические измерения проводили на спектрофотометре SPEKOL 11 (Германия).

Двумерный гель-электрофорез осуществляли по стандартной методике [12]. Образцы для MALDI-TOF масс-спектрометрии готовили с использованием роботизированной станции Xcise фирмы Shimadzu Biotech (Япония) согласно протоколу фирмы-изготовителя.

Статистическую обработку результатов проводили методами вариационной статистики с использованием критерия Стьюдента.

**Результаты и их обсуждение.** Нами проведен сравнительный анализ уровня  $A_{\text{АХЭ}}$  и  $A_{\text{БУХЭ}}$  в крови пациенток с диагнозом РМЖ и ФА. Пациентки с диагнозом РМЖ были отнесены к одному из 4 молекулярно-генетических подтипов, описанных выше. Их численность в каждой группе и возрастные интервалы представлены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1. Общая характеристика обследованных пациенток

Тип опухоли	Количество пациенток	Возрастные пределы (лет)	Средний возраст
ФА	27	14–75	39,2 ± 3,2
ЛюмА	12	45–68	56,1 ± 2,5
ЛюмБ	11	31–69	53,8 ± 3,2
HER2 +	7	43–67	51,8 ± 4,3
ТН	7	31–75	52,6 ± 5,8

Достоверных различий в  $A_{\text{АХЭ}}$  в крови пациенток с доброкачественной и злокачественной опухолями нами не обнаружено (табл. 2), хотя при других онкологических заболеваниях изменение активности этого фермента является крайне информативным. Например, оценка  $A_{\text{АХЭ}}$  в крови детей с острым лимфобластным лейкозом на разной стадии химиотерапии и в отдаленные сроки после лечения позволила сделать вывод о прогностических свойствах этого показателя [13].

Т а б л и ц а 2. Активность ХЭ в крови пациенток с доброкачественной и злокачественными опухолями молочной железы

Тип	ФА	ЛюмА	ЛюмБ	HER2+	ТН
$A_{\text{АХЭ}}$ , отн. ед.	0,082 ± 0,002	0,084 ± 0,004	0,086 ± 0,005	0,080 ± 0,004	0,078 ± 0,006
$A_{\text{БУХЭ}}$ , отн. ед.	0,026 ± 0,001	0,033 ± 0,002	0,032 ± 0,003	0,035 ± 0,003	0,033 ± 0,003

П р и м е ч а н и е. Активность ферментов выражали в отн. ед., так как измерения проводили в линейной области гидролиза субстратов.

Как правило, в биологических и медицинских исследованиях различия считаются достоверными при уровне значимости  $P < 0,05$ . В наших результатах  $A_{\text{БУХЭ}}$  крови пациенток с ФА достоверно отличалась от этого параметра в крови пациенток с РМЖ всех четырех подтипов, причем для люмА, HER2+ и ТН подтипов уровень значимости составлял  $P < 0,001$ , для люмБ –  $P < 0,05$ . Следует отметить, что, несмотря на ограниченное количество пациенток в группах, величины  $A_{\text{АХЭ}}$  и  $A_{\text{БУХЭ}}$  были адекватно гомогенны.

ФА, которая является третьим по частоте заболеванием в группе опухолей и опухолеподобных поражений молочной железы после рака и фиброзно-кистозной болезни [14], как правило,

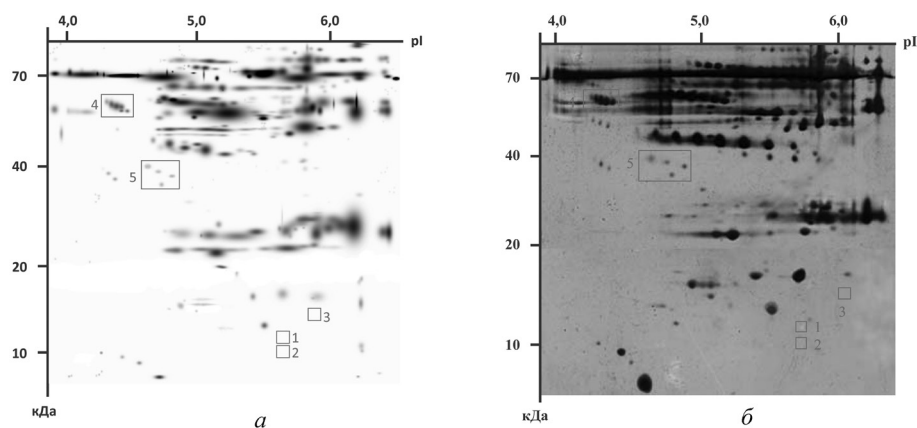


Рис. 1. *а* – Синтетическая протеомная карта плазмы крови доноров, полученная путем статистической обработки всех биологических и аналитических повторов для группы доноров; *б* – типичная гель-электрофореграмма плазмы крови пациентки с фиброаденомой молочной железы

перерождается в раковую опухоль относительно редко (3 %). Однако сходство некоторых форм РМЖ с доброкачественными заболеваниями требует тщательной дифференциальной диагностики, и оценка  $A_{\text{БyxЭ}}$  в крови пациенток может послужить дополнительным диагностическим фактором.

Известно, что в крови онкологических больных меняется профиль острофазных белков [15]. Нами были получены протеомные карты плазмы крови пациенток с диагнозом ФА и РМЖ четырех молекулярно-генетических подтипов, а также доноров. На рис. 1 представлена синтетиче-

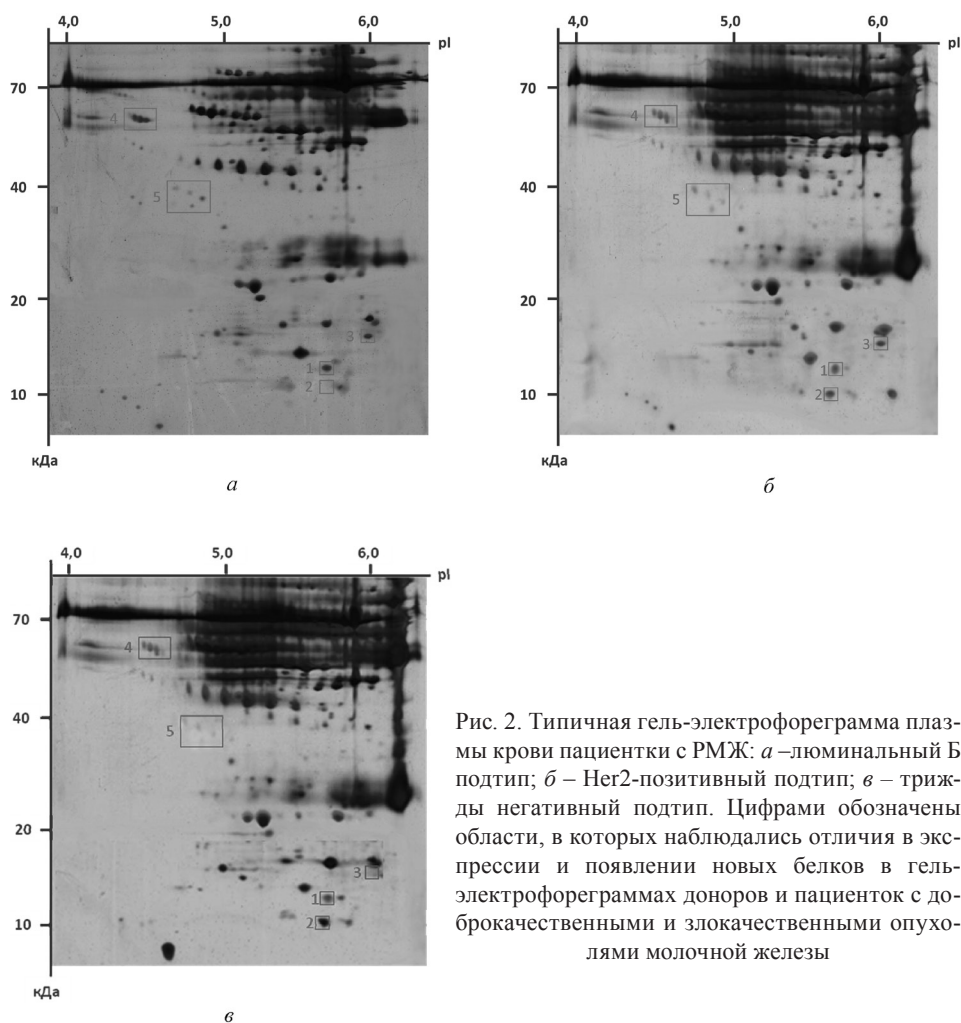


Рис. 2. Типичная гель-электрофореграмма плазмы крови пациентки с РМЖ: *а* – люминальный Б подтип; *б* – Her2-позитивный подтип; *в* – трижды негативный подтип. Цифрами обозначены области, в которых наблюдались отличия в экспрессии и появлении новых белков в гель-электрофореграммах доноров и пациенток с доброкачественными и злокачественными опухолями молочной железы

ская протеомная карта плазмы крови доноров (рис. 1, а) и типичная гель-электрофореграмма плазмы крови пациентки с диагнозом ФА (рис. 1, б). При небольших различиях в экспрессии визуализированных белков протеомные карты плазмы крови доноров и пациенток с ФА обладали максимальным сходством. Анализ протеома пациентки с РМЖ люминального Б подтипа позволил обнаружить появление белков в областях гель-электрофореграммы, обозначенных цифрами 1 и 3 (рис. 2, а). С использованием MALDI-TOF масс-спектрометрии было установлено, что область 1 соответствует острофазному белку гаптоглобину. Белок пятна 3 пока установить не удалось. На гель-электрофореграмме плазмы крови пациентки с более агрессивным Нер-позитивным подтипом РМЖ дополнительно появляется белок пятна 2 – сывороточный амилоидный белок А (рис. 2, б). Таким образом, нами показаны различия в протеомных профилях плазмы крови здоровых женщин, пациенток с ФА и РМЖ, причем меняется не только экспрессия некоторых белков, но и появляются новые белковые онкомаркеры в крови пациенток с более агрессивными подтипами РМЖ.

**Заключение.** При сравнительном анализе величин  $A_{\text{буХЭ}}$  в крови пациенток с диагнозом ФА и РМЖ всех четырех молекулярно-генетических подтипов опухоли выявлено более низкое значение ферментативной активности при доброкачественных опухолях молочной железы ( $P < 0,001$ ), что может служить дополнительным дифференциальным диагностическим фактором для оценки злокачественности опухоли. На гель-электрофореграммах плазмы крови пациенток с РМЖ обнаружено изменение белковой экспрессии и появление новых белков, которые зависят от молекулярно-генетического подтипа опухоли.

Определение активности холинэстераз в крови и профиля белковых онкомаркеров в плазме крови пациенток с ФА и РМЖ различных молекулярно-генетических подтипов позволит разработать дополнительные методы диагностики и прогнозирования результатов терапии.

### Список использованной литературы

1. Enzyme Nomenclature. Recommendations (1972 of the Commission on biochemical Nomenclature of the Nomenclature and Classification of Enzymes. – Amsterdam: Elsevier Publishing Company, 1973.
2. Overexpression of acetylcholinesterase inhibited cell proliferation and promoted apoptosis in NRK cells / Q. H. Jin [et al.] // *Acta Pharmacol. Sin.* – 2004. – Vol. 25, N 8. – P. 1013–1021.
3. Cholinesterase activity and acetylcholinesterase glycosylation are altered in human breast cancer / F. Ruiz-Espejo [et al.] // *Breast Cancer Res. Treat.* – 2002. – Vol. 72, N 1. – P. 11–22.
4. Cholinesterase activity of human lung tumours varies according to their histological classification / P. Martinez-Moreno [et al.] // *Carcinogenesis.* – 2006. – Vol. 27, N 3. – P. 429–436.
5. Активность ацетилхолинэстеразы в опухолевых клетках железистой ткани при раке молочной железы / Н. А. Шуканова [и др.] // *Весті НАН Беларусі. Сер. мед. навук.* – 2013. – № 3. – С. 28–31.
6. Mason, H. J. The recovery of plasma cholinesterase and erythrocyte acetylcholinesterase activity in workers after overexposure to dichlorvos / H. J. Mason // *Occup. Med.* – 2000. – Vol. 50, N 5. – P. 343–347.
7. Старостина, В. К. Холинэстераза: методы анализа и биагностическое значение: информационно-методическое пособие / В. К. Старостина, С. А. Дегтева. – Новосибирск, 2008.
8. Protein thiols and butyrylcholinestrerase in saliva of oral cancer patients / Y. R. Chianeh [et al.] // *Indian J. Clin. Biochem.* – 2014. – Vol. 29, N 2. – P. 238–241.
9. Preoperative butyrylcholinesterase level as an independent predictor of overall survival in clear cell renal cell carcinoma patients treated with nephrectomy / T. Koie [et al.] // *The Scientific World J.* – 2014. [Electronic resource]. – Mode of access: [www.hindawi.com/journals/tswj/2014/948305/](http://www.hindawi.com/journals/tswj/2014/948305/). – Date of access: 23.12.2015.
10. Ectoenzymes and cholinesterase activity and biomarkers of oxidative stress in patients with lung cancer / D. Zanini [et al.] // *Mol. Cell. Biochem.* – 2013. – Vol. 374, N 1–2. – P. 137–148.
11. Rivenbark, A. G. Molecular and cellular heterogeneity in breast cancer: challenges for personalized medicine / A. G. Rivenbark, S. M. O'Connor, W. B. Coleman // *Am. J. Pathol.* – 2013. – Vol. 183, N 4. – P. 1113–1124.
12. Goerg, A. 2-D proteome analysis protocols / A. Goerg, W. Weiss // *Meth. Mol. Biol.* – 1999. – Vol. 112. – P. 235–244.
13. Changes in acetylcholinesterase (AChE) activity in lymphocytes and whole blood in acute lymphoblastic leukemia patients / V. Battisti [et al.] // *Clin. Chim. Acta.* – 2009. – Vol. 402, N 1–2. – P. 114–118.
14. Umekita, Y. Immunohistochemical study of hormone receptor and hormone-regulated protein expression in phylloides tumour: comparison with fibroadenoma / Y. Umekita, H. Yoshida // *Virchows Arch.* – 1998. – Vol. 433. – P. 311–314.
15. Can the acute-phase reactant proteins be used as cancer / W. W. Pang [et al.] // *Int. J. of Biological Markers.* – 2010. – Vol. 25, N 1. – P. 1–11.

Поступило в редакцию 19.05.2016

## НАУКИ О ЗЕМЛЕ

УДК 582.29, 581.5, 550.462

В. П. КУРЧЕНКО<sup>1</sup>, И. А. БАГМАНЯН<sup>1</sup>, В. Е. МЯМИН<sup>2</sup>, О. И. БОРОДИН<sup>2</sup>, Ю. Г. ГИГИНЯК<sup>2</sup>ТЯЖЕЛЫЕ МЕТАЛЛЫ В КУСТИСТЫХ ЛИШАЙНИКАХ КАК ИНДИКАТОР  
АТМОСФЕРНОГО ПЕРЕНОСА ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ В АНТАРКТИДЕ

(Представлено академиком В. Ф. Логиновым)

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
kurchenko@tut.by; irina\_bagmanian@gmail.ru<sup>2</sup>Научно-практический центр НАН Беларуси по биоресурсам, Минск, Беларусь  
vladmiamin@mail.ru; borodinoi\_zoo@mail.ru; antarctida\_2020@mail.ru

Исследовано содержание ряда металлов в некоторых кустистых лишайниках Восточной Антарктиды. Дана оценка влияния различных источников на формирование их элементного состава. Показано, что дальний атмосферный перенос таких элементов, как Zn, Mn, Cu, Pb, Ti, Sr, Rb, Y, Ba оказывает существенное влияние на их накопление в лишайниках. Накопление лишайниками алюминия и железа связано с их литогенным происхождением. В сравнении с другими лишайниками для *Pseudephebe pubescens* характерно значительное накопление указанных элементов, и следовательно, этот вид может быть использован в качестве индикатора атмосферного переноса загрязняющих веществ в атмосфере.

*Ключевые слова:* кустистые лишайники, тяжелые металлы, атмосферный перенос, Антарктида, коэффициент обогащения, загрязнение.

V. P. KURCHENKO<sup>1</sup>, I. A. BAGMANYAN<sup>1</sup>, V. E. MIAMIN<sup>2</sup>, O. I. BORODIN<sup>2</sup>, J. G. GIGINYAK<sup>2</sup>HEAVY METALS IN FRUITICOSE LICHENS OF ANTARCTIDA AS AN INDICATOR  
OF ATMOSPHERIC TRANSPORT OF POLLUTANTS<sup>1</sup>Belarusian State University, Minsk, Belarus  
kurchenko@tut.by; irina\_bagmanian@gmail.ru<sup>2</sup>Scientific and Practical Center of the National Academy of Sciences of Belarus for Biological resources, Minsk, Belarus  
vladmiamin@mail.ru; borodinoi\_zoo@mail.ru; antarctida\_2020@mail.ru

The content of a number of metals in some fruticose lichens from East Antarctica has been studied. The influence of various sources on the formation of their composition has been estimated. It has been shown that long-distance atmospheric transfer of such elements as Zn, Mn, Cu, Pb, Ti, Sr, Rb, Y, Ba has an essential impact on their accumulation in lichens. Accumulation of aluminium and iron in lichens is associated with their lithogenic origin. Comparing to other lichens, *Pseudephebe pubescens* is characterized by a significant accumulation of the above-noted metals, and this species can therefore be used as an indicator of atmospheric transfer of pollutants in the air.

*Keywords:* fruticose lichens, heavy metals, atmospheric transfer, Antarctica, enrichment factor, pollution.

**Введение.** Живые организмы Антарктики относят к экстремофилам, поскольку они способны выживать в условиях, часто непригодных для обитателей других широт. В условиях Антарктиды флора представлена преимущественно лишайниками. Научно-экспедиционным составом 5-й и 6-й Белорусских антарктических экспедиций в районе белорусской полевой базы «Гора Вечерняя» проведен сбор лишайников, которые были представлены 29 видами [1].

Лишайники – организмы, состоящие из ассоциации грибов и зеленых водорослей или цианобактерий, развившие способности к выживанию в разнообразных неблагоприятных экологических условиях [2]. Для Восточной Антарктиды и прибрежных районов характерны сильные стоковые ветра, достигающие скорости более 60 м/с. Они могут быть переносчиками больших масс

поллютантов. В этих условиях вся поверхность лишайника подвергается воздействию загрязнителей, находящихся в воздухе. Лишайники, являющиеся долгоживущими накопителями тяжелых металлов, радионуклидов среды, способны накапливать в своем слоевище различные химические элементы, а также обладают уникальной способностью извлекать их из окружающей среды [3]. Данные о видовом и элементном составе лишайников могут использоваться для индикации загрязнения атмосферы Антарктиды химическими веществами [2; 3]. В районе проведения исследований базы «Гора Вечерняя» ранее элементный состав лишайников не изучался. Представлялось важным для оценки степени загрязненности атмосферы разных регионов Земли сравнить эти показатели, а также элементный состав кустистых лишайников Антарктиды и Палеартики, в частности Северной Карелии [3], где расположены промышленные предприятия по переработке полиметаллических руд.

**Материалы и методы исследования.** Объектами исследования служили кустистые лишайники *Usnea sphacelata*, *Pseudephebe pubescens*, собранные научно-экспедиционным составом 5-й и 6-й Белорусских антарктических экспедиций в районе белорусской полевой базы «Гора Вечерняя» (Восточная Антарктида, Земля Эндерби, холмы Тала, оазис Гора Вечерняя, 67°39' ю. ш., 46°09' в. д.).

Определение видовой принадлежности лишайников в лабораторных условиях проводили по [2]. Для определения элементного состава образцы подвергали механическому измельчению и озолению при температуре 550 °С в течение 5,5 ч. Элементный состав определялся с помощью рентгенофлуоресцентной спектрометрии на приборе ElvaX (США). Микроструктуру и химический состав лишайников изучали на сканирующем электронном микроскопе JSM-5610 LV с системой химического анализа EDX JED-2201 (JEOL, Япония). Исследования электронного парамагнетизма лишайников проводили на спектрометре Varian E-112 (США) [4], статистическая обработка полученных данных проведена с использованием соответствующего приложения программы Microsoft Office Excel 2003.

**Результаты и их обсуждение.** Лишайники отличаются незначительным накоплением минеральных веществ. Согласно литературным данным [2; 3], их средняя зольность колеблется в пределах от 0,7 до 2–4 % и различается у видов разных групп. Накипные лишайники отличаются большим содержанием золы (до 6–8 %), а листоватые и кустистые – меньшим. Исследование показало, что зольность образцов составила для *Usnea sphacelata* 5 %, *Pseudephebe pubescens* – 18,9 %, что свидетельствует о значительном накоплении металлов в лишайниках Восточной Антарктиды.

Элементный состав конкретного лишайника зависит от его видовой принадлежности, возраста, субстрата произрастания и условий обитания. Сравнительный элементный состав исследуемых кустистых лишайников Антарктиды и Северной Карелии приведен в табл. 1. Для оценки антропогенного или литогенного источников поступления элементов в лишайники были рассчитаны значения коэффициентов обогащения лишайников (КО) по формуле

$$КО = (\text{Эл}/\text{Al})\text{проба} / (\text{Эл}/\text{Al})\text{земная кора},$$

где Эл – концентрации интересующего нас элемента в пробе и континентальной земной коре, а также алюминия в пробе и в земной коре [5]. Результаты анализа представлены на рис. 1.

Т а б л и ц а 1. Содержание химических элементов в исследуемых кустистых лишайниках Антарктиды и Северной Карелии, мкг/г сухого веса

Элемент	Антарктида		Карелия	
	<i>Usnea sphacelata</i> , 67°39' ю. ш., 46°09' в. д.	<i>Pseudephebe pubescens</i> , 67°39' ю. ш., 46°09' в. д.	<i>Usnea dasypoga</i> , 60°59' с. ш., 33°48' в. д. [3]	<i>Usnea dasypoga</i> , 61°54' с. ш., 33°55' в. д. [3]
Al	1470,4	35769,4	215	155
Fe	385,25	2007,03	240	205
Zn	6,004	13,229	31	42
Mn	3,002	34,35	125	157
Cu	2,502	7,5594	2,2	1,9
Pb	1,0006	1,889	3,1	0,1

Анализ литературных данных [3], результатов, представленных в табл. 1 и на рис. 1, позволяет разделить элементы на две группы: Al и Fe, имеющих литогенное происхождение, связанное в основном с субстратом произрастания, а для элементов Zn, Mn, Cu и Pb характерен общий механизм переноса от удаленных источников. Для лишайников Северной Карелии и Антарктиды характерны значительные различия в накоплении металлов. В частности, в *Pseudephebe pubescens* содержание Al в 24–160 раз, Fe в 5–8 раз больше, чем в лишайниках рода *Usnea*, что показывает видовую специфичность накопления металлов. Значительные количества Al и Fe в лишайниках Антарктиды можно объяснить высоким содержанием этих элементов в субстрате произрастания – скальных породах, тогда как лишайники из Северной Карелии являются эпифитами. Для таких металлов, как Zn, Mn, Cu и Pb характерен удаленный перенос, зачастую связанный с антропогенным загрязнением. Относительно высокое содержание Zn, Mn в образцах лишайников из Северной Карелии объясняется близостью металлургических комбинатов Мурманской области [3]. Кроме того, Mn входит в состав хлорофилла фикобионта лишайников и его высокое содержание в лишайниках Карелии свидетельствует о более интенсивных процессах фотосинтеза. Содержание Cu в лишайниках Антарктиды и Карелии близки. Значения КО Pb выше у эпифитных лишайников Карелии, что может быть связано с близостью Мончегорского комбината по переработке полиметаллических руд [3].

В образцах лишайников из Антарктиды проведено дополнительное исследование ряда элементов. Показано, что в *Usnea sphacelata* содержание элементов в мкг/г сухого веса составило: Ca – 30893,3, K – 9713,2, Si – 3933, P – 1549,5, Ti – 36,02, Sr – 12,008, Rb – 1,0006, Y – 0,5003, Ba – 0,5003.

Сравнение содержания элементов в этих двух видах лишайников показало, что в *Pseudephebe pubescens* значительно больше: Si в 19 раз, K, P и Ti в 4 раза, Sr в 2 раза, Rb в 5 раз, Y и Ba в 3,7 раз, а Ca в 1,33 раза меньше, чем в *Usnea sphacelata*. Эти видовые отличия в накоплении различных элементов исследованными кустистыми лишайниками позволяют использовать *Pseudephebe pubescens* в качестве индикаторного вида при оценке дальнего атмосферного переноса загрязняющих веществ.

Механизм накопления элементов различными видами лишайников малоизучен. В связи с этим проведено исследование анатомического строения кустистых лишайников Антарктиды и определение относительного содержания ряда элементов в различных частях их таллома (табл. 2). Как видно из рис. 2, а, *Usnea sphacelata* представляет собой кустистый прямостоячий лишайник 1,5–2,0 (5,0) см длиной. Главный стебель (ось) отходит от общего основания; боковые ветви удлиненные, слабо раздвоенные; ветвление более или менее дихотомическое и регулярное; боковые ветви круглые в сечении, пестрые с черными полосами. Фикобионтом является зеленая водоросль требуксия [2].

Т а б л и ц а 2. Относительное содержание химических элементов в % морфологических частей таллома кустистых лишайников Антарктиды *Usnea sphacelata* и *Pseudephebe pubescens*

Элемент	<i>Usnea sphacelata</i> , боковая ветвь таллома, светлая нижняя часть	<i>Usnea sphacelata</i> , боковая ветвь таллома, темная верхняя часть	<i>Pseudephebe pubescens</i> , краевая поверхность таллома	<i>Pseudephebe pubescens</i> , центральная зона таллома
C	28,75	30,07	25,63	22,84
O	61,82	58,08	56,21	53,51
K	0,25	0,61	1,93	2,49
Si	0,08	5,65	3,62	6,37
Ca	0,03	0,77	0,58	0,69
Al	0,91	1,13	2,06	2,97
Fe	0,16	0,67	3,29	5,31
Zn	3,93	0,87	1,92	1,32
Mg	0,09	0,11	1,05	1,46
Cu	3,96	2,05	2,74	2,53

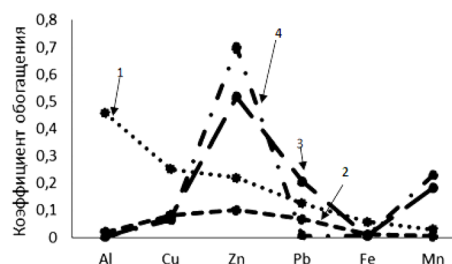


Рис. 1. Коэффициенты обогащения лишайников относительно среднего состава континентальной земной коры: 1 – *Pseudephebe pubescens*, 67°39' ю. ш., 46°09' в. д., 2 – *Usnea sphacelata*, 67°39' ю. ш., 46°09' в. д., 3 – *Usnea dasypoga*, 60°59' с. ш., 33°48' в. д., 4 – *Usnea dasypoga*, 61°54' с. ш., 33°55' в. д.

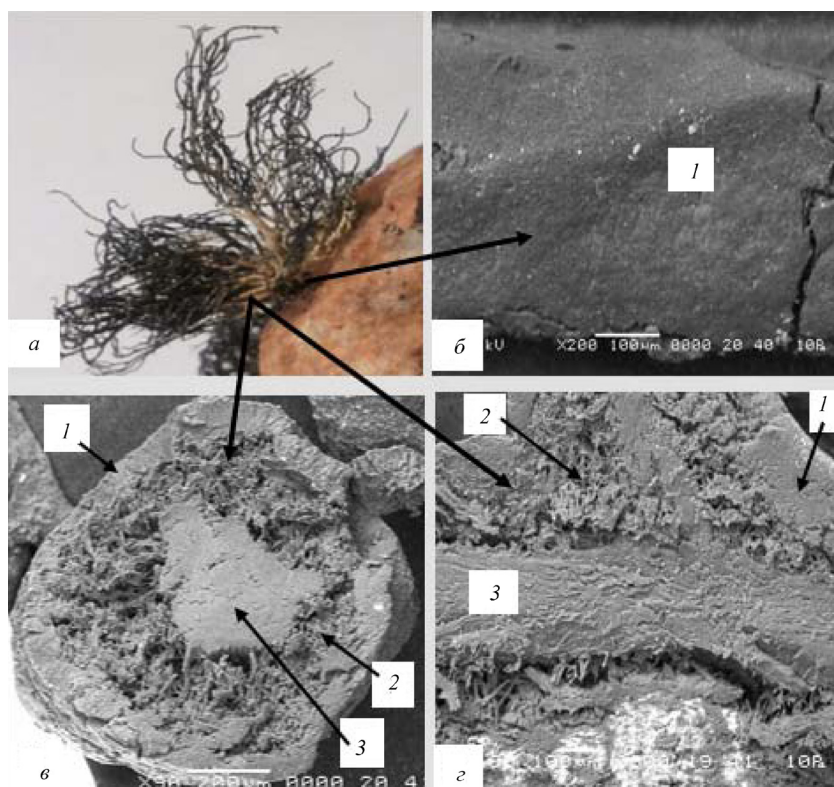


Рис. 2. Анатомическое строение *Usnea sphacelata*: а – внешний вид, б – внешняя поверхность главного стебля, в – поперечный разрез боковой ветви светлой части, з – продольный разрез боковой ветви светлой части; 1 – коровый слой; 2 – зона фикобионта; 3 – сердцевина [2]

Анализ анатомического строения *Usnea sphacelata* показал, что он имеет радиальную структуру: снаружи их ветви покрыты коровым слоем, под ним располагается водорослевый слой, или зона фикобионта, а центральная часть заполнена сердцевиной (рис. 2, в и з).

**Коровый слой** (рис. 2, в 1 и 2, з 1), через который происходит диффузия металлов, создает внешний каркас лишайника, состоящий из хитин-глюкан-меланинового комплекса [6]. Кустистые лишайники Антарктиды отличаются жестким талломом, который формируется благодаря взаимодействию хитин-меланинового комплекса микобионта с Ca и другими элементами (табл. 2). Он защищает фикобионт от экстремальных воздействий и поддерживает вертикальные лопасти кустистых слоевищ. Черный цвет корового слоя определяется высоким содержанием меланиновых пигментов, которые не только связывают металлы, но и служат защитой от УФ-облучения [4]. В связи с этим проведено исследование количества парамагнитных центров в меланинах кустистых лишайников *Usnea sphacelata* и *Pseudophebe pubescens*, которое составило соответственно  $0,45 \cdot 10^{17}$  спин/г и  $0,94 \cdot 10^{17}$  спин/г. Высокое содержание парамагнитных центров свидетельствует о большом количестве меланина в коровом слое, который задерживает более 90 % УФ.

**Зона фикобионта** (рис. 2, в, 2 и 2, з, 2) выполняет функцию ассимиляции углекислоты и накопления органических веществ. **Серцевина** (рис. 2, в, 3 и 2, з, 3) состоит из грибных гиф, которые осуществляют подведение воздуха к водорослевым клеткам для нормального осуществления процесса фотосинтеза.

Необходимо отметить, что на глубине до 2 микрон отдельные морфологические части таллома лишайников имеют отличия в накоплении и распределении элементов в поверхностном слое (табл. 2).

Анализ данных табл. 2 показал, что на различных частях обоих исследованных видов относительное содержание С и О близкое, что свидетельствует о их биогенном происхождении. Стоит отметить высокое содержание Si и Ca в темной части боковых ветвей *Usnea sphacelata*, которое в 70,6 и 25,6 раз выше, чем в светлой нижней части ветвей лишайника. Эти элементы связаны с хитин-меланиновым комплексом и создают жесткую структуру таллома. Относительное



содержание элементов литогенного происхождения Al, Fe значительно выше у *Pseudephebe pubescens*, чем у *Usnea sphacelata*. Необходимо отметить, что содержание Fe значительно больше в темных морфологических частях таллома обоих лишайников, что может свидетельствовать об их более интенсивном связывании с меланинами. Для таких металлов, как Zn, Mg и Cu характерно относительно равномерное распределение по морфологическим частям таллома обоих лишайников.

Поступление металлов в лишайники осуществляется через коровый слой. В нем происходит связывание с хитин-меланиновым комплексом микобионта, а в дальнейшем выборочно абсорбирование мико- и фикобионтом [6].

**Заключение.** Долгоживущие кустистые лишайники Антарктиды способны извлекать из окружающей среды и накапливать в своем слоевище различные химические элементы. Благодаря этим свойствам они могут являться индикаторными организмами загрязнения окружающей среды тяжелыми металлами и другими поллютантами. Проведенное сравнительное исследование кустистых лишайников *Usnea sphacelata*, *Pseudephebe pubescens* Антарктиды показало, что между ними существуют видовые отличия в накоплении различных элементов литогенного и антропогенного происхождения.

Для *Pseudephebe pubescens* характерно значительное накопление элементов, что позволяет использовать *Pseudephebe pubescens* в качестве индикаторного вида при оценке дальнего атмосферного переноса загрязняющих веществ.

### Список использованной литературы

1. Гигиняк, Ю. Г. Новые данные о лишайниках Земли Эндерби (Восточная Антарктида) / Ю. Г. Гигиняк, А. П. Яцына, О. И. Бородин // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 3. – С. 88–92.
2. Цуриков, А. Г. Листоватые и кустистые городские лишайники: атлас-определитель / А. Г. Цуриков, О. М. Храменкова. – Гомель: Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины, 2009. – 123 с.
3. Содержание тяжелых металлов в кустистых эпифитных лишайниках Карелии как индикатор атмосферного переноса загрязняющих веществ / В. П. Шевченко [и др.] // Современные проблемы науки и образования. – 2011. – № 3. – С. 35–43.
4. Новиков, Д. А. Фотопротекторные свойства меланинов из винограда (*Vitis vinifera*) и черного грузинского чая (*Thea sinensis*) / Д. А. Новиков, В. П. Курченко, И. И. Азарко // Радиационная биология. Радиоэкология. – 2001. – Т. 41, № 6. – С. 670–676.
5. Rudnick, R. L. Composition of the Continental Crust / R. L. Rudnick, S. Gao // Treatise on Geochemistry. – Vol. 3. The Crust. – Amsterdam: Elsevier, 2003. – P. 1–64.
6. Феофилова, Е. П. Ключевая роль хитина в образовании клеточной стенки грибов / Е. П. Феофилова // Хитин и хитозан: получение, свойства и применение. – М., 2002. – С. 91–98.

Поступило 25.04.2016

**СОЦИАЛЬНО-ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ**

УДК 316.334.22(476)

Г. Н. СОКОЛОВА

**СОЦИОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ АДАПТАЦИИ РЫНКА ТРУДА  
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ К СТРУКТУРНЫМ ИЗМЕНЕНИЯМ ЭКОНОМИКИ***(Представлено академиком Е. М. Бабосовым)**Институт экономики НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
gnsokolova@tut.by*

Анализируются механизмы подстройки рынка труда к структурным изменениям экономики. Выявлено, что механизмы количественной подстройки, связанные с сохранением избыточной рабочей силы, ослабляют конкуренцию за рабочие места; механизмы качественной подстройки не обеспечивают реакцию рынка образовательных услуг на структурные изменения экономики; механизмы заработной платы не стимулируют в достаточной мере переход рабочей силы в новые сферы экономики; механизмы институциональной подстройки не способствуют согласованности действия названных механизмов. Для успешной адаптации рынка труда к структурным изменениям экономики необходимы сокращение неэффективных рабочих мест, социально ответственная реструктуризация (включая опережающее переобучение и современные методы кадровой работы), согласование рынка образовательных услуг и рынка труда, реализация заработной платой функции, стимулирующей работников на производительный и качественный труд, повышение институциональной гибкости рынка труда.

*Ключевые слова:* рынок труда, адаптация, механизмы, структурные изменения экономики, Республика Беларусь.

G. N. SOKOLOVA

**SOCIAL ANALYSIS OF THE MECHANISMS OF ADAPTATION OF THE LABOR MARKET  
OF THE REPUBLIC OF BELARUS TO STRUCTURAL CHANGES IN ECONOMY***Institute of Economics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
gnsokolova@tut.by*

In this article the mechanisms of the labor market adjustment to structural changes in economy are analyzed. It is revealed that the mechanisms for quantitative adjustment are connected with the preservation of unnecessary labor, weaken competition for workplaces; the mechanisms for qualitative adjustment don't provide the reaction of the educational services market to structural changes in economy; the mechanisms for wages don't stimulate the labor transition into new spheres in economy; the mechanisms for institutional adjustment don't promote the coordination of the named mechanisms action. For successful adaptation of the labor market to structural changes in economy the following is necessary: reduction of inefficient workplaces, socially responsible restructuring (including over retraining and modern methods of personnel work), coordination of the educational services market and the labor market, realization by wages of the function stimulating workers to productive and qualitative work, increase of labor market institutional flexibility.

*Keywords:* labor market, adaptation, mechanisms, structural changes in economy, Republic of Belarus.

**Проблема обеспечения баланса спроса и предложения рабочей силы на рынке труда.** В белорусской экономике к факторам, снижающим экономическую эффективность занятости, относятся наличие избыточной численности персонала на предприятиях, что сопровождается снижением производительности труда; сохранение структурных диспропорций между спросом и предложением рабочей силы по профессионально-квалификационному составу; поддержание конкурентоспособности лиц, особо нуждающихся в социальной защите. Однако эти же факторы прямо или косвенно, в кратко- и среднесрочной перспективе способствуют повышению социальной

эффективности занятости, так как спасают работников от увольнения и состояния безработицы. По существу, мы имеем конфликт между необходимостью достичь экономической эффективности занятости и не допустить при этом снижения ее социальной эффективности. Поэтому возникает необходимость поиска таких способов повышения экономической эффективности занятости, которые были бы не в ущерб ее социальной эффективности [1, с. 254–255]. Возможности решения проблемы баланса рассматриваются в контексте механизмов адаптации рынка труда к структурным изменениям в экономике Республики Беларусь.

Основные векторы структурных изменений экономики обусловлены переходом к новым технологическим укладам, изменением соотношения в сферах рыночных и нерыночных услуг, диверсификацией различных форм хозяйствования. Выделяются два вида реструктуризации экономики: *защитная*, связанная с различными формами государственной поддержки нерентабельных предприятий, и *селекционная*, связанная с системной реструктуризацией с помощью банкротства и ликвидации нерентабельных производств. Соответственно, механизмы адаптации рынка труда к структурным изменениям, способствующие решению различных аспектов проблемы баланса, многообразны и включают количественный, качественный, ценовой и институциональный типы подстройки.

*Механизмы количественной подстройки* рынка труда содержат различные способы маневрирования количеством и качеством рабочей силы, сообразно структурным изменениям экономики. В целом, занятость в Беларуси характеризуется традиционностью форм. Так, по данным социологических исследований, почти 90 % работников трудятся по найму и примерно столько же работают полный рабочий день/неделю. Несмотря на преобладание контрактной формы найма (по трудовым контрактам работают 2/3 респондентов), занятость у одного работодателя нередко приобретает постоянный характер. Отметим, что руководство белорусских предприятий и организаций, по данным опроса работающего населения, практически не прибегает к сокращению штата работников, а использует такие ценовые стратегии поддержания стабильной занятости, как снижение или несвоевременность оплаты труда, вынужденные социальные отпуска, сокращение рабочего времени. Однако такие меры не являются повсеместными и затрагивают относительно небольшую (примерно 15 %) долю работающих белорусов [2].

По данным Всемирного банка, в промышленности и строительстве избыточная численность работников на государственных предприятиях свыше 25 %. Поддержание избыточной численности работников обусловлено институциональной средой, так как целесообразность ее сокращения определяется разницей между издержками ее сохранения и затратами при высвобождении. Неполная вынужденная занятость обходится дешевле, а для безусловного выполнения плановых заданий по росту объема производства придерживание избыточной численности работников на микроуровне в краткосрочном периоде выгоднее.

По данным опроса, неполная вынужденная занятость становится причиной разного рода подработок. Доля респондентов, имеющих дополнительную работу, включая случайные приработки и заработки, достигает 1/4 от всех респондентов, ответивших на данный вопрос; и с 2012 по 2014 годы эта тенденция почти не меняется (табл. 1).

Т а б л и ц а 1. Распространенность вторичной (дополнительной) занятости

Форма дополнительной занятости	2012 г.	2013 г.	2014 г.
Регулярная дополнительная работа по основному месту работы	3,0	4,0	3,4
Регулярная дополнительная работа в другом месте	4,9	4,1	5,3
Случайные приработки, заработки	16,3	14,5	16,5
Не было дополнительной занятости	75,8	77,4	74,8
Итого	100,0	100,0	100,0

И с т о ч н и к: данные республиканского социологического мониторинга, 2012, 2013, 2014. В каждом из этих исследований выборочная совокупность составляла 2100 чел. Предельная ошибка выборки по оценочным показателям, гарантированная с 95 %-ной вероятностью, составила  $\pm 2$  %. С учетом данной погрешности выводы исследований можно экстраполировать на генеральную совокупность, т. е. занятое население республики.

В качестве главной причины, побуждающей работников иметь вторичную занятость, назван низкий уровень оплаты труда на основной работе (до 80 % респондентов); вторая по значимости причина – относительно высокий уровень зарплаток на дополнительной работе. Распространенность вторичной занятости среди разных социально-демографических групп показана в табл. 2.

Т а б л и ц а 2. Распространенность дополнительной занятости среди разных социально-демографических групп занятых

Показатель	Доля респондентов, у которых за последние 2–3 месяца, предшествующие опросу,			
	Была постоянная дополнительная работа	Были случайные дополнительные заработки	Не было дополнительной занятости	Итого
В среднем по выборке	8,8	16,7	74,5	100,0
<i>Гендерные группы</i>				
Мужчины	9,4	21,7	68,9	100,0
Женщины	8,2	11,7	80,2	100,0
<i>Возрастные группы</i>				
До 30 лет	13,8	20,3	65,9	100,0
От 31 до 40 лет	8,1	20,6	71,3	100,0
От 41 до 50 лет	6,6	16,0	77,4	100,0
51 год и старше	6,7	10,2	83,1	100,0

И с т о ч н и к: данные социологического исследования, 2013.

На микроуровне существование (в социально допустимых пределах) реальной безработицы является значимым мотиватором к труду, стимулирует конкуренцию за рабочие места и стремление к повышению индивидуальной конкурентоспособности (корректирует трудовое поведение, способствует непрерывному профессиональному образованию). Между тем, субъективные оценки вероятности потери работы показывают, что более 2/3 занятых белорусов считают, что им не грозит потеря работы (табл. 3).

Т а б л и ц а 3. Оценки вероятности потери работы

Варианты ответов на вопрос: «Существует ли лично для Вас угроза потери работы?»	2012 г.	2013 г.	2014 г.
Да	4,0	5,2	8,3
Скорее да	7,1	8,9	8,9
Скорее нет	36,0	32,4	32,8
Нет	34,4	36,2	36,0
Загрудняюсь оценить	18,5	17,3	14,0
Итого	100,0	100,0	100,0

И с т о ч н и к: данные социологических исследований, 2012, 2013, 2014.

Сформированное под влиянием реальной безработицы ощущение ценности рабочего места и ценности образования является главным звеном в системе мотивации и способствует росту производительности и качества труда на предприятиях. Однако социальные обязательства государства по обеспечению максимального трудоустройства и минимальной безработицы ослабляют такие мощные сигналы. Это формирует завышенный спрос на труд со стороны государства, который поддерживается законодательством о защите занятости и означает фактическое отсутствие количественной подстройки в средне- и долгосрочном периодах.

**Механизмы качественной подстройки** выявляются в расширении рынка образовательных услуг, в первую очередь, расширении сферы высшего (в том числе невостребованного) образования.

По данным статистики Республики Беларусь, охват молодежи высшим образованием постоянно возрастает: в 2005/2006 гг. он составлял 47,9 %, а в 2012/2013 гг. – 72,8 % к численности на-

селения в возрасте 17–21 год [3, с. 143]. Казалось бы, что выпускники вузов должны сталкиваться с ростом безработицы; однако в реальности этого не происходит. По данным государственной статистики, уровень занятости среди лиц с высшим образованием выше, а уровень безработицы ниже, чем в других группах (табл. 4).

Т а б л и ц а 4. Структура безработных по уровню образования в регионах Республики Беларусь, 2013 г.

Показатель	Регион							
	Брестская область	Витебская область	Гомельская область	Гродненская область	Минская область	Могилевская область	Минск	Республика Беларусь
Уровень зарегистрированной безработицы, % к численности экономически активного населения	0,9	0,7	0,7	0,6	0,4	0,6	0,2	0,5
<i>Структура безработных по уровню образования, %</i>								
Высшее	9,1	8,4	8,6	10,1	6,4	9,0	24,7	10,3
Среднее специальное	40,9	35,4	40,0	37,7	38,4	45,0	32,8	38,6
Общее среднее	42,4	35,2	39,8	44,2	44,1	36,9	32,5	39,6
Общее базовое	7,6	21,0	11,6	8,0	11,1	9,1	10,0	11,5
Итого	100	100	100	100	100	100	100	100

И с т о ч н и к: [4, с. 108, 110].

Объяснением данному явлению может служить тот факт, что, по данным опроса 2013 г., имеет место относительно высокий уровень занятости не по специальности, полученной в учебном заведении (около 30 % занятого населения). Очевидно, этот разрыв заложен в целевой структуре отношения к высшему образованию как средству получения диплома, связанному с расширением возможностей трудоустройства.

**Механизмы ценовой подстройки** рынка труда к структурным изменениям в экономике предполагают дифференциацию заработной платы в разрезе отраслей (видов деятельности), что обеспечивает перелив рабочей силы между секторами экономики и обуславливает изменение структуры занятости. Основным механизмом, регулирующим структуру занятости, способствующим или препятствующим межотраслевым перемещениям рабочей силы, выступает заработная плата. В экономическом контексте заработная плата является центральным механизмом взаимодействия законов спроса и предложения на рынке труда. В контексте социальной политики заработная плата должна мотивировать экономическое поведение индивида через реализацию воспроизводственной, стимулирующей, регулирующей и социальной функций [5].

*Воспроизводственная функция* заработной платы призвана обеспечивать удовлетворение сложившегося в обществе уровня физических и духовных потребностей работников. Показателем успешной реализации этой функции может служить превышение среднедушевого денежного дохода над минимальным потребительским бюджетом (в расчете на душу населения в месяц)\*.

Реализация воспроизводственной функции заработной платы связана со структурой денежных доходов домашних хозяйств. Если доля заработной платы (по основному месту работы) увеличивается в структуре денежных доходов населения, то возрастает и мотивация к основной работе. Если же доля заработной платы (по основному месту работы) уменьшается в структуре денежных доходов населения, то снижается мотивация людей к основной работе и повышается мотивация к разного рода подработкам, именуемым «вторичной занятостью».

*Стимулирующая функция* заработной платы предусматривает зависимость заработной платы от индивидуальных и коллективных результатов труда. На уровне государственной политики, заработная плата должна стимулировать перелив рабочей силы из производственных в не-

\* Минимальный потребительский бюджет (МПБ) – основной социальный норматив, представляющий стоимость набора материальных благ и услуг, необходимых для удовлетворения минимальных физиологических и социальных потребностей человека. МПБ в 2013 г. – 1608,3 тыс. руб.; бюджет прожиточного минимума (БПМ) – 1023,5 тыс. руб.

производственные сферы экономики, из традиционных в инновационные сферы хозяйственной деятельности. Реализация этой функции заработной платы выступает важнейшим средством повышения производительности труда, формирования инновационных сфер деятельности и межотраслевых перемещений в русле научно-технического прогресса. Однако действие заработной платы как механизма отраслевых перемещений заблокировано тем, что эти перемещения стимулируются со знаком минус. Так, заработная плата работников непродуцированной сферы намного ниже средней в экономике республики. Внутри непродуцированной сферы заработная плата в сфере управления выше, чем в сфере науки и образования, тогда как в экономически развитых странах все происходит наоборот. В результате подобного «стимулирования» темпы прогрессивных отраслевых перемещений низки и имеют тенденцию к замедлению.

*Регулирующая функция* заработной платы проявляется в том, что она выступает механизмом формирования спроса на продукцию и услуги конечного потребления, а также на труд. Само по себе повышение номинальной заработной платы сопровождается ростом цен на потребительские товары, что не позволяет повысить ее покупательную способность и, соответственно, реализовать в полной мере ее регулируемую функцию. Для современного этапа характерен низкий уровень средней заработной платы и отсутствие стабильности в росте ее реальной величины. Об относительно низком уровне номинальной среднемесячной заработной платы свидетельствует и ее соотношение с МПБ (3,1) и БПМ (5,0), характеризующими стоимость жизни.

*Социальная функция* заработной платы нацелена на обеспечение социально справедливой дифференциации оплаты труда и, соответственно, избегание значительной социально-экономической дифференциации общества. Реализация социальной функции заработной платы является одним из основных механизмов социально ориентированной рыночной экономики в Республике Беларусь, согласно которой конечной целью развития должен выступать не сам по себе экономический рост, темпы и размеры накопления, а человек, обеспечение его материальных и духовных потребностей.

Анализ функций, через реализацию которых заработная плата влияет на материальное положение и ценностные ориентации индивидов, позволяет заключить, что в условиях структурных изменений в экономике заработная плата как бы «выходит» из рамок собственно условий труда и становится одним из главных мотивирующих факторов экономического поведения индивидов.

**Механизмы институциональной подстройки** обеспечивают оптимизацию сравнительных издержек, вызванных действием количественного, качественного и ценового механизмов в ходе реструктуризации экономики. Однако амортизируя риск высокой безработицы и высвобождений, институциональная среда способствует замедлению структурных преобразований белорусской экономики, препятствует перераспределению рабочей силы по критерию экономической эффективности занятости.

По мнению ведущих экономистов Республики Беларусь, именно механизм институциональной подстройки белорусского рынка труда создает возможность его ослабленного стимула к реструктуризации экономики. Такие элементы институциональной настройки белорусского рынка труда, как индексация заработной платы (административный контроль за ее динамикой), высокий уровень налогообложения фонда оплаты труда, жесткая регламентация процедур найма и увольнения, наличие неявных социальных контрактов (недозанятость – недооплата – вторичная и неформальная занятость – теневая оплата), слабый инфорсмент трудовых отношений на негосударственных предприятиях и у предпринимателей, амортизируют скорость и глубину процессов реструктуризации [6].

Особенности адаптации белорусского рынка труда к структурным изменениям экономики состоят в следующем: доминируют краткосрочные количественные ориентиры, что ослабляет конкуренцию за рабочие места; в механизме качественной подстройки присутствует формальный сигнал, проявляющийся в избытке образования, не подкрепленного соответствующими рабочими местами. Механизм заработной платы не способствует переходу рабочей силы в новые сферы экономики; гибкость ресурсов рабочего времени сочетается с институциональной жесткостью и означает перенос издержек приспособления на микроуровень, что препятствует ре-

структуризации и модернизации производств на предприятиях. Основными векторами изменений должны стать повышение эффективности использования рабочей силы на микроуровне; согласование рынка образовательных услуг и рынка труда; диверсификация инфраструктуры рынка труда, повышение его институциональной гибкости.

В создании стимулов, мотивирующих работников к повышению производительности труда, конкурентоспособности, непрерывному профессиональному образованию, важную роль должны играть дифференциация заработной платы с учетом индивидуальных и профессиональных достижений работников (образование, квалификация, обладание разносторонними техническими и научными знаниями); введение непрерывного профессионального обучения и опережающего обучения работников, находящихся под риском увольнения; расширение использования гибких форм занятости, особенно для лиц, имеющих ограниченную конкурентоспособность на рынке труда; содействие профессиональной мобильности рабочей силы.

Ключевая роль по обеспечению активизации механизмов количественной, качественной и ценовой подстройки принадлежит механизмам институционального типа адаптации. Они включают в себя повышение гибкости рынка труда за счет принятия нормативных документов, регулирующих формы высвобождения и современные формы занятости, содействие профессиональной мобильности рабочей силы. Принимая современные вызовы и пытаясь сохранить социальную ориентацию экономики, белорусскому рынку труда предстоит повысить свои адаптационные способности, скорректировав их направления.

### Список использованной литературы

1. Рынок труда Республики Беларусь в социологическом измерении / Г. Н. Соколова [и др.]; науч. ред. Г. Н. Соколова. – Минск: Беларуская навука, 2014. – 304 с.
2. Таранова, Е. В. Стабильность занятости населения Беларуси: социологический анализ / Е. В. Таранова // Иппокрена. – 2013. – № 2 (23). – С. 121–127.
3. Образование в Республике Беларусь, 2013: Стат. сб. – Минск: Нац. стат. ком. Респ. Беларусь, 2013. – 232 с.
4. Статистический ежегодник Республики Беларусь, 2014: Стат. сб. – Минск: Нац. стат. ком. Респ. Беларусь, 2013. – 535 с.
5. Ванкевич, Е. В. Структурные изменения экономики и рынок труда: эффективность элементов подстройки / Е. В. Ванкевич // Белорус. эконом. журн. – 2013. – № 3. – С. 41–56.
6. Соколова, Г. Н. Мотивация и стимулирование труда в контексте мотивационно-гигиенической теории Ф. Херцберга / Г. Н. Соколова // Экономическая психология в России и Беларуси: сб. науч. работ / под ред. А. Л. Журавлева и В. А. Поликарпова. – Минск: Экономпресс, 2007. – С. 298–317.

Поступило в редакцию 26.10.2015

**АГРАРНЫЕ НАУКИ**

УДК 636.2.082

*Член-корреспондент В. К. ПЕСТИС, С. И. КОРШУН, Н. Н. КЛИМОВ, Л. А. ТАНАНА***ВЛИЯНИЕ ГЕНЕТИЧЕСКИХ И ПАРАТИПИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ  
НА ПРОДУКТИВНОЕ ДОЛГОЛЕТИЕ ЧЕРНО-ПЕСТРОГО СКОТА***Гродненский государственный аграрный университет, Гродно, Беларусь  
ggau@ggau.by; s\_korshyn@mail.ru; nn\_klimov@mail.ru*

Работа посвящена изучению влияния различных факторов на продуктивное долголетие и пожизненную молочную продуктивность коров белорусской черно-пестрой породы. Установлено, что среди факторов, способствующих долголетнему продуктивному использованию коров, можно выделить причины как наследственной, так и паратипической природы, которые необходимо учитывать в зоотехнической работе. При этом наиболее сильное влияние из генетических факторов на срок продуктивного использования установлено по фактору «линейная принадлежность» ( $\eta^2 = 10,3\%$ ), а из паратипических факторов – «удой за первую лактацию» ( $\eta^2 = 11,78\%$ ).

*Ключевые слова:* продуктивное долголетие, пожизненная молочная продуктивность, генетические факторы, паратипические факторы.

*V. K. PESTIS, S. I. KORSHUN, N. N. KLIMOV, L. A. TANANA***EFFECT OF THE GENOTYPIC AND PARATYPIC FACTORS ON THE PRODUCTIVE LONGEVITY  
OF THE BLACK-MOTLEY CATTLE***Grodno State Agrarian University, Grodno, Belarus  
ggau@ggau.by; s\_korshyn@mail.ru; nn\_klimov@mail.ru*

The article is devoted to the study of the influence of different factors on the productive longevity and the lifetime milk production of the Belarusian black-motley cows. It was found that among the factors contributing to the many-year productive use of cows it is possible to identify the causes of both hereditary and paratypic nature that need to be taken into account in animal husbandry. The most powerful influence of genetic factors on the period of the productive use is set by the factor of “linear affiliation” ( $\eta^2 = 10.3\%$ ), and from paratypic factors – “the yield of milk in the first lactation” ( $\eta^2 = 11.78\%$ ).

*Keywords:* productive longevity, lifetime milk production, genetic factors, paratypic factors.

**Введение.** В молочном скотоводстве продуктивное долголетие коров имеет особую значимость. От продолжительности хозяйственного использования зависит пожизненное количество молочной продукции и телят, темпы повышения генетического потенциала популяции, скорость смены поколений. Сокращение сроков продуктивного использования коров и сопутствующее этому снижение окупаемости затрат на их выращивание до начала продуктивного использования на сегодняшний день представляют значительную проблему в молочном скотоводстве [1]. Причины, приводящие к снижению долголетия животных, самые разнообразные, но основными считаются низкая продуктивность, заболевания молочной железы, гинекологические заболевания и травмы конечностей. Причем у молодых коров наиболее частой причиной выбытия является низкая продуктивность, а у более старших – различные заболевания [2; 3]. Вместе с тем продолжительное использование коров не является самоцелью и должно определяться экономической целесообразностью [4].

Вопросу изучения причин снижения продуктивного долголетия в последние годы уделяется большое внимание [5–7]. Известно, что срок продуктивного долголетия молочного скота во многом определяется действием комплекса генотипических и паратипических факторов. Наиболее



значимыми среди них можно считать породу, линейную принадлежность, возраст первого отела, живую массу при первом отеле, сезон рождения, продуктивность по первой лактации [8; 9]. Вместе с тем зачастую вопросы влияния тех или иных факторов на долголетие рассматриваются фрагментарно, что не позволяет установить объективные причинно-следственные связи и вести эффективную селекцию на повышение продуктивного долголетия.

Целью работы являлось изучение влияния различных факторов на продолжительность использования и пожизненную молочную продуктивность черно-пестрого скота.

**Материалы и методы исследования.** Исследования проводили в СПК «Прогресс-Вертелишки» Гродненского района. На основании данных племенного и зоотехнического учета вышеуказанного хозяйства была собрана информация о 1770 коровах, выбывших из стада за 3 года (с 2009 по 2011). Из обработки были исключены животные с незаконченной лактацией (продолжительностью менее 240 сут.). Для установления характера влияния генетических факторов на продуктивное долголетие и уровень пожизненной продуктивности животные были разделены на опытные группы, при этом критериями для отнесения к определенной группе служили генотип и линейная принадлежность. Исходя из генотипа (доли генов по голштинской породе), коровы были разделены на 4 группы: 1 группа – до 25,0 % доли генов по голштинской породе; 2 группа – 25,0–49,9 % доли генов по голштинской породе; 3 группа – 50,0 % и более доли генов по голштинской породе; 4 группа – чистопородные черно-пестрые особи. С целью установления характера влияния паратипических факторов на продуктивное долголетие и уровень пожизненной продуктивности коров черно-пестрой породы животные были разделены на опытные группы, критериями для отнесения к которым служили возраст первого отела (месяцев), удой за первую лактацию (кг). Для анализа взаимосвязи продуктивного долголетия коров и возраста первого отела было сформировано пять групп животных: 1 группа – с возрастом первого отела 24 месяца и менее; 2 группа – 24,1–26,0 месяцев; 3 группа – 26,1–28,0 месяцев; 4 группа – 28,1–30,0 месяцев; 5 группа – более 30 месяцев. Для изучения продуктивного долголетия коров с различной величиной удоя за первую лактацию было сформировано восемь групп животных: первая группа – с удоём по первой лактации до 4000 кг молока, вторая группа – 4000–4999 кг, третья группа – 5000–5999 кг, четвертая группа – 6000–6999 кг, пятая группа – 7000–7999 кг, шестая группа – 8000–8999 кг, седьмая группа – 9000–9999 кг, восьмая группа – 10000 кг молока и более.

При проведении исследований анализировались следующие показатели: продолжительность использования (лактаций), пожизненный удой (кг), пожизненный выход молочного жира (кг), удой в расчете на один день лактации (кг). Цифровой материал обработан по П. Ф. Рокицкому (1968) с использованием приложения MS Excel 2010 на ПЭВМ. Показатель силы влияния ( $\eta^2$ ) факторного признака на результат определяли при помощи однофакторного дисперсионного анализа и выражали долей факториальной дисперсии ( $D_{\text{факт}}$ ) в общей дисперсии ( $D_{\text{общ}}$ ).

**Результаты и их обсуждение.** Главной особенностью современного этапа развития молочного скотоводства является широкое вовлечение в селекционный процесс генофонда лучших специализированных пород, в основном голштинской. Дальнейшая селекция и использование животных разных генотипов требуют увеличения сроков хозяйственного использования крупного рогатого скота, так как период использования коров сокращается и в настоящее время составляет по хозяйствам республики в среднем 2,5–3,0 лактации.

Нами были определены показатели долголетия и пожизненной продуктивности коров различных генотипов (табл. 1).

Данные табл. 1 свидетельствуют о том, что наибольшим сроком хозяйственного использования (3,84 лактации) в стаде СПК «Прогресс-Вертелишки» отличались коровы с долей генов по голштинской породе до 25 %, что превышало аналогичный показатель других групп на 0,34–0,74 лактации. При этом статистически достоверными оказались различия между коровами первой и второй групп, а также между особями первой и третьей групп ( $P < 0,01$ ;  $P < 0,001$ ). У низокровных помесей, отличавшихся наибольшим сроком продуктивного использования, наблюдались наиболее высокие показатели пожизненной молочной продуктивности. Так, пожизненный удой у них составил 26264 кг молока ( $P > 0,05$ ;  $P < 0,05$ ;  $P < 0,01$ ), в то время как у животных других анализируемых генотипов этот показатель находился в пределах 21040–22686 кг молока.

**Т а б л и ц а 1. Долголетие и молочная продуктивность коров разных генотипов за весь период использования ( $M \pm m$ )**

Показатель	Генотип			
	до 25 % доли генов по голштинской породе	25–49,9 % доли генов по голштинской породе	50 и более % доли генов по голштинской породе	чистопородные черно-пестрые
Продолжительность использования, лактаций	3,84 ± 0,190	3,10 ± 0,088	3,29 ± 0,058	3,50 ± 0,194
Пожизненный удой, кг	26264 ± 1429,1	21040 ± 626,9	22686 ± 412,0	22315 ± 1206,7
Пожизненный выход молочного жира, кг	934,5 ± 51,84	768,6 ± 23,97	827,7 ± 15,32	813,8 ± 44,76
Удой на 1 день лактации, кг	20,7 ± 0,34	20,9 ± 0,17	21,2 ± 0,11	20,4 ± 0,28

Пожизненный выход молочного жира у коров с долей генов по голштинской породе до 25 % был на уровне 934,5 кг. У данной группы животных отмечен и самый высокий удой в расчете на 1 день лактации – 21,19 кг молока. По вышеуказанному показателю молочной продуктивности помесные животные независимо от их кровности превосходили черно-пестрых чистопородных особей.

Таким образом, результаты проведенного исследования свидетельствуют о том, что в условиях СПК «Прогресс-Вертелишки» скрещивание черно-пестрого скота с голштинской породой способствовало повышению продолжительности хозяйственного использования и пожизненной продуктивности, но лишь в том случае, когда кровность по улучшающей породе не превышала 25 %. Дальнейшее увеличение кровности по голштинам негативно сказалось на долголетию животных и пожизненном количестве молочной продукции – помесные животные с долей генов по голштинской породе 25 % и выше уступали по вышеназванным показателям как чистопородным черно-пестрым коровам, так и низкокровным помесям.

Наличие в стаде хозяйства нескольких линий обеспечивает развитие и совершенствование поголовья в двух направлениях: удается избежать близкородственного спаривания и удачно использовать кроссы линий. В табл. 2 отражена информация, касающаяся продуктивного долголетия и пожизненной молочной продуктивности коров, относящихся к наиболее многочисленным линиям, разводимым в хозяйстве.

**Т а б л и ц а 2. Срок хозяйственного использования и пожизненная молочная продуктивность коров разных линий ( $M \pm m$ )**

Показатель	Линия			
	Вис Айдиал 933122	Монтвик Чифтейн 95679	Рефлекшн Соверинг 198998	Нико 31652
Продолжительность использования, лактаций	2,64 ± 0,06	4,22 ± 0,16	2,82 ± 0,08	2,92 ± 0,32
Пожизненный удой, кг	17908 ± 402,2	27684 ± 595,7	19963 ± 712,8	18309 ± 2103,7
Пожизненный выход молочного жира, кг	644,7 ± 14,77	1004,5 ± 22,34	727,8 ± 26,22	670,2 ± 76,72
Удой на 1 день лактации, кг	20,6 ± 0,19	21,3 ± 0,15	21,2 ± 0,29	19,8 ± 0,48

Изучение продолжительности хозяйственного использования коров различных линий (табл. 2) позволило сделать вывод, что преимуществом по данному показателю характеризовались особи линии Монтвик Чифтейн 95679 – 4,22 лактации, в то время как у представителей остальных изучаемых линий он не достиг уровня и трех лактаций. Наивысшие показатели пожизненной молочной продуктивности также отмечены у животных линии Монтвик Чифтейн 95679. Так, пожизненный удой у коров данной линии составил 27684 кг молока, что является достаточно высоким показателем, особенно на фоне удоев животных остальных изучаемых линий: у коров линий Вис Айдиал 93312, Рефлекшн Соверинг 198998 и Нико 31652 удои не достигали и 20000 кг молока ( $P > 0,05$ ;  $P < 0,05$ ;  $P < 0,01$ ). Определение пожизненного выхода молочного жира показало, что значение данного показателя у коров линии Монтвик Чифтейн 95679 находилось на уровне 1004,5 кг, что превышало значения аналогичного показателя у животных других

линий на 276,7–359,8 кг ( $P > 0,05$ ;  $P < 0,001$ ). Наибольшей величиной удоя в расчете на 1 день лактации характеризовались особи линии Монтвик Чифтейн 95679, которые превосходили животных других линий на 0,1–1,5 кг. Следует отметить, что по величине удоя на 1 день лактации коровы, принадлежащие к линии голландского корня Нико 31652, уступали животным, относящимся к линиям голштинской селекции, на 0,8–1,5 кг.

Резюмируя изложенное выше, можно сказать, что выявленные статистически значимые различия по продолжительности хозяйственного использования и пожизненной продуктивности между коровами различной линейной принадлежности следует учитывать в селекционной работе, направленной на повышение продуктивного долголетия молочного скота.

Среди специалистов нет единого мнения по вопросу об оптимальных сроках первого осеменения и возрасте первого отела, так как слишком ранняя первая случка неблагоприятно отражается на молочной продуктивности коровы, задерживает ее развитие, а поздняя – приводит к дополнительным затратам при выращивании животных, что экономически неоправданно. В табл. 3 представлены результаты определения показателей долголетия и пожизненной продуктивности коров с разным возрастом первого отела, выбывших из стада СПК «Прогресс-Вертелишки» Гродненского района.

Т а б л и ц а 3. Продолжительность хозяйственного использования и пожизненная молочная продуктивность коров с различным возрастом первого отела ( $M \pm m$ )

Показатель	Возраст первого отела, месяцев				
	24 и менее	24,1–26,0	26,1–28,0	28,1–30,0	более 30
Продолжительность использования, лактаций	2,63 ± 0,168	3,08 ± 0,101	3,07 ± 0,094	3,31 ± 0,085	3,26 ± 0,114
Пожизненный удой, кг	18727 ± 1432,5	21165 ± 689,2	21953 ± 664,6	23195 ± 581,1	23114 ± 743,9
Пожизненный выход молочного жира, кг	726,6 ± 41,33	791,6 ± 22,17	818,8 ± 25,67	872,1 ± 21,88	852,9 ± 32,54
Удой на 1 день лактации, кг	19,7 ± 0,46	20,6 ± 0,18	21,5 ± 0,17	21,2 ± 0,15	21,0 ± 0,20

Анализ данных табл. 3 показал, что наиболее долголетними в условиях данного хозяйства являлись животные, впервые отелившиеся в возрасте 28,1–30,0 месяцев. Срок их продуктивного использования составил 3,31 лактации, а превосходство по данному показателю над коровами других групп – 0,05–0,95 лактации ( $P > 0,05$ ;  $P < 0,001$ ). За счет наибольшей продолжительности хозяйственного использования коровы четвертой группы (возраст первого отела 28,1–30,0 месяцев) отличались максимальным пожизненным удоём – 23195 кг. Меньше всего молока за период использования (18727 кг) было получено от коров первой группы, характеризовавшихся самым низким долголетием. Анализ данных о пожизненном выходе молочного жира показал, что особи четвертой группы превосходили животных других групп по данному показателю на 19,2–145,5 кг ( $P > 0,05$ ;  $P < 0,05$ ). Определение величины удоя в расчете на один день лактации говорит о том, что коровы, имевшие возраст первого отела в пределах 26,1–28,0 месяцев, превышали по данному показателю животных других групп на 0,3–1,8 кг. При этом статистически достоверным было превосходство над коровами первой и второй групп ( $P < 0,01$ ).

Следовательно, продолжительность хозяйственного использования коров и величина пожизненного удоя оказались прямо пропорциональны возрасту первого отела. Планирование первого отела коровы на возраст менее 28,1 месяца приводит к уменьшению вышеназванных показателей соответственно на 0,23–0,68 отела и 1242–4468 кг молока.

Период продуктивного использования коров обуславливается особенностями индивидуального формирования каждого организма. Одним из важных факторов формирования следует считать уровень раздоя коров по первой лактации. В научной литературе имеются сведения о том, что раздой коров до рекордных удоёв за первую и вторую лактацию приводит к значительному сокращению срока их использования [10]. Нами были проведены исследования по оценке продуктивного долголетия и пожизненной молочной продуктивности коров с разной величиной удоя по первой лактации. Полученные результаты представлены в табл. 4.

Как показывают данные табл. 4, наиболее долголетними (5,04 лактации) в условиях данного хозяйства оказались коровы, которые были раздоены по первой лактации до уровня 4000–4999 кг

Т а б л и ц а 4. Хозяйственное долголетие и молочная продуктивность коров с разным уровнем удоя по первой лактации за весь период использования ( $M \pm m$ )

Показатель	Удой за первую лактацию, кг							
	до 4000	4000–4999	5000–5999	6000–6999	7000–7999	8000–8999	9000–9999	10000 и более
Продолжительность использования, лактаций	4,85 ± 0,420	5,04 ± 0,210	3,88 ± 0,102	3,20 ± 0,073	3,01 ± 0,089	2,87 ± 0,130	2,67 ± 0,187	2,27 ± 0,138
Пожизненный удой, кг	26692 ± 2754,6	29911 ± 1455,2	23619 ± 726,3	21591 ± 554,5	21678 ± 695,6	21603 ± 999,2	21123 ± 1574,3	19988 ± 1161,3
Пожизненный выход молочного жира, кг	990,9 ± 103,00	1101,8 ± 54,25	868,9 ± 26,43	796,4 ± 20,71	787,5 ± 25,74	771,5 ± 37,08	761,6 ± 61,33	692,0 ± 44,76
Удой на 1 день лактации, кг	16,6 ± 0,69	18,8 ± 0,24	20,0 ± 0,14	21,1 ± 0,12	22,0 ± 0,19	22,8 ± 0,30	22,8 ± 0,41	24,1 ± 0,37

молока. Они превосходили по этому показателю особей первой группы на 0,19 лактации ( $P > 0,05$ ), третьей – на 1,16 лактации ( $P < 0,001$ ), четвертой – на 1,84 лактации ( $P < 0,001$ ), пятой – на 2,03 лактации ( $P < 0,001$ ), шестой – на 2,17 лактации ( $P < 0,001$ ), седьмой – на 2,37 лактации ( $P < 0,001$ ), восьмой – на 2,77 лактации ( $P < 0,001$ ). За счет наибольшей продолжительности хозяйственного использования особи второй группы (удой по первой лактации 4000–4999 кг молока) отличались максимальным пожизненным удоём и выходом молочного жира – 29911 и 1101,8 кг соответственно. Меньше всего молока и молочного жира за весь период использования (19988 и 692,0 кг соответственно) было получено от коров восьмой группы, характеризовавшихся самым низким долголетием. Результаты расчета величины удоя на один день лактации говорят о том, что коровы, имевшие удой в первую лактацию 10000 кг молока и более, достоверно превосходили по данному показателю животных других групп на 1,3–7,5 кг.

Представленные выше данные позволяют заключить, что интенсивный раздой первотелок, выявляющий в определенной мере потенциальные возможности полновозрастных коров, может стать причиной сокращения сроков их хозяйственного использования из-за больших нагрузок на продолжающий развиваться организм. Квалифицированный раздой до определенного уровня способствует получению высоких надоев и продлению срока использования коров.

Для успешной селекционной работы с молочным скотом необходима количественная оценка влияния различных факторов на проявление хозяйственно полезных признаков. Нами был проведен однофакторный дисперсионный анализ с целью установления вклада изученных генотипических и паратипических факторов в общую изменчивость показателя продуктивного долголетия (табл. 5).

Т а б л и ц а 5. Доля влияния отдельных факторов на продуктивное долголетие коров, %

Фактор	Доля влияния
Кровность по голштинской породе	0,78
Принадлежность к линии	10,30
Возраст первого отела	0,28
Удой за первую лактацию	11,78

Данные табл. 5 говорят о том, что наибольшее и достоверное влияние на изменчивость продолжительности использования коров оказали из генетических факторов генеалогическая принадлежность ( $\eta^2 = 10,3\%$ ); из паратипических факторов – удой за первую лактацию ( $\eta^2 = 11,78\%$ ).

**Заключение.** Проведенные исследования показали, что продолжительность продуктивного использования коров можно увеличить, используя наряду с технологическими и селекционными приемы. Среди факторов, способствующих долголетнему продуктивному использованию коров, можно выделить причины как наследственной, так и паратипической природы, которые необходимо учитывать в зоотехнической работе. При этом наиболее сильное влияние из генетических факторов на срок продуктивного использования установлено по фактору «линейная принадлежность» ( $\eta^2 = 10,3\%$ ), а из паратипических факторов – «удой за первую лактацию» ( $\eta^2 = 11,78\%$ ).

## Список использованной литературы

1. *Майорова, В. А.* Показатели продуктивности чёрно-пёстрых коров разных сроков хозяйственного использования / В. А. Майорова // Селекционно-генетические и эколого-технологические проблемы повышения долголетнего продуктивного использования молочных коров. – Брянск, 2005. – Вып. 7. – С. 33–36.
2. *Кибкало, Л.* Аспекты продуктивного долголетия чистопородных и помесных коров / Л. Кибкало // Молочное и мясное скотоводство. – 2005. – № 2. – С. 24–25.
3. *Матрос, В.* Взаимосвязь молочной и воспроизводительной способности коров / В. Матрос, Н. Примакин // Молочное и мясное скотоводство. – 1999. – № 5. – С. 22–24.
4. *Стрекозов, Н. И.* Интенсификация молочного скотоводства России / Н. И. Стрекозов, В. К. Черпушенко, В. И. Цысь // – Смоленск, 1997. – 238 с.
5. *Петрова, А. С.* Продуктивное долголетие коров айрширской породы и факторы, его определяющие: автореф. дис. ... канд. с.-х. наук: 06.02.01 / А. С. Петрова; ФГБОУ ВПО «Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого». – Саранск, 2010. – 20 с.
6. *Шарафутдинов, Г.* Влияние различных факторов на продуктивное долголетие коров / Г. Шарафутдинов, Р. Шайдуллин, А. Ханифатулин // Молочное и мясное скотоводство. – 2005. – № 4. – С. 27–29.
7. *Шляхтунов, В. И.* Долголетие и пожизненная молочная продуктивность дочерей различных быков-производителей / В. И. Шляхтунов, Е. М. Карпович // Актуальные проблемы интенсивного развития животноводства: сб. науч. тр. УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия». – Горки, 2010. – Вып. 13, ч. 2. – С. 127–133.
8. *Никифорова, Л. Н.* Продуктивность долголетних коров в зависимости от линейной принадлежности / Л. Н. Никифорова // Селекционно-генетические и эколого-технологические проблемы повышения долголетнего продуктивного использования молочных коров. – Брянск, 2004. – Вып. 1. – С. 22.
9. *Дундукова, Е. Н.* Влияние генетических и паратипических признаков на продуктивное долголетие коров: автореф. дис. ... канд. с.-х. наук: 06.02.01 / Е. Н. Дундукова; ФГБОУ ВПО «Волгоградская государственная сельскохозяйственная академия». – Волгоград, 2009. – 19 с.
10. *Амерханов, Х.* Научное обеспечение конкурентности молочного скотоводства / Х. Амерханов, Н. Стрекозов // Молочное и мясное скотоводство. Специальный выпуск по молочному скотоводству. – 2012. – С. 2–6.

Поступило в редакцию 09.03.2016

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

*Редакция журнала «Доклады Национальной академии наук Беларуси» просит авторов руководствоваться приведенными ниже правилами.*

I. «Доклады НАН Беларуси» печатают сообщения академиков и членов-корреспондентов, а также научных сотрудников НАН Беларуси, высших учебных заведений республики и других научных учреждений **по представлению академиков или членов-корреспондентов НАН Беларуси**. Представленные сообщения могут быть направлены на рецензию.

II. «Доклады» помещают не более трех сообщений одного автора в год. Это правило не распространяется на академиков и членов-корреспондентов НАН Беларуси.

Сообщения о результатах работ, проведенных в научных учреждениях, должны иметь разрешение на опубликование (сопроводительное письмо ректората или дирекции соответствующего института, акт экспертизы). Авторы должны определить раздел, в который следует поместить сообщение.

III. Сообщение представляется распечатанным в двух экземплярах на русском, белорусском или английском языках, межстрочный интервал – 1,5, кегль – 12, шрифт – Times New Roman.

IV. Сообщение должно иметь следующую структуру:

1. Индекс по Универсальной десятичной классификации (УДК);

инициалы и фамилии авторов;

название статьи;

полное наименование учреждений, где работают авторы, с указанием города и страны, адрес электронной почты каждого автора.

2. Аннотация (авторское резюме) объемом 150–250 слов должна кратко представлять результаты работы и быть понятной, в том числе и в отрыве от основного текста статьи; должна быть информативной, хорошо структурированной (один из вариантов написания аннотации – краткое повторение структуры статьи, включающее введение, цели и задачи, методы, результаты, заключение или выводы).

3. Ключевые слова – набор слов, отражающих содержание текста в терминах объекта, научной отрасли и методов исследования; рекомендуемое количество ключевых слов 5–10.

4. Метатекстовые данные (все то, что предшествует основному тексту статьи) приводятся *на английском языке*, причем аннотация должна быть оригинальной (т. е. не являться дословным переводом русскоязычной аннотации). Если статья англоязычная – вышеуказанные данные приводятся на русском (белорусском) языке.

5. Основной текст сообщения должен составлять 6–7 журнальных страниц (т. е. около 35 тыс. знаков); в этот объем также входят таблицы и рисунки, число которых не должно превышать 4. Изложенный материал должен быть четко структурированным: введение, цели и задачи, методы, результаты, заключение (выводы). В русско- и белорусскоязычных статьях рекомендуется делать подрисовочные подписи и надписи на самих иллюстрациях на двух языках – *русском (белорусском) и английском*.

6. Список использованной литературы (до 15 ссылок) оформляется в соответствии с требованиями Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь (ГОСТ 7.1–2003). Цитируемая литература приводится общим списком по мере упоминания, ссылки в тексте даются порядковым номером в квадратных скобках (напр., [1]); ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

7. Затем приводится список цитированных источников в *романском алфавите* («References») со следующей структурой: авторы (транслитерация), название статьи в транслитерированном варианте [перевод названия статьи на английский язык в квадратных скобках], название русскоязычного источника (транслитерация) [перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)], выходные данные с обозначениями на английском языке.

Примеры (подготовлены по материалам методических рекомендаций «Редакционная подготовка научных журналов для включения в зарубежные индексы цитирования» О. В. Кирилловой ([http://elsevierscience.ru/files/kirillova\\_editorial.pdf](http://elsevierscience.ru/files/kirillova_editorial.pdf)):

• **статьи из журналов:**

Zagurenko A.G., Korotovskikh V.A., Kolesnikov A.A., Timonov A.V., Kardymon D.V. Tekhniko-ekonomicheskaya optimizatsiya dizaina gidrorazryva plasta [*Techno-economic optimization of the design of hydraulic fracturing*]. Neftyanoe khozyaistvo = *Oil Industry*, 2008, no. 11, pp. 54–57.

• **Описание статьи из электронного источника:**

Swaminathan V., Lepkoswka-White E., Rao B.P. *Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. Journal of Computer-Mediated Communication*, 1999, vol. 5, no. 2. Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (Accessed 28 April 2011).

• **Описание статьи с DOI:**

Zhang Z., Zhu D. *Experimental research on the localized electrochemical micromachining. Russian Journal of Electrochemistry*, 2008, vol. 44, no. 8, pp. 926–930. doi: 10.1134/S1023193508080077.

• **Описание статьи из продолжающегося издания (сборника трудов):**

Astakhov M. V., Tagantsev T. V. Eksperimental'noe issledovanie prochnosti soedinenii «stal'-kompozit» [*Experimental study of the strength of joints «steel-composite»*]. Trudy MGTU «Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem» [*Proc. of the Bauman MSTU “Mathematical Modeling of Complex Technical Systems”*], 2006, no. 593, pp. 125–130.

• **Описание материалов конференций:**

Usmanov T. S., Gusmanov A. A., Mullagalin I. Z., Muhametshina R. Ju., Chervyakova A. N., Sveshnikov A. V. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [*Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing*]. Trudy 6 Mezhdunarodnogo Simpoziuma “Novye resursosberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazootdachi” [*Proc. 6th Int. Symp. “New energy saving subsoil technologies and the increasing of the oil and gas impact”*]. Moscow, 2007, pp. 267–272.

• **Описание книги (монографии, сборники):**

Izvekov V. I., Serikhin N. A., Abramov A. I. Proektirovanie turbogeneratorov [*Design of turbo-generators*]. Moscow, MEI Publ., 2005, 440 p.

• **Описание Интернет-ресурса:**

APA Style (2011). Available at: <http://www.apastyle.org/apa-style-help.aspx> (accessed 5 February 2011).

Pravila Tsitirovaniya Istochnikov (*Rules for the Citing of Sources*). Available at: <http://www.scribd.com/doc/1034528/> (accessed 7 February 2011).

• **Описание диссертации или автореферата диссертации:**

Semenov V. I. Matematicheskoe modelirovanie plazmy v sisteme kompaktnyi tor. Diss. dokt. fiz.-mat. nauk [*Mathematical modeling of the plasma in the compact torus. Dr. phys. and math. sci. diss.*]. Moscow, 2003. 272 p.

• **Описание ГОСТа:**

GOST 8.586.5–2005. Metodika vypolneniia izmerenii. Izmerenie raskhoda i kolichestva zhidkosti i gazov s pomoshch'iu standartnykh suzhaiushchikh ustroystv [*State Standard 8.586.5–2005. Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices*]. Moscow, Standartinform Publ., 2007. 10 p.

• **Описание патента:**

Palkin M. V., e.a. Sposob orientirovaniia po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoi golovkoi samonavedeniia [*The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head*]. Patent RF, no. 2280590, 2006.

8. Если присутствует информация о финансировании (поддержке грантами проектов и т. п.), ее следует давать *на русском (белорусском) и английском языках* под заголовками «Благодарности» («Падзяка») и «Acknowledgements».

V. Для подготовки метаданных (так называемый информационный лист) на отдельной странице следует указать *на русском и английском языках* для каждого автора: фамилию, имя и отчество (полностью), звание, ученую степень, должность, место работы с указанием адреса, контактную информацию (e-mail, телефоны).

VI. Электронный вариант сообщения представляется на диске, флешке или присылается по электронной почте в редакцию журнала – doklady\_nanb@mail.ru. Текст должен быть набран в Word под Windows, формулы должны быть набраны в редакторе MathType. Собственным редактором формул версий Microsoft Office 2007 и выше пользоваться нельзя, так как в редакционно-издательском процессе он не поддерживается. Формульным редактором MathType в Word пользоваться только для набора сложных формул (например,  $C_2^4$ ). Вставку символов выполнять через меню «Вставка\Символ». Выключку вверх и вниз ( $C^2$ ,  $C_4$ ) выполнять через меню «Формат\Шрифт\Верхний индекс», «Формат\Шрифт\Нижний индекс». Греческие буквы необходимо набирать прямо, латинские – курсивом. Для набора греческих символов пользоваться гарнитурой Symbol. Обозначения математических функций (lim, sup, ln, sin, Re, Im и т. п.), символы химических элементов (N, Cl) также набираются прямым шрифтом.

Рисунки даются в виде отдельных файлов в формате tif (600 точек на дюйм для штриховых, 300 – для тоновых). Желательно также предоставлять рисунки в формате оригинала (Corel, диаграммы в Excel, Origin Pro и т. д.), т. е. в той программе, в которой они сделаны. Текст на рисунках набирается основной гарнитурой, причем начертание символов (греческое, латинское) должно соответствовать их начертанию в тексте. Размер кегля соизмерим с размером рисунка (желательно 8). Площадь рисунка должна быть в диапазоне 100–150 см<sup>2</sup>. На обороте рисунков (если они представляются отдельно) указываются фамилии авторов, название статьи. Фотографии представляются в виде файлов (tif, jpg, png, eps) и в распечатанном виде (размер фотографии должен быть 50 × 70 мм).

VII. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что сообщение принято к печати. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

VIII. Публикация сообщения в «Докладах» не препятствует напечатанию расширенного ее варианта в другом периодическом издании.

**Материалы для публикации следует направлять по адресу:** ул. Академическая, 1, к. 119, Минск, 220072, e-mail: doklady\_nanb@mail.ru.

редакция журнала «Доклады Национальной академии наук Беларуси».

Тел. для справок: +375-17-284-19-19 (понедельник, среда).