

# ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

Выходит шесть номеров в год

Журнал основан в июле 1957 года

---

МИНСК, БЕЛОРУССКАЯ НАУКА, 2016, ТОМ 60, № 5

---

Учредитель – Национальная академия наук Беларуси

Редакционная коллегия:

**В. Г. Гусаков** (главный редактор),  
**С. Я. Килин** (заместитель главного редактора),  
**С. А. Чижик** (заместитель главного редактора),  
**А. В. Кильчевский** (заместитель главного редактора),  
**И. М. Богдевич, П. А. Витязь, И. Д. Вологовский, И. В. Гайшун, С. В. Гапоненко,**  
**А. Е. Дайнеко, И. В. Залуцкий, О. А. Ивашкевич, Н. А. Изобов, Н. С. Казак,**  
**А. А. Коваленя, Ф. Ф. Комаров, И. В. Котляров, В. А. Лабунов, А. П. Ласковнев,**  
**О. Н. Левко, А. И. Лесникович, В. Ф. Логинов, А. А. Махнач, А. А. Михалевич,**  
**М. Е. Никифоров, В. А. Орлович, О. Г. Пенязьков, Ю. М. Плескачевский,**  
**Н. С. Сердюченко, А. Ф. Смеянович, Л. М. Томильчик, С. А. Усанов,**  
**Л. В. Хотылева, В. А. Хрипач, И. П. Шейко,**  
ведущий редактор **Т. П. Петрович**

*Адрес редакции:*

220072, Минск, ул. Академическая, 1, к. 119,

тел. 284-19-19

[csl.bas-net.by/Web/Pages/magNAS.asp](http://csl.bas-net.by/Web/Pages/magNAS.asp)

E-mail: [doklady\\_nanb@mail.ru](mailto:doklady_nanb@mail.ru)

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

<b>Платонов А. С., Красовский С. Г.</b> Построение линейных систем Пфаффа с многомерным временем и достаточно произвольными нижним характеристическим и характеристическим множествами . . . . .	5
<b>Белокурский М. С.</b> Периодические отражающие функции линейных дифференциальных систем с не-соизмеримыми периодами однородной и неоднородной частей . . . . .	12
<b>Берник В. И., Бударина Н. В., О’Доннелл Х.</b> Величины дискриминантов целочисленных многочленов в архимедовой и неархимедовой метриках . . . . .	18
<b>Луневич А. В.</b> О количестве точек с алгебраическими координатами внутри полосы малой меры в поле $\mathbb{Q}_p$ . . . . .	24
<b>Гаспар Ф. Ж., Матус П. П., Туен В. Т. К., Хиену Л. М.</b> Монотонные разностные схемы для систем эллиптических и параболических уравнений. . . . .	29
<b>Евхута Н. А., Евхута О. Н., Забрейко П. П.</b> NL-производные и NL-примитивные в дифференциальном и интегральном исчислении . . . . .	34

<b>Антоневич А. Б., Шукур Али А.</b> О росте аналитической функции в круге .....	41
<b>Бенедиктович В. И.</b> Спектральный радиус и гамильтоновость графа .....	46
<i>ИНФОРМАТИКА</i>	
<b>Борискевич А. А.</b> Метод защиты ценных документов от подделок на основе визуальной схемы разделения секрета .....	54
<i>ФИЗИКА</i>	
<b>Толкачев Е. А.</b> Векторная параметризация групп Кэрролла и Галилея: электродинамика Кэрролла с внешними источниками .....	59
<b>Толкачев В. А., Блохин А. П.</b> Необычная флуоресценция цис-азоалканов – результат миграции ( $n, \pi^*$ )-возбуждения .....	66
<b>Комаров Ф. Ф., Камышан А. С., Пилько В. В., Шекунов А. А., Романовская О. Ф., Урьев Г. А.</b> Комплекс для локальной ионной имплантации и элементного микроанализа с выводом ионного пучка в атмосферу .....	71
<b>Павлович В. С.</b> Внутреннее электрическое поле, захватывающие электроны пустоты, мертвые электроны и увеличение эффективности полимерных солнечных элементов при фторировании (на англ. яз.) .....	76
<b>Кисель В. В., Овсюк Е. М., Войнова Я. А., Веко О. В., Редьков В. М.</b> Квантовая механика частицы со спином 1 и аномальным магнитным моментом в магнитном поле .....	83
<i>ХИМИЯ</i>	
<b>Петкевич А. В., Игнатович Ж. В., Королёва Е. В., Еремин А. Н., Агабеков В. Е.</b> Одностадийный метод формирования ассоциатов производных 2-ариламинопиримидина с магнетитом .....	91
<b>Мартиневич Г. Г., Мартиневич И. В., Вчерашняя А. В., Шадыро О. И., Черенкевич С. Н.</b> Дифференциальная регуляция продукции активных форм кислорода и механизмов гибели опухолевых клеток пара-бензохинонами .....	96
<i>БИОЛОГИЯ</i>	
<b>Шаптуренко М. Н., Тарутина Л. А., Мишин Л. А., Кубрак С. В., Кильчевский А. В., Хотылева Л. В.</b> Связь дифференциального ДНК-полиморфизма томата ( <i>Solanum lycopersicum</i> L.) с гетеротическим потенциалом гибридов $F_1$ .....	101
<i>НАУКИ О ЗЕМЛЕ</i>	
<b>Матвеев А. В.</b> Районирование территории Беларуси по степени радоновой опасности грунтов .....	108
<b>Махнач А. А., Кручек С. А., Покровский Б. Г.</b> Гипс в силурийских отложениях Беларуси: изотопный состав серы и происхождение .....	113
<i>СОЦИАЛЬНО-ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ</i>	
<b>Левко О. Н.</b> Кордон – новый памятник археологии эпохи викингов в Восточной Европе .....	120

---

ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ. 2016. Т. 60, № 5

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,  
свидетельство о регистрации № 387 от 18.05.2009.

---

Редактор Т. П. Петрович  
Компьютерная верстка Н. И. Кашуба

Сдано в набор 11.10.2016. Выпуск в свет 28.10.2016. Формат 60×84<sup>1/8</sup>. Бумага офсетная. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 16,4. Тираж 160 экз. Заказ 213.

Цена номера: индивидуальная подписка – 10,28 руб.; ведомственная подписка – 25,21 руб.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/18 от 02.08.2013. ЛП № 02330/455 от 30.12.2013. Ул. Ф. Скорины, 40, 220141, г. Минск.

© «Издательский дом «Беларуская навука».  
Доклады НАН Беларуси, 2016

# DOKLADY OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

Published bimonthly

The journal has been published since July, 1957

---

MINSK, BELORUSSKAYA NAUKA, 2016, Vol. 60, N 5

---

Founder – National Academy of Sciences of Belarus

Editorial Board:

**V. G. Gusakov** (Editor-in-Chief),  
**S. Ya. Kilin** (Associate Editor-in-Chief),  
**S. A. Chizhik** (Associate Editor-in-Chief),  
**A. V. Kilchevsky** (Associate Editor-in-Chief),  
**I. M. Bogdevich, A. Ye. Daineko, I. V. Gaishun, S. V. Gaponenko, O. A. Ivashkevich,**  
**N. A. Izobov, N. S. Kazak, L. V. Khotyleva, V. A. Khripach,**  
**A. A. Kovalenya, F. F. Komarov, I. V. Kotlyarov, V. A. Labunov, A. P. Laskovnev,**  
**O. N. Levko, A. I. Lesnikovich, V. F. Loginov, A. A. Makhnach, A. A. Mikhalevich,**  
**M. Ye. Nikiforov, V. A. Orlovich, O. G. Penyazkov, Yu. M. Pleskachevsky,**  
**N. S. Serduchenko, I. P. Sheiko, A. F. Smeyanovich, L. M. Tomilchik,**  
**S. A. Usanov, P. A. Vitiaz, I. D. Volotovskii, I. V. Zalutsky,**  
lead editor **T. P. Petrovich**

*Address of the Editorial Office:*

220072, Minsk, 1 Akademicheskaya Str., room 119

telephone: 284-19-19

[csl.bas-net.by/Web/Pages/magNAS.asp](http://csl.bas-net.by/Web/Pages/magNAS.asp)

E-mail: [doklady\\_nanb@mail.ru](mailto:doklady_nanb@mail.ru)

## CONTENTS

### MATHEMATICS

<b>Platonov A. S., Krasovskii S. G.</b> Constructing the Pfaffian linear systems with multidimensional time and arbitrary lower characteristic and characteristic sets. . . . .	5
<b>Belokursky M. S.</b> Periodic reflecting functions of linear differential systems with incommensurable periods of homogeneous and nonhomogeneous parts. . . . .	12
<b>Bernik V. I., Budarina N. V., O'Donnell H.</b> Discriminant values of integral polynomials in the Archimedean and non-Archimedean metrics. . . . .	18
<b>Lunevich A. V.</b> About the number of points with the algebraic coordinates in a strip of small measure in the field. . . . .	24
<b>Gaspar F., Matus P., Vo Thi Kim Tuyen, Le Minh Hieu.</b> Monotone difference schemes for systems of elliptic and parabolic equations. . . . .	29
<b>Evkhuta N. A., Evkhuta O. N., Zabreiko P. P.</b> NL-derivatives and NL-primitives in calculus. . . . .	34

<b>Antonevich A. B., Shukur Ali A.</b> Growth of the analytic function on the disc .....	41
<b>Benediktovich V. I.</b> Spectral radius and Hamiltonicity of a graph .....	46
<i>INFORMATICS</i>	
<b>Boriskevich A. A.</b> A protection method of valuable documents against forgery based on the visual secret sharing scheme .....	54
<i>PHYSICS</i>	
<b>Tolkachev E. A.</b> Vector parametrization of the Galileo and Carroll groups: Carroll electrodynamics with external sources. ....	59
<b>Tolkachev V. A., Blokhin A. P.</b> Extraordinary fluorescence of <i>cis</i> -azoalkanes follows from ( $n, \pi^*$ )-excitation ...	66
<b>Komarov F. F., Kamyshan A. S., Pilko V. V., Shekunov A. A., Romanovskaya O. F., Urjev G. A.</b> In-air ion beam extraction set-up for external micro-pixe analysis and local implantation .....	71
<b>Pavlovich V. S.</b> Internal electric field, electron-trapping voids, dead electrons, and the increasing of the efficiency of polymer solar cells with fluorination. ....	76
<b>Kisel V. V., Ovsyuk E. M., Veko O. V., Voynova Y. A., Red'kov V. M.</b> Quantum mechanics of a spin 1 particle with the anomalous magnetic moment in the magnetic field .....	83
<i>CHEMISTRY</i>	
<b>Pietkievich A. V., Ignatovich Zh. V., Koroleva E. V., Eryomin A. N., Agabekov V. E.</b> One-step method for obtaining the derivatives of 2-arylamino-pyrimidine associates with magnetite .....	91
<b>Martinovich G. G., Martinovich I. V., Vcherashniaya A. V., Shadyro O. I., Cherenkevich S. N.</b> Differential regulation of the reactive oxygen species production and the mechanisms of tumor cell death by <i>para</i> -benzoquinones. ....	96
<i>BIOLOGY</i>	
<b>Shapturenko M. N., Tarutina L. A., Mishin L. A., Kubrak S. V., Kilchevsky A. V., Khotyleva L. V.</b> Impact of differential DNA polymorphism of tomato ( <i>Solanum lycopersicum</i> L.) on the formation of the superior F <sub>1</sub> hybrid performance. ....	101
<i>EARTH SCIENCES</i>	
<b>Matveyev A. V.</b> Division of the territory of Belarus into the regions with different radon contamination hazard levels of soils .....	108
<b>Makhnach A. A., Kruchek S. A., Pokrovsky B. G.</b> Gypsum in the Silurian deposits of Belarus: sulphur isotopic composition and origin .....	113
<i>SOCIAL AND HUMAN SCIENCES</i>	
<b>Levko O. N.</b> Cordon is a new archeological site of the Viking Age in the territory of Eastern Europe .....	120

## МАТЕМАТИКА

УДК 517.936

А. С. ПЛАТОНОВ<sup>1</sup>, С. Г. КРАСОВСКИЙ<sup>2</sup>ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПФАФФА С МНОГОМЕРНЫМ ВРЕМЕНЕМ  
И ДОСТАТОЧНО ПРОИЗВОЛЬНЫМИ НИЖНИМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ  
И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ МНОЖЕСТВАМИ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

<sup>1</sup>Университет гражданской защиты МЧС Беларуси, Минск, Беларусь  
alexpltn@mail.ru<sup>2</sup>Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
kras@im.bas-net.by

Получены конструктивные доказательства существования вполне интегрируемых систем Пфаффа  $\partial x / \partial t_i = A_i(t)x$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}_+^m$ ,  $i = 1, m$ ,  $m \geq 2$ , с бесконечно дифференцируемыми ограниченными матрицами коэффициентов, имеющих произвольное несвязное нижнее характеристическое множество положительной  $m$ -меры Лебега и произвольно заданные характеристическое и нижнее характеристическое множества.

*Ключевые слова:* вполне интегрируемые линейные системы Пфаффа, характеристическое множество, нижнее характеристическое множество, построение системы Пфаффа по заданному нижнему характеристическому множеству, совместная реализуемость характеристического и нижнего характеристического множеств линейной системы Пфаффа, ограниченное сверху (снизу)  $m$ -мерное множество, точная верхняя (нижняя) граница многомерного множества, замкнутое сверху (снизу) многомерное множество.

A. S. PLATONOV<sup>1</sup>, S. G. KRASOVSKIY<sup>2</sup>CONSTRUCTING THE PFAFFIAN LINEAR SYSTEMS WITH MULTIDIMENSIONAL TIME  
AND ARBITRARY LOWER CHARACTERISTIC AND CHARACTERISTIC SETS<sup>1</sup>University of Civil Protection, Minsk, Belarus  
alexpltn@mail.ru<sup>2</sup>Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
kras@im.bas-net.by

It is proved that there exist the completely integrable Pfaffian systems  $\partial x / \partial t_i = A_i(t)x$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}_+^m$ ,  $i = 1, m$ ,  $m \geq 2$ , with infinitely differentiable bounded coefficients such that the lower characteristic set of these systems is an arbitrary pre-assigned disconnected set and has a positive Lebesgue  $m$ -measure. Also, both characteristic and lower characteristic sets for these systems can be arbitrarily pre-assigned. The proofs are constructive.

*Keywords:* completely integrable linear Pfaffian systems, a characteristic set, the lower characteristic set, constructing or the linear Pfaffian system with arbitrary preassigned bounded disconnected lower characteristic set with positive Lebesgue  $m$ -measure, the joint realizability of the characteristic set and the lower characteristic set for the linear Pfaffian system, bounded from above (from below)  $m$ -dimensional set, supremum (infimum) of multidimensional set; closed from above (from below) multidimensional set.

Рассматриваем линейную систему Пфаффа

$$\partial x / \partial t_i = A_i(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t = (t_1, t_2, \dots, t_m) \in \mathbb{R}_+^m, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1)$$

с ограниченными непрерывно дифференцируемыми в  $\mathbb{R}_+^m = \{t \in \mathbb{R}^m \mid t \geq 0\}$  матрицами коэффициентов  $A_i(t)$ , удовлетворяющими в ней условию полной интегрируемости [1, с. 14–24; 2, с. 16–26]. Характеристический [1, с. 83; 3]  $\lambda[x] = \lambda$  и нижний характеристический [4]  $p[x] = p$  векторы не тривиального решения  $x: \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  системы (1) будем определять условиями

$$L_x(\lambda) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} [\ln \|x(t)\| - (\lambda, t)] / \|t\| = 0, \quad L_x(\lambda - \varepsilon e_i) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$l_x(p) \equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} [\ln \|x(t)\| - (p, t)] / \|t\| = 0, \quad l_x(p + \varepsilon e_i) < 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

где  $e_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_i, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}_+^m$  – орт. Под характеристическим  $\Lambda_x$  [1] и нижним характеристическим  $P_x$  [4] множествами нетривиального решения  $x: \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  системы (1) понимают объединения всех характеристических векторов  $\Lambda_x = \bigcup \lambda[x]$  и нижних характеристических векторов  $P_x = \bigcup p[x]$  этого решения. Множества [3; 4]  $\Lambda(A) = \bigcup_{x \neq 0} \Lambda_x$  и  $P(A) = \bigcup_{x \neq 0} P_x$  называют соответственно характеристическим и нижним характеристическим множествами системы (1).

Основополагающие результаты теории характеристических векторов и функционалов изложены в монографиях И. В. Гайшуна [1; 2], где дано систематическое изложение теории вполне разрешимых многомерных дифференциальных уравнений. В частности, получено описание свойств характеристических функционалов решений указанных уравнений.

**О п р е д е л е н и е 1.** Множество  $D \subset \mathbb{R}^m$  будем называть *ограниченным сверху (снизу)*, если существует такое  $r \in \mathbb{R}^m$ , что  $d \leq r$  ( $d \geq r$ ) для всех  $d \in D$  ( $d \leq r \Leftrightarrow d_i \leq r_i, i = \overline{1, m}$ ).

Введем аналог [5, с. 11; 6, с. 32] понятий *точной верхней и точной нижней границ одномерного множества* для ограниченного сверху множества  $D \subset \mathbb{R}^m$ , не рассматривая при этом указанные границы как элементы упорядоченного множества подмножеств пространства  $\mathbb{R}^m$ . Для этого всякой точке  $r \in \mathbb{R}^m$  поставим в соответствие множества

$$\overline{K}(r) = \{p \in \mathbb{R}^m : p \geq r\} \text{ и } \underline{K}(r) = \{p \in \mathbb{R}^m : p \leq r\},$$

которые назовем соответственно *верхним и нижним прямыми  $m$ -мерными углами с вершиной в точке  $r$* .

**О п р е д е л е н и е 2.** Точной верхней (точной нижней) границей ограниченного сверху (снизу) множества  $D \subset \mathbb{R}^m$  будем называть множество  $\sup D \subset \mathbb{R}^m$  ( $\inf D \subset \mathbb{R}^m$ ) вершин всех тех верхних (нижних) прямых  $m$ -мерных углов  $\overline{K}(r)$  (нижних прямых  $m$ -мерных углов  $\underline{K}(r)$ ), каждый из которых имеет с множеством  $D$  единственную общую точку – вершину этого угла:

$$\sup D \equiv \{r \in \mathbb{R}^m : \overline{D} \cap \overline{K}(r) = \{r\}\} \quad (\inf D \equiv \{r \in \mathbb{R}^m : \underline{D} \cap \underline{K}(r) = \{r\}\}).$$

**О п р е д е л е н и е 3.** Множество  $D \subset \mathbb{R}^m$  назовем *замкнутым сверху (снизу)*, если оно содержит свою точную верхнюю (нижнюю) границу.

Пусть  $D \subset \mathbb{R}^m$  – односвязное замкнутое сверху и снизу выпуклое множество. Отметим, что множества, являющиеся его точной верхней границей  $\sup D$  и точной нижней границей  $\inf D$ , обладают соответственно свойствами характеристического и нижнего характеристического множеств.

В работе [4] установлено существование линейной системы Пфаффа (1) с двумерным временем ( $m = 2$ ) и нижним характеристическим множеством положительной меры Лебега. Далее в [7] было доказано существование линейной системы Пфаффа (1) с двумерным временем ( $m = 2$ ), имеющей своим нижним характеристическим множеством произвольное несвязное множество положительной плоской меры Лебега. В работах [8; 9] установлено существование линейных систем Пфаффа с  $m$ -мерным временем ( $m \geq 3$ ) и нижним характеристическим множеством положительной  $m$ -меры Лебега.

В работе [10] доказано существование линейной системы Пфаффа (1) с двумерным временем ( $m = 2$ ) и бесконечно дифференцируемыми ограниченными коэффициентами, имеющей в качестве характеристического  $\Lambda(A)$  и нижнего характеристического  $P(A)$  множеств произвольно заданные ограниченные замкнутые множества  $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$  и  $P \subset \mathbb{R}^2$ , удовлетворяющие условию  $\sup\{p_i : (p_1, p_2) \in P\} \leq \inf\{\lambda_i : (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda\}, i = 1, 2$ , и представимые монотонно убывающими выпуклыми соответственно вниз и вверх кривыми.

Обобщим указанные утверждения о существовании несвязного нижнего характеристического множества и о совместной реализации характеристического и нижнего характеристического множеств на систему (1) с  $m$ -мерным временем  $t$ .

В [9] доказана следующая

Л е м м а 1. Нижнее характеристическое множество функции  $U(t) = \sum_{i=1}^m e^{-a_i t}$ ,  $a_i > 0$ ,  $t_i \geq 0$ ,  $m \geq 2$ , совпадает с множеством

$$\Pi_a = \left\{ p \in \mathbb{R}_-^m \mid \sum_{i=1}^m \frac{p_i}{a_i} = -1, a_i > 0 \right\}.$$

Легко обобщить на  $m$ -мерное пространство доказанную в [11] лемму.

Л е м м а 2. Для любых точек  $q$  и  $r \in \Pi_a \subset \mathbb{R}_-^m$  нижнее характеристическое множество функции  $u(t) = e^{(q,t)} + e^{(r,t)}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+^m$ , есть отрезок  $S_{qr}$ , соединяющий точки  $q$  и  $r$ .

Введем в рассмотрение ограниченную односвязную замкнутую область  $D \subset \mathbb{R}^m$ , обладающую следующим свойством: существует вектор  $V = (v_1, v_2, \dots, v_m) > 0$  такой, что всякое непустое пересечение  $P(D, \gamma)$  области  $D$  и гиперплоскости  $\gamma$ , нормальной вектору  $V$ , имеет некоторую внутреннюю точку  $O_\gamma$ , такую, что отрезок гиперплоскости  $\gamma$ , соединяющий эту точку с любой точкой границы  $\partial P(D, \gamma)$ , целиком лежит во множестве  $P(D, \gamma)$ . Множество всех областей, обладающих указанным свойством будем далее обозначать  $\mathcal{G}(V)$ . Множество, составленное из точек  $O_\gamma$  области  $D$  так, что из каждого пересечения  $P(D, \gamma)$  берется единственная такая точка, обозначим  $O_V(D)$ .

Т е о р е м а 1. Пусть ограниченная замкнутая область  $D \subset \mathbb{R}^m$  состоит из конечного числа  $s$  непересекающихся областей  $D_j \subset \mathcal{G}(V^{(j)})$ ,  $0 < V^{(j)} \in \mathbb{R}^m$ ,  $j = 1, s$ , а ее точная верхняя граница  $\sup D$  есть односвязное выпуклое вверх множество. Тогда для любых натуральных  $n \geq m \geq 2$  существует вполне интегрируемая линейная система Пфаффа (1) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми матрицами коэффициентов  $A_i(t)$ , нижнее характеристическое множество  $P(A)$  которой совпадает с  $D$ .

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. Без ограничения общности, можно считать (с точностью до сдвига), что область  $D$  принадлежит  $m$ -мерному кубу  $[d_1, d_2] \times \dots \times [d_1, d_2] \subset \mathbb{R}_-^m$ , где

$$d_1 = \min_{i=1, m} \{p_i : p = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in D\}, \quad d_2 = \max_{i=1, m} \{p_i : p = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in D\}, \quad d_1 < d_2 < 0.$$

**Предварительные построения.** Выберем для дальнейшего рассмотрения область  $D_j \subset \mathcal{G}(V^{(j)}) \subset \mathbb{R}_-^m$ ,  $j \in \{1, \dots, s\}$ . Пусть соответствующее ей множество  $O_{V^{(j)}}(D_j)$  имеет параметрическое представление

$$p = o^{(j)}(\beta_1), \quad \beta_1 \in [2(j-1)(m-1)+1; 2(j-1)(m-1)+2] \subset \mathbb{R},$$

а пересечение границы области  $D_j$  с гиперплоскостью, проходящей через точку  $o^{(j)}(\beta_1)$  и ортогональной вектору  $V^{(j)}$ , задано параметрически  $p = r^{(j)}(\beta)$ ,  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{m-1})$ , где

$$\beta_i \in [2(j-1)(m-1)+2i-1; 2(j-1)(m-1)+2i] \equiv \Delta_0^{(1)}(i, j), \quad i = \overline{1, m-1}.$$

Пусть для определенности, множество  $\sup D \subseteq D_1$ , а часть множества  $O_{V^{(1)}}(D_1)$ , соответствующего множеству  $\sup D$ , имеет параметрическое представление  $p = \bar{o}(\alpha_1)$ , где  $\alpha_1 \in [0; 1]$ . Тогда как и выше пересечение множества  $\sup D$  с ортогональной вектору  $V^{(1)}$  гиперплоскостью, проходящей через точку  $\bar{o}(\alpha_1)$ , будем считать заданной параметрически  $p = H(\alpha)$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1})$ ,  $\alpha_i \in [0; 1]$ .

Зафиксируем точку  $M_{\bar{\alpha}} = H(\bar{\alpha})$  из указанного выше пересечения. В силу условий теоремы для каждой точки множества  $\sup D \subset \mathbb{R}^m$  найдется касательная гиперплоскость, а если в какой-либо точке этого множества существует несколько касательных плоскостей, то будем выбирать ту из них, нормаль к которой имеет все координаты одного знака. При этом любая из указанных касательных гиперплоскостей  $\mu$  находится «не ниже» этого множества, т. е. для каждого  $s \in \sup D$  найдется такое  $M_s \in \mu$ , что  $s \leq M_s$ . Пусть далее  $\mu$  — одна из возможных касательных к множеству  $\sup D$  в точке  $M_{\bar{\alpha}}$  — определена точками  $q^{(i)}(\alpha)$ ,  $i = 1, m$ :

$$\begin{aligned} \mu(\alpha, \zeta) = & q^{(1)}(\alpha)(1-\zeta_{m-1}) \cdots (1-\zeta_2)(1-\zeta_1) + q^{(2)}(\alpha)(1-\zeta_{m-1}) \cdots (1-\zeta_2)\zeta_1 + \dots \\ & \dots + q^{(m-1)}(\alpha)(1-\zeta_{m-1})\zeta_{m-2} + q^{(m)}(\alpha)\zeta_{m-1}, \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{m-1}), \quad \zeta_i \in [0; 1]. \end{aligned} \quad (2)$$

При этом положим  $q^{(1)}(\alpha) = M_{\bar{\alpha}}$  и потребуем, чтобы проекции этих касательных на координатные оси лежали в границах соответствующих проекций множества  $\sup D$ .

Построим последовательность  $\{\tau_n^{(j)}(h)\}$ ,  $h = (h_1, h_2, \dots, h_{m-1})$ , где  $j$  для любого фиксированного  $n \in \mathbb{N}$  пробегает значения  $1, \dots, s$ , а  $h_i$  для фиксированных  $n, j, h_1, \dots, h_{i-1}$  – значения  $1, \dots, 2^n$ , по следующему правилу. Первый элемент  $\tau_1^{(1)}(1, \dots, 1)$  этой последовательности положим равным 1, далее  $\tau_n^{(j)}(h_1, \dots, h_{m-2}, h_{m-1}) = 2\tau_n^{(j)}(h_1, \dots, h_{m-2}, h_{m-1} - 1)$  и т. д. В итоге получим

$$\tau_n^{(j)}(h) = 2^{\sum_{l=1}^n (2^{l-1})^{m-1} + (j-1)(2^n)^{m-1} + (h_1-1)(2^n)^{m-2} + \dots + (h_{m-3}-1)(2^n)^2 + (h_{m-2}-1)2^n + h_{m-1}-1} \leq$$

$$\tau_n^{(j+1)}(1, \dots, 1) = 2^{j(2^n)^{m-1} + s \sum_{l=1}^n (2^{l-1})^{m-1}} \equiv 2^{\sigma_{sm}(j, n)}.$$

Обозначим  $\tau_t = t_1 + t_2 + \dots + t_m$ . Множество  $\mathbb{R}_+^m = \{t = (t_1, t_2, \dots, t_m) : t_i \geq 0\}$  временного пространства  $\mathbb{R}^m$  плоскостями  $\tau_t = 2^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , разобьем на слои  $\{t \in \mathbb{R}_+^m : 2^k \leq \tau_t < 2^{k+1}\}$ , с замкнутой «нижней» и открытой «верхней» гранями. Символом  $\Pi_0^{(1)}(1, \dots, 1)$  обозначим начальный слой  $\{t \in \mathbb{R}_+^m : 0 \leq \tau_t < \tau_1^{(1)}(1, \dots, 1)\}$ . Далее слои последовательно обозначим через  $\Pi_n^{(j)}(h)$ , где  $j$  для любого фиксированного  $n \in \mathbb{N}$  пробегает значения  $1, \dots, s$ , а  $h_i$  для фиксированных  $n, j, h_1, \dots, h_{i-1}$  – значения  $1, \dots, 2^n$ . Нижней частью слоя  $\Pi_n^{(j)}(h)$  будем считать слой  $\Pi_n^{(j)}(h) = \{t \in \Pi_n^{(j)}(h) : \tau_n^{(j)}(h) \leq \tau_t < \bar{\tau}_n^{(j)}(h)\}$ , где  $\bar{\tau}_n^{(j)}(h) \equiv \tau_n^{(j)}(h)\sqrt{2}$ , а верхней частью – слой  $\tilde{\Pi}_n^{(j)}(h) = \{t \in \Pi_n^{(j)}(h) : \tau_n^{(j)}(h) \leq \tau_t < \bar{\tau}_n^{(j)}(h)\sqrt{2}\}$ .

На отрезках  $\Delta_0^{(1)}(i, j)$ ,  $i = \overline{1, m-1}$ ,  $j = \overline{1, s}$ , как в работах [7] и [9], используя величину  $\varepsilon_n(i, j) = \exp(d_1 2^{\sigma_{sm}(j, n)})$ , построим совершенные множества  $P_0(i, j)$ , аналогичные канторову совершенному множеству [12, с. 50], и модифицированные ступенчатые функции [12, с. 200]

$$\Theta_i^{(j)}(\alpha) : \Delta_0^{(1)}(i, j) \rightarrow [0; 1] = \{\Theta_i^{(j)}(\alpha) : \alpha \in P_0(i, j)\}.$$

Далее определим функции  $\theta_i^{(j)}(\alpha) = 2(j-1)(m-1) + 2i - 1 + \Theta_i^{(j)}(\alpha)$ , отображающие совершенные множества  $P_0(i, j)$  отрезков  $\Delta_0^{(1)}(i, j)$  на сами эти отрезки. Введем обозначение

$$\theta^{(j)}(\alpha, h) \equiv (\theta_1^{(j)}(\alpha_n^{(h_1)}(1, j)), \dots, \theta_{m-1}^{(j)}(\alpha_n^{(h_{m-1})}(m-1, j))), \quad j = \overline{1, s}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Аналогичным образом, используя величину  $\varepsilon_n = \exp(d_1 2^{\sigma_{sm}(s, n)})$ , построим совершенное множество  $\bar{P}_0$  на отрезке  $\Delta_0^{(1)} = [0; 1]$  и модифицированную канторову ступенчатую функцию  $\Theta_0(\alpha) : \Delta_0^{(1)} \rightarrow [0; 1] = \{\Theta_0(\alpha) : \alpha \in \bar{P}_0\}$ . Середины сегментов  $\Delta_n^{(k)}$  будем обозначать  $\bar{\alpha}_n^{(k)}$ . Введем обозначение  $\Theta(\bar{\alpha}, h) \equiv (\Theta_0(\bar{\alpha}_n^{(h_1)}), \dots, \Theta_0(\bar{\alpha}_n^{(h_{m-1})})), n \in \mathbb{N}$ .

**Построение системы.** Для дальнейших построений воспользуемся бесконечно дифференцируемыми на отрезке  $[\tau_1, \tau_2]$  функциями

$$e_{01}(\tau, \tau_1, \tau_2) = \begin{cases} \exp\{-[\tau - \tau_1]^{-2} \exp(-[\tau - \tau_2]^{-2})\}, & \tau_1 < \tau < \tau_2, \\ i-1, & \tau = \tau_i, i = 1, 2, \end{cases}$$

$$e_{00}(\tau, \tau_1, \tau_2) = \begin{cases} \exp(2^4(\tau_2 - \tau_1)^{-4} - (\tau - \tau_1)^{-2}(\tau - \tau_2)^{-2}), & \tau_1 < \tau < \tau_2, \\ 0, & \tau = \tau_i, i = 1, 2, \end{cases}$$

являющимися аналогами стандартных бесконечно дифференцируемых на  $[0, 1]$  функций. Отметим, что функция  $e_{00}(\tau, \tau_1, \tau_2)$  достигает своего максимального значения 1 на середине отрезка  $[\tau_1, \tau_2]$ . В [6] приведены оценки производных этих функций, определенных на отрезке  $\tau \in (\tau_1, \tau_2) : e_{01}(\tau, \tau_1, \tau_2)$  и  $e_{00}(\tau, \tau_1, \tau_2)$  на всяком отрезке  $[\tau_1, \tau_2]$  длины  $\tau_2 - \tau_1 \leq 1/2$  удовлетворяют неравенствам

$$|de_{01}(\tau, \tau_1, \tau_2) / d\tau| \leq 2(\tau_2 - \tau_1)[3 / (2e) \exp(\tau_2 - \tau_1)^{-2}]^3 \equiv d_{01}, \quad \tau \in (\tau_1, \tau_2);$$

$$|de_{00}(\tau, \tau_1, \tau_2) / d\tau| \leq 2(\tau_2 - \tau_1)(\sqrt{3/(2e)})^3 \exp[2^4(\tau_2 - \tau_1)^{-4}] \equiv d_{00}, \quad \tau \in (\tau_1, \tau_2).$$

Построим следующие вектор-функции:

$$\omega(\tau_t) = \begin{cases} 0, & t \in \tilde{\Pi}_n^{(j)}(h), \\ \theta^{(j)}(\theta_1^{(j)}(\alpha_n^{(h_1)}(1, j)))e_{00}(\tau_t / \bar{\tau}_n^{(j)}(h), 1, \sqrt{2}), & t \in \tilde{\Pi}_n^{(j)}(h), \end{cases}$$

$$\rho(\tau_t) = \begin{cases} 0, & t \in \tilde{\Pi}_n^{(j)}(h), \quad j = \overline{1, s}; \\ r^{(j)}(\theta^{(j)}(\alpha, h))e_{00}(\tau_t / \bar{\tau}_n^{(j)}(h), 1, \sqrt{2}), & t \in \tilde{\tilde{\Pi}}_n^{(j)}(h), \end{cases}$$

$$Q^{(i)}(\tau_t) = \begin{cases} 0, & t \in \tilde{\Pi}_n^{(j)}(h), \quad i = \overline{1, m}; \\ q^{(i)}(\Theta(\bar{\alpha}, h))e_{00}(\tau_t / \bar{\tau}_n^{(j)}(h), 1, \sqrt{2}), & t \in \tilde{\tilde{\Pi}}_n^{(j)}(h), \end{cases}$$

Функции  $F^{(i)}(\tau_t)$  на замыкании слоя  $\tilde{\tilde{\Pi}}_n^{(j)}(h)$  положим равными  $F^{(i)}(\tau_t) = \alpha_n^{(hi)}(i, j) \in P_0(i, j)$ ,  $h_i \in \{1, \dots, 2^n\}$ , а на слое  $\tilde{\Pi}_n^{(j)}(h)$  без ее нижней грани будем определять по формуле

$$F^{(i)}(\tau_t) = F^{(i)}(\tau_n^{(j)}(h)) + [F^{(i)}(\bar{\tau}_n^{(j)}(h)) - F^{(i)}(\tau_n^{(j)}(h))]e_{01}(\tau_t / \tau_n^{(j)}(h), 1, \sqrt{2}),$$

где  $\tau_t \in (\tau_n^{(j)}(h), \bar{\tau}_n^{(j)}(h))$ ,  $i = \overline{1, m-1}$ .

Также введем в рассмотрение функции

$$E(t) = e^{(\omega(\tau_t), t)} + e^{(\rho(\tau_t), t)}, \quad \mathcal{E}(t) = e^{(Q^{(1)}(\tau_t), t)} + e^{(Q^{(2)}(\tau_t), t)} + \dots + e^{(Q^{(m)}(\tau_t), t)}.$$

Определим  $m$ -мерную бесконечно дифференцируемую функцию

$$x(t, c) = (c_1 E(t), [c_1 F^{(1)}(\tau_t) + c_2] \mathcal{E}(t), \dots, [c_1 F^{(m-1)}(\tau_t) + c_m] \mathcal{E}(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+^m, \quad (3)$$

зависящую от произвольного постоянного вектора  $c \in \mathbb{R}^m$  и являющуюся решением линейной системы Пфаффа

$$\partial x / \partial t_i = B_i(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R}_+^m, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1_2)$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми на  $\mathbb{R}_+^m$  матрицами

$$B_i(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial E(t) / \partial t_i}{E(t)} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial F^{(1)}(\tau_t)}{\partial t_i} \frac{\mathcal{E}(t)}{E(t)} & \frac{\partial \mathcal{E}(t) / \partial t_i}{\mathcal{E}(t)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F^{(m-1)}(\tau_t)}{\partial t_i} \frac{\mathcal{E}(t)}{E(t)} & 0 & \dots & \frac{\partial \mathcal{E}(t) / \partial t_i}{\mathcal{E}(t)} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}_+^m, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Бесконечная дифференцируемость этих матриц следует из аналогичного свойства вектор-функций  $\omega(\tau_t)$ ,  $\rho(\tau_t)$ ,  $Q^{(i)}(\tau_t)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , и функций  $F^{(i)}(\tau_t)$ ,  $i = \overline{1, m-1}$ , через которые они определены. Ограниченность матриц (4) следует из оценок

$$\begin{aligned} |E^{-1}(t) \partial E(t) / \partial t_i| &= |d_1| (\sqrt{2m} d_{00} + 1), & |\mathcal{E}^{-1}(t) \partial \mathcal{E}(t) / \partial t_i| &\leq |d_1| (\sqrt{2m} d_{00} + 1), \\ |\partial F(\tau_t) / \partial t_i| &\leq 2s(m-1) d_{01} / \tau_n^{(j)}(h) \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (5)$$

Выполнение условия полной интегрируемости для матриц (4) обеспечивается бесконечной дифференцируемостью вектор-функции (3).

**Вычисление нижнего характеристического множества.** Можно показать, что все решения  $x(t, c)$  с вектором  $c$ , коллинеарным вектору  $(c_1, -\alpha(1, j)c_1, \dots, -\alpha(m-1, j)c_1)$ , где  $\alpha(i, j) \in P_0(i, j)$ ,  $j \in \{1, \dots, s\}$ ,  $i = \overline{1, m-1}$ , имеют в качестве своего нижнего характеристического множества отрезок, соединяющий точки  $o^{(j)}(\alpha)$  и  $r^{(j)}(\alpha)$ , где  $\alpha = (\alpha(1, j), \dots, \alpha(m-1, j))$ , а для всех остальных решений нижним характеристическим множеством является множество  $\sup D$ .

**Т е о р е м а 2.** Пусть множества  $P \subset \mathbb{R}^m$  и  $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$  определены соответственно выпуклой вверх  $p_m = f_P(p_1, \dots, p_{m-1}) : \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$  и выпуклой вниз  $\lambda_m = f_\Lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}) : \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывными монотонно убывающими в своих выпуклых замкнутых ограниченных областях определенных функциями, и удовлетворяют условию

$$\sup\{p_i : (p_1, p_2, \dots, p_m) \in P\} \leq \inf\{\lambda_i : (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \Lambda\}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Тогда существует вполне интегрируемое уравнение Пфаффа

$$\partial x / \partial t_i = A_i(t)x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+^m, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1_3)$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми матрицами коэффициентов  $A_i(t)$  с характеристическим множеством  $\Lambda(A) = \Lambda$  и нижним характеристическим множеством  $P(A) = P$ .

Схема доказательства. Без ограничения общности можно считать, что множество  $P \subset \mathbb{R}^m$  принадлежит  $m$ -мерному кубу  $[d_1, d_2] \times \dots \times [d_1, d_2] \subset \mathbb{R}_-^m$ , а множество  $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$  – кубу  $[|d_2|, |d_1|] \times \dots \times [d_2|, |d_1|] \subset \mathbb{R}_+^m$ , где

$$d_1 = -\max_{i=1, m} \{ |p_i| : p = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in P \cup \Lambda \},$$

$$d_2 = -\min_{i=1, m} \{ |p_i| : p = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in P \cup \Lambda \}, \quad d_1 < d_2 \leq 0.$$

**Предварительные построения.** Положим, что множества  $P$  и  $\Lambda$ , определяемые функциями  $f_P$  и  $f_\Lambda$ , допускают следующие параметрические представления

$$P : p = H(\alpha) \quad \text{и} \quad \Lambda : p = G(\alpha), \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}), \quad \alpha_i \in [0; 1].$$

В силу условий теоремы для каждой точки множеств  $P$  и  $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$  найдется касательная гиперплоскость, а если в какой-либо точке этих множеств существует несколько касательных плоскостей, то будем выбирать ту из них, нормаль к которой имеет все координаты одного знака. При этом любая из указанных касательных гиперплоскостей  $\mu$  к множеству  $P \subset \mathbb{R}^m$  находится «не ниже» этого множества, а любая из касательных гиперплоскостей  $\nu$  к множеству  $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$  находится «не выше» множества  $\Lambda$ . Это означает, что для каждого  $s \in P$  найдется такое  $M_s \in \mu$ , что  $s \leq M_s$ , а для каждого  $s \in \Lambda$  найдется такое  $M_s \in \nu$ , что  $s \geq M_s$ .

Пусть касательная гиперплоскость  $\mu(\alpha, \zeta)$  к множеству  $P$  в точке  $H(\alpha)$  и касательная гиперплоскость  $\nu(\alpha, \zeta)$  к множеству  $\Lambda$  в точке  $G(\alpha)$  определены соответственно  $m$ -ками точек  $q^{(i)}(\alpha) \in \mathbb{R}^m$  и  $r^{(i)}(\alpha) \in \mathbb{R}^m$ ,  $i = \overline{1, m}$ , по формулам вида (2). При этом положим  $q^{(1)}(\alpha) = H(\alpha)$ ,  $r^{(1)}(\alpha) = G(\alpha)$  и потребуем, чтобы проекции этих касательных на координатные оси лежали в границах соответствующих проекций поверхностей  $P$  и  $\Lambda$ .

Как и выше построим последовательность  $\{\tau_n^{(j)}(h)\}$ ,  $h = (h_1, h_2, \dots, h_{m-1})$ , где  $j$  для любого фиксированного  $n \in \mathbb{N}$  пробегает значения 1, 2, а  $h_i$  для фиксированных  $n, j, h_1, \dots, h_{i-1}$  – значения  $1, \dots, 2^n$ . Будем иметь

$$\tau_n^{(j)}(h) = 2^{\sum_{l=1}^n (2^{l-1})^{m-1} + (j-1)(2^n)^{m-1} + (h_1-1)(2^n)^{m-2} + \dots + (h_{m-3}-1)(2^n)^2 + (h_{m-2}-1)2^n + h_{m-1}-1} \leq$$

$$\tau_n^{(j+1)}(1, \dots, 1) = 2^{\sum_{l=1}^{n+1} (2^{l-1})^{m-1}} \equiv 2^{\sigma_m(n)}.$$

Множество  $\mathbb{R}_+^m = \{t = (t_1, t_2, \dots, t_m) : t_i \geq 0\}$  временного пространства  $\mathbb{R}^m$  плоскостями  $\tau_t = t_1 + t_2 + \dots + t_m = 2^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , снова разобьем на слои  $\Pi_n^{(j)}(h) = \{t \in \mathbb{R}_+^m : 2^k \leq \tau_t < 2^{k+1}\}$ .

На отрезке  $\Delta_0^{(1)} = [0; 1]$ , используя величину  $\varepsilon_n = \exp(d_1 2^{\sigma_m(n)})$ , построим совершенное множество  $P_0$ , аналогичное канторову совершенному множеству, и модифицированную ступенчатую функцию  $\Theta(\alpha) : \Delta_0^{(1)} \rightarrow [0; 1] = \{\Theta(\alpha) : \alpha \in P_0\}$ . Введем обозначение  $\Theta(\alpha, h) \equiv (\Theta(\alpha_n^{(h_1)}), \dots, \Theta(\alpha_n^{(h_{m-1})}))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Построение системы.** На множествах

$$\Pi^{(1)} \equiv \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{h_1=1}^{2^n} \dots \bigcup_{h_{m-1}=1}^{2^n} \Pi_n^{(1)}(h) \quad \text{и} \quad \Pi^{(2)} \equiv \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{h_1=1}^{2^n} \dots \bigcup_{h_{m-1}=1}^{2^n} \Pi_n^{(2)}(h)$$

определим вектор-функции

$$\mathcal{Q}^{(i)}(\tau_t) = \begin{cases} 0, & t \in \tilde{\Pi}_n^{(j)}(h), \quad i = \overline{1, m}, \\ q^{(i)}(\Theta(\alpha, h)) e_{00}(\tau_t / \tau_n^{(j)}(h), 1, \sqrt{2}), & t \in \tilde{\Pi}_n^{(j)}(h), \end{cases}$$

$$\mathcal{R}^{(i)}(\tau_t) = \begin{cases} 0, & t \in \tilde{\Pi}_n^{(j)}(h), \\ r^{(i)}(\Theta(\alpha, h))e_{00}(\tau_t / \tau_n^{(j)}(h), 1, \sqrt{2}), & t \in \tilde{\Pi}_n^{(j)}(h), \end{cases} \quad i = \overline{1, m}.$$

Также введем в рассмотрение функции

$$\mathcal{E}(t) = e^{(\mathcal{Q}^{(1)}(\tau_t), t)} + e^{(\mathcal{Q}^{(2)}(\tau_t), t)} + \dots + e^{(\mathcal{Q}^{(m)}(\tau_t), t)} \text{ на } t \in \Pi^{(1)},$$

$$E(t) = \left[ e^{-(\mathcal{R}^{(1)}(\tau_t), t)} + e^{-(\mathcal{R}^{(2)}(\tau_t), t)} + \dots + e^{-(\mathcal{R}^{(m)}(\tau_t), t)} \right]^{-1} \text{ на } t \in \Pi^{(2)}.$$

Построим функцию  $x(t)$ ,  $t \in R_+^m$ , по следующему правилу:

$$x(t) = \begin{cases} m^{-1} + [m - m^{-1}]e_{01}(\tau_t / \tau_n^{(j)}(h), 1, \sqrt{2}), & t \in \tilde{\Pi}_n^{(1)}(1, 1, \dots, 1), \\ \mathcal{E}(t), & t \in \Pi^{(1)} \setminus \tilde{\Pi}_n^{(1)}(1, 1, \dots, 1), \\ m + [m^{-1} - m]e_{01}(\tau_t / \tau_n^{(j)}(1, 1, \dots, 1), 1, \sqrt{2}), & t \in \tilde{\Pi}_n^{(2)}(1, 1, \dots, 1), \\ E(t), & t \in \Pi^{(2)} \setminus \tilde{\Pi}_n^{(2)}(1, 1, \dots, 1). \end{cases}$$

Эта функция бесконечно дифференцируема и является решением уравнения Пфаффа (1<sub>3</sub>) с ограниченными, в силу оценок вида (5), бесконечно дифференцируемыми на  $\mathbb{R}_+^m$  коэффициентами  $A_i(t) = x^{-1}(t)\partial x(t) / \partial t_i$ . Бесконечная дифференцируемость  $A_i(t)$  следует из аналогичного свойства функций, через которые они определены.

**Вычисление характеристических множеств.** Можно показать, что нижним характеристическим множеством функции  $x(t)$  является поверхность  $P = P_{\mathcal{E}}$ , а характеристическим множеством – поверхность  $\Lambda = \Lambda_E$ .

Полученные результаты для системы (1<sub>2</sub>) и уравнения (1<sub>3</sub>) легко переносятся на систему вида (1).

Авторы выражают глубокую признательность академику НАН Беларуси Н. А. Изобову за плодотворное обсуждение результатов настоящей работы и члену-корреспонденту НАН Беларуси В. В. Гороховику за полезные консультации по теории множеств.

### Список использованной литературы

1. Гайшун, И. В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения / И. В. Гайшун. – Минск, 1983.
2. Гайшун, И. В. Линейные уравнения в полных дифференциалах / И. В. Гайшун. – Минск, 1989.
3. Грудо, Э. И. Характеристические векторы и множества функций двух переменных и их основные свойства / Э. И. Грудо // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 12. – С. 2115–2128.
4. Изобов, Н. А. О существовании линейных систем Пфаффа с множеством нижних характеристических векторов положительной плоской меры / Н. А. Изобов // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 12. – С. 1623–1630.
5. Шефер, Х. Топологические векторные пространства / Х. Шефер. – М.: Мир, 1971. – 360 с.
6. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 543 с.
7. Изобов, Н. А. О существовании линейной системы Пфаффа с несвязным нижним характеристическим множеством положительной меры / Н. А. Изобов, А. С. Платонов // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 65–71.
8. Изобов, Н. А. Существование линейных систем Пфаффа с нижним характеристическим множеством положительной меры Лебега в пространстве  $\mathbb{R}^3$  / Н. А. Изобов, С. Г. Красовский, А. С. Платонов // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1311–1318.
9. Изобов, Н. А. Линейные системы Пфаффа с нижним характеристическим множеством положительной  $m$ -меры Лебега / Н. А. Изобов, С. Г. Красовский, А. С. Платонов // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 5. – С. 635–646.
10. Изобов, Н. А. Построение линейного уравнения Пфаффа с произвольно заданными характеристическим и нижним характеристическим множествами / Н. А. Изобов, А. С. Платонов // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 12. – С. 1596–1603.
11. Платонов, А. С. Существование линейных систем Пфаффа с произвольным нижним характеристическим множеством, являющимся счетным множеством отрезков пространства  $\mathbb{R}^3$  / А. С. Платонов, А. А. Тимофеева // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 10. С. 1444–1452.
12. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. – М., 1974.

Поступило в редакцию 09.03.2016

УДК 517.925

М. С. БЕЛОКУРСКИЙ

**ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОТРАЖАЮЩИЕ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНЫХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ ПЕРИОДАМИ  
ОДНОРОДНОЙ И НЕОДНОРОДНОЙ ЧАСТЕЙ**

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель, Беларусь  
drakonsm@ya.ru*

Для линейной неоднородной дифференциальной системы получены необходимые и достаточные условия совпадения ее отражающей функции с отражающей функцией соответствующей системы с нулевой матрицей. В качестве следствия дано достаточное условие того, чтобы линейная неоднородная система, однородная и неоднородная части которой периодические с несоизмеримыми периодами, имела периодическую отражающую функцию с периодом, равным периоду неоднородной части. Полученные условия применены для нахождения частично нерегулярных периодических решений квазипериодической системы матричных уравнений.

*Ключевые слова:* периодическая отражающая функция, квазипериодическая линейная дифференциальная система.

M. S. BELOKURSKY

**PERIODIC REFLECTING FUNCTIONS OF LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEMS  
WITH INCOMMESURABLE PERIODS OF HOMOGENEOUS AND NONHOMOGENEOUS PARTS**

*Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus  
drakonsm@ya.ru*

The necessary and sufficient conditions, under which a reflecting function of a linear nonhomogeneous differential system coincides with that of the corresponding system with a zero matrix, were established. The sufficient condition for the linear nonhomogeneous system, the homogeneous and nonhomogeneous parts of which are periodic with incommensurable periods, has a periodic reflecting function with a period coinciding with that of the nonhomogeneous part. Due to the conditions obtained, the irregular periodic solutions of the quasi-periodic differential system of matrix equations were obtained.

*Keywords:* periodic reflecting function, quasi-periodic linear differential system.

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = X(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

с непрерывной по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемой по  $x$  правой частью. Через  $\varphi(t; \tau, x)$  обозначим общее решение в форме Коши системы (1), т. е.  $\varphi(t; \tau, x)$  – решение системы (1) с начальным условием  $\varphi(\tau; \tau, x) = x$ . Пусть  $I_x$  – максимальный симметричный относительно нуля интервал существования решения  $\varphi(t; 0, x)$ . Обозначим  $D(X) := \{(t, \varphi(t; 0, x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in I_x, x \in \mathbb{R}^n\}$ . Из теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных данных и определения множества  $D(X)$  вытекает, что  $D(X)$  – открытая область в  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , содержащая гиперплоскость  $t = 0$ . Отражающей функцией системы (1) называется [1; 2, с. 11; 3, с. 62] вектор-функция  $F : D(X) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , действующая по правилу  $(t, x) \mapsto \varphi(-t; t, x)$ . Другими словами, для любого решения  $x(t)$  этой системы, существующего на симметричном промежутке  $(-\xi, \xi)$ , верно тождество  $F(t, x(t)) \equiv_t x(-t)$  для всех  $t \in (-\xi, \xi)$ . Это свойство можно принять [2, с. 16] за определение отражающей функции. Из определения отражающей функции и теоре-

© Белокурский М. С., 2016.

мы о дифференцируемости по начальным данным следует, что отражающая функция  $F(t, x)$  системы (1) имеет в области  $D(X)$  частные производные  $F_t$  и  $F_x$ .

Принципиально важным результатом теории отражающей функции является следующий критерий [1; 2, с. 11–12; 3, с. 63–64]: вектор-функция  $F = F(t, x) : D(X) \rightarrow \mathbb{R}^n$  является отражающей функцией системы (1), если и только если она удовлетворяет начальному условию  $F(0, x) \equiv x$  и системе уравнений в частных производных

$$F_t + F_x X(t, x) + X(-t, F) = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) называется [2, с. 12; 3, с. 63] **основным уравнением (соотношением) для отражающей функции**. Разработаны методы, которые в ряде случаев позволяют находить отражающую функцию системы (1) без нахождения ее решений. Более того, зная лишь некоторые свойства отражающей функции системы, можно исследовать поведение ее решений, не прибегая к построению отражающей функции [2–7].

Две системы называются эквивалентными в смысле совпадения отражающих функций [3, с. 75], если их отражающие функции совпадают в некоторой области, содержащей гиперплоскость  $t = 0$ . Так как решения эквивалентных систем обладают рядом одинаковых свойств, то задача о построении классов эквивалентных систем и выбора простейших (например, интегрируемых в конечном виде) систем-представителей этих классов представляется важной и актуальной.

Поскольку в работе рассматриваются линейные дифференциальные системы, заданные при всех  $t \in \mathbb{R}$ , а для них область  $D(X)$  определения отражающей функции совпадает с расширенным фазовым пространством  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , то для таких систем естественно изучать условия совпадения их отражающих функций во всем расширенном фазовом пространстве. Поэтому далее под эквивалентностью линейных систем в смысле совпадения их отражающих функций понимается совпадение отражающих функций этих систем во всем расширенном фазовом пространстве.

В данной работе рассматриваются квазипериодические двухчастотные линейные дифференциальные системы такие, что их однородная и неоднородная части являются периодическими с несоизмеримыми периодами, и выясняются условия существования периодических отражающих функций у таких систем.

Имеет место

**Т е о р е м а.** *Для того чтобы линейная неоднородная дифференциальная система*

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

*с непрерывными  $n \times n$ -матрицей  $A(t)$  и вектор-функцией имела ту же отражающую функцию, что и система*

$$\dot{x} = f(t), \quad (4)$$

*необходимо и достаточно выполнения условий:*

- 1) *матричнозначная функция  $A(t)$  является нечетной;*
- 2) *имеет место тождество*

$$A(t) \int_t^{-t} f(s) ds = 0 \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

*При этом отражающей функцией  $F(t, x)$  этих систем является вектор-функция*

$$F(t, x) = x + \int_t^{-t} f(s) ds. \quad (6)$$

**Доказательство. Достаточность.** **Общее решение в форме Копи системы (4)** задается формулой  $\varphi(t; \tau, x) = x + \int_t^\tau f(s) ds$ . Вследствие этого представления по определению отражающей функции легко находим, что отражающая функция  $F(t, x)$  системы (4) задается равенством (6).

Покажем, что при выполнении условий 1) и 2) функция (6) является отражающей функцией и системы (3). Для этого достаточно убедиться, что функция (6) удовлетворяет основному соот-

ношению (2) для отражающей функции системы (3). Подставляя в него функцию (6), после очевидно равносильных преобразований получим тождество

$$A(t)x + A(-t)x + A(-t) \int_t^{-t} f(t) dt \equiv 0. \quad (7)$$

Так как при выполнении условий 1) и 2) теоремы тождество (7), очевидно, является верным, то функция (6) является отражающей функцией системы (3). Достаточность доказана.

**Н е о б х о д и м о с т ь.** Пусть системы (3) и (4) эквивалентны в смысле совпадения отражающих функций. Как показано выше, система (4) имеет отражающую функцию (6). Так как функция (6) является также отражающей функцией системы (3), то для системы (3) и этой функции выполняется основное тождество (2). Отсюда получим тождество (7). Это тождество выполнено при всех  $t$  и  $x$ . Полагая в нем  $x = 0$  и заменяя  $-t$  на  $t$ , получаем условие 2). Значит, должно выполняться тождество

$$(A(t) + A(-t))x \equiv 0. \quad (8)$$

Тождество (8) означает, что линейный оператор  $A(t) + A(-t)$  является нулевым, т. е.  $A(t) = -A(-t)$  при всех  $t \in \mathbb{R}$ .

Таким образом, функция  $A(t)$  – нечетная и, как доказано выше, справедливо условие 2). Необходимость, а вместе с ней и теорема доказаны.

Заметим, что условие 2) равносильно условию

2') при каждом  $t \in \mathbb{R}$  вектор  $\int_t^t f(s) ds$  принадлежит ядру  $\text{Ker } A(t)$  линейного оператора  $A(t)$ .

Пусть выполнены условия 1) и 2) теоремы. По матрице  $A(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , определим множество  $H_A := \{t \in \mathbb{R} : \det A(t) \neq 0\}$ . Так как  $A(t)$  нечетна, то множество  $H_A$  симметрично относительно нуля. Поскольку  $A(t)$  непрерывна, то и функция  $\det A(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , непрерывна, и поэтому множество  $H_A$  открыто в  $\mathbb{R}$ , т. е. состоит из объединения интервалов. Итак,  $H_A$  – симметричное относительно нуля открытое множество.

Так как  $\text{Ker } A(t) = \{0\}$  для  $t \in H_A$ , то для любого  $t \in H_A$  должно выполняться равенство  $\int_{-t}^t f(s) ds = 0$ . Дифференцируя это соотношение (что возможно, поскольку  $H_A$  открыто), получим  $f(t) = -f(-t)$  для любого  $t \in H_A$ , т. е. вектор-функция  $f(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , является нечетной на симметричном относительно нуля множестве  $H_A$  и даже на его замыкании  $\text{cl } H_A$ , так как  $f(t)$  непрерывна.

Если множество  $H_A$  плотно в  $\mathbb{R}$ , то его замыкание  $\text{cl } H_A = \mathbb{R}$ . Поэтому  $f(t)$  является нечетной при всех  $t \in \mathbb{R}$ . Кроме того, легко видеть, что для нечетной на  $\mathbb{R}$  функции  $f(t)$  условие 2) выполнено при любой матрице  $A(t)$ . Таким образом, доказано

**С л е д с т в и е 1.** Если матрица  $A(t)$  невырождена при всех  $t \in \mathbb{R}$ , то системы (3) и (4) имеют одну и ту же отражающую функцию, если и только если матричнозначная функция  $A(\cdot)$  и вектор-функция  $f(\cdot)$  нечетны. При этом отражающей функцией систем (3) и (4) будет функция  $F(t, x) = x$ .

Если же множество тех  $t \in \mathbb{R}$ , при которых матрица  $A(t)$  невырождена, не совпадает с  $\mathbb{R}$ , то условие 2) теоремы не обязательно означает нечетность вектор-функции  $f(\cdot)$ , что подтверждает следующий пример.

**Пример 1.** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

матрица  $A(t)$  коэффициентов которой нечетная и имеет нулевой определитель при всех  $t \in \mathbb{R}$ . Пусть

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) & a_2(t) \\ a_3(t) & a_4(t) \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что  $a_1^2(t) + a_2^2(t) \neq 0$  при любом  $t \in \mathbb{R}$ . Согласно теореме, данная система имеет ту же отражающую функцию, что и система  $\dot{x} = f(t)$ , тогда и только тогда, когда выполняется тождество (5). Из этого тождества получаем

$$a_1(t) \int_t^{-t} f_1(s) ds \equiv -a_2(t) \int_t^{-t} f_2(s) ds, \quad a_3(t) \int_t^{-t} f_1(s) ds \equiv -a_4(t) \int_t^{-t} f_2(s) ds. \quad (9)$$

Найдем все вектор-функции  $f(t) = (f_1(t), f_2(t))^T$ , для которых выполнены эти тождества. Так как  $\det A(t) = 0$  при всех  $t \in \mathbb{R}$  и первая строка матрицы  $A(t)$  ненулевая, то вторая ее строка пропорциональна первой, а значит, для справедливости этих тождеств необходима и достаточна справедливость только первого из них.

Первое тождество в (9), поскольку вектор  $(a_1(t), a_2(t))^T$  ненулевой, выполняется тогда и только тогда, когда для некоторой функции  $h(t)$  справедливы тождества

$$\int_t^{-t} f_1(s) ds \equiv -a_2(t)h(t), \quad \int_t^{-t} f_2(s) ds \equiv a_1(t)h(t). \quad (10)$$

Для того чтобы тождества (10) выполнялись, необходимо, чтобы функция  $h(t)$  была четной (поскольку левые части в (10) и функции  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$  – нечетные) и чтобы функции  $a_1(t)h(t)$  и  $a_2(t)h(t)$  были непрерывно дифференцируемыми (поскольку левые части в (10) – непрерывно дифференцируемые функции).

Покажем, что эти условия и достаточны для существования функций  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ , удовлетворяющих тождествам (10). Зафиксируем какую-либо четную функцию  $h(t)$ , для которой правые части в (10) – непрерывно дифференцируемые функции. Обозначим  $-a_2(t)h(t)$  через  $g_1(t)$ . Тогда первое тождество в (10) примет вид  $\int_t^{-t} f_1(s) ds \equiv g_1(t)$ . Дифференцируя его по  $t$ , получим

$$f_1(t) + f_1(-t) \equiv -\dot{g}_1(t). \quad (11)$$

Функция  $\dot{g}_1(t)$  четная, как производная нечетной функции, и непрерывная. Будем искать решение функционального уравнения (11) в виде

$$f_1(t) = -\frac{\dot{g}_1(t)}{2} + r_1(t), \quad (12)$$

где  $r_1(t)$  – неизвестная непрерывная функция. Заменяя в (11) функцию  $f_1(t)$  указанным представлением, получим с учетом четности  $\dot{g}_1(t)$  тождество  $r_1(t) + r_1(-t) \equiv 0$ , т. е.  $r_1(t)$  – нечетная функция. Обратно, легко видеть, что функция вида (12) с нечетной непрерывной функцией  $r_1(t)$ , удовлетворяет первому тождеству в (10). Действительно,

$$\int_t^{-t} f_1(s) ds \equiv \int_t^{-t} \left( -\frac{\dot{g}_1(s)}{2} + r_1(s) \right) ds = g_1(t) + \int_t^{-t} r_1(s) ds = g_1(t) = -a_2(t)h(t).$$

Точно так же, если обозначить функцию  $a_1(t)h(t)$  через  $g_2(t)$ , решение второго функционального уравнения в (10) найдем в виде

$$f_2(t) = -\frac{\dot{g}_2(t)}{2} + r_2(t), \quad (13)$$

где  $g_2(t) \equiv a_1(t)h(t)$ , а  $r_2(t)$  – произвольная нечетная функция. Таким образом, решение задачи об описании множества вектор-функций  $f(t) = (f_1(t), f_2(t))^T$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , удовлетворяющих тождествам (9), сводится к задаче описания множества четных функций  $h(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , для которых обе функции  $a_1(t)h(t)$  и  $a_2(t)h(t)$  были бы непрерывно дифференцируемыми.

Как видим, вектор-функция  $f(t) = (f_1(t), f_2(t))^T$ , компоненты которой построены выше и задаются равенствами (12), (13), вообще говоря, не является нечетной, каковы бы ни были элементы вырожденной нечетной матрицы  $A(t)$ , первая строка которой при всех  $t \in \mathbb{R}$  ненулевая ( $a_1^2(t) + a_2^2(t) \neq 0$  при всех  $t \in \mathbb{R}$ ).

**З а м е ч а н и е 1.** Рассмотренный пример дает частичное решение следующей задачи: для линейной однородной дифференциальной системы  $\dot{x} = A(t)x$  в терминах ее матрицы коэффициентов  $A(t)$  описать все такие ее неоднородные возмущения  $f(t)$ , при которых отражающие функции систем  $\dot{y} = A(t)y + f(t)$  и  $\dot{z} = f(t)$  совпадают.

**С л е д с т в и е 2.** Пусть матрица  $A(t)$  имеет период  $\omega_1$ , а вектор-функция  $f(t)$  – период  $\omega_2$ . Для того чтобы система (3) имела  $\omega_2$ -периодическую по  $t$  отражающую функцию (6), необходимо и достаточно выполнения условий 1), 2) теоремы и равенства

$$\int_0^{\omega_2} f(s)ds = 0. \quad (14)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Так как все условия теоремы выполнены, то система (3) имеет отражающую функцию (6). Из [8, с. 79, теорема 5.2] вытекает, что условие (14) является необходимым и достаточным для  $\omega_2$ -периодичности интеграла  $\int_{-t}^t f(s)ds$ . Следствие доказано.

**З а м е ч а н и е 2.** В случае, когда числа  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – несоизмеримы, следствие 2 дает достаточное условие существования у квазипериодической системы (3)  $\omega_2$ -периодической по  $t$  отражающей функции.

**Пример 2.** Рассмотрим квазипериодическую систему

$$\dot{x}_1 = 3x_1 \sin t - x_2 \sin t + v \cos vt, \quad \dot{x}_2 = 9x_1 \sin t - 3x_2 \sin t + 3v \cos vt, \quad v \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad (15)$$

с двухчастотным базисом. Для этой системы имеем

$$A(t) = \begin{pmatrix} 3 \sin t & -\sin t \\ 9 \sin t & -3 \sin t \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} v \cos vt \\ 3v \cos vt \end{pmatrix}.$$

Как видим, матрица  $A(t)$  является  $2\pi$ -периодической,  $\det A(t) \equiv 0$ , а вектор-функция  $f(t)$  – четная и  $(2\pi/v)$ -периодическая, при этом числа  $2\pi$  и  $2\pi/v$  – несоизмеримы. Кроме того,  $\text{Ker } A(t) = \{\alpha(1,3)^T : \alpha \in \mathbb{R}\}$  для любого  $t \in \mathbb{R}$ .

Условие 1) теоремы, очевидно, выполнено. Проверим условие 2). Так как, очевидно, интеграл  $\int_{-t}^t f(s)ds$  принадлежит ядру  $\text{Ker } A(t)$ , то выполняется равенство  $A(t) \int_{-t}^t f(s)ds = 0$ . Поэтому согласно теореме, система (15) имеет ту же отражающую функцию, что и  $(2\pi/v)$ -периодическая система

$$\dot{x}_1 = v \cos vt, \quad \dot{x}_2 = 3v \cos vt. \quad (16)$$

Отражающая функция этих систем  $F(t, x_1, x_2) = (x_1 - 2 \sin vt, x_2 - 6 \sin vt)^T$  является  $2\pi/v$ -периодической по  $t$ . Кроме того, функция  $f(t)$  не является нечетной, а отражающие функции систем (15) и (16) совпадают, что дает еще один, наряду с примером 1, пример системы вида (3), для которой условие (5) выполняется не обязательно с нечетной функции  $f(t)$ .

Предложенный подход можно в некоторых случаях использовать для нахождения частично нерегулярных [9, с. 16] периодических решений систем матричных уравнений. В частности, рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) + S(t)A(t) + A(-t)S(t) &= 0, & \dot{r}(t) + S(t)f(t) + A(-t)r(t) + f(-t) &= 0, \\ S(0) &= E, & r(0) &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

в которой непрерывные  $\omega_1$ -периодическая и нечетная  $n \times n$ -матрица  $A(t)$  и  $\omega_2$ -периодическая  $n$ -вектор-функция  $f(t)$  заданы, причем  $A(t) \int_{-t}^t f(s)ds \equiv 0$  для всех  $t \in \mathbb{R}$  и  $\int_0^{\omega_2} f(s)ds = 0$ , отношение  $\omega_1 / \omega_2$  – иррационально, а  $n \times n$ -матрица  $S(t)$  и  $n$ -вектор-функция  $r(t)$  неизвестны. Будем искать  $\omega_2$ -периодическое решение  $(S(t), r(t))$  системы (17).

Предварительно по матрице  $A(t)$  и вектор-функции  $f(t)$  построим квазипериодическую линейную неоднородную систему (3). С одной стороны, общее решение  $\varphi(t; \tau, x)$  в форме Коши системы (3) имеет вид  $\varphi(t; \tau, x) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)x + \bar{x}(t)$ , где  $\Phi(t)$  – какая-либо фундаментальная матрица однородной системы  $\dot{x} = A(t)x$ , а  $\bar{x}(t)$  – частное решение системы (3) с начальным условием  $\bar{x}(0) = 0$ . Тогда по определению отражающей функции находим  $F(t, x) = \Phi(-t)\Phi^{-1}(t)x + \bar{x}(-t)$ . Запишем это представление, введя обозначения  $S(t) = \Phi(-t)\Phi^{-1}(t)$ ,  $r(t) = \bar{x}(-t)$ , в виде  $F(t, x) = S(t)x + r(t)$ . Так как  $F(t, x)$  – отражающая функция, то  $F(0, x) \equiv x$ . Поэтому справедливы равенства  $S(0) = E, r(0) = 0$ .

Отражающая функция системы (4), как показано выше, имеет вид  $F(t, x) = x + \int_t^{-t} f(s) ds$ , а так как выполнены условия следствия 2, то отражающие функции систем (3) и (4) совпадают, т. е. верно тождество  $(S(t) - E)x + r(t) - \int_t^{-t} f(s) ds \equiv 0$ . Из него находим представления  $S(t) \equiv E$ ,  $r(t) \equiv \int_t^{-t} f(s) ds$ .

Покажем, что матрица  $S(t)$  и вектор  $r(t)$  удовлетворяют системе (17). Составим основное соотношение для отражающей функции системы (3):

$$\dot{S}(t)x + \dot{r}(t) + S(t)(A(t)x + f(t)) + A(-t)(S(t)x + r(t)) + f(-t) \equiv 0. \quad (18)$$

Это тождество выполнено при всех  $t$  и  $x$ . Полагая в нем  $x = 0$ , получим тождество  $\dot{r}(t) + S(t)f(t) + A(-t)r(t) + f(-t) \equiv 0$ . С учетом этого из тождества (18) вытекает следующее тождество  $(\dot{S}(t) + S(t)A(t) + A(-t)S(t)) \equiv 0$ . Выполнение последних двух тождеств означает, что матрица  $S(t)$  и вектор  $r(t)$  – решение задачи (17).

Таким образом, найдено частично нерегулярное  $\omega_2$ -периодическое решение  $S(t) = E$ ,  $r(t) = \int_t^{-t} f(s) ds$  системы (17).

Автор выражает благодарность В. И. Мироненко и А. К. Деменчуку за постановку задач, внимание к работе и обсуждение результатов.

### Список использованной литературы

1. Мироненко, В. И. Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем / В. И. Мироненко // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20, № 9. – С. 1635–1638.
2. Мироненко, В. И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В. И. Мироненко. – Минск: Университетское, 1986.
3. Мироненко, В. И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В. И. Мироненко. – Гомель: УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2004.
4. Мироненко, В. И. Возмущения систем, не изменяющие временных симметрий и отображения Пуанкаре / В. И. Мироненко, В. В. Мироненко // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1347–1352.
5. Musafirov, E. V. Reflecting function and periodic solutions of differential systems with small parameter / E. V. Musafirov // Indian Journal of Mathematics. – 2008. – Vol. 50, N 1. – P. 63–76.
6. Mironenko, V. I. How to construct equivalent differential systems / V. I. Mironenko, V. V. Mironenko // Applied Mathematical Letters. – 2009. – Vol. 22. – P. 1356–1359.
7. Мироненко, В. И. Временные симметрии уравнения Риккати / В. И. Мироненко // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 1(2). – С. 31–33.
8. Fink, A. M. Almost periodic differential equations / A. M. Fink // Lecture notes in math. – Vol. 377. – Berlin: Springer, 1974.
9. Деменчук, А. К. Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления / А. К. Деменчук. – Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2012.

Поступило в редакцию 06.04.2016

УДК 511.42

В. И. БЕРНИК<sup>1</sup>, Н. В. БУДАРИНА<sup>2</sup>, Х. О’ДОННЕЛЛ<sup>2</sup>

**ВЕЛИЧИНЫ ДИСКРИМИНАНТОВ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ  
В АРХИМЕДОВОЙ И НЕАРХИМЕДОВОЙ МЕТРИКАХ**

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

<sup>1</sup>Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
bernik@im.bas-net.by

<sup>2</sup>Технологический институт Дублина, Дублин, Ирландия  
buda77@mail.ru; hugh.odonnell@nuim.ie

Рассмотрим класс  $\mathcal{P}_3(Q)$  многочленов  $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$  степени 3 и высоты  $H(P) \leq Q$ ,  $Q > 1$ . Выделим в  $\mathcal{P}_3(Q)$  подкласс  $S_3(Q)$  полиномов  $P(t)$ , дискриминанты которых не превосходят  $Q^{2n-2-2v_1}$  и делятся на степень простого числа  $p^e$ ,  $p^e > Q^{2v_2}$ ,  $v_1 \geq 0$ ,  $v_2 \geq 0$ ,  $0 \leq v_1 + v_2 < 3/2$ . Найдена оценка сверху для мощности подкласса  $S_3(Q)$ . Доказано, что для любого  $\varepsilon > 0$  и  $Q > Q_0(\varepsilon)$  справедливо неравенство  $\#S_3(Q) < Q^{4-5/3(v_1+v_2)+\varepsilon}$ .

*Ключевые слова:* диофантовы приближения, целочисленный многочлен, дискриминант целочисленного многочлена,  $p$ -адические числа, неархимедова метрика.

V. I. BERNIK<sup>1</sup>, N. V. BUDARINA<sup>2</sup>, H. O’DONNELL<sup>2</sup>

**DISCRIMINANT VALUES OF INTEGRAL POLYNOMIALS IN THE ARCHIMEDEAN  
AND NON-ARCHIMEDEAN METRICS**

<sup>1</sup>Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
bernik@im.bas-net.by

<sup>2</sup>Dublin Institute of Technology, Dublin, Ireland  
buda77@mail.ru; hugh.odonnell@nuim.ie

Consider the class  $\mathcal{P}_3(Q)$  of the polynomials  $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$  of degree 3 and height  $H(P) \leq Q$ ,  $Q > 1$ . Define a subclass  $S_3(Q)$  in  $\mathcal{P}_3(Q)$  by taking the polynomials  $P(t)$  having discriminants not exceeding  $Q^{2n-2-2v_1}$  and divisible by the power of the prime number  $p^e$ ,  $p^e > Q^{2v_2}$ ,  $v_1 \geq 0$ ,  $v_2 \geq 0$ ,  $0 \leq v_1 + v_2 < 3/2$ . The upper bound on the number of the elements in  $S_3(Q)$  is found. It has been proved that for any  $\varepsilon > 0$  and  $Q > Q_0(\varepsilon)$ , the inequality  $\#S_3(Q) < Q^{4-5/3(v_1+v_2)+\varepsilon}$  is valid.

*Keywords:* diophantine approximation, integral polynomial, discriminant of an integral polynomial,  $p$ -adic numbers, non-archimedean metric.

Пусть

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

– многочлен с целыми коэффициентами степени  $\deg P = n$  и высоты  $H = H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$ . Для натурального числа  $Q > 1$  введем класс многочленов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(t) \in \mathbb{Z}[t], \deg P = n, H(P) \leq Q\}.$$

Через  $\#B$  будем обозначать количество элементов конечного множества  $B$ ,  $\mu_1 A_1$  – меру Лебега измеримого множества  $A_1 \subset \mathbb{R}$ ,  $\mu_2 A_2$  – меру Хаара измеримого множества  $A_2$   $p$ -адических чисел  $\mathbb{Q}_p$ . Постоянные и величины, зависящие от  $n$ , но не зависящие от  $H$  и  $Q$ , будем обозначать  $c_1, c_2, \dots$ . Будем использовать символ Виноградова  $\ll$ , означающий, что запись  $A < cB$  можно заменить на  $A \ll B$ . Дискриминантом многочлена (1) с корнями  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  называется число

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Нетрудно доказать [1], что  $D(P) \in \mathbb{Z}$ , и получить оценку сверху  $D(P)$ . Поэтому, если  $D(P) \neq 0$ , то

$$1 \leq |D(P)| < c_1 Q^{2n-2}, \quad c_2 Q^{-2n+2} < |D(P)|_p \leq 1. \quad (2)$$

В (2) величина  $|a|_p$  – это  $p$ -адическая норма целого числа  $a = p^b a_1$ , определенная для простого числа  $p$  и максимальной степени  $b$ , с которой простое число  $p$  входит в  $a$ , т. е.  $(p, a_1) = 1$ :

$$|a|_p = p^{-b}.$$

Для любого  $a$ , поэтому и для  $D(P) \neq 0$ , справедлива формула произведения

$$1 \leq |D(P)| |D(P)|_p.$$

Для вектора  $\bar{v} = (v_1, v_2)$  с неотрицательными  $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}_+^2$  определим подмножество  $\mathcal{P}_n(Q, \bar{v}) \subset \mathcal{P}_n(Q)$

$$\mathcal{P}_n(Q, \bar{v}) = \{P(x) \in \mathcal{P}_n(Q) : 1 \leq |D(P)| < Q^{4-2v_1}, \quad |D(P)|_p < Q^{-2v_2}\}.$$

В сообщении получены новые результаты о величине  $\#\mathcal{P}_n(Q, \bar{v})$ . К настоящему времени глубоко исследован только случай  $\bar{v} = (v_1, 0)$  и известно следующее. При  $n = 3$  доказано [2]

$$\#\mathcal{P}_3(Q, \bar{v} = (v_1, 0)) \asymp Q^{4-5v_1/3}, \quad 0 \leq v_1 < 3/5.$$

В случае произвольного  $n$  найдена оценка снизу [3]

$$\#\mathcal{P}_n(Q, \bar{v} = (v_1, 0)) > c_3 Q^{n+1-(n+2)v_1/n}, \quad 0 \leq v_1 < n-1.$$

В  $p$ -адическом случае известно только, что  $\#\mathcal{P}_n(Q, \bar{v} = (0, v_2)) > c_4 Q^{n+1-2v_2}$  при  $0 < v_2 < 1/2$  [4]. В [5] доказано, что  $\#\mathcal{P}_n(Q, \bar{v} = (v_1, v_1)) > c_5 Q^{n+1-4v_1}$  при  $0 \leq v_1 < 1/3$  и  $n \geq 3$ .

**Т е о р е м а 1.** Пусть  $v_1 + v_2 \leq 3/2$ . Тогда при любом  $\varepsilon > 0$  и  $Q > Q_0(\varepsilon)$  справедлива оценка

$$\#\mathcal{P}_3(Q, \bar{v}) < Q^{4-5(v_1+v_2)/3+\varepsilon}. \quad (3)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Корни многочлена  $P(x)$  можно упорядочить относительно одного из них, пусть  $\alpha_1$ , следующим образом:

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |\alpha_1 - \alpha_3|, \quad |\alpha_2 - \alpha_3| \asymp |\alpha_1 - \alpha_3|.$$

Обозначим

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = Q^{-\rho_2}, \quad |\alpha_1 - \alpha_3| = Q^{-\rho_3}, \quad |\alpha_2 - \alpha_3| \asymp Q^{-\rho_3}.$$

Возьмем достаточно малое число  $\varepsilon_1$  и целое число  $T = [\varepsilon_1^{-1}] + 1$ , где  $[a]$  – целая часть  $a \in \mathbb{R}$ . Определим целые числа  $l_2, l_3$  из неравенств

$$(l_2 - 1)/T \leq \rho_2 < l_2/T, \quad (l_3 - 1)/T \leq \rho_3 < l_3/T,$$

и для упрощения обозначим

$$m_2 = l_2/T, \quad m_3 = l_3/T.$$

Вектор  $\bar{m} = (m_2, m_3)$  принимает конечное число значений, зависящее от  $\varepsilon_1$ , и не зависящее от  $Q$ . Это нетрудно доказать, и доказано в ряде работ [6; 7].

Аналогичную процедуру проделаем и с корнями  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  многочлена  $P(x)$  из алгебраического замыкания  $Q^*$  поля  $\mathbb{Q}_p$ . Выберем среди этих корней, пусть  $\gamma_1$  такой, относительно которого можно упорядочить остальные корни так, что

$$\begin{aligned} |\gamma_1 - \gamma_2|_p &\leq |\gamma_1 - \gamma_3|_p, \quad |\gamma_2 - \gamma_3|_p \asymp |\gamma_1 - \gamma_3|_p, \\ |\gamma_1 - \gamma_2|_p &= Q^{-\lambda_2}, \quad |\gamma_1 - \gamma_3|_p = Q^{-\lambda_3}, \quad |\gamma_2 - \gamma_3|_p \asymp Q^{-\lambda_3}, \\ (k_2 - 1)/T &\leq \lambda_2 < k_2/T, \quad (k_3 - 1)/T \leq \lambda_3 < k_3/T, \\ s_2 &= k_2/T, \quad s_3 = k_3/T. \end{aligned}$$

Опять нетрудно доказать, что вектор  $\bar{s} = (s_2, s_3)$  принимает конечное, зависящее от  $\varepsilon_1$  и не зависящее от  $Q$ , число значений. Для того чтобы многочлен  $P(x)$  попадал в класс  $\mathcal{P}_3(Q, \bar{v})$ , необходимо и достаточно выполнения неравенств

$$\rho_2 + 2\rho_3 \geq v_1, \lambda_2 + 2\lambda_3 \geq v_2, \quad (4)$$

так как в этом случае

$$|D(P)| \ll Q^{4-2v_1}, |D(P)|_p \ll Q^{-2v_2}. \quad (5)$$

Система неравенств (5) следует из оценок сверху дискриминантов

$$1 \leq |D(P)| = |a_3|^4 |\alpha_1 - \alpha_2|^2 |\alpha_1 - \alpha_3|^2 |\alpha_2 - \alpha_3|^2 \ll Q^{4-2v_1},$$

$$1 \leq |D(P)| |D(P)|_p \ll Q^{4-2v_1} |a_3|_p^4 \prod_{1 \leq i < j \leq 3} |\gamma_i - \gamma_j|_p^2 \ll Q^{4-2(v_1+v_2)}.$$

Для того чтобы выполнялись неравенства (4) достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$m_2 + 2m_3 \geq v_1 + 3\varepsilon_1, s_2 + 2s_3 \geq v_2 + 3\varepsilon_1. \quad (6)$$

Будем дополнительно к неравенствам (6) предполагать

$$m_2 + 2m_3 < v_1 + \varepsilon/8, s_2 + 2s_3 < v_2 + \varepsilon/8. \quad (7)$$

В неравенствах (7) величина  $\varepsilon_1 < \varepsilon/256$ , и поэтому неравенства (6) и (7) не противоречат друг другу.

**Л е м м а 1.** Пусть  $|P(x)| < Q^{-\tau_1}$ , и  $\alpha_1$  – ближайший к  $x$  корень. Тогда

$$|x - \alpha_1| \ll \min \left( |P(x)/P'(\alpha_1)|, |P(x)(\alpha_1 - \alpha_2)/P'(\alpha_1)|^{1/2}, |P(x)/a_3|^{1/3} \right) \ll$$

$$\min \left( Q^{-\tau_1-1+\rho_2+\rho_3}, Q^{-(\tau_1+1-\rho_3)/2}, Q^{-(\tau_1+1)/3} \right). \quad (8)$$

**Л е м м а 2.** Пусть  $|P(w)|_p < Q^{-\tau_2}$ , и  $\gamma_1$  – корень  $P(w)$ , удовлетворяющий неравенству  $|w - \gamma_1|_p = \min_{1 \leq i \leq 3} |w - \gamma_i|_p$ . Тогда

$$|w - \gamma_1|_p \ll \min \left( Q^{-\tau_2+\lambda_2+\lambda_3}, Q^{-(\tau_2-\lambda_3)/2}, Q^{-\tau_2/3} \right). \quad (9)$$

Леммы 1 и 2 доказаны в [6; 7].

**Л е м м а 3.** Пусть полиномы  $P(u), T(u) \in \mathcal{P}_3(Q)$  имеют одинаковые векторы  $\bar{m}, \bar{s}$  и не имеют общих корней в параллелепипеде  $I \times K$ ,  $\mu_1 I = Q^{-\eta_1}$ ,  $\mu_2 K = Q^{-\eta_2}$ . Далее пусть  $P(u)$  и  $T(u)$  удовлетворяют системе неравенств

$$\max_{x \in I} (|P(x)|, |T(x)|) < Q^{-\tau_1}, \quad (10)$$

$$\max_{w \in K} (|P(w)|_p, |T(w)|_p) < Q^{-\tau_2}. \quad (11)$$

Тогда при любом  $\delta > 0$  и  $Q > Q_0(\delta)$  справедливо неравенство

$$\tau_1 + \tau_2 + 1 + 2 \sum_{j=1}^2 \max(\tau_1 + 1 - j\eta_1, 0) + 2 \sum_{r=1}^2 \max(\tau_2 - r\eta_2, 0) < 6 + \delta.$$

Лемма 3 доказана в одной метрике, как архимедовой [8], так и неархимедовой [4], только со слагаемыми  $\max(\tau_1 + 1 - \eta_1, 0)$ ,  $\max(\tau_2 - \eta_2, 0)$  в правой части. Это не позволяло доказать теорему, поскольку ранее учитывалась только малость первой производной.

**С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а л е м м ы 3.** Воспользуемся леммами 1 и 2, и от неравенств (10), (11) перейдем к неравенствам (8) и (9). Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – корни многочлена  $P(x)$  в  $\mathbb{C}$ , и  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  – корни многочлена  $T(x)$  в  $\mathbb{C}$ . Воспользуемся тем, что полиномы  $P(u)$  и  $T(u)$  имеют одинаковые векторы  $\bar{m}$  и  $\bar{s}$ . В этом случае неравенства (8), (9) можно переписать в виде

$$|x - \theta_1| \ll \min\left(Q^{-\tau_1-1+m_2+m_3}, Q^{-(\tau_1+1-m_3)/2}, Q^{-(\tau_1+1)/3}\right), \quad (12)$$

где вместо  $\theta_1$  можно брать как  $\alpha_1$ , так и  $\beta_1$ . Точку  $x$  из интервала  $I$  можно выбирать так, что левая часть в (12) будет не менее  $c_4 Q^{-\eta_1}$ , как при  $\theta_1 = \alpha_1$ , так и при  $\theta_1 = \beta_1$ . Это приведет к неравенствам

$$\eta_1 \geq \tau_1 + 1 - m_2 - m_3, \eta_1 \geq (\tau_1 + 1 - m_3) / 2, \eta_1 \geq (\tau_1 + 1) / 3,$$

и неравенствам

$$m_2 + m_3 \geq \tau_1 + 1 - \eta_1, m_3 \geq \tau_1 + 1 - 2\eta_1. \quad (13)$$

Пусть  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  – корни многочлена  $P(w)$  в  $\mathbb{Q}_p^*$ , и  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  – корни многочлена  $T(w)$  в  $\mathbb{Q}_p^*$ . Аналогичные соображения в  $\mathbb{Q}_p$  приведут к неравенствам

$$|w - \zeta_1|_p \ll \min\left(Q^{-\tau_2+s_2+s_3}, Q^{-(\tau_2-s_3)/2}, Q^{-\tau_2/3}\right),$$

$$\eta_2 \geq \tau_2 - s_2 - s_3, \eta_2 \geq (\tau_2 - s_3) / 2, \eta_2 \geq \tau_2 / 3,$$

$$s_2 + s_3 \geq \tau_2 - \eta_2, s_3 \geq \tau_2 - 2\eta_2,$$

где вместо  $\zeta_1$  можно брать как  $\gamma_1$ , так и  $\xi_1$ .

Рассмотрим результат полиномов  $P(u)$  и  $T(u)$ :

$$1 \leq |R(P, T)|_p \ll Q^6 \prod_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3} |\alpha_i - \beta_j| \prod_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3} |\gamma_i - \xi_j|_p. \quad (14)$$

Оценим сверху

$$L = \prod_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3} |\alpha_i - \beta_j|.$$

Из оценок (12) имеем

$$|\alpha_1 - \beta_1| \ll (|x - \alpha_1| + |x - \beta_1|) \ll Q^{-\tau_1-1+m_2+m_3},$$

$$|\alpha_1 - \beta_i| \leq |\alpha_1 - \beta_1| + |\beta_1 - \beta_i| \ll (Q^{-\tau_1-1+m_2+m_3}, Q^{-m_i+\varepsilon_1}), i = 2, 3, \quad (15)$$

$$|\alpha_i - \beta_1| \leq |\alpha_1 - \beta_1| + |\alpha_1 - \alpha_i| \ll (Q^{-\tau_1-1+m_2+m_3}, Q^{-m_i+\varepsilon_1}), i = 2, 3,$$

$$|\alpha_i - \beta_j| \leq |\alpha_1 - \beta_1| + |\alpha_1 - \alpha_i| + |\beta_1 - \beta_j| \ll (Q^{-\tau_1-1+m_2+m_3}, Q^{-m_i+\varepsilon_1}), i \geq 2, j \geq 2.$$

Оценки (15) позволяют получить для  $L$  оценку

$$L \ll Q^{-\tau_1-1-2m_2-2m_3+8\varepsilon_1}. \quad (16)$$

Используя оценки (13), из (16) получаем

$$\tau_1 + 1 + 2m_2 + 2m_3 - 8\varepsilon_1 \geq \tau_1 + 1 + 2(\tau_1 + 1 - \eta_1) + 2(\tau_1 + 1 - 2\eta_1) - 8\varepsilon_1. \quad (17)$$

Проделив такую же процедуру в  $p$ -адическом случае, имеем

$$\tau_2 + 2s_2 + 2s_3 - 8\varepsilon_1 \geq \tau_2 + 2(\tau_2 - \eta_2) + 2(\tau_2 - 2\eta_2) - 8\varepsilon_1. \quad (18)$$

Из неравенств (17), (18) и (14) следует с учетом  $m_i \geq 0, s_i \geq 0, i = 2, 3$ ,

$$\tau_1 + \tau_2 + 1 + 2 \sum_{j=1}^2 \max(\tau_1 + 1 - j\eta_1, 0) + 2 \sum_{r=1}^2 \max(\tau_2 - r\eta_2, 0) - 16\varepsilon_1 < 6 + \delta.$$

Вернемся к **доказательству теоремы. Предположим противное, и верно неравенство** противоположное (3)

$$\#\mathcal{P}_3(Q, \bar{v}) \geq Q^{4-5(v_1+v_2)/3+\varepsilon}.$$

Возьмем интервал  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $\mu_1 I = Q^{-\sigma_1}$ ,  $\sigma_1 > 0$  и цилиндр  $K \subset \mathbb{Q}_p$ ,  $\mu_2 K = Q^{-\sigma_2}$ ,  $\sigma_2 > 0$ . Будем говорить, что многочлен  $P(u)$  принадлежит параллелепипеду  $M = I \times K$ , если корни  $\alpha_1$  и  $\gamma_1$  полинома  $P(u)$  принадлежат  $M$ . Разложим полином  $P(x)$  на интервале в ряд Тейлора в точке  $\alpha_1$ , и оценим сверху значения  $|P(x)|$  и модулей всех производных сверху при  $\sigma_1 = m_2$ :

$$\begin{aligned}
P(x) &= P(\alpha_1) + P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + P''(\alpha_1)(x - \alpha_1)^2 + P'''(\alpha_1)(x - \alpha_1)^3 / 6, \\
P(\alpha_1) &= 0, |P'(\alpha_1)(x - \alpha_1)| \ll Q^{1-\rho_2-\rho_3-\sigma_1} \ll Q^{1-2m_2-m_3+3\varepsilon_1}, \\
|P''(\alpha_1)(x - \alpha_1)^2| &\ll Q^{1-2m_2-m_3+3\varepsilon_1}, |P'''(\alpha_1)(x - \alpha_1)^3 / 6| \ll Q^{1-3m_2}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Из оценок (19) для всех  $x \in I$  имеем

$$|P(x)| \ll Q^{1-2m_2-m_3+3\varepsilon_1}, |P'(x)| \ll Q^{1-m_2-m_3+3\varepsilon_1}, |P''(x)| \ll Q^{1-m_3+3\varepsilon_1}. \tag{20}$$

Разложим многочлен  $P(w)$  в цилиндре  $K$  в точке  $\gamma_1$ , и получим оценки, аналогичные (20), для всех  $w \in K$  при  $s_2 \in (\sigma_2 - \varepsilon_1 / 4, \sigma_2 + \varepsilon_1 / 4)$

$$|P(w)|_p \ll Q^{-2s_2-s_3+3\varepsilon_1}, |P'(w)|_p \ll Q^{-s_2-s_3+3\varepsilon_1}, |P''(w)|_p \ll Q^{-s_3+3\varepsilon_1}. \tag{21}$$

Возьмем середину отрезка  $I$  точку  $d$ , и зафиксируем некоторую точку  $w \in K$ . В этих точках также выполняются неравенства (20), (21). Ясно, что существуют параллелепипеды  $M = I \times K$ , которым принадлежат не менее

$$c_5 Q^{4-5(v_1+v_2)+\varepsilon-m_2-s_2}$$

полиномов при условиях (20), (21). Дважды воспользуемся принципом ящиков Дирихле. В первом случае поделим значения  $P(d)$  на  $Q^{\varepsilon/16}$  частей, во втором представим цилиндр  $K$ , в котором выполняется первое неравенство в (21), в виде объединения  $Q^{\varepsilon/16}$  цилиндров. Получим существование не менее  $Q^{7\varepsilon/8}$  полиномов, в которых выполняются неравенства

$$|P(d)| \ll Q^{1-2m_2-m_3+3\varepsilon_1-\varepsilon/16}, |P(w)|_p \ll Q^{-2s_2-s_3+3\varepsilon_1-\varepsilon/16}. \tag{22}$$

Возьмем число

$$s = 4 - 5(v_1 + v_2) / 3 - m_2 - s_2$$

и введем число  $s_1 = s / 8$ . Поделим множество значений  $P(d)$  в (22) и значения производных  $P'(d), P''(d), P'''(d)$  из (20) на  $Q^{\varepsilon/32}$  частей. Представим цилиндры  $K_2, K_3, K_4, K_5$ , в которых выполняется второе неравенство в (22) неравенства в (21) для производных  $P'(w), P''(w), P'''(w)$ , в виде объединения цилиндров с мерой Хаара меньшей в  $c_6 Q^{\varepsilon/32}$ , чем меры цилиндров  $K_2, K_3, K_4, K_5$ . Так как количество полиномов, принадлежащих  $I \times K$ , не менее  $c_7 Q^{7\varepsilon/8}$ , то по принципу ящиков Дирихле найдется не менее  $c_8 Q^{5\varepsilon/8}$  полиномов, попадающих в 4 интервала и 4 цилиндра с меньшими мерами. В итоге получаем, что не менее чем для  $c_9 Q^{5\varepsilon/8}$  многочленов  $R_j(u) = P_{j+1}(u) - P_0(u)$  выполняются неравенства

$$\begin{aligned}
|R_j(d)| &\ll Q^{1-2m_2-m_3+3\varepsilon_1-\varepsilon/16-s_1}, |R'_j(d)| \ll Q^{1-m_2-m_3+3\varepsilon_1-s_1}, \\
|R''_j(d)| &\ll Q^{1-m_3+3\varepsilon_1-s_1}, |R'''_j(d)| \ll Q^{1-s_1},
\end{aligned} \tag{23}$$

$$|R(w_1)|_p \ll Q^{-2s_2-s_3+3\varepsilon_1-\varepsilon/16-s_1}, |R'(w_1)|_p \ll Q^{-s_2-s_3+3\varepsilon_1-s_1}, |R''(w_1)|_p \ll Q^{-s_3+3\varepsilon_1-s_1}. \tag{24}$$

Разложим полиномы  $R_j(u)$  и их производные в ряд Тейлора в точках  $\alpha_1, w_1$  на интервале  $I$  и на цилиндре  $K$ . Получим выполнение неравенств (23) и (24) с заменой  $d$  на  $x$  и  $w_1$  на  $w$ . Последнее неравенство в (23) показывает, что старший коэффициент  $b_3$  полиномов  $R_j(x)$  удовлетворяет неравенству  $|b_3| \ll Q^{1-s_1}$ . Обозначим  $c_{10} Q^{1-s_1}$  через  $Q_1$ , и во всех неравенствах (23), (24) и в равенствах  $\mu_1 I = Q^{-\sigma_1}$ ,  $\mu_2 K = Q^{-\sigma_2}$  заменим  $Q$  на  $Q_1$ . Последовательно рассматривая  $R_j^{(i)}(d)$  от  $i = 3$  до  $i = 1$ , а затем и первое неравенство в (23), получим  $H(R_j) < c_{11} Q^{1-s_1}$ . Среди  $c_{11} Q^{5\varepsilon/8}$  найдется не менее  $c(\varepsilon) Q^{5\varepsilon/8}$  полиномов с одинаковыми векторами  $\bar{m}', \bar{s}'$ . Если среди  $c(\varepsilon) Q^{5\varepsilon/8}$  полиномов найдутся хотя бы два без общих корней, то применим к ним лемму 3. Получим противоречие. Если такие два полинома не найдутся, то полиномы  $R_j(u)$  приводимые, и один из делителей  $R_j(u)$  полином первой степени  $R_j(u) = (a_j u + b_j) t_{2j}(u)$ . Перейдем от оценок  $|R_j(x)|$  и  $|R_j(w)|_p$  к оценкам сверху для многочленов первой и второй степеней. Вновь, как, например, в [5; 9], получим противоречие.

## Список использованной литературы

1. *Ван дер Варден, Б. Л.* Алгебра / Б. Л. Ван дер Варден. – Москва: Наука, 1976. – 648 с.
2. *Колёда, Д. В.* Об оценке сверху для числа целочисленных многочленов третьей степени с заданной границей для дискриминантов / Д. В. Колёда // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 3. – С. 10–16.
3. *Бересневич, В. В.* Совместные приближения нуля целочисленным многочленом, его производной и малые значения дискриминантов / В. В. Бересневич, В. И. Берник, Ф. Гётце // Докл. НАН Беларусі. – 2010. – Т. 54, № 2. – Р. 26–28.
4. *Bernik, V. I.* On the divisibility of the discriminant of an integral polynomial by prime powers / V. I. Bernik, F. Goetze, O. S. Kukso // Lith. Math. J. – 2008. – Vol. 48. – P. 380–396.
5. *Budarina, N.* On the number of polynomials with small discriminants in the euclidean and  $p$ -adic metrics / N. Budarina, D. Dickinson, Jin Yuan // Acta Mathematica Sinica. – 2012. – Vol. 28, Issue 3. – P. 469–476.
6. *Спринджук, В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск: Наука и техника, 1967. – 184 с.
7. *Bernik, V. I.* Metric Diophantine approximation on manifolds / V. I. Bernik, M. M. Dodson. – Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
8. *Берник, В. И.* Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник // Acta Arith. – 1983. – Vol. 42, Issue 3. – P. 219–253.
9. *Берник, В. И.* Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах / В. И. Берник, Ф. Гётце // Изв. РАН. Сер. матем. – 2015. – Т. 79, № 1. – С. 21–42.

Поступило в редакцию 20.06.2016

УДК 511.42

А. В. ЛУНЕВИЧ

## О КОЛИЧЕСТВЕ ТОЧЕК С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ ВНУТРИ ПОЛОСЫ МАЛОЙ МЕРЫ В ПОЛЕ $\mathbb{Q}_p$

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
lunevichav@gmail.com

В данной работе исследуется оценка сверху количества точек с целыми  $p$ -адическими сопряженными алгебраическими координатами внутри полосы малой меры, около нормальной по Малеру кривой.

*Ключевые слова:* целые  $p$ -адические числа, точки с алгебраическими координатами, диофантовы приближения.

A. V. LUNEVICH

## ABOUT THE NUMBER OF POINTS WITH THE ALGEBRAIC COORDINATES IN A STRIP OF SMALL MEASURE IN THE FIELD

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
lunevichav@gmail.com

In this article, we consider the upper bound on the number of points with the integer  $p$ -adic conjugate algebraic coordinates in a strip of small measure, near the curve normal by Mahler.

*Keywords:* integral  $p$ -adic number, the point with algebraic coordinates, Diophantine approximations.

Задачи о количестве целых точек внутри фигур и тел в евклидовых пространствах берут свое начало в работах Дирихле и Гаусса. Многие такие задачи или уже решены, или имеют трудно улучшаемые оценки сверху и снизу, например, проблема круга Гаусса и проблема делителей Дирихле. В этих задачах получены оценки сверху и снизу для остаточного члена в асимптотической формуле, причем верхняя оценка постепенно улучшается и приближается к нижней [1]. За последние годы было получено много новых результатов об оценках количества алгебраических чисел в коротких интервалах [2; 3]. Недавно появилась новая работа о количестве рациональных точек внутри областей в  $\mathbb{R}^2$  [4]. Задачи подобного типа имеют место не только в евклидовых пространствах. Например, в [5] доказана теорема Хинчиновского типа в поле  $p$ -адических чисел.

В данной работе мы рассмотрим задачу, аналогичную задаче в [2] в поле  $p$ -адических чисел.

Далее мы будем использовать обозначения как в [6]. Зафиксируем простое число  $p \geq 2$ ,  $\mathbb{Q}_p$  – поле  $p$ -адических чисел,  $|x|_p$  –  $p$ -адическая норма числа  $x \in \mathbb{Q}_p$ ,  $\mathbb{Z}_p$  – кольцо целых  $p$ -адических чисел. Цилиндром в  $\mathbb{Z}_p$  с центром  $d \in \mathbb{Z}_p$  и радиусом  $r > 0$  будем называть множество

$$\{\omega \in \mathbb{Z}_p : |d - \omega|_p \leq r\}.$$

В поле целых рациональных чисел  $p$ -адической нормой числа  $x \in \mathbb{Z}$  называется величина  $|x|_p = p^{-\alpha}$ , где  $p^\alpha$  – максимальная степень простого числа  $p$ , входящая в разложение на множители числа  $x$ . В поле рациональных чисел  $p$ -адической нормой числа  $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$  является величина  $\left| \frac{x}{y} \right|_p = \frac{|x|_p}{|y|_p}$ .

Известно, что поле  $\mathbb{Q}_p$  является локально компактным и на нем можно определить Мэру Хаара, обозначаемую через  $\mu$  и нормированную так, что  $\mu\mathbb{Z}_p = 1$  [7].

О п р е д е л е н и е. Функция  $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$  называется нормальной, если она имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n,$$

где  $a, a_n \in \mathbb{Z}_p$  для всех  $n$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|_p = 0.$$

Данное определение было предложено Малером [8].

Нам понадобятся два важных свойства нормальных функций:

- 1) производные  $f^{(k)}(x)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) также являются нормальными функциями;
- 2) нормальная функция над  $\mathbb{Z}_p$  раскладывается в ряд Тейлора [9], что неверно для произвольной  $p$ -адической функции [10, с. 223].

Пусть  $n$  – некоторое фиксированное натуральное число.

Рассмотрим полином от  $p$ -адической переменной степени  $n$  с целыми рациональными коэффициентами:

$$P(\omega) = a_n \omega^n + a_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + a_1 \omega + a_0.$$

Высотой такого многочлена будем называть величину  $H(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ . Зафиксируем достаточно большое действительное положительное число  $Q$ . Множество всех полиномов степени не превосходящей  $n$  и высотой, не превосходящей  $Q$ , обозначим  $\mathcal{P}_n(Q)$ . Точку

$$\bar{\gamma} = (\gamma_1; \gamma_2; \dots; \gamma_k) \in \mathbb{Z}_p^k$$

будем называть алгебраической точкой, если  $\gamma_i, i = 1, \dots, k$  – корни одного и того же неприводимого полинома  $P(\omega) = a_n \omega^n + a_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + a_0$  и  $n \geq k$ . Для каждой такой точки определим ее высоту  $H(\bar{\gamma}) = H(P)$ , где  $P(\gamma_i) = 0, i = 1, \dots, k$  и  $P(\omega)$  – минимальный многочлен чисел  $\gamma_i$ .

Обозначим  $A_n^k(Q)$  множество всех алгебраических точек  $\bar{\gamma}$  степени не превосходящей  $n$  и высоты, не превосходящей  $Q$ , т. е.

$$A_n^k(Q) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{Z}_p^k : \deg(\bar{\gamma}) \leq n, H(\bar{\gamma}) \leq Q\}.$$

Кроме того, через  $A_n^k(Q, D) = A_n^k(Q) \cap D$  обозначим множество алгебраических точек из  $A_n^k(Q)$ , которые принадлежат некоторой области  $D \subset \mathbb{Z}_p^k$ .

Для каждого натурального  $x$  определим величину  $l_p(x) = p^{\lfloor \log_p x \rfloor}$  такую, что  $p^l \leq x \leq p^{l+1}$ .

Т е о р е м а 1. При  $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$  для любого цилиндра  $\Pi = I_1 \times I_2 \subset \mathbb{Z}_p^2$  с центром в точке  $\bar{d}$  и  $\mu I_i = p^{\lfloor \log_p Q^{-\lambda_i} \rfloor}, i = 1, 2$ , при  $Q > Q_0(n, \lambda, \bar{d})$  справедлива оценка

$$\# A_n^2(Q, \Pi) \leq c_1 Q^{n+1} \mu \Pi,$$

где  $c_1 = 4 \cdot 2^{2n} n^2 + 1$ .

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится следующая лемма.

Л е м м а. Обозначим через  $G = G(\bar{\gamma}, T) \subset \mathbb{Z}_p^2$  (где  $\bar{\gamma} = (\gamma_1; \gamma_2) \in \mathbb{Z}_p^2$  – фиксированная точка из  $\mathbb{Z}_p^2$ ) множество точек  $\bar{b} = (b_1; b_0) \in \mathbb{Z}_p^2$ , таких, что выполняются следующие неравенства:

$$\begin{cases} |b_1 \gamma_1 + b_0|_p \leq T_1; \\ |b_1 \gamma_2 + b_0|_p \leq T_2; \\ |\gamma_1 - \gamma_2|_p \geq \varepsilon > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Пусть  $|b_1|, |b_0| \leq Q$ , где  $Q$  – достаточно большое натуральное число. Тогда справедлива оценка

$$\# G \leq \max\{2\varepsilon^{-1} Q T_1; 1\} \max\{2Q T_2; 1\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без потери общности будем считать, что  $T_1 \geq T_2$ . Рассмотрим следующую систему линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} b_1\gamma_1 + b_0 = l_1, \\ b_1\gamma_2 + b_0 = l_2, \end{cases} \quad (2)$$

где  $|l_i|_p \leq T_i, i=1, 2$ . Ясно, что при таком условии решение системы (2) удовлетворяет неравенствам (1). В таком случае задача сводится к оценке количества целых решений системы (2) при различных  $|l_i|_p \leq T_i, i=1, 2$ .

Рассмотрим разность уравнений (2):

$$b_1(\gamma_1 - \gamma_2) = l_1 - l_2.$$

При  $|\gamma_1 - \gamma_2|_p \geq \varepsilon > 0$  и  $|l_i|_p \leq T_1$  верно

$$|b_1|_p = \frac{|l_1 - l_2|_p}{|\gamma_1 - \gamma_2|_p} \leq \varepsilon^{-1} T_1.$$

Тогда  $\#b_1 \leq 2\varepsilon^{-1} T_1 Q$ .

Зафиксируем одно из значений  $b_1$  и оценим количество возможных целых значений переменной  $b_0$ . Рассмотрим систему (2) для двух различных наборов  $(b_1, b_{0,0})$  и  $(b_1, b_{0,j})$ :

$$\begin{cases} b_1\gamma_1 + b_{0,0} = l_{1,0}, \\ b_1\gamma_1 + b_{0,j} = l_{0,j}, \\ b_1\gamma_2 + b_{0,0} = l_{1,0}, \\ b_1\gamma_2 + b_{0,j} = l_{1,j}. \end{cases}$$

Вычтем второе уравнение из первого и четвертое уравнение из третьего. Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} |b_{0,0} - b_{0,j}|_p = |l_{1,0} - l_{1,j}|_p \leq T_1, \\ |b_{0,0} - b_{0,j}|_p = |l_{2,0} - l_{2,j}|_p \leq T_2. \end{cases}$$

Данные неравенства означают, что  $\#b_0 \leq 2T_2 Q_0$ . Из вышесказанного следует, что

$$\#G \leq \max\{2\varepsilon^{-1} T_1 Q; 1\} \max\{2T_2 Q; 1\}.$$

Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 1.** Предположим, что  $\#A_n^2(Q, \Pi) > c_2 Q^{n+1} \mu \Pi$ . Рассмотрим алгебраическую точку  $\bar{\gamma} \in A_n^k(Q, \Pi)$  с минимальным многочленом  $P(t)$  и оценим его значение в точке  $\bar{d}$ . Для этого разложим  $P(t)$  в ряд Тейлора в цилиндре  $I_i, i=1, 2$ :

$$P(d_i) = P(\gamma_i) + P'(\gamma_i)(d_i - \gamma_i) + \frac{1}{2} P''(\gamma_i)(d_i - \gamma_i)^2 + \dots + \frac{1}{n!} P^{(n)}(\gamma_i)(d_i - \gamma_i)^n.$$

Оценим сверху каждое слагаемое в этом разложении.

Для оценки сверху  $\left| \frac{1}{k!} P^{(k)}(\gamma_i) \right|_p$  запишем общий вид производной  $P^{(k)}(\gamma_i)$ :

$$P^{(k)}(\gamma_i) = \frac{n!}{(n-k)!} a_n \gamma_i^{(n-k)} + \dots + \frac{j!}{(j-k)!} a_j \gamma_i^{j-k} + \dots + \frac{k!}{(k-k)!} a_k.$$

Отсюда видно, что многочлен  $\frac{1}{k!} P^{(k)}(\gamma_i)$  имеет целые рациональные коэффициенты  $\frac{j!}{k!(j-k)!} a_j$ , где  $k \leq j \leq n$ . Так как многочлен  $\frac{1}{k!} P^{(k)}(\gamma_i)$  имеет целые рациональные коэффициенты и  $\gamma_i, d_i \in I_i \subset \mathbb{Z}_p$ , то при  $Q > Q_0(\bar{d}, \bar{\gamma}, n)$ , верны следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{k!} P^{(k)}(\gamma_i) \right|_p &\leq \max_{k \leq j \leq n} \left| \frac{j!}{k!(j-k)!} a_j \gamma_i^{j-k} \right|_p \leq 1, \\ \left| \frac{1}{k!} P^{(k)}(\gamma_i)(d_i - \gamma_i)^k \right|_p &\leq \mu I_i. \end{aligned}$$

Тогда

$$|P(d_i)|_p \leq \max_{0 \leq k \leq n} \left\{ \left| \frac{1}{k!} P^{(k)}(\gamma_i) (d_i - \gamma_i)^k \right|_p \right\} \leq \mu I_i. \quad (3)$$

Зафиксируем вектор  $\bar{a}_1 = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_2)$ , где  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2$  – коэффициенты многочленов  $P(t) \in \mathcal{P}(Q)$ , для которых выполняются оценки (3). Рассмотрим подкласс многочленов с одним и тем же вектором коэффициентов  $\bar{a}_1$ :  $P(t) \in \mathcal{P}_n(Q, \bar{a}_1)$ . Количество таких подклассов можно оценить как

$$\#\bar{a}_1 = (2Q+1)^{n-1} < 2^{2n} Q^{n-1}. \quad (4)$$

Отметим, что каждой точке из множества  $A_n^2(Q, \Pi)$  соответствует многочлен  $P(t) \in \mathcal{P}_n(Q)$ . С другой стороны, каждому многочлену  $P(t) \in \mathcal{P}_n(Q)$  может соответствовать не более чем  $n^2$  точек из множества  $A_n^2(Q, \Pi)$ . Тогда с учетом оценки (4) и предположения о количестве элементов множества  $A_n^2(Q, \Pi)$ , из принципа Дирихле следует, что найдется такой вектор  $\bar{a}_{1,0}$ , для которого верно

$$\#\mathcal{P}_n(Q, \bar{a}_{1,0}) \geq c_2 2^{-2n} n^{-2} Q^2 \mu \Pi. \quad (5)$$

Оценим величину  $\#\mathcal{P}_n(Q, \bar{a}_{1,0})$  сверху. Для этого выберем некоторый многочлен  $P_0 \in \mathcal{P}_n(Q, \bar{a}_{1,0})$  и рассмотрим разность многочленов  $P_0$  и  $P_j \in \mathcal{P}_n(Q, \bar{a}_{1,0})$  в точках  $d_i, i = 1, 2$ . Из оценок (3) следует

$$|P_0(d_i) - P_j(d_i)|_p = |(a_{0,1} - a_{j,1})d_i + (a_{0,0} - a_{j,0})|_p \leq \mu I_i.$$

Тогда количество различных полиномов  $P_j \in \mathcal{P}_n(Q, \bar{a}_{1,0})$  не превосходит количества целых решений системы неравенств

$$\begin{cases} |P_0(d_1) - P_j(d_1)|_p = |(a_{0,1} - a_{j,1})d_1 + (a_{0,0} - a_{j,0})|_p \leq \mu I_1, \\ |P_0(d_2) - P_j(d_2)|_p = |(a_{0,1} - a_{j,1})d_2 + (a_{0,0} - a_{j,0})|_p \leq \mu I_2. \end{cases}$$

Воспользуемся леммой при  $T_1 = \mu I_1, T_2 = \mu I_2$ . Так как  $\mu I_i = p^{\lfloor \log_p Q^{-\lambda_i} \rfloor}, i = 1, 2$ , и  $\lambda_i < 1$ , то  $QT_i = Q\mu I_i = Qp^{\lfloor \log_p Q^{-\lambda_i} \rfloor} > 1$ . В таком случае получаем

$$j \leq 4|d_1 - d_2|_p Q^2 \mu \Pi.$$

Следовательно,  $\#\mathcal{P}_n(Q, \bar{a}_{1,0}) \leq 4Q^2 \mu \Pi$ , что противоречит неравенству (5) при  $c_1 = 4 \cdot 2^{2n} n^2 + 1$ . Это означает, что  $\#A_n^2(Q, \Pi) \leq c_1 Q^{n+1} \mu \Pi$ .

Теорема 1 доказана.

Пусть  $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$  – функция от  $p$ -адической переменной. Зафиксируем некоторое действительное число  $\tau \in (0, 1)$ . Обозначим через  $M_f^n(Q, \tau)$  множество всех алгебраических точек  $\bar{\gamma} \in \mathbb{Z}_p^2$ , которые удовлетворяют условиям:

- 1)  $H(\bar{\gamma}) \leq Q$ ;
- 2)  $\deg(\bar{\gamma}) \leq n$ ;
- 3)  $|f(\gamma_1) - \gamma_2|_p \leq p^{\lfloor \log_p Q^{-\tau} \rfloor}$ .

Таким образом

$$M_f^n(Q, \tau) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{Z}_p^2 : |f(\gamma_1) - \gamma_2|_p \leq p^{\lfloor \log_p Q^{-\tau} \rfloor}, H(\bar{\gamma}) \leq Q, \deg(\bar{\gamma}) \leq n, \tau \in (0, 1)\}.$$

**Т е о р е м а 2.** Если функция  $f(\omega)$  является нормальной, то имеет место неравенство

$$\#M_f^n(Q, \tau) \leq c_2 Q^{n+1-\tau},$$

где  $c_2$  – константа, зависящая только от  $n$ .

Данная теорема доказывается применением теоремы 1, после покрытия области  $D_f(Q, \tau) = \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{Z}_p^2 : |f(\omega_1) - \omega_2|_p \leq p^{\lfloor \log_p Q^{-\tau} \rfloor}\}$  цилиндрами  $\Pi$ .

### Список использованной литературы

1. Карацуба, А. А. Основы аналитической теории чисел / А. А. Карацуба. – М.: Наука, 1983. – 2-е изд. – 240 с.
2. Берник, В. И. Распределение алгебраических чисел и точек с алгебраическими сопряженными координатами в областях малой меры / В. И. Берник, Ф. Гётце, А. Г. Гусакова / Ин-т математики НАН Беларуси, препринт № 1 (578). – Минск, 2016.
3. Гётце, Ф. Алгебраические числа в коротких интервалах / Ф. Гётце, А. Г. Гусакова // Докл. НАН Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 4. – С. 11–17.
4. Beresnevich, V. Metric Diophantine Approximation : aspects of recent work / V. Beresnevich, F. Ramirez, S. Velani; ed. D. Badziahin, A. Gorodnik, N. Peyserimhoff. – Cambridge: Cambridge University Press, 2016.
5. Beresnevich, V. On approximation of  $p$ -adic numbers by  $p$ -adic algebraic numbers / V. Beresnevich, V. I. Bernik, E. I. Kovalevskaya // Journal of Number Theory. – 2005. – Vol. 111, N 1. – P. 33–56.
6. Бересневич, В. В. О диофантовых приближениях зависимых величин в  $p$ -адическом случае / В. В. Бересневич, Э. И. Ковалевская // Матем. заметки. – 2003. – Т. 73, вып. 1. – С. 22–37.
7. Спринджук, В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск: Наука и техника, 1967.
8. Mahler, K.  $p$ -Adic Numbers and Their Functions / K. Mahler // Cambridge Tracts in Math. – Vol. 76. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981.
9. Adams, W. W. Transcendental numbers in the  $p$ -adic domain / W. W. Adams. // Amer. J. Math. – 1966. – Vol. 88, N 2. – P. 279–308.
10. Mahler, K. Über transzendente  $p$ -adische Zahlen / K. Mahler // Composito Math. – 1935. – Vol. 2. – P. 259–275.

Поступило в редакцию 18.08.2016

УДК 519.63

Ф. Ж. ГАСПАР<sup>1</sup>, П. П. МАТУС<sup>2</sup>, В. Т. К. ТУЕН<sup>3</sup>, Л. М. ХИЕУ<sup>3</sup>**МОНОТОННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ СИСТЕМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ***(Представлено академиком И. В. Гайшуном)*<sup>1</sup>Университет Сарагосы, Испания

paco111@gmail.com

<sup>2</sup>Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь; Католический университет Люблина, Польша

matus@im.bas-net.by

<sup>3</sup>Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

Vokimtuyen188@gmail.com; lmhieuktdn@gmail.com

В настоящей работе для канонической формы векторно-разностных схем общего вида при условиях положительности матричных коэффициентов получены двусторонние оценки сеточного решения при произвольных незначительных входных данных задачи. Полученные результаты применяются для получения двусторонних оценок и априорных оценок в норме  $C$  конкретных монотонных векторно-разностных схем, аппроксимирующих слабо связанные системы эллиптических и параболических уравнений с граничными условиями Дирихле.

*Ключевые слова:* принцип максимума, двусторонняя оценка, монотонная разностная схема, слабо связанная система.

FRANCISCO GASPAR<sup>1</sup>, PIOTR MATUS<sup>2</sup>, VO THI KIM TUYEN<sup>3</sup>, LE MINH HIEU<sup>3</sup>**MONOTONE DIFFERENCE SCHEMES FOR SYSTEMS OF ELLIPTIC AND PARABOLIC EQUATIONS**<sup>1</sup>University of Saragosa, Spaine

paco111@gmail.com

<sup>2</sup>Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus; Catholic University of Lublin, Poland

matus@im.bas-net.by

<sup>3</sup>Belarusian State University, Minsk, Belarus

Vokimtuyen188@gmail.com; lmhieuktdn@gmail.com

In this article, for the canonical form of vector-difference schemes under the positivity conditions of matrix coefficients the two-sided estimates for an approximate solution at the arbitrary non sign-constant input data of the problem are obtained. The obtained results are used for deriving two-sided estimates and *a priori* estimates in the norm  $C$  of monotone vector-difference schemes that approximate the weakly coupled systems of elliptic and parabolic equations with the Dirichlet boundary conditions.

*Keywords:* maximum principle, two-sided estimate, monotone difference scheme, weakly coupled system.

**Введение.** Вычислительные методы, удовлетворяющие сеточному принципу максимума, принято называть монотонными [1]. Отметим, что принцип максимума позволяет не только устанавливать однозначную разрешимость соответствующих разностных задач, но и получать важные теоретические априорные оценки устойчивости и сходимости разностного решения в наиболее сильной равномерной метрике  $C$  или  $L_\infty$ . Монотонные разностные схемы в свою очередь играют важную роль при математическом моделировании прикладных задач, так как они позволяют получить численное решение без нефизических осцилляций [2].

Исследованию монотонных разностных схем для линейных эллиптических и параболических уравнений в скалярном случае посвящено большое число работ (см., напр., [3]). Тем не менее, ввиду трудности проблемы в научной литературе практически отсутствуют работы по разработке аналогичных алгоритмов для системы эллиптических уравнений, классическим примером которых является система уравнений стационарной упругости (уравнения Ламэ).

Настоящая работа посвящена разработке теории монотонных разностных схем, аппроксимирующих так называемые слабо связанные линейные эллиптические и квазилинейные параболические системы уравнений [4]. Аналогично скалярному случаю [1] вводится каноническая форма векторно-разностных схем и дается определение ее монотонности, тесно связанное со свойством положительности разностного решения. При выполнении условий положительности матричных коэффициентов устанавливаются двусторонние оценки разностного решения таких векторно-разностных уравнений и доказана важная априорная оценка в равномерной форме  $C$ . Полученные результаты применяются к анализу свойств монотонности разностных схем, аппроксимирующих на неравномерных сетках со вторым порядком системы линейных эллиптических и квазилинейных параболических уравнений.

**Принцип максимума для векторно-разностных схем с незначкопостоянными входными данными.** Пусть в  $n$ -мерном евклидовом пространстве задано конечное количество точек – сетка  $\Omega_h$ . Каждой точке  $x \in \Omega_h$  сопоставим один и только один шаблон  $\mathcal{M}(x)$  – любое подмножество  $\Omega_h$ , содержащее данную точку. Окрестностью точки  $x$  назовем множество  $\mathcal{M}'(x) = \mathcal{M}(x) \setminus x$ . Далее, каждой точке  $x \in \Omega_h$  соотносится одно и только одно векторное уравнение вида

$$A(x)\vec{Y}(x) = \sum_{\xi \in \mathcal{M}'(x)} B(x, \xi)\vec{Y}(\xi) + \vec{F}(x), \quad x \in \Omega_h, \quad (1)$$

аналогично скалярному случаю, называемое канонической формой записи векторно-разностной схемы [1]. Здесь матрицы  $A(x) = \{a_{ij}(x)\}_{m \times m}$ ,  $B(x, \xi) = \{b_{ij}(x, \xi)\}_{m \times m}$  и вектор правой части  $\vec{F}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))^T$  – заданы, неизвестная векторная функция  $\vec{Y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x))^T$  принимает вещественные значения. Точка  $x$  называется граничным узлом сетки, если в этой точке задано значение векторной функции  $\vec{Y}(x)$ , т. е.

$$\vec{Y}(x) = \vec{\mu}(x), \quad x \in \gamma, \quad (2)$$

где  $\gamma$  – множество граничных узлов,  $\vec{\mu}(x) = (\mu_1(x), \mu_2(x), \dots, \mu_m(x))^T$ .

**О п р е д е л е н и е.** Векторно-разностная схема (1), (2) называется монотонной, если для ее решения выполнены следующие предложения:

если  $\vec{F}(x) \geq 0$ ,  $x \in \Omega_h$ ,  $\vec{\mu}(x) \geq 0$ ,  $x \in \gamma$ , то  $\vec{Y}(x) \geq 0$ ,  $x \in \overline{\Omega}_h$ ,  $\overline{\Omega}_h = \Omega_h \cup \gamma$ ;

если  $\vec{F}(x) \leq 0$ ,  $x \in \Omega_h$ ,  $\vec{\mu}(x) \leq 0$ ,  $x \in \gamma$ , то  $\vec{Y}(x) \leq 0$ ,  $x \in \overline{\Omega}_h$ .

Введем матрицы  $D^{(1)}(x) = \{d_{ij}^{(1)}(x)\}_{m \times m}$  и  $D(x) = \text{diag}\{d_{11}(x), d_{22}(x), \dots, d_{mm}(x)\}$ , определяемые следующим образом:

$$D^{(1)}(x) = A(x) - \sum_{\xi \in \mathcal{M}'(x)} B(x, \xi), \quad d_{ii}(x) = \sum_{j=1}^m d_{ij}^{(1)}(x), \quad i = \overline{1, m}.$$

Матрицу  $A(x)$  можно переписать в виде  $A(x) = A^{(1)}(x) - A^{(2)}(x)$ , где

$$A^{(1)}(x) = \text{diag}\{a_{11}^{(1)}(x), a_{22}^{(1)}(x), \dots, a_{mm}^{(1)}(x)\}, \quad a_{ii}^{(1)}(x) = a_{ii}(x), \quad i = \overline{1, m},$$

$$A^{(2)}(x) = \{a_{ij}^{(2)}(x)\}_{m \times m}, \quad a_{ii}^{(2)}(x) = 0, \quad a_{ij}^{(2)}(x) = -a_{ij}(x), \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, m}.$$

Тогда векторное уравнение (1) запишем в виде

$$A^{(1)}(x)\vec{Y}(x) = \sum_{\xi \in \mathcal{M}'(x)} B(x, \xi)\vec{Y}(\xi) + A^{(2)}(x)\vec{Y}(x) + \vec{F}(x), \quad x \in \Omega_h. \quad (3)$$

Будем предполагать выполнение следующих условий положительности матричных коэффициентов (т. е. все элементы матрицы положительны [5])

$$A^{(1)}(x) > 0, \quad A^{(2)}(x) \geq 0, \quad B(x, \xi) > 0, \quad D(x) > 0 \quad \text{для всех } \xi \in \mathcal{M}'(x), \quad (4)$$

и определим

$$\|\vec{V}\|_{\overline{C}} = \max_{1 \leq j \leq m} \left( \max_{x \in \overline{\Omega}_h} |v_j(x)| \right), \quad \max_{x \in \Omega_h} \vec{V}(x) = \max_{1 \leq j \leq m} \left( \max_{x \in \Omega_h} v_j(x) \right), \quad \min_{x \in \Omega_h} \vec{V}(x) = \min_{1 \leq j \leq m} \left( \min_{x \in \Omega_h} v_j(x) \right).$$

**Т е о р е м а 1.** Пусть выполнены условия положительности матричных коэффициентов (4). Тогда максимальное и минимальное значения решения векторно-разностной схемы (1), (2) принадлежат интервалу изменения входных данных

$$m_1 \leq y_j(x) \leq m_2, \quad x \in \overline{\Omega}_h, \quad j = \overline{1, m}, \quad (5)$$

где

$$m_1 = \min \left\{ \min_{x \in \gamma} \bar{\mu}(x), \min_{x \in \Omega_h} (D^{-1}(x)\bar{F}(x)) \right\}, \quad m_2 = \max \left\{ \max_{x \in \gamma} \bar{\mu}(x), \max_{x \in \Omega_h} (D^{-1}(x)\bar{F}(x)) \right\}.$$

**С л е д с т в и е 1.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда векторно-разностная схема (1), (2) монотонна и для нее имеет место оценка в сеточном аналоге нормы  $C$

$$\|\bar{Y}\|_C \leq \max \left\{ \|\bar{\mu}\|_{C_\gamma}, \|D^{-1}\bar{F}\|_C \right\}.$$

Доказательство монотонности векторно-разностной схемы проводится на основе анализа двусторонней оценки (5).

**Разностные схемы на неравномерных сетках для слабо связанной эллиптической системы одномерных уравнений конвекции–диффузии.** Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{aligned} -L\bar{U} &= C\bar{U} + \bar{F}(x), \quad 0 < x < l, \\ \bar{U}(0) &= \bar{\mu}^{(1)}, \quad \bar{U}(l) = \bar{\mu}^{(2)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L &= \text{diag}(L_1, L_2, \dots, L_m), \quad L_\alpha = L_\alpha^D + L_\alpha^C, \quad \alpha = \overline{1, m}, \\ L_\alpha^D &= \frac{d}{dx} \left( k_\alpha(x) \frac{d}{dx} \right), \quad L_\alpha^C = r_\alpha(x) \frac{d}{dx}, \quad 0 < k_1 \leq k_\alpha \leq k_2, \\ \bar{U}(x) &= (u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x))^T, \quad C = \{c_{ij}\}_{m \times m}. \end{aligned}$$

Введем произвольную неравномерную сетку

$$\hat{\omega}_h = \hat{\omega}_h \cup \gamma_h, \quad \hat{\omega}_h = \{x_i = x_{i-1} + h_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1\}, \quad \gamma_h = \{x_0 = 0, \quad x_N = l\}.$$

Пусть  $\tilde{h}_i = 0,5(h_{i+1} + h_i)$ ,  $\bar{x}_i = x_i + \tilde{h}_i$ ,  $\tilde{h}_i = (h_{i+1} - h_i) / 3$ . Тогда справедливы следующие разложения:

$$v_{\bar{x}_i} - v(\bar{x}_i) = O(\tilde{h}_i^2), \quad v_{(\beta_1\beta_2)} - v(\bar{x}_i) = O(\tilde{h}_i^2), \quad h_{i+1}\beta_1 - h_i\beta_2 = \tilde{h}_i. \quad (6)$$

Далее будем использовать безындексные обозначения для независимой переменной  $x = x_i$ ,  $x_\pm = x_{i\pm 1}$  и для сеточных функций  $v = v_i = v(x_i)$ ,  $v^{(\pm 1)} = v(x_{i\pm 1})$ . С помощью (6) и дифференциального равенства  $(ku)' = 0,5((ku)'' + ku'' - k''u)$ , построим на обычном трехточечном шаблоне разностную схему второго порядка аппроксимации на неравномерной сетке  $\hat{\omega}_h$

$$-\Lambda_\alpha y_\alpha = c_{\alpha\alpha} y_{\alpha(\beta_5\beta_6)} + \sum_{j=1, j \neq \alpha}^m (c_{\alpha j} y_{j(\beta_1\beta_2)}) + \varphi_\alpha, \quad \alpha = \overline{1, m}, \quad (7)$$

$$y_\alpha(0) = \mu_\alpha^{(1)}, \quad y_\alpha(l) = \mu_\alpha^{(2)}, \quad \alpha = \overline{1, m}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha y_\alpha &= \kappa_\alpha \Lambda_\alpha^D y_\alpha + \Lambda_\alpha^C y_\alpha, \\ \Lambda_\alpha^D y_\alpha &= 0,5(k_{\alpha(\beta_1\beta_2)} y_{\alpha\bar{x}\hat{x}} + (k_\alpha y_\alpha)_{\bar{x}\hat{x}} - k_{\alpha\bar{x}\hat{x}} y_{\alpha(\beta_3\beta_4)}), \\ v_{(\beta_k\beta_{k+1})} &= \beta_k v_+ + (1 - \beta_k - \beta_{k+1}) v + \beta_{k+1} v_-, \quad k = 1, 3, 5, \\ \Lambda_\alpha^C y_\alpha &= \bar{b}_\alpha^+ a_\alpha^{(+1)} y_{\alpha x} + \bar{b}_\alpha^- a_\alpha y_{\alpha\bar{x}}, \quad \bar{b}_\alpha^\pm = \frac{r_\alpha^\pm(\bar{x})}{k_\alpha(\bar{x})}, \quad a_\alpha = k_\alpha(x - h/2), \\ r_\alpha^+(\bar{x}) &= 0,5(r_\alpha + |r_\alpha|) \geq 0, \quad r_\alpha^-(\bar{x}) = 0,5(r_\alpha - |r_\alpha|) \leq 0, \quad \varphi_\alpha = f_\alpha(\bar{x}), \\ \kappa_\alpha &= \frac{1}{1 + R_\alpha}, \quad R_\alpha = \bar{b}_\alpha^+ \frac{2h + h_+}{6} - \bar{b}_\alpha^- \frac{2h_+ + h}{6}. \end{aligned}$$

Переменные весовые множители  $\beta_{k,k+1}$ ,  $k = 1, 3, 5$ , выбираются из условий монотонности (4) и требования второго порядка аппроксимации (6)

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 0,5(|\tilde{h}| + \tilde{h}) / h_+, \quad \beta_2 = 0,5(|\tilde{h}| - \tilde{h}) / h, \\ \beta_3 &= 0,5(\tilde{h}k_{\alpha\bar{x}\hat{x}} - |\tilde{h}k_{\alpha\bar{x}\hat{x}}|) / (h_+k_{\alpha\bar{x}\hat{x}}), \quad \beta_4 = -0,5(\tilde{h}k_{\alpha\bar{x}\hat{x}} + |\tilde{h}k_{\alpha\bar{x}\hat{x}}|) / (hk_{\alpha\bar{x}\hat{x}}), \\ \beta_5 &= 0,5(\tilde{h} - |\tilde{h}|) / h_+, \quad \beta_6 = -0,5(\tilde{h} + |\tilde{h}|) / h.\end{aligned}$$

Запишем систему разностных уравнений (7) в каноническом виде

$$a_{\alpha\alpha}^{(1)}(x_i)y_{\alpha i} = \sum_{j=1}^m b_{\alpha j}^{(1)}(x_i)y_{j i-1} + \sum_{j=1}^m b_{\alpha j}^{(2)}(x_i)y_{j i+1} + \sum_{j=1}^m a_{\alpha j}^{(1)}(x_i)y_{j i} + \varphi_\alpha, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad \alpha = \overline{1, m},$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned}b_{\alpha j}^{(1)}(x_i) &= c_{\alpha j}\beta_{2i}, \quad b_{\alpha j}^{(2)}(x_i) = c_{\alpha j}\beta_{1i}, \quad j = \overline{1, m}, \quad j \neq \alpha, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ b_{\alpha\alpha}^{(1)}(x_i) &= 0,5\kappa_{\alpha i} \left( (k_{\alpha(\beta_{1i}\beta_{2i})} + k_{\alpha i-1}) / (\tilde{h}_i h_i) - \beta_{4i} k_{\alpha\bar{x}\hat{x}, i} \right) - \bar{b}_\alpha^- a_{\alpha i} / h_i + c_{\alpha\alpha}\beta_{5i}, \\ b_{\alpha\alpha}^{(2)}(x_i) &= 0,5\kappa_{\alpha i} \left( (k_{\alpha(\beta_{1i}\beta_{2i})} + k_{\alpha i+1}) / (\tilde{h}_i h_{i+1}) - \beta_{3i} k_{\alpha\bar{x}\hat{x}, i} \right) + \bar{b}_\alpha^+ a_{\alpha i+1} / h_{i+1} + c_{\alpha\alpha}\beta_{5i}, \\ a_{\alpha\alpha}^{(1)}(x_i) &= b_{\alpha\alpha}^{(1)}(x_i) + b_{\alpha\alpha}^{(2)}(x_i) - c_{\alpha\alpha}, \\ a_{\alpha j}^{(2)}(x_i) &= c_{\alpha j} - b_{\alpha j}^{(1)}(x_i) - b_{\alpha j}^{(2)}(x_i), \quad j = \overline{1, m}, \quad j \neq \alpha, \quad a_{\alpha\alpha}^{(2)}(x_i) = 0, \\ d_{\alpha\alpha}(x_i) &= a_{\alpha\alpha}^{(1)}(x_i) - \sum_{j=1}^m \left( b_{\alpha j}^{(1)}(x_i) + b_{\alpha j}^{(2)}(x_i) + a_{\alpha j}^{(2)}(x_i) \right) = -c_{\alpha\alpha} - \sum_{j=1, j \neq \alpha}^m c_{\alpha j}.\end{aligned}$$

Для разностной схемы (8) условия монотонности (4) выполнены при

$$c_{\alpha j} \geq 0, \quad j \neq \alpha, \quad c_{\alpha\alpha} < - \sum_{j=1, j \neq \alpha}^m c_{\alpha j}, \quad j, \alpha = \overline{1, m}. \quad (9)$$

**Теорема 2.** Пусть выполнено условие (9). Тогда для решения разностной схемы (7), (8) имеет место двусторонняя оценка

$$\min \left\{ \bar{\mu}^{(1)}, \bar{\mu}^{(2)}, \min_{0 \leq x \leq l} (D^{-1}\bar{F}) \right\} \leq y_j \leq \max \left\{ \bar{\mu}^{(1)}, \bar{\mu}^{(2)}, \max_{0 \leq x \leq l} (D^{-1}\bar{F}) \right\}, \quad j = \overline{1, m}.$$

**Следствие 2.** При выполнении условия (9) разностная схема (7), (8) безусловно монотонна и для нее справедлива априорная оценка

$$\|\bar{Y}\|_C \leq \max \left\{ |\bar{\mu}^{(1)}|, |\bar{\mu}^{(2)}|, \|D^{-1}\bar{F}\|_C \right\}.$$

**Разностные схемы на равномерных сетках для слабо связанной системы двумерных квазилинейных параболических уравнений.** В области  $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$ ,  $\bar{\Omega} = \{0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2\}$ ,  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ ,  $\Gamma = \{x_\alpha = 0, x_\alpha = l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$  для системы слабо связанных квазилинейных параболических уравнений рассмотрим начально-краевую задачу с условиями Дирихле следующего типа:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} &= L\bar{U} + C\bar{U} + \bar{F}(x, t), \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \\ \bar{U}(x, 0) &= \bar{U}_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ \bar{U}(x, t) &= \bar{\mu}(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad 0 < t \leq T,\end{aligned}$$

где

$$L_k u_k = \sum_{p=1}^m \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_{p\alpha}(\bar{U}) \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \right), \quad \alpha = 1, 2, \quad k_p(\bar{U}) = k_p(u_1, u_2, \dots, u_m).$$

Предполагаем, что  $\bar{F}(x, t) \geq 0$ ,  $\bar{\mu}(x, t) \geq 0$  и элементы матрицы  $C$  удовлетворяют условию (9). Коэффициенты  $k_{p\alpha}(\bar{U})$  ограничены снизу и сверху

$$0 < k_1^{(p\alpha)} \leq k_{p\alpha}(\bar{U}) \leq k_2^{(p\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m, \quad \forall \bar{U} \in [m_3, m_4], \quad k_1^{(p\alpha)}, k_2^{(p\alpha)} - \text{const},$$

$$m_3 = e^{-cT} \min \left\{ \min_{x \in \Gamma, 0 < t \leq T} \bar{\mu}(x, t), \min_{x \in \bar{\Omega}} \bar{U}_0(x) + T \min_{x \in \bar{\Omega}, 0 < t \leq T} \bar{F}(x, t) \right\}, \quad c = \max_{1 \leq i \leq m} \left( -\sum_{j=1}^m c_{ij} \right), \quad (10)$$

$$m_4 = \max \left\{ \max_{x \in \Gamma, 0 < t \leq T} \bar{\mu}(x, t), \max_{x \in \bar{\Omega}} \bar{U}_0(x) \right\} + T \max_{x \in \bar{\Omega}, 0 < t \leq T} \bar{F}(x, t). \quad (11)$$

Построим равномерную пространственно-временную сетку  $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_0, \tau N_0 = T\}, \quad \bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{t_0 = 0\}, \quad \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h,$$

$$\omega_h = \{x_{i_1 i_2} = (x_1^{i_1}, x_2^{i_2}), x_\alpha^{i_\alpha} = x_\alpha^{i_\alpha - 1} + h_\alpha, i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}, h_\alpha N_\alpha = l_\alpha, \alpha = 1, 2\},$$

$$\gamma_h = \{x_\alpha^0 = 0, x_\alpha^{N_\alpha} = l_\alpha, \alpha = 1, 2\} \setminus \{(0, 0), (0, l_2), (l_1, 0), (l_1, l_2)\}.$$

На сетке  $\bar{\omega}_{h\tau}$  исходную дифференциальную задачу аппроксимируем чисто неявной разностной схемой второго порядка аппроксимации

$$\bar{Y}_t = L_h \bar{Y}^{n+1} + C \bar{Y}^{n+1} + \bar{F}^{n+1}(x), \quad x \in \omega_h, \quad n = \overline{0, N_0 - 1}, \quad (12)$$

$$\bar{Y}(x, 0) = \bar{u}_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad \bar{Y}^{n+1}(x) = \bar{\mu}^{n+1}(x), \quad x \in \gamma_h, \quad n = \overline{0, N_0 - 1}. \quad (13)$$

Здесь

$$L_h = \text{diag}(L_{1h}, L_{2h}, \dots, L_{mh}), \quad L_{kh} \hat{y}_{k, i_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^2 (a_{k\alpha}(\bar{Y}_{i_\alpha}) \hat{y}_{k, \bar{x}_\alpha})_{x_\alpha, i_\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

$$a_{p\alpha, i_\alpha}^n = a_{p\alpha}(\bar{Y}_{i_\alpha}^n) = \frac{1}{2} (k_{p\alpha}(\bar{Y}_{i_\alpha}^n) + k_{p\alpha}(\bar{Y}_{i_\alpha}^{n-1})).$$

Для исследования монотонности и получения двусторонних оценок запишем разностную схему (12), (13) в виде (3)

$$A^{(1)} \bar{Y}_{i_1 i_2}^{n+1} = B_1 \bar{Y}_{i_1 - 1 i_2}^{n+1} + B_2 \bar{Y}_{i_1 i_2 - 1}^{n+1} + B_3 \bar{Y}_{i_1 + 1 i_2}^{n+1} + B_4 \bar{Y}_{i_1 i_2 + 1}^{n+1} + A^{(2)} \bar{Y}_{i_1 i_2}^{n+1} + \bar{G}_{i_1 i_2}^{n+1}, \quad i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, \quad (14)$$

$$\bar{Y}_{i_1 i_2}^0 = \bar{U}_{0 i_1 i_2}, \quad \bar{Y}_{i_1 i_2}^{n+1} = \bar{\mu}_{i_1 i_2}^{n+1}, \quad i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1.$$

Так как все входящие в (14) матрицы положительны (т. е. выполнены условия (4)), то разностная схема (12), (13) монотонна.

**Т е о р е м а 3.** Для решения разностной схемы (12), (13) имеет место двусторонняя оценка вида

$$m_3 \leq y_{k, i_1 i_2}^n \leq m_4, \quad n = \overline{0, N_0}, \quad k = \overline{1, m}, \quad i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2,$$

где  $m_3, m_4$  определяются из формул (10), (11).

**С л е д с т в и е 3.** Разностная схема (12), (13) монотонна и для нее справедлива априорная оценка в равномерной норме  $C$

$$\|\bar{Y}^n\|_{\bar{C}} \leq \max \left\{ \max_{1 \leq n \leq N_0} \|\bar{\mu}^n\|_{C_\gamma}, \|\bar{U}_0\|_{\bar{C}} \right\} + T \max_{1 \leq n \leq N_0} \|\bar{F}^n\|_{\bar{C}}, \quad n = \overline{1, N_0}.$$

**З а м е ч а н и е.** Аналогичным образом можно доказать оценки для решения разностной схемы (12), (13) в случаях  $\bar{\mu}(x, t) \leq 0, \bar{F}(x, t) \leq 0; \bar{\mu}(x, t) \geq 0, \bar{F}(x, t) \leq 0$  и  $\bar{\mu}(x, t) \leq 0, \bar{F}(x, t) \geq 0$ .

### Список использованной литературы

1. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977.
2. Матус, П. П. Монотонные разностные схемы для линейного параболического уравнения с граничными условиями смешанного типа / П. П. Матус, В. Т. К. Туен, Ф. Ж. Гаспар // Докл. НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 5. – С. 18–22.
3. Matus, P. P. The maximum principle and some its applications / P. P. Matus // Comput. Meth. Appl. Math. – 2002. – Vol. 2, N 1. – P. 50–91.
4. Mitidieri, E. Weakly Coupled Elliptic Systems and Positivity / Enzo Mitidieri, Guido Sweers // Mathematische Nachrichten. – 1995. – Vol. 173, Issue 1. – P. 259–286.
5. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

Поступило в редакцию 16.03.2016

УДК 517:983

Н. А. ЕВХУТА<sup>1</sup>, О. Н. ЕВХУТА<sup>1</sup>, П. П. ЗАБРЕЙКО<sup>2</sup>**NL-ПРОИЗВОДНЫЕ И NL-ПРИМИТИВНЫЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ И ИНТЕГРАЛЬНОМ ИСЧИСЛЕНИИ**

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

<sup>1</sup>Южно-Российский государственный политехнический университет им. М. И. Платова,  
Новочеркасск, Российская Федерация  
evhuta@gmail.com<sup>2</sup>Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
zabreiko@mail.ru

В сообщении для вещественных функций вещественного переменного изучаются взаимосвязи между классическими производными и введенными авторами NL-производными, производными обычных функций, рассматриваемых как обобщенные, производными Радона–Никодима. Устанавливаются теоремы об NL-производных суммы и произведения функций, а также об NL-производных сложной и обратной функций. Показано, как понятие NL-производных для функций между банаховыми пространствами сводится к понятию NL-производных скалярных функций одного переменного.

*Ключевые слова:* производные, производные Ньютона–Лейбница, производные Радона–Никодима, первообразные (неопределенный интеграл Курцвейля–Хенстока), множества меры нуль, ничтожные множества.

N. A. EVKHUTA<sup>1</sup>, O. N. EVKHUTA<sup>1</sup>, P. P. ZABREIKO<sup>2</sup>**NL-DERIVATIVES AND NL-PRIMITIVES IN CALCULUS**<sup>1</sup>Platov South-Russian State Polytechnic University, Novocherkassk, Russian Federation  
evhuta@gmail.com<sup>2</sup>Belarusian State University, Minsk, Belarus  
zabreiko@mail.ru

For the real functions of a real variable, the relations between the notions of ordinary derivatives and NL-derivatives (introduced by the authors), the derivatives of ordinary functions considered as distributions, and the Radon–Nikodym derivatives are studied. The theorems on the NL-derivatives of the sum and product of functions, as well as on the NL-derivatives of composite and inverse functions are given. The reduction of the notion of the NL-derivatives between the Banach spaces to the derivatives of the scalar functions of a real variable is considered as well.

*Keywords:* derivatives, Newton–Leibnitz derivatives, Radon–Nikodym derivatives, primitives (Kurzweil–Henstock indefinite integral), sets with zero measure, negligible sets.

В работах [1; 2] в связи с анализом сходимости метода Ньютона–Канторовича (см., напр., [3; 4]) приближенного решения операторных уравнений было предложено следующее определение обобщенной производной. Именно, если  $X$  и  $Y$  – банаховы пространства,  $\Omega$  – область в  $X$ ,  $f: \Omega \rightarrow Y$  – непрерывная функция,  $g: \Omega \rightarrow L(X, Y)$  – функция со значениями в пространстве  $L(X, Y)$  непрерывных линейных операторов из  $X$  в  $Y$ , то  $g$  называется NL-производной функции  $f$  (а функция  $f$  NL-примитивной функции  $g$ ), если для любого отрезка  $[a, b] = \{(1-\lambda)a + \lambda b : 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset \Omega$  с началом  $a$  и концом  $b$  верно равенство

$$f(b) - f(a) = \int_a^b g(x) dx = \int_0^1 g((1-\lambda)a + \lambda b)(b-a) d\lambda. \quad (1)$$

© Евхута Н. А., Евхута О. Н., Забрейко П. П., 2016.

Здесь первый интеграл понимается как криволинейный вдоль отрезка  $[a, b]$ , по определению равный второму, который является обычным интегралом от скалярной или векторной функции, определенный на отрезке  $[0, 1]$ .

Ниже на протяжении всего сообщения этот интеграл понимается в смысле Курцвейля–Хенстока [5–8]. Напомним определение этого интеграла. Число  $I$  называется *интегралом Курцвейля–Хенстока* от определенной на промежутке  $[a, b]$  скалярной функции  $f$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такая определенная на  $[a, b]$  положительная функция  $\delta(x)$ , что для всякого разбиения  $[a, b]$  точками  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_s = b$  с отмеченными точками  $\xi_\sigma \in [x_{\sigma-1}, x_\sigma]$ ,  $\sigma = 1, 2, \dots, s$ , удовлетворяющего условию  $[x_{\sigma-1}, x_\sigma] \subset (\xi_\sigma - \delta(x_\sigma), \xi_\sigma + \delta(x_\sigma))$  (такие разбиения всегда существуют!), верно неравенство  $|I - \sum_{\sigma=1}^s f(\xi_\sigma)(x_\sigma - x_{\sigma-1})| < \varepsilon$ . Аналогично определяется интеграл Курцвейля–Хенстока и для векторных функций с заменой в последнем неравенстве символа абсолютной величины  $|\cdot|$  на символ нормы  $\|\cdot\|$ . Понятие интеграла Курцвейля–Хенстока совпадает с введенными много ранее интегралами Перрона и Данжуа, определения которых были существенно более сложными. Интеграл Курцвейля–Хенстока обобщает понятие интегралов Римана и Лебега и охватывает различные понятия несобственных интегралов.

Для некоторых функций интеграл Курцвейля–Хенстока совпадает с собственным или несобственным интегралом Римана или интегралом Лебега в случае  $Y = \mathbb{R}$  или Бохнера в случае банахова пространства. Однако в общем случае использование интегралов Римана и Лебега/Boхнера существенно сужает класс NL-дифференцируемых функций.

Функция  $g$  равенствами (1) определяется неоднозначно; если функции  $g_1$  и  $g_2$  таковы, что на каждом отрезке  $[a, b] \subset \Omega$  они совпадают почти всюду, то

$$\int_0^1 g_1((1-\lambda)a + \lambda b)(b-a)d\lambda = \int_0^1 g_2((1-\lambda)a + \lambda b)(b-a)d\lambda,$$

и поэтому каждая из них является NL-производной функции  $f$ . Если такие функции считать эквивалентными, то производная  $g$  определяется с точностью до эквивалентности; для любой из них можно использовать обычное обозначение:  $g = f'$ . Отсюда, в частности, следует, что значения  $f'(x)$  NL-производной в точках  $x \in \Omega$  не определены. В свою очередь, нетрудно видеть, что в случае связной области  $\Omega$  NL-примитивная определяется с точностью до постоянной.

Метка NL в определениях NL-производной и NL-примитивной является сокращением имен Ньютона и Лейбница. Использование таких обозначений связано с тем, что в скалярном случае равенство (1) превращается по существу в обычную формулу Ньютона–Лейбница. Таким образом, предложенное определение обобщенной производной мотивируется тем, что оно по заданной непрерывной функции  $f$  приводит к функции  $f' = g$ , для которой справедлива формула Ньютона–Лейбница. Определение соответствующей примитивной по существу совпадает с понятием интеграла Курцвейля–Хенстока с переменным верхним пределом; ниже термином «неопределенный интеграл» называется именно интеграл Курцвейля–Хенстока с переменным верхним пределом.

Естественно возникает вопрос о том, как согласуются приведенные определения с классическими определениями анализа. Этот вопрос оказывается нетривиальным даже в скалярном случае, т. е. когда  $X = Y = \mathbb{R}$ .

Цель сообщения – рассмотреть взаимоотношения между классическими определениями производных и вышеописанным новым определением.

**NL-производные и классические производные.** Итак, рассмотрим скалярный случай ( $X = Y = \mathbb{R}$ ); пусть  $\Omega = (a, b)$  и  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Первым здесь является вопрос о том, когда обычная производная  $f'(x)$  функции  $f(x)$  является NL-производной.

**Т е о р е м а 1.** Пусть непрерывная функция  $f$  дифференцируема в каждой точке  $(a, b)$  за исключением счетного множества  $N$ . Тогда производная  $f'$ , доопределенная в точках  $N$  любым способом, является NL-производной.

Теорема непосредственно вытекает из соответствующего утверждения о справедливости формулы Ньютона–Лейбница для интеграла Курцвейля–Хенстока [5; 6].

Заметим, что теорема 1 становится неверной, если вместо интеграла Курцвейля–Хенстока в определении NL-производной использовать интеграл Римана или Лебега, так как производная функции может оказаться не интегрируемой по Риману или Лебегу (см., напр., [9–12]). Однако в случае интеграла Курцвейля–Хенстока каждая производная, согласно теореме 1, всегда интегрируема в смысле Курцвейля–Хенстока.

В рассматриваемом скалярном случае NL-производная определена с точностью до значений на множествах меры нуль. Требование о счетности «исключительного» множества  $N$  заменить предположением о том, что оно имеет нулевую меру, нельзя. Это показывает известный пример функции Кантора. Тем самым возникает вопрос о характеристике несчетных множеств  $N \subset (a, b)$  (если такие множества существуют), для которых утверждение теоремы 1 сохраняет силу.

Множество  $N \subset \mathbb{R}$  будем называть *ничтожным*, если оно имеет меру нуль и не содержит несчетных совершенных подмножеств. Счетные множества, очевидно, являются ничтожными. Существование несчетных ничтожных множеств и некоторые их свойства обсуждались в [10; 11; 13; 14]. Там же изучались и *вполне несовершенные* (т. е. не содержащие несчетных совершенных подмножеств) множества; заметим, что вполне несовершенные множества, не являющиеся ничтожными, неизмеримы.

**Т е о р е м а 2.** Пусть множество  $N \subset [a, b]$  обладает тем свойством, что каждая непрерывная функция  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , дифференцируемая во всех точках  $(a, b)$  за исключением множества  $N$ , является неопределенным интегралом от своей производной, доопределенной в точках  $N$  любым способом. Тогда множество  $N$  является ничтожным.

Эта теорема вытекает из подобия совершенных множеств канторовскому множеству нулевой меры. Это подобие позволяет построить непрерывную функцию, не являющуюся константой, для которой обычная производная почти всюду существует и равна нулю. Для такой функции существующая почти всюду производная является интегрируемой, однако для нее формула Ньютона–Лейбница очевидным образом не верна для любого промежутка, на котором она не постоянная, и, тем самым, эта функция не имеет NL-производной.

Достаточно естественной является гипотеза, что при замене предположения о счетности множества  $N$  на его ничтожность утверждение теоремы 1 сохранится. Тем более, что справедливо следующее утверждение (теорема Шеффера, см., напр., [11]): *если определенная на промежутке  $(a, b)$  непрерывная функция  $f(x)$  имеет производную в каждой точке, за исключением ничтожного множества  $N$ , и эта производная почти всюду равна нулю, то функция  $f$  является постоянной*. Из этой теоремы следует

**Т е о р е м а 3.** Пусть функция  $f$  дифференцируема в каждой точке  $(a, b)$  за исключением ничтожного множества  $N$ , и пусть производная функции  $f$ , доопределенная на множестве  $N$  произвольным образом, интегрируема в смысле Курцвейля–Хенстока. Тогда производная  $f'$ , доопределенная в точках  $N$  любым способом, является NL-производной.

Справедлив ли полный аналог теоремы 1 (при замене счетности множества  $N$  на его ничтожность), авторам неизвестно.

Классическая теорема Лебега [9; 14] фактически утверждает, что *существующая почти всюду производная абсолютно непрерывной функции является NL-производной*. Это утверждение может быть существенно усилено. Говорят [5; 6], что непрерывная функция  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  имеет на множестве  $N$  *ничтожную вариацию*, если для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать положительное число  $\eta$  и положительную функцию  $\delta(\cdot)$  такие, что для любого набора отрезков  $[u_\sigma, v_\sigma]$  ( $\sigma = 1, \dots, s$ ) и точек  $\xi_\sigma \in N \cap [u_\sigma, v_\sigma] \subset [x_{\sigma-1}, x_\sigma] \subseteq (\xi_\sigma - \delta(\xi_\sigma), \xi_\sigma + \delta(\xi_\sigma))$  и  $\sum_{\sigma=1}^s |v_\sigma - u_\sigma| < \eta$  справедливо неравенство

$$\sum_{\sigma=1}^s |f(x_\sigma) - f(x_{\sigma-1})| < \varepsilon.$$

Одна из теорем из [5; 6] о справедливости формулы Ньютона–Лейбница для интеграла Курцвейля–Хенстока может быть переформулирована следующим образом:

**Т е о р е м а 4.** Пусть функция  $f$  дифференцируема в каждой точке  $(a, b)$  за исключением ничтожного множества  $N$  и пусть функция  $f$  имеет на  $N$  *ничтожную вариацию*. Тогда производная  $f'$ , доопределенная в точках  $N$  любым способом, является NL-производной.

Вышеприведенные теоремы дают ответ, когда обычная производная является NL-производной. Естественно рассмотреть вопрос и о том, когда NL-производная является обычной производной. Для интегралов Курцвейля–Хенстока справедлив аналог теоремы Лебега о том, что *производная по верхнему пределу неопределенного интеграла Курцвейля–Хенстока от интегрируемой функции существует и равна подынтегральной функции почти всюду*. Однако (как и в случае с интегралами Римана и Лебега) вопрос о существовании производной неопределенного интеграла в фиксированной точке (за исключением случая непрерывности в этой точке подынтегральной функции) оказывается весьма нетривиальным. Существуют более сложные условия на поведение подынтегральной функции, гарантирующие существование производной неопределенного интеграла в заданной точке и совпадение этой производной со значением подынтегральной функции в этой точке. В частности, известно следующее утверждение: *производная неопределенного интеграла в фиксированной точке равна значению подынтегральной функции в этой точке, если подынтегральная функция ограничена в некоторой окрестности этой точки и в самой точке аппроксимативно непрерывна*.

Приведенные выше утверждения могут быть проиллюстрированы некоторыми классическими примерами.

1) Функция  $|x|$  на  $(-1, 1)$  NL-дифференцируема и ее производная совпадает с  $\text{sign } x$ ; во всех точках, кроме  $x = 0$ , это обычная производная.

2) Функция  $x^\alpha \sin \frac{1}{x}$  с  $\alpha > 0$  на  $(-\pi, \pi)$  NL-дифференцируема и ее производная во всех точках, кроме  $x = 0$ , является обычной. В нуле же функция дифференцируема, если  $\alpha > 1$ ; обычной производной в нуле при  $0 < \alpha \leq 1$  нет.

3) Если непрерывная функция дифференцируема в обычном смысле почти всюду (кроме множества меры нуль), то эта производная в общем случае NL-производной не является. Пример – функция Кантора  $c(x)$  (лестница Кантора).

4) Функция  $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x + c(x))$  ( $c(x)$  – лестница Кантора) – непрерывная строго монотонная  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , производная которой почти всюду равна  $\frac{1}{2}$ . Обратная к ней функция  $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  является абсолютно непрерывной (и даже удовлетворяет условию Липшица с постоянной 2). Поэтому она является неопределенным интегралом своей производной, а эта производная таким образом является и NL-производной. Функция  $\varphi(x)$  при этом не имеет NL-производной.

**NL-производные и обобщенные производные.** Понятие NL-производной близко понятию обобщенной производной Соболева–Шварца. Напомним определение производной Соболева–Шварца для случая, когда это определение приводит к обычной функции.

Пусть даны две определенные на  $(a, b)$  вещественные функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , причем первая из них непрерывна, а вторая – интегрируема по Курцвейлю–Хенстоку. Функция  $g(x)$  называется *обобщенной производной* функции  $f(x)$ , если для любой гладкой и финитной на  $(a, b)$  функции  $\varphi(x)$  выполняется равенство

$$\int_a^b g(x)\varphi(x)dx = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx.$$

**Т е о р е м а 5.** *Функция  $g$  является NL-производной непрерывной функции  $f$  в том и только том случае, когда она является обобщенной производной функции  $f$ .*

Приведем схему доказательства этого утверждения. Пусть функция  $g(x)$  является NL-производной и  $\varphi(x)$  – гладкая и финитная на  $(a, b)$  функция. Тогда для  $\alpha, \beta \in (a, b)$ , для которых верно  $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$ , в силу теоремы об интегрировании по частям для интеграла Курцвейля–Хенстока [6; 8], имеем

$$\int_\alpha^\beta g(x)\varphi(x)dx = -\int_\alpha^\beta \left( \int_\alpha^x g(\xi)d\xi \right) \varphi'(x)dx = -\int_\alpha^\beta f(x)\varphi'(x)dx$$

и, тем самым,  $g(x)$  является обобщенной производной  $f(x)$ . Формула интегрирования по частям здесь справедлива в силу того, что произведение интегрируемой в смысле Курцвейля–Хенстока функции на гладкую также интегрируемо по Курцвейлю–Хенстоку.

Пусть, наоборот,  $g(x)$  – обобщенная производная  $f(x)$  и пусть  $a < \alpha < \beta < b$ . Положим

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \psi(n(x-\alpha)) & \text{при } x \in (\alpha-1/n, \alpha), \\ 1 & \text{при } x \in (\alpha, \beta), \\ \psi(n(\beta-x)) & \text{при } x \in (\beta, \beta+1/n), \end{cases}$$

где  $\psi(x)$  – определенная на  $(-\infty, +\infty)$  гладкая функция, обращающаяся в 0 на  $(-\infty, -1)$  и в 1 на  $(0, +\infty)$ . Тогда по определению обобщенной производной

$$\int_a^b g(x)\psi_n(x)dx = -\int_a^b f(x)\psi'_n(x)dx,$$

откуда

$$\int_{\alpha-1/n}^{\alpha} g(x)\psi_n(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx + \int_{\beta}^{\beta+1/n} g(x)\psi_n(x)dx = -\int_{\alpha-1/n}^{\alpha} f(x)\psi'_n(x)dx - \int_{\beta}^{\beta+1/n} f(x)\psi'_n(x)dx.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx = -\int_{\alpha-1/n}^{\alpha} f(x)\psi'_n(x)dx - \int_{\beta}^{\beta+1/n} f(x)\psi'_n(x)dx - \int_{\alpha-1/n}^{\alpha} g(x)\psi_n(x)dx - \int_{\beta}^{\beta+1/n} g(x)\psi_n(x)dx.$$

Первые два интеграла в правой части этого равенства при  $n \rightarrow \infty$  стремятся, соответственно, к  $-f(\alpha)$  и  $f(\beta)$ . Покажем это для второго из этих интегралов. Очевидно,

$$\begin{aligned} \int_{\beta}^{\beta+1/n} f(x)\psi'_n(x)dx &= -\int_{-1}^0 f\left(\beta - \frac{\xi}{n}\right)\psi'(\xi)d\xi = \\ &= -f(\beta)\int_{-1}^0 \psi'(\xi)d\xi - \int_{-1}^0 \left[f\left(\beta - \frac{\xi}{n}\right) - f(\beta)\right]\psi'(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Здесь первый интеграл равен 1 и поэтому первое слагаемое равно  $-f(\beta)$ . Второе слагаемое оценивается обычным способом:

$$\left| \int_{-1}^0 \left[f\left(\beta - \frac{\xi}{n}\right) - f(\beta)\right]\psi'(\xi)d\xi \right| \leq \max_{-1 \leq \xi \leq 0} \left| f\left(\beta - \frac{\xi}{n}\right) - f(\beta) \right| \int_0^1 |\psi'(\xi)| d\xi$$

и потому стремится при  $n \rightarrow \infty$  к нулю. Аналогично показывается, что первый интеграл при  $n \rightarrow \infty$  стремится к  $f(\alpha)$ .

Переходим к оценкам для третьего и четвертого интеграла. Здесь рассмотрим подробно четвертый интеграл. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \int_{\beta}^{\beta+1/n} g(x)\psi_n(x)dx &= \int_{\beta}^{\beta+1/n} \left( \int_{\beta}^x g(\xi)d\xi \right)' \psi_n(x)dx = \int_{\beta}^{\beta+1/n} \psi_n(x)d \left( \int_{\beta}^x g(\xi)d\xi \right) = \\ &= \psi_n(x) \left( \int_{\beta}^x g(\xi)d\xi \right) \Big|_{\beta}^{\beta+1/n} - \int_{\beta}^{\beta+1/n} \left( \int_{\beta}^x g(\xi)d\xi \right) d\psi_n(x) = - \int_{\beta}^{\beta+1/n} \left( \int_{\beta}^x g(\xi)d\xi \right) d\psi_n(x). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left| \int_{\beta}^{\beta+1/n} g(x)\psi_n(x)dx \right| \leq \max_{\beta \leq x \leq \beta + \frac{1}{n}} \left| \int_{\beta}^x g(\xi)d\xi \right| \bigvee_{\beta}^{\beta+1/n} \psi_n(x) = \max_{\beta \leq x \leq \beta + \frac{1}{n}} \left| \int_{\beta}^x g(\xi)d\xi \right|.$$

Но последнее выражение стремится при  $n \rightarrow \infty$  к нулю, в силу непрерывности интеграла Курцвейля–Хенстока с переменным верхним пределом. Третий интеграл оценивается аналогично.

Отметим еще, что утверждение теоремы 5 по существу означает, что в рассматриваемом скалярном случае понятие NL-производной совпадает с понятием производной Радона–Никодима (см., напр., [15]).

**Теоремы об NL-дифференцировании.** Теоремы о вычислении NL-производных по сравнению с соответствующими теоремами о вычислении обычных производных иногда не меняются, но иногда меняются довольно сильно. Так, формула

$$(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))' = c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x)$$

сохраняется без изменений. Иначе обстоит дело с формулой дифференцирования произведения функций. Здесь из теоремы об интегрировании по частям для интеграла Курцвейля–Хенстока (см. [6; 8]) вытекает

**Т е о р е м а 6.** Пусть непрерывные функции  $f_1$  и  $f_2$  имеют NL-производные  $f_1'(x)$  и  $f_2'(x)$ . Тогда

$$(f_1(x)f_2(x))' = f_1'(x)f_2(x) + f_1(x)f_2'(x),$$

если правая часть этого равенства является интегрируемой функцией. Последнее имеет место, если функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  имеют ограниченные вариации.

Нетрудно видеть, что формула для вычисления NL-производной сложной функции сводится к формуле о замене переменной под знаком интеграла (естественно, в смысле Курцвейля–Хенстока):

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f'(\xi) d\xi = \int_{\alpha}^{\beta} (f' \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt.$$

Наиболее общие условия справедливости этой формулы, известные авторам, приведены в [6]. Применение этих теорем приводит к следующему результату:

**Т е о р е м а 7.** Пусть непрерывная функция  $\varphi$  определена на промежутке  $I$ , непрерывная функция  $f$  определена на  $\varphi(I)$ ; пусть эти функции имеют NL-производные  $f'(x)$  и  $\varphi'(t)$ , причем  $f$  имеет обычную производную на  $\varphi(I)$  за исключением точек множества  $M$ , а  $\varphi$  имеет обычную производную в точках  $I$  за исключением множества  $N$ . Пусть множество  $\varphi^{-1}(M) \cup N$  ничтожно и функция  $f \circ \varphi$  имеет на этом множестве ничтожную вариацию. Тогда для NL-производной функции  $f \circ \varphi$  справедливо равенство

$$(f \circ \varphi)'(x) = (f' \circ \varphi)(x) \varphi'(x).$$

В частности, эта формула справедлива, если множество  $\varphi^{-1}(M) \cup N$  не более чем счетно. Она также справедлива, если функция  $\varphi(t)$  строго монотонна,  $\varphi'(t) \neq 0$  ( $t \notin N$ ) и функция  $(f' \circ \varphi)(t) \varphi'(t)$  интегрируема.

Из общих теорем о вычислении производных остается теорема о производной обратной функции. В вышеприведенном примере 4) обратимая функция  $\psi$  NL-дифференцируема, однако обратная к ней функция  $\varphi(x)$  (лестница Кантора) NL-производной не обладает. Однако верна

**Т е о р е м а 8.** Пусть непрерывная функция  $f$  определена на промежутке  $I$  и имеет непрерывную обратную функцию  $g$ , определенную на промежутке  $f(I)$ . Пусть функция  $f$  имеет в каждой точке промежутка  $I$  за исключением точек некоторого множества  $N$  обычную производную, и эта производная отлична от нуля. Тогда функция

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \quad (y \in f(I \setminus N)),$$

доопределенная в точках  $f(N)$  произвольным образом, является NL-производной функции  $g$ , если множество  $f(N)$  ничтожно и функция  $g$  на этом множестве имеет ничтожную вариацию; в частности, это утверждение верно, если множество  $N$  счетно.

**NL-производные функций между банаховыми пространствами.** Вернемся к функциям  $f: \Omega \rightarrow Y$  между банаховыми пространствами  $X$  и  $Y$  ( $\Omega$  – область в  $X$ ). Как показывает исходное определение NL-производных, при вычислении этих производных достаточно ограничиться функциями скалярного аргумента (параметра отрезка, соединяющего произвольные точки области определения  $\Omega \subset X$  функции  $f: \Omega \rightarrow Y$ ). Таким образом, существование обычной производной Гато функции  $f$  в точках  $\Omega$  оказывается достаточным для существования NL-производной. Более того, достаточно даже существования слабых производных Гато; существование последних, как известно, сводится к дифференцированию скалярных функций  $\ell(f((1-\lambda)a + \lambda b))$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ,  $a, b \in \Omega$ ,  $\ell \in Y^*$ ). В действительности, можно рассматривать скалярные функции  $\ell(f((1-\lambda)a + \lambda b))$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ,  $a, b \in \Omega$ ,  $\ell \in H$ ), где  $H$  – тотальное подпространство  $Y^*$ . При этом достаточно, чтобы эти функции обладали лишь NL-производными.

### Список использованной литературы

1. Евхута, Н. А. Теоремы о гладкости нелинейных операторов и приближенные методы / Н. А. Евхута, О. Н. Евхута, П. П. Забрейко // Докл. НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 5. – С. 5–10.

2. *Евхута, Н. А.* Свойства гладкости интегральных операторов Урысона и метод Ньютона–Канторовича / Н. А. Евхута, О. Н. Евхута, П. П. Забрейко // Докл. НАН Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 2. – С. 23–28.
3. *Канторович, Л. В.* Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1969.
4. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.]. – СПб.: Невский диалект, 2004. – 816 с.
5. *Gordon, R. A.* The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock (Graduate Studies in Mathematics, 4) / R. A. Gordon. – Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1994. – 396 p.
6. *Bartle, R. G.* A Modern Theory of Integration (Graduate Studies in Mathematics, 32) / R. G. Bartle. – Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2001. – 458 p.
7. *Лукашенко, Т. П.* Обобщенные интегралы / Т. П. Лукашенко, В. А. Скворцов, А. П. Солодов. – Москва, 2009, 2011. – 275 с.
8. *Лукомский, С. Ф.* Интегральное исчисление (функции одной переменной) / С. Ф. Лукомский. – Саратов: Издательство Саратовского университета, 2005. – С. 1–144.
9. *Натансон, И. П.* Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. – Москва: Наука, 1974. – 480 с.
10. *Hobson, E. W.* The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series / E. W. Hobson. – New York: Dover Publications, Inc., 1927. – Vol. I. – 732 p.; – 1926. – Vol. II. – 780 p.
11. *Де Ла Валле-Пуссен, Ш. Ж.* Курс анализа бесконечно малых / Ш. Ж. Де Ла Валле-Пуссен. – Москва; Ленинград: Государственное технико-теоретическое издательство, 1933. – Т. 1. – 464 с.
12. *Рисс, Ф.* Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. – М.: Мир, 1979. – 587 с.
13. *Окстоби, Д.* Мера и категория / Д. Окстоби. – Москва: Мир, 1974. – 160 с.
14. *Семенов, Л. А.* О некотором классе исключительных множеств / Л. А. Семенов // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. – Ярославль, 1976. – С. 133–135.
15. *Данфорд, Н.* Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Д. Т. Шварц. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962. – 896 с.

Поступило в редакцию 11.04.2016

УДК 517.984

А. Б. АНТОНЕВИЧ, АЛИ А. ШУКУР

## О РОСТЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В КРУГЕ

(Представлено членом-корреспондентом Я. В. Радыно)

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
antonevich@bsu.by; shukur.math@gmail.com

В работе введен экспоненциальный порядок роста аналитической функции  $\varphi$  в круге и установлена связь между скоростью роста коэффициентов разложения функции и ее порядком. Дано приложение к описанию поведения нормы резольвенты  $R(B, \lambda)$  ограниченного линейного оператора при приближении  $\lambda$  к спектру.

*Ключевые слова:* рост аналитической функции, резольвента, дискретный оператор взвешенного сдвига.

A. B. ANTONEVICH, ALI A. SHUKUR

## GROWTH OF THE ANALYTIC FUNCTION ON THE DISC

Belarusian State University, Minsk, Belarus  
antonevich@bsu.by; shukur.math@gmail.com

In this article, the order of exponential of growth of analytical function  $\varphi$  on the disc is introduced, and the relation between the order of the function  $\varphi$  and its coefficients is obtained. An application of this result gives us the description of the behavior of the resolvent  $\|R(B, \lambda)\|$  of linear bounded operator where  $\lambda$  approaches the spectrum.

*Keywords:* growth of analytical function, resolvent, discrete weighted shift operator.

**Введение.** Пусть аналитическая функция  $\varphi(z)$  разложена в степенной ряд

$$\varphi(z) = \sum_0^{\infty} \varphi_n z^n$$

и пусть

$$M(r) = M_{\varphi}(r) = \max_{|z|=r} |\varphi(z)|.$$

В случае целой функции, когда ряд сходится на всей комплексной плоскости, вопрос о связи между экспоненциальным порядком роста функции  $M(r)$  на бесконечности и поведением коэффициентов  $\varphi_n$  подробно изучен [1; 2].

В работе рассмотрены аналогичные вопросы в случае рядов с конечным радиусом сходимости (который без ограничения общности считаем равным 1), описана связь между экспоненциальным порядком роста функции  $M(r)$  при  $r \rightarrow 1$  и поведением коэффициентов разложения. Среди известных ранее результатов в этом направлении отметим утверждение о связи между порядком степенного роста и поведением коэффициентов [3]: если  $\varphi_n \approx n^{\alpha}$  (и радиус сходимости ряда равен 1), то при  $r \rightarrow 1$  функция  $M(r)$  имеет степенной рост

$$M(r) \approx \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(1 - r)^{\alpha + 1}}.$$

В работе даны также приложения полученных результатов к описанию поведения резольвент некоторых линейных ограниченных операторов, что явилось основной мотивировкой для проведенного исследования.

**Порядок роста аналитической функции и поведение коэффициентов.** Напомним определение порядка экспоненциального роста целой функции  $\varphi$ . Пусть существуют положительные  $\alpha$  такие, что при всех достаточно больших  $r$  для функции  $M_\varphi(r)$  выполняется неравенство

$$M_\varphi(r) \leq e^{r^\alpha}.$$

Точная нижняя грань таких значений  $\alpha$  называется порядком функции экспоненциального роста  $\varphi(z)$ , обозначим его через  $\gamma(\varphi)$ .

Порядок целой функции  $\varphi(z)$  может быть найден по формуле

$$\gamma(\varphi) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_\varphi(r)}{\ln r}.$$

Пусть для числовой последовательности  $\varphi_n$  существуют числа  $\beta$ , что

$$|\varphi_n| \leq e^{-\frac{n}{\beta} \ln n}.$$

Нижняя грань таких  $\beta$  называется *порядком убывания последовательности*  $\varphi_n$ :

$$\beta(\varphi_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{-\ln \varphi_n}.$$

Классический результат о целых функциях заключается в следующем.

**Т е о р е м а 1.** *Порядок функции выражается через коэффициенты ее степенного разложения равенствами*

$$\gamma(\varphi) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{\ln \frac{1}{|\varphi_n|}}.$$

Ниже мы рассматриваем функции  $\varphi$ , аналитические в единичном круге. Тогда функция  $M_\varphi(r)$  определена на интервале  $[0, 1)$ . Функция  $\varphi$  имеет конечный порядок при  $r \rightarrow 1$ , если существуют  $\alpha$ , такие что

$$|M_\varphi(r)| \leq ce^{(1-r)^{-\alpha}}$$

для  $r_0 < r \leq 1$  и порядок функции есть точная нижняя грань таких  $\alpha$ . Порядок функции можно найти по формуле

$$\gamma(\varphi) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_\varphi(r)}{\ln(1-r)}.$$

Для рассматриваемых функций коэффициенты разложения неограничены. Пусть существуют константы  $\zeta$ , такие, что

$$|\varphi_n| \leq e^{n^\zeta}.$$

Точная нижняя грань таких  $\zeta$  называется *порядком роста последовательности*  $\varphi_n$ , обозначим его через  $\beta(\varphi_n)$ .

Связи между поведением функции  $\varphi(z)$  и поведением коэффициентов  $\varphi_n$  в разных постановках рассматривались многими авторами. Например, Г. Фабер [4; 5] исследовал функции, представимые в виде  $\varphi(z) = G\left(\frac{1}{1-z}\right)$ , где  $G$  является целой аналитической функцией. Такие функции определены не только в единичном круге, но и на всей комплексной плоскости, за исключением точки 1. Оказалось, что порядок роста функции  $G$  не определяется по порядку роста коэффициентов  $\varphi_n$ . Поэтому Г. Фабер использовал вспомогательную целую функцию  $A(z)$ , такую, что  $A(n) = \varphi_n$  и получил связь между порядками роста:  $\gamma(G) = \frac{\gamma(A)}{1-\gamma(A)}$ . Это утверждение описывает поведение рассматриваемой функции  $\varphi(z)$  в окрестности точки 1.

Формулировка приведенной ниже теоремы выглядит похоже на этот результат Г. Фабера; отличие заключается в том, что мы используем только порядок коэффициентов  $\varphi_n$ , но при этом получаем описание поведения функции  $\varphi(z)$  только в пересечении окрестности точки 1 с единичным кругом.

**Т е о р е м а 2.** Пусть  $\varphi(z) = \sum_0^{\infty} \varphi_n z^n$  и радиус сходимости ряда есть 1. Функция  $\varphi$  имеет конечный порядок  $0 < \gamma < \infty$  тогда и только тогда, когда последовательность  $\varphi_n$  имеет порядок роста  $0 < \beta < 1$  и при этом

$$\beta(\varphi_n) = \frac{\gamma}{\gamma + 1}, \quad \gamma(\varphi) = \frac{\beta}{1 - \beta}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть для функции  $\varphi$  выполнено неравенство

$$M_{\varphi}(r) \leq e^{(1-r)^{-\gamma}}$$

для  $r_0 < r \leq 1$ . Согласно неравенству Коши, для коэффициентов аналитической функции имеем

$$|\varphi_n| \leq \frac{M_{\varphi}(r)}{r^n} \leq e^{(1-r)^{-\gamma}} r^{-n}.$$

В доказательстве теоремы 1 в аналогичном месте находится в явном виде минимум по  $r$  функции, стоящей в правой части неравенства. В рассматриваемом случае минимум не находится в явном виде, но требуемая оценка получается, если оценить  $|\varphi_n|$  через значения правой части в точке

$$r_n = 1 - \left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{-1}{\gamma+1}}.$$

В результате имеем оценку вида

$$|\varphi_n| \leq c e^{n^{\beta}}, \quad (1)$$

где  $c$  есть константа и  $\beta = \frac{\gamma}{\gamma + 1}$ . Отсюда следует оценка для порядка роста  $\varphi_n$ :

$$\beta(\varphi_n) \leq \frac{\gamma}{\gamma + 1}. \quad (2)$$

Получим теперь оценку порядка роста функции через порядок роста коэффициентов. Пусть для последовательности коэффициентов  $\varphi_n$  выполнено неравенство (1). Для заданного  $r < 1$  выберем число  $m_r$  таким образом, что для  $n > m_r$

$$|e^{n^{\beta}} r^n| \leq |e^{n^{\beta}} r^{m_r}| \leq \frac{1}{e^{n^{\beta}}}. \quad (3)$$

Как легко проверить, последнее неравенство выполнено, если положить

$$m_r = \left[ C \frac{1}{1-r} \frac{1}{1-\beta} \right].$$

Тогда

$$M_{\varphi}(r) \leq \sum_{0 \leq n \leq m_r} |\varphi_n| r^n + \sum_{n > m_r} \frac{1}{e^{n^{\beta}}}.$$

В силу (3), ряд в последней сумме сходится и

$$\sum_{n > m_r} \frac{1}{e^{n^{\beta}}} \leq C_0 = \sum_1^{\infty} \frac{1}{e^{n^{\beta}}}$$

для любого  $m_r$ . Пусть  $\mu(r) = \max_n |\varphi_n| r^n$ . В силу (3) выполнено неравенство

$$\mu(r) \leq e^{\left(\frac{\beta}{1-r}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}} r^{\left(\frac{\beta}{1-r}\right)^{1-\beta}}.$$

Таким образом мы получаем, что  $\varphi(r) \leq (1 + m_r)\mu(r) + C_0$ , т. е.

$$\varphi(r) \leq ce^{\left(\frac{1}{1-r}\right)^\gamma},$$

где  $c$  константа и  $\gamma = \frac{\beta}{1-\beta}$ . Отсюда следует оценка порядка роста функции  $M_\varphi(r)$ :

$$\gamma(\varphi) \leq \frac{\beta}{1-\beta}. \quad (4)$$

Из (2) и (4) мы получаем точные связи между порядками  $\varphi(r)$  и  $\varphi_n$ :

$$\gamma(\varphi) = \frac{\beta(\varphi_n)}{1-\beta(\varphi_n)}.$$

**О росте резольвенты ограниченного линейного оператора.** В качестве приложения рассмотрим задачу о нахождении порядка роста резольвенты для некоторых ограниченных линейных операторов.

Пусть  $B$  есть линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве  $X$  над полем  $\mathbb{C}$ . Точка  $\lambda \in \mathbb{C}$  называется *регулярной точкой оператора*  $B$ , если существует обратный к  $B - \lambda I$ . Множество регулярных точек называется *резольвентным множеством* оператора  $B$  и обозначается  $\rho(B)$ . Операторно-значная функция  $R(\lambda, B) = (B - \lambda I)^{-1}$ , определенная на резольвентном множестве, называется *резольвентой оператора*. Резольвента является аналитической операторно-значной функцией от  $\lambda$ . Множество  $\sigma(B) = \mathbb{C} \setminus \rho(B)$  называется *спектром оператора*, а число  $R(B) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(B)\}$  называется *спектральным радиусом* оператора. Имеется ряд утверждений, связывающих поведение резольвенты при приближении  $\lambda$  к спектру с другими свойствами оператора, поэтому описание такого поведения является одной из классических задач теории операторов [6–9]. Если  $R(B) = 1$ , то при  $|\lambda| > 1$  резольвента задается в виде ряда

$$R(\lambda, B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} B^n$$

и для нормы резольвенты имеют место оценки

$$\frac{1}{|1-\lambda|} \leq \|R(\lambda, B)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^{n+1}} \|B^n\| =: \varphi_B\left(\frac{1}{|\lambda|}\right). \quad (5)$$

**Т е о р е м а 3.** Пусть  $B$  – произвольно линейный ограниченный оператор, спектр которого есть единичная окружность  $S^1$ . При некотором  $0 < \beta < 1$  выполнено

$$\|B^n\| \leq Ce^{n\beta}, \quad n \geq 1,$$

тогда и только тогда, когда норма резольвенты оператора  $B$  имеет вид

$$\|R(\lambda, B)\| \leq C \exp[(1-|\lambda|)^{-\gamma}], \quad |\lambda| > 1,$$

где  $C$  – константа и  $\gamma = \frac{\beta}{1-\beta}$ .

Обозначим через  $\Phi$  класс функций  $\varphi$ , удовлетворяющих следующим условиям:  $\varphi$  есть аналитическая функция в единичном круге  $|\lambda| < 1$ , у которой радиус сходимости степенного ряда  $\varphi(z) = \sum_1^\infty \varphi_n z^n$  есть 1 и при этом  $\varphi_n > 0$ ,  $\varphi_1 = 1$ . Такие функции могут иметь произвольный (в том числе не экспоненциальный) рост. Функции вида  $\varphi_B$ , входящие в оценку резольвенты сверху (5), принадлежат этому классу. В [10] показано, что для любой функции  $\varphi$  из класса  $\Phi$  существует оператор, резольвента которого растет быстрее этой функции. Таким образом, следствие содержит условия на оператор, при которых резольвента имеет экспоненциальный рост.

Для произвольного оператора функция  $\varphi_B(|\lambda|)$  из (5) может при  $|\lambda| \rightarrow 1$  иметь существенно большую скорость роста, чем резольвента, т. е. в общем случае оценка сверху грубая. Следующий результат утверждает, что для операторов взвешенного сдвига оценка сверху в (5) является точной по порядку.

Пусть  $l_p(\mathbb{N})$  ( $p \geq 1$ ) есть пространство последовательностей комплексных чисел  $u = (u(k))$ , для которых конечна норма

$$\|u\|_p = \left[ \sum_1^{+\infty} |u(k)|^p \right]^{1/p}.$$

Оператором взвешенного сдвига называется оператор в  $l_p(\mathbb{Z})$ , действующий по формуле [11]

$$B(u)(k) = a(k)u(k+1), \quad (6)$$

где  $a = (a(k))$  – заданная ограниченная числовая последовательность.

**Т е о р е м а 4.** Пусть  $B$  есть оператор (6), для которого  $R(B) = 1$ . Резольвента  $R(\lambda, B)$  имеет порядок роста  $\gamma$  тогда и только тогда, когда последовательность норм  $\|B^n\|$  имеет порядок роста  $\beta = \frac{\gamma}{\gamma+1} < 1$ .

В частности, если при  $k \rightarrow +\infty$  коэффициенты оператора  $B$  имеют асимптотическое представление

$$a(k) \sim 1 + \frac{c}{|k|^v}, \quad \text{при } v < 1,$$

то последовательность норм  $\|B^n\|$  имеет порядок роста  $\beta = 1 - v$ , а резольвента имеет порядок роста

$$\gamma = \frac{1-v}{v}.$$

Это утверждение следует из теоремы 2 и следующей леммы.

**Л е м м а.** Пусть  $B$  – оператор (6). Для резольвенты, определенной при  $|\lambda| > 1$ , имеет место аналог неравенства Коши: для любого числа  $m \geq 0$  выполнено

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} B^n \right\| \geq \frac{1}{|\lambda|^{m+1}} \|B^m\|.$$

**З а к л ю ч е н и е.** Заметим, в [10] приведен класс операторов взвешенного сдвига в пространстве  $l_1(\mathbb{N})$ , для которых норма резольвенты совпадает с оценкой сверху и, тем самым, вычисляется в явном виде. При  $p > 1$  в пространствах  $l_p(\mathbb{N})$  норма резольвенты не вычисляется и не совпадает с оценкой сверху через функцию  $\varphi_B\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$  и теорема описывает только порядок роста.

### Список использованной литературы

1. Holland, A. S. B. Introduction to the theory of Entire functions / A. S. B. Holland. – New York; London: Academic press, 1973.
2. Маркушевич, А. И. Теория аналитических функций / А. И. Маркушевич. – Москва, 1950.
3. Евграфов, М. А. Асимптотические оценки и целые функции / М. А. Евграфов. – Москва, 1957.
4. Faber, G. Beitrag zur Theorie der ganzen funktionen / G. Faber // Math. Ann. – 1911. – Vol. 70. – P. 48–68.
5. Bieberbach, L. Analytische Fortsetzung / L. Bieberbach. – Springer Verlag, 1955.
6. Nagy, B. A resolvent condition implying power boundedness / B. Nagy, J. A. Zemanek // Studia Math. – 1999. – Vol. 134. – P. 143–151.
7. Nevanlinna, O. Resolvent conditions and powers of operators / O. Nevanlinna // Studia Math. – 2011. – Vol. 145. – P. 113–134.
8. Nevanlinna, O. On the growth of the resolvent operators for power bounded operators / O. Nevanlinna // Banach center publication. – 1997. – Vol. 28. – P. 247–264.
9. Zabreko, P. P. Error estimates of successive approximations and spectral properties of linear operators / P. P. Zabreko // Numerical functional analysis and optimization. – 1990. – Vol. 7–8. – P. 823–838.
10. Антоневиц, А. Б. Оценка резольвент для дискретных взвешенного операторов / А. Б. Антоневиц, Али А. Шукур // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 22. – С. 48–52.
11. Antonevich, A. B. Linear functional equation.operator approach / A. B. Antonevich. – Birkhauser, 1996.

Поступило в редакцию 11.04.2016

УДК 519.173

В. И. БЕНЕДИКТОВИЧ

## СПЕКТРАЛЬНЫЙ РАДИУС И ГАМИЛЬТОНОВОСТЬ ГРАФА

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
vbened@im.bas-net.by

В данной работе в два раза уменьшена нижняя граница порядка графов, полученная В. Никифоровым, для которых выполняется обобщение достаточного спектрального признака гамильтоновости графа, предложенного ранее.

*Ключевые слова:* матрица смежности, спектральный радиус, гамильтонов цикл, минимальная степень, индуцированный подграф.

V. I. BENEDIKTOVICH

## SPECTRAL RADIUS AND HAMILTONICITY OF A GRAPH

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
vbened@im.bas-net.by

In this article, the lower graph order boundary obtained by V. Nikiforov, for which the generalization of the sufficient spectral criterion of Hamiltonicity of a graph is valid, has been reduced twice.

*Keywords:* Adjacency matrix, spectral radius, Hamiltonian cycle, minimum degree, induced subgraph.

Пусть  $G = (V(G), E(G))$  – простой неориентированный граф порядка  $n$  и размера  $m$ , и пусть  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  являются собственными значениями его матрицы смежности  $A = A(G)$ , упорядоченными по убыванию (с учетом их кратностей). Наибольшее собственное значение  $\lambda_1$  называется *спектральным радиусом* (или *индексом*) графа  $G$ , который будем обозначать через  $\rho(G)$ . Поскольку матрица  $A$  является симметрической, спектральный радиус  $\rho(G)$  является положительным действительным корнем характеристического полинома  $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$  этой матрицы.

Для произвольной вершины  $v \in V(G)$  будем обозначать ее *окружение* через  $N(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$  и  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ . Тогда *степень вершины*  $v_i \in V(G)$  равна  $\deg_G(v_i) = |N(v_i)|$ , которую кратко будем обозначать через  $d_{v_i} = d_i$ . Пусть  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  – *последовательность степеней* графа  $G$ , упорядоченная по возрастанию:  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ . Тогда  $d_1 = \delta$  называется *минимальной степенью*.

*Объединением* двух простых графов  $G$  и  $H$  называется простой граф  $G \cup H$  с множеством вершин  $V(G) \cup V(H)$  и множеством ребер  $E(G) \cup E(H)$ . Если графы  $G$  и  $H$  не пересекаются ( $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ ), то их объединение называется *дизъюнктым* и обозначается через  $G + H$ . Дизъюнктное объединение  $k$  копий графа  $G$  обозначается через  $kG$ . *Соединением* непересекающихся графов  $G$  и  $H$  называется граф  $G \vee H$ , получаемый из дизъюнктного объединения  $G + H$  добавлением всех ребер, которые соединяют каждую вершину графа  $G$  с каждой вершиной графа  $H$ .  $\bar{H}$  обозначает *дополнение* графа  $H$ . Для произвольного подмножества вершин  $U \subset V(G)$  графа  $G$   $G[U]$  обозначает *индуцированный* этим множеством подграф в  $G$ .

Для любых натуральных чисел  $k \geq 1$  и  $n \geq k + 2$  обозначим

$$L_k(n) = K_1 \vee (K_{n-k-1} + K_k).$$

Другими словами, граф  $L_k(n)$  состоит из двух графов  $K_{n-k}$  и  $K_{k+1}$ , имеющих единственную общую вершину.

Для любых натуральных чисел  $k \geq 1$  и  $n \geq 2k + 1$  обозначим

$$M_k(n) = K_k \vee (K_{n-2k} + kK_1) = K_k \vee (K_{n-2k} + \overline{K_k}).$$

Другими словами, граф  $M_k(n)$  состоит из графа  $K_{n-k}$  и  $k$  независимых вершин, каждая из которых соединена с некоторыми фиксированными  $k$  вершинами графа  $K_{n-k}$ .

Цикл или цепь, проходящие через все вершины графа  $G$ , называются *гамильтоновыми*. Граф  $G$ , содержащий гамильтонов цикл или цепь, называется соответственно *гамильтоновым*, или *трассируемым*. Заметим, что графы  $L_k(n)$  и  $M_k(n)$  с минимальной степенью  $\delta = k$  не являются гамильтоновыми. Граф  $G$  называется *гамильтоново-связным*, если для любых его двух вершин  $u$  и  $v$  существует гамильтонова цепь графа  $G$  с концевыми вершинами  $u$  и  $v$ .

Напомним понятие *замыкания* графа, введенное Ore в [1; 2], и развитое Бонди и Хваталом в [3]. Фиксируем целое число  $k \geq 0$ . Для заданного графа  $G$  выполним следующую операцию: если существуют две несмежные вершины  $u$  и  $v$  с  $d_u + d_v \geq k$ , то добавим ребро  $uv$  к множеству  $E(G)$ . *k-замыканием* графа  $G$  называется граф  $cl_k(G)$ , полученный из графа  $G$  с помощью последовательного применения этих операций, пока это возможно. Оказывается, что *k-замыкание* графа  $G$  единственно, т. е. не зависит от порядка, в котором добавляются ребра [3]. Отметим некоторые свойства *k-замыкания*  $cl_k(G)$  графа  $G$  [1; 2]:

1) Если  $u$  и  $v$  произвольные несмежные вершины  $cl_k(G)$ , то  $d_{cl_k(G)}(u) + d_{cl_k(G)}(v) \leq k - 1$ .

2) Граф  $G$  порядка  $n$  гамильтонов тогда и только тогда, когда гамильтоново его  $n$ -замыкание  $cl_n(G)$ .

Кроме того, нам понадобится следующее утверждение [2]:

3) Если граф  $G$  является 2-связным графом порядка  $n$  и  $d_u + d_v \geq n + 1$  для любых двух различных несмежных вершин  $u$  и  $v$ , то граф  $G$  является гамильтоново-связным.

Как известно, *задача распознавания* гамильтоновости или трассируемости заданного графа является NP-полной. Недавно для решения этой проблемы стала применяться *спектральная теория* графов.

Здесь продолжается изучение следующей проблемы, тесно связанной с известной проблемой Брюалди–Золхайда [4].

**Проблема.** Для заданного графа  $F$ , каким максимальным спектральным радиусом должен обладать граф  $G$  на  $n$  вершинах, не содержащий подграфа, изоморфного графу  $F$ ?

Мы рассматриваем случай, когда  $F$  является гамильтоновым циклом [5].

Поскольку условие  $\delta \geq 2$  является тривиальным необходимым условием для гамильтоновости графа, то в дальнейшем мы будем это предполагать.

В данной работе в два раза уменьшена нижняя граница порядка графов, полученная В. Никифоровым в [6], для которых выполняется обобщение достаточного спектрального признака гамильтоновости графа, данного в [5].

**Т е о р е м а 1.** Пусть  $k \geq 2$  и  $G$  – простой граф порядка  $n > \frac{k^3 + 7k + 4}{2}$  с  $\delta \geq k$ , отличный от графов  $L_k(n)$  и  $M_k(n)$ . Тогда если его спектральный радиус  $\rho(G) \geq n - k - 1$ , то граф  $G$  гамильтонов.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая теорема.

**Т е о р е м а 2.** Пусть  $k \geq 2$  и  $G$  – простой граф порядка  $n > \frac{k^3 + 7k + 4}{2}$  с  $\delta \geq k$ . Тогда если  $G$  является собственным подграфом  $L_k(n)$  или  $M_k(n)$ , то его спектральный радиус удовлетворяет неравенству  $\rho(G) < n - k - 1$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.** Пусть  $G$  является собственным подграфом  $M_k(n)$ . В силу того, что для произвольного графа  $G$  и любого его пографа  $H$  выполняется неравенство  $\rho(H) \leq \rho(G)$ , можно предполагать, что граф  $G$  получается из графа  $M_k(n)$  с помощью удаления только одного ребра  $uv$ . В графе  $M_k(n)$  обозначим через  $X$  вершины степени  $k$ , через  $Y$  множество соседних вершин для  $X$ , а через  $Z$  – оставшиеся  $n - 2k$  вершин. Поэтому  $u, v \in Y \cup Z$  и априори

возможны три случая: 1)  $\{u, v\} \subset Y$ ; 2)  $u \in Y, v \in Z$ ; 3)  $\{u, v\} \subset Z$ . Обозначим полученный граф  $G$  для каждого из этих случаев через  $G_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , соответственно.

Покажем, что наибольший спектральный радиус из них имеет граф  $G_3$ . Для этого напомним понятие операции Кельманса [7]. Для заданного графа  $G$  и двух выделенных его вершин  $u, v$  построим новый граф  $G^*$ , заменив все ребра  $vx$  на ребра  $ix$  для всех  $x \in N(v) \setminus N[u]$ . Новый граф  $G^*$ , полученный таким образом, имеет тот же порядок и размер, что и исходный граф  $G$ , и все вершины, отличные от  $u$  и  $v$ , сохраняют свою степень. Кроме того, вершины  $u, v$  смежны в  $G^*$  тогда и только тогда, когда они смежны в  $G$ . Справедливо следующее утверждение.

**Л е м м а 1** [8; 9]. Пусть  $G$  – произвольный граф и пусть  $G^*$  – граф, полученный из  $G$  с помощью операции Кельманса. Тогда  $\rho(G) \leq \rho(G^*)$ .

На основании этой леммы справедлива

**Л е м м а 2.** Для графов  $G_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , соответствующих случаям 1)–3), выполняется следующая последовательность неравенств:  $\rho(G_1) \leq \rho(G_2) \leq \rho(G_3)$ .

Действительно, пусть в графе  $G_1$  вершины  $u, v \in Y$  несмежны, и  $w$  – произвольная вершина из  $Z$ . Тогда применим операцию Кельманса для случая  $v =: w, u =: v, x =: u = N(w) \setminus N[v]$ . Тогда по лемме 1  $\rho(G_1) \leq \rho(G_2)$ . Аналогично, пусть в графе  $G_2$  вершины  $u \in Y, v \in Z$  несмежны, и  $w$  – произвольная вершина из  $Z$ . Тогда применим операцию Кельманса для случая  $v =: w, u =: u, x =: v = N(w) \setminus N[u]$ . Тогда по лемме 1  $\rho(G_2) \leq \rho(G_3)$ .

Поэтому для доказательства теоремы достаточно рассмотреть только граф  $G_3$ .

Напомним еще одно понятие. Разбиение  $\pi$  множества вершин  $V(G)$  на попарно непересекающиеся подмножества  $C_1, \dots, C_r$  называется *равномерным*, если число соседей в  $C_j$  вершины  $u$  из  $C_i$  равно константе  $b_{ij}$ , не зависящей от выбора вершины  $u$ . Это определение эквивалентно следующему: все индуцированные подграфы  $G[C_i]$ ,  $i = 1, \dots, r$ , являются регулярными и ребра, соединяющие два различных подмножества  $C_i$  и  $C_j$ , образуют *бирегулярный* граф. Ориентированный (мульти)граф с  $r$  вершинами и  $b_{ij}$  дугами от  $i$ -й вершины к  $j$ -й называется *частным графа  $G$  по разбиению  $\pi$*  и обозначается через  $G/\pi$ . Матрица смежности этого ориентированного (мульти)графа  $G/\pi$  имеет компоненты  $A(G/\pi)_{ij} = b_{ij}, i, j = \overline{1, r}$ . Справедлива следующая техническая лемма.

**Л е м м а 3** [10]. Если  $\pi$  – равномерное разбиение множества вершин графа  $G$ , то спектральный радиус матрицы  $A(G/\pi)$  равен спектральному радиусу матрицы  $A(G)$ .

Рассмотрим следующее разбиение  $\pi$  графа  $G_3$ :  $C_1 = X = \{1, \dots, k\}$ ,  $C_2 = Y = \{k+1, \dots, k\}$ ,  $C_3 = \{u, v\} = \{2k+1, 2k+2\}$ ,  $C_4 = Z \setminus \{u, v\} = \{2k+3, \dots, n\}$ . Нетрудно убедиться, что это разбиение является равномерным и матрица смежности частного графа  $G_3/\pi$  равна

$$A(G_3/\pi) = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 & 0 \\ k & k-1 & 2 & n-(2k+2) \\ 0 & k & 0 & n-(2k+2) \\ 0 & k & 2 & n-(2k+3) \end{pmatrix}.$$

Значит, по лемме 3 спектральный радиус  $\rho(G_3)$  должен быть корнем характеристического полинома матрицы  $A(G_3/\pi)$ , который, как нетрудно вычислить, равен

$$\chi(\lambda) = \lambda^4 + (k+4-n)\lambda^3 + (-k^3 + 3k - 3n + 7)\lambda^2 + (-2k^3 + nk^2 - 3k^2 + 2k - 2n + 4)\lambda - 4k^3 + 2k^2n - 4k^2.$$

Покажем теперь, что все корни этого характеристического полинома лежат левее числа  $n-k-1$ . Действительно, имеем

$$\chi(\lambda)|_{n-k-1} = 2n^2 - (4k+k^3+2)n + k^4 - k^3 + 2k.$$

Это выражение, как полином от  $n$ , всегда принимает положительные значения при

$$n > \frac{k^3 + 4k + 2 + \sqrt{(k^3 + 4k + 2)^2 - 8(k^4 - k^3 + 2k)}}{4} = \frac{k^3 + 4k + 2 + \sqrt{k^6 + 12k^3 + 16k^2 + 4}}{4}.$$

Но нетрудно видеть, что при  $k \geq 1$  выполняется неравенство

$$\frac{k^3 + 7k + 4}{2} > \frac{k^3 + 4k + 2 + \sqrt{k^6 + 12k^3 + 16k^2 + 4}}{4},$$

равносильное неравенству

$$20k^4 + 84k^2 + 80k + 12 > 0,$$

справедливому при любых  $k \geq 1$ .

Для первой производной имеем

$$\chi'(\lambda)|_{n-k-1} = n^3 - 3kn^2 + (2k^2 + 3)n - (k^3 + k^2 + 3k + 2).$$

Заметим, что при  $n > \frac{k^3 + 7k + 4}{2}$  выполняется неравенство  $n - 3k > \frac{k^3 + k + 4}{2}$ , поэтому

$$\begin{aligned} \chi'(\lambda)|_{n-k-1} &> \left(\frac{k^3 + 7k + 4}{2}\right)^2 \left(\frac{k^3 + k + 4}{2}\right) + (2k^2 + 3) \left(\frac{k^3 + 7k + 4}{2}\right) - (k^3 + k^2 + 3k + 2) = \\ &= \frac{1}{8}(k^9 + 15k^7 + 12k^6 + 71k^5 + 120k^4 + 157k^3 + 276k^2 + 300k + 96) > 0 \end{aligned}$$

при любых  $k \geq 1$ .

Для второй производной имеем

$$\chi''(\lambda)|_{n-k-1} = 6n^2 - 12kn + (4k^2 + 2).$$

Это выражение, как полином от  $n$ , всегда принимает положительные значения при

$$n > \frac{12k + \sqrt{144k^2 - 24(4k^2 + 2)}}{4} = k + \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{\sqrt{3}}.$$

Однако нетрудно убедиться, что при любых  $k \geq 1$  справедливо неравенство

$$\frac{k^3 + 7k + 4}{2} > k + \sqrt{\frac{k^2 - 1}{3}}.$$

Наконец, для третьей производной имеем

$$\chi'''(\lambda)|_{n-k-1} = 18(n - k) > 0$$

при любых  $n > k$ , что выполняется в силу предыдущего неравенства.

Таким образом, по теореме Фурье–Бюдана [11], правее числа  $n - k - 1$  нет корней характеристического полинома  $\chi(\lambda)$ . Откуда мы заключаем, что  $\rho(G_3) < n - k - 1$ .

Пусть теперь  $G$  является собственным подграфом  $L_k(n)$ . Снова можно предполагать, что граф  $G$  получается из графа  $L_k(n)$  с помощью удаления только одного ребра  $uv$ . Обозначим через  $Y = \{w\}$  единственную вершину, принадлежащую одновременно графам  $K_{n-k}$  и  $K_{k+1}$  в графе  $L_k(n)$ . Далее, пусть  $X = V(K_{k+1}) \setminus \{w\}$  и  $Z = V(K_{n-k}) \setminus \{w\}$ . Из неравенства  $\delta(G) \geq k$  следует, что  $u, v \in Y \cup Z$  и априори возможны два случая: 1)  $u \in Y, v \in Z$ ; 2)  $\{u, v\} \subset Z$ . Обозначим полученный граф  $G$  для каждого из этих случаев через  $G_i, i = 1, 2$ , соответственно.

В силу свойства операции Кельманса нетрудно убедиться, что граф  $G_2$  имеет наибольший спектральный радиус. Поэтому достаточно рассмотреть только граф  $G_2$ .

Выберем следующее разбиение  $\pi$  графа  $G_2$ :  $C_1 = X = \{1, \dots, k\}$ ,  $C_2 = \{w\} = \{k+1\}$ ,  $C_3 = \{u, v\} = \{k+2, k+3\}$ ,  $C_4 = \{n-k-3, \dots, n\}$ . Нетрудно убедиться, что это разбиение является равномерным и матрица смежности частного графа  $G_2 / \pi$  равна

$$A(G_2 / \pi) = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 2 & n-(k+3) \\ 0 & 1 & 0 & n-(k+3) \\ 0 & 1 & 2 & n-(k+4) \end{pmatrix}.$$

Значит, по лемме 3 спектральный радиус  $\rho(G_2)$  должен быть корнем характеристического полинома матрицы  $A(G_2 / \pi)$ , который, как нетрудно вычислить, равен

$$\chi(\lambda) = \lambda^4 + (5-n)\lambda^3 + (-k^2 + kn - k - 4n + 11)\lambda^2 + (-4k^2 + 4kn - 6k - 5n + 11)\lambda - 4k^2 + 4kn - 8k - 2n + 4.$$

Покажем теперь, что все корни этого характеристического полинома лежат левее числа  $n - k - 1$ . Действительно, имеем

$$\chi(\lambda)|_{n-k-1} = 2n^2 - 7kn + (5k^2 - 3k).$$

Это выражение, как полином от  $n$ , всегда принимает положительные значения при

$$n > \frac{7k + \sqrt{49k^2 - 8(5k^2 - 3k)}}{4} = \frac{7k + \sqrt{9k^2 + 24k}}{4}.$$

Но при  $k \geq 1$  выполняется неравенство

$$\frac{k^3 + 7k + 4}{2} > \frac{7k + \sqrt{9k^2 + 24k}}{4},$$

равносильное неравенству

$$4k^6 + 28k^4 + 32k^3 + 40k^2 + 88k + 64 > 0,$$

справедливому при любых  $k \geq 1$ .

Для первой производной имеем

$$\chi'(\lambda)|_{n-k-1} = n^3 + (1-4k)n^2 + (5k^2 - 4k + 4)n + (-2k^3 + 3k^2 - 8k).$$

Заметим, что при  $n > \frac{k^3 + 7k + 4}{2}$  выполняется неравенство  $n - 4k + 1 > \frac{k^3 - k + 6}{2} > 0$  при  $k \geq 1$ .

Кроме того,  $5k^2 - 4k + 4 > 0$  при  $k \geq 1$ , поэтому

$$\begin{aligned} \chi'(\lambda)|_{n-k-1} &> \left(\frac{k^3 + 7k + 4}{2}\right)^2 \left(\frac{k^3 - k + 6}{2}\right) + (5k^2 - 4k + 4) \left(\frac{k^3 + 7k + 4}{2}\right) + (-2k^3 + 3k^2 - 8k) = \\ &= \frac{1}{8}(k^9 + 13k^7 + 14k^6 + 55k^5 + 116k^4 + 155k^3 + 230k^2 + 304k + 160) > 0 \end{aligned}$$

при любых  $k \geq 1$ .

Для второй производной имеем

$$\chi''(\lambda)|_{n-k-1} = 6n^2 + (4-16k)n + (10k^2 + 4).$$

Это выражение, как полином от  $n$ , всегда принимает положительные значения при

$$n > \frac{16k - 4 + \sqrt{(16k - 4)^2 - 24(10k^2 + 4)}}{12} = \frac{4k - 1 + \sqrt{k^2 - 8k - 5}}{3}.$$

Однако нетрудно убедиться, что при любых  $k \geq 1$  справедливо неравенство

$$\frac{k^3 + 7k + 4}{2} > \frac{4k - 1 + \sqrt{k^2 - 8k - 5}}{3}.$$

Наконец, для третьей производной имеем

$$\chi'''(\lambda)|_{n-k-1} = 18n - 24k + 6 > 9k^3 + 39k + 42 > 0$$

при любых  $k \geq 1$ .

Таким образом, по теореме Фурье–Бюдана [11] правее числа  $n - k - 1$  нет корней характеристического полинома  $\chi(\lambda)$ . Откуда мы заключаем, что  $\rho(G_2) < n - k - 1$ . Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 1 проведем от противного. Предположим, что граф  $G$  негамильтонов. Тогда в силу очевидных неравенств

$$\delta(cl_n(G)) \geq \delta(G) \geq k$$

и

$$\rho(cl_n(G)) \geq \rho(G) \geq n - k - 1$$

и того, что негамильтоновость графа  $G$  равносильна негамильтоновости его замыкания  $cl_n(G)$ , можно предполагать, что  $G = cl_n(G)$ , а значит, для любой пары  $i$  и  $j$  несмежных вершин графа  $G$  выполняется неравенство

$$d_i + d_j \leq n - 1. \quad (1)$$

Покажем, что  $G = L_k(n)$  или  $G = M_k(n)$ . Тогда в силу теоремы 2 будет справедлива теорема 1.

Согласно теореме Хватала [12], существует натуральное число  $s$ , такое, что выполняются неравенства  $d_s \leq s < \frac{n}{2}$  и  $d_{n-s} \leq n - s - 1$  для возрастающей последовательности степеней графа  $G$ :  $\delta = d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n = \Delta$ . Поэтому имеем следующую цепочку неравенств:

$$2m = \sum_{i=1}^n d_i = (d_1 + \dots + d_s) + (d_{s+1} + \dots + d_{n-s}) + (d_{n-s+1} + \dots + d_n) \leq s^2 + (n - 2s)(n - s - 1) + s(n - 1) = n^2 - (2s + 1)n + (3s^2 + s). \quad (2)$$

Кроме того, в силу неравенств  $\rho(G) \geq n - k - 1$ ,  $\delta \geq k$  из условий теоремы, известной верхней оценки для спектрального радиуса [13]:

$$\rho(G) \leq \frac{\delta - 1 + \sqrt{(\delta + 1)^2 + 4(2m - \delta n)}}{2},$$

а также убывания функции  $f(x) = x - 1 + \sqrt{(x + 1)^2 + 4(2m - xn)}$  на промежутке  $[1; n - 1]$  получаем, что справедливо неравенство

$$n - k - 1 \leq \frac{k - 1 + \sqrt{(k + 1)^2 + 4(2m - kn)}}{2}.$$

Откуда после преобразований имеем

$$n^2 - (2k + 1)n + (2k^2 + k) \leq 2m. \quad (3)$$

Вместе с неравенством (2) это дает

$$n^2 - (2k + 1)n + (2k^2 + k) \leq n^2 - (2s + 1)k^2 + (3s^2 + s).$$

Откуда получаем

$$2(s - k)n \leq (3s^2 + s) - (2k^2 + k). \quad (4)$$

Покажем, что (4) выполняется только при  $s = k$ . Действительно, если  $s \geq k + 1$ , то из неравенства (4) следует

$$n \leq s + k + \frac{1}{2} + \frac{s^2}{2(s - k)}. \quad (5)$$

Обозначим правую часть неравенства (5), как функцию от переменной  $s$ , через  $f(s)$ , которую в силу неравенства  $s < \frac{n}{2}$  следует исследовать только на промежутке  $\left[ k + 1; \left\lfloor \frac{n - 1}{2} \right\rfloor \right]$ . Нетрудно убедиться, что на интервале  $\left[ k + 1; k + \frac{k}{\sqrt{3}} \right)$  функция  $f(s)$  убывает, а на интервале  $\left( k + \frac{k}{\sqrt{3}}; \left\lfloor \frac{n - 1}{2} \right\rfloor \right]$  — возрастает, поэтому в точке  $s = k + \frac{k}{\sqrt{3}}$  функция  $f(s)$  имеет минимум, а наибольшего значения она достигает в одном из концов отрезка  $\left[ k + 1; \left\lfloor \frac{n - 1}{2} \right\rfloor \right]$ .

Подсчитывая значение функции  $f(s)$  в точке  $s = k + 1$ , получаем

$$f(k+1) = \frac{k^2 + 6k + 4}{2} < \frac{k^2 + 7k + 4}{2} < n,$$

что противоречит неравенству (5). Следовательно, должно выполняться неравенство

$$n \leq f\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right) \leq f\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{3n^2 - 4n - 8k^2 - 4k + 1}{4(n-2k-1)},$$

равносильное неравенству

$$n^2 - 8kn + (8k^2 + 4k - 1) \leq 0. \quad (6)$$

Рассматривая левую часть (6) как полином от  $n$ , заключаем, что для выполнимости (6) должно выполняться неравенство

$$n \leq \frac{8k + \sqrt{64k^2 - 4(8k^2 + 4k - 1)}}{2} = 4k + \sqrt{8k^2 - 4k + 1}. \quad (7)$$

Однако при  $k \geq 2$  справедливо неравенство

$$4k + \sqrt{8k^2 - 4k + 1} \leq \frac{k^2 + 7k + 4}{2}, \quad (8)$$

равносильное неравенству

$$k^6 - 2k^4 + 8k^3 - 31k^2 + 8k + 12 \geq 0, \quad (9)$$

которое, как легко видеть, справедливо для произвольного  $k \geq 2$ , причем равенство в (9) достигается только при  $k = 2$ .

Таким образом, неравенство (8) при условиях теоремы 1 противоречит неравенству (7), и значит, действительно, неравенство (4) выполняется только при  $s = k$ .

Покажем теперь, что справедливо неравенство

$$d_{k+1} \geq n - k - 1 - k^2.$$

Пусть это не так. Тогда имеем

$$\begin{aligned} 2m = \sum_{i=1}^n d_i &= \sum_{i=1}^k d_i + d_{k+1} + \sum_{i=k+2}^{n-k} d_i + \sum_{i=n-k+1}^n d_i < \\ &k^2 + (n - k - 1 - k^2) + (n - 2k - 1)(n - k - 1) + k(n - 1) = \\ &n^2 - (2k + 1)n + (3k^2 + k), \end{aligned}$$

что противоречит неравенству (3). Следовательно, для произвольного  $i \geq k + 1$  справедливо неравенство

$$d_i \geq n - k - 1 - k^2. \quad (10)$$

Покажем теперь, что вершины  $k + 1, \dots, n$  индуцируют клику в графе  $G$ . Действительно, пусть вершины  $i, j \in \{k + 1, \dots, n\}$  несмежны в графе  $G$ . Тогда в силу (10)

$$d_i + d_j \geq 2n - 2k - 2 - 2k^2. \quad (11)$$

Однако при  $k \geq 2$  справедливо неравенство

$$2n - 2k - 2 - 2k^2 > n - 1, \quad (12)$$

равносильное неравенству

$$n > 2k^2 + 2k + 1.$$

Действительно, при  $k \geq 2$  имеет место неравенство

$$\frac{k^2 + 7k + 4}{2} \geq 2k^2 + 2k + 1,$$

равносильное неравенству

$$k^3 - 4k^2 + 3k + 2 \geq 0, \quad (13)$$

которое, как легко видеть, справедливо для произвольного  $k \geq 2$ , причем равенство в (13) достигается только при  $k = 2$ .

Из неравенств (11) и (12) вытекает неравенство  $d_i + d_j > n - 1$ , что противоречит (1).

Пусть  $X = \{1, \dots, k\}$ , а  $Y \subset \{k+1, \dots, n\}$  – множество вершин, которые имеют в  $X$  соседей. Так как  $|X| = k$  и  $d_i = k, i \in \{1, \dots, k\}$ , то  $Y \neq \emptyset$  и любая вершина из  $X$  имеет соседа из множества  $\{k+1, \dots, n\}$ .

Покажем, что в действительности каждая вершина из  $Y$  смежна с каждой вершиной из  $X$ . Предположим, что это не так, т. е.  $\exists w \in Y$  и  $\exists u, v \in X$ , такие, что  $wu \in E(G)$ , но  $wv \notin E(G)$ . Поскольку вершина  $w$  смежна с каждой вершиной из множества  $\{k+1, \dots, n\}$  и вершиной  $u$ , то имеем неравенство

$$d_w + d_v \geq (n - k) + k = n. \quad (14)$$

Полученное неравенство (14) противоречит (1).

Положим  $|Y| = l$  и заметим, что  $1 \leq l \leq k$ , так как  $d_1 = k$ . Если  $l = 1$ , то  $G = L_k(n)$ . Если  $l = k$ , то  $G = M_k(n)$ . Покажем теперь, что при  $1 < l < k$  граф  $G$  гамильтонов, что противоречит предположению теоремы 1.

Рассмотрим подграф  $H = G[X \cup Y]$  порядка  $k + l$ . В силу того, что  $K_l \vee kK_1 \subset H$  и  $l \geq 2$  получаем, что граф  $H$  является 2-связным. Далее, если  $u$  и  $v$  различные несмежные вершины графа  $H$  степеней  $d'_u$  и  $d'_v$  соответственно, то они лежат в  $X$ . Поэтому  $d'_u = d_u = k$  и  $d'_v = d_v = k$ , и значит, справедливо неравенство

$$d'_u + d'_v = 2k > k + l.$$

Поэтому граф  $H$  является гамильтоново-связным. Тогда легко видеть, что существует гамильтонов цикл и в графе  $G$ : достаточно выбрать две различные вершины  $u, v \in K_l$ , построить гамильтонову цепь  $P_1$  в графе  $K_{n-k-l} \vee \{u, v\}$  с концевыми вершинами  $u$  и  $v$  и добавить гамильтонову цепь  $P_2$  из графа  $H$ : объединение  $P_1 \cup P_2$  будет гамильтоновым циклом графа  $G$ .

Таким образом, предположение о негамильтоновости графа  $G$  приводит к противоречию с условиями теоремы 1, и тем самым она доказана.

Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция» и Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (проект № Ф16РА–003).

### Список использованной литературы

1. Ore, O. Arc coverings of graphs / O. Ore // Ann. Mat. Pura Appl. – 1961. – Vol. 55. – P. 315–321.
2. Ore, O. Hamilton-connected graphs / O. Ore // J. Math. Pures Appl. – 1963. – Vol. 42. – P. 21–27.
3. Bondy, A. A method in graph theory / A. Bondy, V. Chvátal // Discrete Math. – 1976. – Vol. 15. – P. 111–135.
4. Brualdi, R. A. On the spectral radius of complementary acyclic matrices of zeros and ones / R. A. Brualdi, E. S. Solheid // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. – 1986. – Vol. 7, N 2. – P. 265–272.
5. Бенедиктович, В. И. Достаточное спектральное условие гамильтоновости графа / В. И. Бенедиктович // Докл. НАН Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 5. – С. 5–12.
6. Nikiforov, V. Spectral radius and Hamiltonicity of graphs with large minimum degree / V. Nikiforov // arXiv:1602.01033 [math.CO] – <http://arxiv.org/abs/1602.01033>. – 2016.
7. Kelmans, A. K. On graphs with randomly deleted edges / A. K. Kelmans // Acta Math. Acad. Sci. Hung. – 1981. – Vol. 37. – P. 77–88.
8. Csikvari, P. On a conjecture of V. Nikiforov / P. Csikvari // Discrete Math. – 2009. – Vol. 309, N 13. – P. 4522–4526.
9. Brouwer, A. E. Spectra of graphs / A. E. Brouwer, W. H. Haemers. – Springer-Verlag, 2011.
10. Godsil, C. D. Algebraic graph theory / C. D. Godsil, G. F. Royle. – Springer-Verlag, 2001.
11. Прасолов, В. В. Многочлены / В. В. Прасолов. – М.: МЦНМО, 2001.
12. Chvátal, V. On Hamiltons ideals / V. Chvátal // J. Combin. Theory Ser. B. – 1972. – Vol. 12. – P. 163–168.
13. Hong, Y. A sharp upper bound of the spectral radius of graphs / Y. Hong, J. Shu, K. Fang // J. Combin. Theory. – 2001. – Vol. 81. – P. 177–183.

Поступило 11.07.2016

**ИНФОРМАТИКА**

УДК 343.98

А. А. БОРИСКЕВИЧ

**МЕТОД ЗАЩИТЫ ЦЕННЫХ ДОКУМЕНТОВ ОТ ПОДДЕЛОК  
НА ОСНОВЕ ВИЗУАЛЬНОЙ СХЕМЫ РАЗДЕЛЕНИЯ СЕКРЕТА***(Представлено академиком В. А. Лабунковым)**Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь  
anbor@bsuir.by*

Разработан метод защиты ценных документов от подделок, основанный на визуальном зашифровывании высокоразрешающего изображения с идентифицирующей информацией (общий секрет) и его расшифровывании посредством физического процесса наложения шумоподобных теневых изображений (частичные секреты) без использования компьютера и криптографических ключей шифрования. Исследованы криптографические свойства теневых изображений. Представлены результаты компьютерного моделирования.

*Ключевые слова:* ценные документы, визуальное шифрование, схемы разделения секрета, кодовая таблица, теневое изображение, общий и частичный секреты.

A. A. BORISKEVICH

**A PROTECTION METHOD OF VALUABLE DOCUMENTS AGAINST FORGERY BASED  
ON THE VISUAL SECRET SHARING SCHEME***Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus  
anbor@bsuir.by*

A method for protecting valuable documents against forgery based on the visual ciphering of a high-resolution image (shared secret) and its deciphering through the physical process of imposing noise-like shadow images without using a computer and cryptographic encryption keys is proposed. The cryptographic properties of shadow images are studied. The computer modeling results are presented.

*Keywords:* valuable documents, visual encryption, sharing secret scheme, code table, shadow image, general and partial secrets.

**Введение.** В настоящее время защищенность полиграфической продукции (банкноты, ценные бумаги, документы строгой отчетности и др.) обеспечивается применением полиграфических, голографических, информационных, микропроцессорных и иных защитных элементов, предотвращающих подделку данной продукции [1; 2]. Массовое распространение подделок, выполненных на компьютерной технике, подымает вопрос разработки новых защитных элементов. Независимо от своего характера каждый из элементов защиты должен отвечать ряду базовых требований, реализация которых обязательна и обеспечивает минимально достаточный уровень защищенности от подделки [2]: воспроизводимость защитного элемента в полном объеме, устойчивость во времени при воздействии на документ обычных эксплуатационных факторов и при несанкционированных вмешательствах, нераскрываемость (невоспроизводимость) элемента иными средствами; несохраняемость элементом защиты некоторых своих свойств в случае воздействия на документ с целью его частичной подделки, независимость защитных элементов друг от друга (в противном случае раскрытие одного элемента защиты вызовет раскрытие и всей системы) и контролируемость элемента защиты (возможность установления подлинности).

© Борискевич А. А., 2016.

Актуальной проблемой является разработка таких защитных технологий, которые удовлетворяют повышенным требованиям безопасности и удобства пользования конечным пользователям (дружелюбность и простота при пользовании, т. е. минимальность конкретных интеллектуальных усилий и максимальная скорость достижения положительного результата при пользовании) и обеспечивают уникальность, постоянство, устойчивость к подделке и компактность.

Одним из эффективных решений данной проблемы является использование визуальной схемы разделения секрета (ВСРС( $k, n$ )) [3–6], в которой идентифицирующая информация (общий секрет) шифруется с помощью  $n$  теневых шумоподобных изображений (частичных секретов) и восстанавливается с помощью  $k$  и больше теневых изображений (ТИ). Основными преимуществами ВСРС являются регулярность (одинаковые действия производятся для каждого исходного пикселя), независимость (каждый исходный пиксель шифруется независимо от других) и простота (возможность визуального расшифровывания посредством физического процесса наложения шумоподобных ТИ без использования компьютера и криптографических ключей шифрования).

Наиболее практичной схемой ВСРС для защиты ценных документов является схема ВСРС ( $k = 2$  из  $n = 2$ ) с  $m = 2$  (число пикселей в кодируемом блоке) [3]. Однако при использовании данной схемы увеличиваются размеры ТИ и восстановленного секретного изображения по сравнению с исходным секретным изображением в горизонтальном направлении в 2 раза. Схема ВСРС (2, 2) с  $m = 4$  не нарушает соотношение сторон восстановленного изображения, но увеличивает размеры ТИ и восстановленного секретного изображения в горизонтальном и вертикальном направлениях в 2 раза. Кроме того, ТИ, наносимые на ценные документы, должны иметь разрешение, обеспечивающее надежную защиту от ксерокопирования.

В настоящем сообщении представлен новый метод визуального шифрования секретного изображения, который является эффективной основой для построения систем защиты ценных документов от подделок.

**Метод визуального шифрования изображения с идентифицирующей информацией.** Для увеличения криптографической безопасности визуального шифрования секретных изображений предлагается метод (рис. 1), основанный на формировании высокоразрешающего изображения с идентифицирующей информацией (ВИИИ), выборе оптимальных параметров элементов кодовой таблицы по критериям визуального шифрования (равенство вероятностей  $p_r$  выбора строк ( $r$ ) кодовой таблицы, равенство вероятностей  $p_{BW}$  появления черных  $B$  и белых  $W$  пикселей кодового блока, равенство вероятностей  $p_{CB}$  использования кодовых блоков ( $CB$ )) и качества ТИ и восстановленного ВИИИ (энтропия, коэффициент межпиксельной корреляции, контраст, линейные размеры).

Для предотвращения угрозы копирования перед визуальным шифрованием разработана процедура формирования ВИИИ размером  $M \times N$ , основанная на вычислении количества пикселей



Рис. 1. Блок-схема метода защиты ценных документов от подделок на основе ВСРС (2, 2)

ВИИИ по горизонтали и по вертикали в зависимости от требуемого размера распечатки цифрового ВИИИ и ее разрешения в точках на дюйм (.dpi, .dot per inch), превышающего заданный пороговый уровень, преобразовании цветного (или полутонового) изображения в бинарное и иерархическом кодировании ВИИИ с помощью кодовой таблицы с кодовыми блоками различных размеров при сохранении его размера.

Псевдослучайное визуальное кодирование ВИИИ осуществляется с помощью кодовой таблицы на основе ВСПС (2, 2) с использованием кодовых блоков с двумя пикселями ( $m = 2$ ) (табл. 1).

Т а б л и ц а 1. Кодовая таблица на основе ВСПС (2, 2) с кодовыми блоками размером  $1 \times m$  ( $m = 2$ )

Пара пикселей ВИИИ размером $M \times N$	Бинарная псевдослучайная последовательность длиной $M \times N / 2$	Пара пикселей ТИ 1 размером $M \times N$ ( $m = 2$ )	Пара пикселей ТИ 2 размером $M \times N$ ( $m = 2$ )	Пара пикселей восстановленного ВИИИ размером $M \times N$
00	0	10	10	10
Чет(01, 10)	1	01	01	01
Нечет(01, 10)	0	10	01	11
11	1	01	10	11

Для обеспечения безопасности ТИ предложена процедура, основанная на увеличении количества одновременно кодируемых пикселей ВИИИ до двух, равное количеству пикселей кодового блока, при сохранении размеров восстановления ВИИИ, т. е. без расширения его размеров, и вычислении количества появлений каждой пары пикселей 01 и 10 в ВИИИ.

Предложенная кодовая таблица характеризуется множеством параметров ( $k = 2, n = 2, m = 2, \alpha = 1/2^{k-1}, p_r, p_{CB}, p_{BW}$ ) (табл. 1). Параметр  $\alpha$  определяет контраст восстановленного ВИИИ. Предложенная кодовая таблица позволяет обеспечить максимальный уровень безопасности информации в понятиях трех критериев качества визуального шифрования: равенство вероятностей  $p_r$  выбора строк кодовой таблицы, содержащих различные кодовые блоки ТИ для шифрования пары пикселей ВИИИ, равенство вероятностей  $p_{BW}$  появления черных и белых пикселей кодового блока и равенство вероятностей  $p_{CB}$  использования кодовых блоков. Максимальный уровень безопасности информации по первому критерию достигается посредством формирования псевдослучайной контентно-зависимой бинарной матрицы с одинаковыми вероятностями появления ее слабокоррелированных единиц и нулей. Достижение максимального уровня безопасности информации по второму и третьему критериям означает, что большая часть одинаковых кодовых блоков с равными вероятностями  $p_{BW}$  появления черных и белых пикселей в каждом кодовом блоке используется как при кодировании черной пары пикселей, так и при кодировании белой пары пикселей ВИИИ, что уменьшает возможность предсказания злоумышленниками секретного бита при анализе группы пикселей ТИ и не позволяет извлечь следы ВИИИ из ТИ.

Для генерации псевдослучайной последовательности с размером  $M \times N / 2$  использованы генераторы псевдослучайных последовательностей (ГПСП) (генераторы, основанные на регистрах сдвига с линейной обратной связью [7], блочных и поточных алгоритмах шифрования (AES (Advanced Encryption Standard), RC4) [7–10] и свойствах детерминированного хаоса [11]) с требуемой длиной секретного ключа (>128 бит).

Из табл. 1 видно, что при 00 или четном количестве появления одной из пар (01, 10) псевдослучайно выбирается одна из первых двух строк кодовой таблицы, а при 11 или нечетном количестве появления одной из пар (01, 10) псевдослучайно выбирается одна из последних двух строк кодовой таблицы.

Восстановление ВИИИ (табл. 1) осуществляется посредством физического наложения прозрачного носителя с ТИ1 на ТИ2, нанесенное на ценный документ, т. е. использования логической операции ИЛИ (OR). Каждая восстановленная пара ВИИИ будет черной или белой, если наложение приводит к паре пикселей (11) или к парам пикселей 01 и 10 соответственно.

**Численные результаты моделирования.** На рис. 2 представлены результаты визуального шифрования секретных изображений «личная подпись» и QR(Quick Response)-кода на основе ВСПС (2, 2) с  $m = 2$  без расширения (табл. 1).

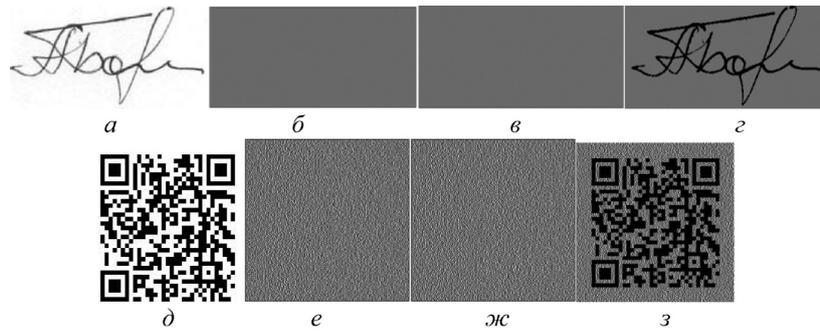


Рис. 2. Визуальное шифрование ВИИИ на основе ВСРС (2, 2) с  $m = 2$  без расширения:  $a, d$  – секретные изображения;  $b, e$  – теньевые изображения 1;  $в, ж$  – теньевые изображения 2;  $z, з$  – восстановленные секретные изображения (операция OR)

Для оценки защищенности сформированных ТИ (частичных секретов) использованы коэффициент  $r_{x,y}^{(l)}$  межпиксельной (вертикальной, диагональной и горизонтальной) корреляции [12] и информационная энтропия  $H$  бинарных ТИ

$$r_{x,y}^{(l)} = \frac{\text{cov}_l(x,y)}{\sqrt{D_l(x)}\sqrt{D_l(y)}},$$

$$H = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p),$$

где  $\text{cov}_l(x,y) = N^{-1} \sum_{i=1}^N (x_{l,i} - E_l(x))(y_{l,i} - E_l(y))$  – среднее значение ковариации пар  $l$ -го типа значений соседних пикселей  $x_{l,i}$  и  $y_{l,i}$  ТИ;  $l = \{V, H, D\}$  – тип вертикальных  $V$ , горизонтальных  $H$  и диагональных  $D$  пар соседних пикселей ТИ;  $E_l(x) = N^{-1} \sum_{i=1}^N x_{l,i}$  и  $D_l(x) = N^{-1} \sum_{i=1}^N (x_{l,i} - E_l(x))^2$  – среднее значение и дисперсия значений пикселей  $x_{l,i}$  ТИ для пар  $l$ -го типа;  $i$  и  $N$  – индекс и количество пар соседних пикселей, случайно выбранных из ТИ и равное 1000;  $p$  и  $(1-p)$  – вероятности появления значений черных и белых пикселей ТИ соответственно.

Из табл. 2 видно, что ВСРС (2, 2) с парой пикселей ( $m = 2$ ) без расширения в 6,25 и 2,0 раза безопаснее, чем ВСРС (2, 2) с парой пикселей ( $m = 2$ ) и четырьмя пикселями ( $m = 4$ ) с расширением соответственно в понятиях коэффициента межпиксельной автокорреляции  $r_{x,y}^{(l)}$  теневого изображения независимо от типа визуального шифруемого секретного изображения («личная подпись» и QR-кода).

Т а б л и ц а 2. Оценка эффективности визуального шифрования секретных изображений на основе ВСРС (2, 2)

Метрики качества ТИ	Личная подпись			QR-код		
	$m = 2$		$m = 4$	$m = 2$		$m = 4$
	расп.	нерасп.	расп.	расп.	нерасп.	расп.
$H_S$	1,000	1,000	0,9999	1,0000	1,0000	0,9999
$r_{x,y}^{(l)}$	0,4985	0,0769	0,1639	0,5038	0,0790	0,1619

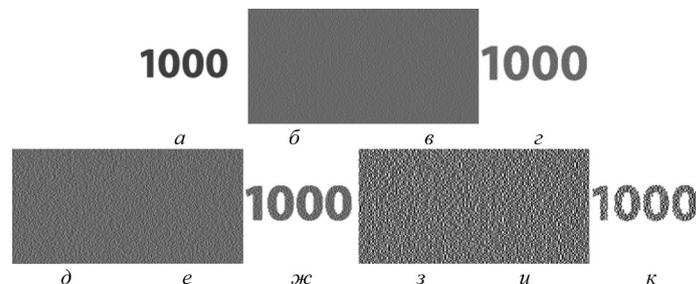


Рис. 3. Визуальное шифрование ВИИИ на основе ВСРС (2, 2) с  $m = 2$  без расширения с различными кодовыми блоками формирования ВИИИ:  $a$  – исходное ВИИИ;  $б, в, d$  – теньевые изображения 1;  $в, e, к$  – теньевые изображения 2;  $z, ж, л$  – восстановленные ВИИИ с помощью операции OR

На рис. 3 представлены результаты визуального шифрования ВИИИ «1000» размером  $20 \times 20$  мм с разрешением 2500 точек на дюйм на основе ВСРС (2, 2) с  $m = 2$  без расширения (табл. 1) и иерархического кодирования с использованием детерминированной кодовой таблицы с кодовыми блоками размером  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$  и  $16 \times 16$ .

**Заключение.** Разработан метод защиты ценных документов от подделок, основанный на процедуре формирования высокоразрешающего изображения с идентифицируемой информацией с требуемым разрешением и размером, его визуальном шифровании в виде двух шумоподобных теневого изображения, одно из которых наносится на ценный документ, и визуализации изображения с идентифицируемой информацией посредством другого шумоподобного теневого изображения без использования компьютера и криптографических ключей шифрования. Установлено, что разработанный метод обеспечивает безопасность информации теневого изображения в понятиях следующих критериев визуального шифрования: количество пикселей на дюйм (2540 точек на дюйм), пространство секретных ключей ( $>2^{128}$ ), одинаковые вероятности появления черных и белых пикселей кодового блока, использования кодовых блоков и выбора строки с кодовыми блоками кодовой таблицы, коэффициент межпиксельной корреляции ТИ (0,08) и информационная энтропия (1,0).

### Список использованной литературы

1. Технологии защиты денежных знаков и ценных бумаг / В. В. Трухачев, М. Б. Сергеев. – СПб.: ГУАП, 2012. – 110 с.
2. Бочарова, О. С. Критерии защищенности документов от подделки и криминалистические требования к элементам и средствам защиты от подделки бланков ценных бумаг и документов с определенной степенью защиты / О. С. Бочарова // Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Сер. Д. Экономические и юридические науки. – 2015. – № 5. – С. 167–170.
3. Naor, M. Visual Cryptography advances in cryptology / M. Naor, A. Shamir // Eurocrypt. – 1995. – P. 1–12.
4. On the security of a copyright protection scheme based on visual cryptography / T.-H. Chen [et al.] – 2009. – N 31. – P. 1–5.
5. Pal, J. K. A (2,N) visual cryptography technique for banking applications/ J. K. Pal, J. K. Mandal, K. Dasgupta // International Journal of Network Security & Its Applications (IJNSA). – 2010. – Vol. 2, N 4. – P. 118–127.
6. Cimato, S. Visual Cryptography and Secret Image Sharing / S. Cimato, Ching-Nung Yang. – CRC Press, Taylor & Francis Group, 2011. – 545 p.
7. Фергюсон, Н. Практическая криптография / Н. Фергюсон, Б. Шнайер. – М.: Изд. Вильямс, 2005. – 416 с.
8. Зензин, О. С. Стандарт криптографической защиты – AES. Конечные поля / О. С. Зензин, М. А. Иванов; под ред. М. А. Иванова. – М.: КУДИЦ–ОБРАЗ, 2002. – 176 с.
9. Панасенко, С. П. Алгоритмы шифрования. Специальный справочник / С. П. Панасенко. – БХВ–Петербург, 2009. – 576 с.
10. Singhal, N. Comparative Analysis of AES and RC4 Algorithms for Better Utilization / N. Singhal, J. P. S. Raina // International Journal of Computer Trends and Technology – July to Aug Issue. – 2011. – P. 177–181.
11. Kocarev, L. Chaos-Based Cryptography / L. Kocarev, S. Lian // Theory, Algorithms and Applications. – Springer, 2011. – 395 p.
12. Борискевич, А. А. Методология выбора базисных вейвлет-функций на основе статистических и корреляционных характеристик изображений / А. А. Борискевич // Докл. БГУИР. – 2010. – № 5(51). – С. 31–39.

Поступило в редакцию 29.06.2016

## ФИЗИКА

УДК 530.12

Е. А. ТОЛКАЧЕВ

**ВЕКТОРНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ГРУПП КЭРРОЛЛА И ГАЛИЛЕЯ:  
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА КЭРРОЛЛА С ВНЕШНИМИ ИСТОЧНИКАМИ***(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)**Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
tea@dragon.bas-net.by*

Показано, что галилеевские и кэрролловские бусты с размерными параметрами являются частными случаями векторной параметризации соответствующих преобразований математической группы Галилея. В бикватернионах над алгеброй дуальных чисел реализован ряд представлений группы Кэрролла и построены две системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно кэрролловских бивекторных полей, порождаемых внешними источниками. Показано, что определение напряженностей полей через потенциалы возможно только в однозарядовом случае и только для одной из систем уравнений кэрролловской электродинамики.

*Ключевые слова:* бикватернионы, векторная параметризация, группа Кэрролла, дуальные числа, уравнения электродинамики.

E. A. TOLKACHEV

**VECTOR PARAMETRIZATION OF THE GALILEO AND CARROLL GROUPS:  
CARROLL ELECTRODYNAMICS WITH EXTERNAL SOURCES***B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
tea@dragon.bas-net.by*

It is shown that the Galileo and Carroll boosts with dimensional parameters are the special cases of vector parameterization of the corresponding transformations of the mathematical Galileo group. In the biquaternions over the algebra of dual numbers, a number of the representations of the Carroll group are realized and two systems of the linear partial differential equations relative to the Carroll bivector fields generated by external sources are constructed. It is shown that the definition of the field strengths in terms of the potentials is possible only if there are the sources of the same type, and only for one system of the equations of Carroll electrodynamics.

*Keywords:* biquaternions, vector parameterization, Carroll group, dual number, electrodynamics equations.

**Введение.** Как известно [1], бикватернионный формализм позволяет связать векторную параметризацию конечных преобразований группы Лоренца с векторной параметризацией группы Галилея путем дискретной замены в формулах мнимой единицы ( $i^2 = -1$ ) на дуальную единицу ( $j^2 = 0$ ) без обращения к известной процедуре непрерывной контракции Иненю–Вигнера соответствующих алгебр Ли. В рамках такого подхода бикватернионные уравнения Максвелла порождают две системы уравнений нерелятивистской электродинамики Леви–Леблонда [2] в пространстве–времени Галилея–Ньютона без процедуры разложения по параметру малости или устремления модуля скорости света  $c$  к бесконечности. При этом, однако, остаются проблемы рескейлинга полей и изменения физического смысла внешних источников [3]. В последнее время возобновился интерес [4] к «ультрарелятивистскому» пределу  $c \rightarrow 0$ , превращающему пространство Минковского в пространство–время Кэрролла [5]. Предпринимаются попытки построения кэрролловского предела ОТО [6; 7], струн [8] и бран [9]. Однако наиболее часто обра-

щаются к уравнениям электродинамики в пространстве–времени Кэрролла [4]. Как правило, все ограничивается построением двух систем свободных уравнений, как предела уравнений Максвелла, и доказательством их ковариантности относительно группы Кэрролла. В настоящей работе показано, что галилеевские и кэрролловские бусты являются частными физическими случаями размерной векторной параметризации соответствующих, вообще говоря, безразмерных преобразований математической группы Галилея. Выяснена их связь с обычной (брадионной) и псевдотахионной параметризациями группы Лоренца. С использованием общего подхода к описанию групп, параметризованных бикватернионами над алгеброй дуальных чисел [10], реализован ряд представлений групп Галилея и Кэрролла и построены линейные дифференциальные уравнения в частных производных относительно бивекторных полей, порождаемых внешними источниками двух типов. Показано, что определение напряженностей полей через потенциалы в присутствии внешних источников возможно только для одной из систем уравнений электродинамики в пространстве–времени Кэрролла.

**Основная часть.** Напомним, что закон умножения бикватернионов в векторной форме естественно соединяет в себе все операции векторной алгебры

$$Q_1 Q_2 = Q_{10} Q_{20} - (\underline{Q}_1 \underline{Q}_2) + Q_{10} \underline{Q}_2 + Q_{20} \underline{Q}_1 + [\underline{Q}_1 \underline{Q}_2],$$

где  $Q_{a=1,2}$  – бикватернионы, представимые в виде  $Q = Q_0 + \underline{Q}$ , а  $(\underline{Q}_1 \underline{Q}_2)$  и  $[\underline{Q}_1 \underline{Q}_2]$  – аналоги скалярного и векторного произведений. Для бикватернионов над гиперкомплексными числами определены операции гиперкомплексного –  $\underline{Q}^* = Q_0^* - \underline{Q}^*$  и кватернионного –  $\bar{Q} = Q_0 - \underline{Q}$  сопряжений, первое из которых является автоморфизмом, второе – антиавтоморфизмом алгебры бикватернионов  $\underline{Q}_1 \underline{Q}_2 = \underline{Q}_2 \bar{Q}_1$ . С их помощью в пространстве бикватернионов можно выделить инвариантные классы

$$S_0 = \bar{S}_0, \quad S_0 = \pm S_0^*; \quad \underline{F} = -\underline{F}; \quad \underline{V} = -\bar{\underline{V}}^*; \quad \tilde{\underline{V}} = \bar{\tilde{\underline{V}}}^* \quad (1)$$

относительно следующих преобразований с помощью произвольных бикватернионов  $L$

$$S'_0 = L S_0 \bar{L}; \quad \underline{F}' = L \underline{F} \bar{L}; \quad \underline{V}' = L \underline{V} \bar{L}^*; \quad \tilde{\underline{V}}' = L \tilde{\underline{V}} \bar{L}^*. \quad (2)$$

В дальнейшем будем рассматривать только специальные преобразования, осуществляемые бикватернионами с единичной нормой  $L \bar{L} = 1$ , представимыми в виде

$$L = (1 + \underline{q} \bar{\underline{q}})^{-1/2} (1 + \underline{q}), \quad (3)$$

где  $\underline{q} = \underline{o} + I \tilde{\underline{\beta}}$  – бикватернионный аналог вектор-параметра  $\Phi$ . И. Федорова, подчиняющийся закону композиции [11],

$$L_3 = L_1 L_2 \rightarrow \underline{q}_3 = \frac{\underline{q}_1 + \underline{q}_2 + [\underline{q}_1 \underline{q}_2]}{1 - (\underline{q}_1 \underline{q}_2)} \equiv \langle \underline{q}_1 \underline{q}_2 \rangle, \quad (4)$$

а  $I$  равно  $i$  или  $j$ . Строго говоря, в определении (3) перед дробью должен стоять знак  $\pm$ , что несущественно, пока рассматриваются только билинейные преобразования вида (2). Очевидно, что преобразования (2), (3) сохраняют норму бикватернионов (1). Преобразования (2), (3) с мнимыми вектор-параметрами  $\underline{q} \equiv I \tilde{\underline{\beta}}$  называются бустами, а с действительными  $\underline{q} \equiv \underline{o}$  – преобразованиями группы вращений –  $\bar{SO}(3)$ .

В силу нелинейности (4), при  $i^2 = -1$  неколлинеарные бусты группы не образуют, в отличие от случая  $j^2 = 0$ , когда вектор-параметры бустов при композиции просто складываются  $\tilde{\underline{\beta}}_3 = \tilde{\underline{\beta}}_1 + \tilde{\underline{\beta}}_2$ . При этом, подставляя в (4)  $L^G = [1 + \underline{o}^2 + 2j(\underline{o} \tilde{\underline{\beta}})]^{-1/2} (1 + \underline{o} + j \tilde{\underline{\beta}})$ , убеждаемся, что композиция вращений не зависит от наличия бустов, поскольку всегда

$$\underline{o}_3 \equiv \langle \underline{o}_1, \underline{o}_2 \rangle, \quad (5a)$$

но не наоборот

$$\tilde{\underline{\beta}}_3 = [1 - (\underline{o}_1 \underline{o}_2)]^{-2} \{ [1 - (\underline{o}_1 \underline{o}_2)] (\tilde{\underline{\beta}}_1 + \tilde{\underline{\beta}}_2 + [\underline{o}_1 \tilde{\underline{\beta}}_2] - [\underline{o}_2 \tilde{\underline{\beta}}_1]) + (\underline{o}_1 + \underline{o}_2 + [\underline{o}_1 \underline{o}_2]) ((\underline{o}_1 \tilde{\underline{\beta}}_2) + (\underline{o}_1 \tilde{\underline{\beta}}_2)) \}. \quad (5b)$$

Кроме того, нелинейность (4) при  $i^2 = -1$  влечет за собой безразмерность комплексного вектор-параметра  $\underline{q} = \underline{o} + j\tilde{\beta}$ . При  $j^2 = 0$  из (5а) следует безразмерность только действительной части  $\underline{q} = \underline{o} + j\tilde{\beta}$ . Его мнимая часть  $-\tilde{\beta}$ , согласно (5б), может с одинаковым успехом рассматриваться как размерная, так и безразмерная величина. Соответственно, в первом случае компоненты бикватернионов, «смешиваемые» преобразованиями (2), должны иметь одинаковую размерность, а во втором – либо одинаковую, либо разную.

Хорошо известно [11], что при  $i^2 = -1$  композиция двух произвольных бустов  $-\tilde{\beta}_a \equiv \underline{n}_a th \theta_a / 2$ , где  $\underline{n}_a^2 = 1$ , всегда может быть представлена как композиция буста и вращения. При этом параметры  $\underline{\beta}_a = 2\tilde{\beta}_a(1 + \tilde{\beta}_a^2)^{-1/2} = \underline{i} \underline{n}_a th \theta_a$  удовлетворяют безразмерному релятивистскому закону сложения скоростей

$$\underline{\beta}_3 = \frac{[\underline{\beta}_1 - \hat{\underline{\beta}}_2(\underline{\beta}_1 \hat{\underline{\beta}}_2)]\sqrt{1 - \beta_2^2} + \hat{\underline{\beta}}_2[\underline{\beta}_2 + (\underline{\beta}_1 \hat{\underline{\beta}}_2)]}{1 + (\underline{\beta}_1 \underline{\beta}_2)}, \quad (6)$$

где «шляпка» обозначает единичный вектор. Трансформационные свойства бикватернионов  $\underline{x} = i\underline{x}_0 + \underline{x}$ , принадлежащих классу  $V$  из (1), относительно бустов имеют вид безразмерных преобразований Лоренца

$$\underline{x}'_0 = \frac{x_0 + (\underline{\beta} \underline{x})}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \underline{x}' = \underline{x} - \hat{\underline{\beta}}(\hat{\underline{\beta}} \underline{x}) + \frac{\hat{\underline{\beta}}(\hat{\underline{\beta}} \underline{x}) + \underline{\beta} x_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (7)$$

Подстановка

$$x_0 = ct, \quad \underline{\beta} = \frac{V}{c} \hat{\underline{V}}, \quad (8a)$$

где размерности  $[c] = [\underline{x}][t]^{-1}$ ,  $[V] = [c]$ , приводит их к стандартному виду

$$t' = \frac{t + \frac{(V \underline{x})}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \underline{x}' = \underline{x} - \hat{\underline{V}}(\hat{\underline{V}} \underline{x}) + \frac{\hat{\underline{V}}(\hat{\underline{V}} \underline{x}) + Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (9a)$$

Однако возможен и псевдотахионный вариант трактовки преобразований (7), когда

$$x_0 = ct, \quad \underline{\beta} = \frac{c}{U} \hat{\underline{U}}, \quad [U] = [c], \quad (8б)$$

и

$$t' = \frac{t + \frac{(x \hat{\underline{U}})}{U}}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{U^2}}}, \quad \underline{x}' = \underline{x} - (x \hat{\underline{U}}) \hat{\underline{U}} + \frac{\frac{c^2}{U} t + (x \hat{\underline{U}})}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{U^2}}} \hat{\underline{U}}. \quad (9б)$$

Соответственно из (6) имеем два закона сложения параметров размерности скорости

$$\underline{V}_3 \equiv \underline{V}_1 \oplus_{\leq c} \underline{V}_2 = \frac{[\underline{V}_1 - \hat{\underline{V}}_2(\underline{V}_1 \hat{\underline{V}}_2)]\sqrt{1 - \frac{V_2^2}{c^2}} + \hat{\underline{V}}_2[\underline{V}_2 + (\underline{V}_1 \hat{\underline{V}}_2)]}{[1 + \frac{(\underline{V}_1 \underline{V}_2)}{c^2}]}, \quad (10a)$$

$$\underline{U}_3 \equiv \underline{U}_1 \oplus_{\geq c} \underline{U}_2 = \frac{U_1 U_2 + c^2 (\hat{\underline{U}}_1 \hat{\underline{U}}_2)}{(U_1 + U_2)^2 - c^2 [1 - (\hat{\underline{U}}_1 \hat{\underline{U}}_2)^2]} \times \{[\hat{\underline{U}}_1 - \hat{\underline{U}}_2(\hat{\underline{U}}_1 \hat{\underline{U}}_2)]\sqrt{U_2^2 - c^2} + \hat{\underline{U}}_2[U_1 + (\hat{\underline{U}}_1 U_2)]\}. \quad (10б)$$

Нетрудно видеть, что при любом конечном значении  $c \neq 0$  и  $\widehat{V} = \widehat{U}$  формулы (9), (10) связаны подстановкой  $VU = c^2$ , которая неоднократно возникала при попытках построения теории тахионов [12]. Позднее эта формула обсуждалась в работе [13], где была высказана мысль, что тахионы являются псевдочастицами, так как физически выглядят как брадионы с дуальной, времени-подобной 4-скоростью.

Двум размерным параметрам  $\underline{V}$  и  $\underline{U}$  соответствуют два предельных перехода. Использование (8а) позволяет устремить  $c \rightarrow \infty$  в (9а) и (10а), а (8б) – найти предел  $c \rightarrow 0$  в (9б), (10б) [5]. Очевидно, что в первом случае конус в пространстве Минковского разворачивается в пространство  $R^3$ , ограничение на модуль скорости исчезает, как и пространственно подобная внешность конуса. Возникает абсолютная одновременность событий в пространстве расслоения с базой – осью времени, над каждой точкой которой существует слой  $R^3$ . Естественно, при этом из (9а) и (10а) следуют преобразования Галилея и нерелятивистский закон сложения скоростей

$$\begin{aligned} t' &= t, \quad \underline{x}' = \underline{x} + \underline{V}t, \\ \underline{V}_3 &= \underline{V}_1 + \underline{V}_2. \end{aligned} \quad (11a)$$

Во втором случае изотропный конус вырождается в ось времени, движение в обычном смысле становится невозможным, поскольку  $R^3$  возникает из внешности конуса, состоящей из причинно несвязанных точек, в каждой из которых течет свое время. С геометрической точки зрения пространство описывается четырехмерной нулевой гиперповерхностью в  $R^{4,1}$  [6]. Формально из (9б), (10б) имеем

$$\begin{aligned} t' &= t + \left( \underline{x} \frac{\widehat{U}}{\underline{U}} \right) \equiv t + (\underline{x} \underline{v}), \quad \underline{x}' = \underline{x}, \\ \underline{U}_3 &= \frac{U_2^2 \underline{U}_1 + U_1^2 \underline{U}_2}{(U_1 + U_2)^2} \leftrightarrow \frac{\widehat{U}_3}{U_3} = \frac{\widehat{U}_1}{U_1} + \frac{\widehat{U}_2}{U_2} \leftrightarrow \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2. \end{aligned} \quad (11b)$$

Формулы (11б) описывают бусты в пространстве Кэрролла [5], образующие подгруппу десяти параметрической группы Кэрролла, включающей, наряду с группой вращений, постоянные сдвиги пространственно-временных координат.

Отличительной чертой развиваемого подхода является выбор единой обезразмеривающей константы  $c$ . Использование же бикватернионов над алгеброй дуальных чисел дает возможность универсальной формулировки линейных уравнений первого порядка в частных производных для гиперкомплексных бивекторов в пространствах Галилея–Ньютона и Кэрролла.

Прежде всего, заметим, что формулы (11), полученные в результате предельных манипуляций с константами, автоматически следуют из (2)–(4) при  $\underline{q} = j\tilde{\beta} \equiv j\frac{\beta}{2}$ . Преобразование бикватерниона  $x = -t + j\underline{x}$  при галилеевских бустах, когда  $\beta = \underline{V}$

$$x' = -t' + j\underline{x}' = Gx\bar{G}^* = \left( 1 - j\frac{\underline{V}}{2} \right) (-t + j\underline{x}) \left( 1 - j\frac{\underline{V}}{2} \right) = -t + j[\underline{x} + \underline{V}t] \quad (12)$$

представляет собой бикватернионную запись первой из формул (11а). Галилеевский закон сложения скоростей следует из композиции вектор-параметров (4).

Знак минус перед временем выбран для удобства прослеживания связи с формулами для пространства Минковского, в котором преобразования Лоренца (2), (3) бикватернионов  $x = ict + \underline{x}$  и  $-ix = -ct + i\underline{x}$  очевидно приводят к одинаковым выражениям для их компонент. Преобразования Галилея бикватернионов  $x = jt + \underline{x}$  и  $\tilde{x} = -t + j\underline{x}$  различаются существенно.

Так как матричный аналог (12) —  $\begin{pmatrix} -t' \\ \underline{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\underline{V} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t \\ \underline{x} \end{pmatrix} \equiv B_G \begin{pmatrix} -t \\ \underline{x} \end{pmatrix}$ , то, согласно общим правилам, трансформационные свойства компонент «градиента» определяются матрицей  $(B_G^T)^{-1}$ , где  $T$  – знак транспонирования  $\begin{pmatrix} -\partial'_t \\ \nabla'_a \end{pmatrix} = (B_G^T)^{-1} \begin{pmatrix} -\partial_t \\ \nabla_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & V_a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial_t \\ \nabla_a \end{pmatrix}$ . Это позволяет ввести бикватернионный дифференциальный оператор  $\nabla_G = -j\partial_t + \underline{\nabla}$  с законом преобразования

$$\nabla' = -j\partial'_t + \underline{\nabla}' = G\underline{\nabla}G^* = \left(1 - j\frac{V}{2}\right)(-j\partial_t + \underline{\nabla})\left(1 - j\frac{V}{2}\right) = -j[\partial_t - (\underline{V}\underline{\nabla})] + \underline{\nabla}. \quad (13)$$

Теперь есть все необходимое для записи Галилей-ковариантного уравнения первого порядка относительно векторного бикватерниона  $\underline{F}_G^*$  (1), динамика которого определяется внешними источниками  $V_G$  и  $\tilde{V}_G$  (1)

$$\nabla_G \underline{F}_G^* = \underline{f}_{G1} - j\underline{f}_{G2} = V_G + \tilde{V}_G = (jV_{G0} + \underline{V}_G) + (\tilde{V}_{G0} + j\underline{V}_G). \quad (14)$$

Из (2) следует, что уравнение (14) сохраняет свой вид при преобразованиях Галилея, если источники принадлежат к двум последним классам из (2). Эти уравнения могут быть с одинаковым успехом интерпретированы как магнитная и электрическая системы Леви-Леблонда [2]. Подставляя в (14)  $\underline{f}_{G1} = \underline{B}_G$ ,  $\underline{f}_{G2} = \underline{E}_G$ ,  $\tilde{V}_G = 0$ ,  $V_G \equiv J_{Ge} = j\rho_{Ge} + \underline{j}_{Ge}$ , получаем «магнитную» систему

$$\partial_t \underline{B}_G + [\underline{\nabla} \underline{E}_G] = 0, \quad [\underline{\nabla} \underline{B}_G] = \underline{j}_{Ge}, \quad (\underline{\nabla} \underline{B}_G) = 0, \quad (\underline{\nabla} \underline{E}_G) = \rho_{Ge}, \quad (15a)$$

а при  $\underline{f}_{G1} = \underline{E}_G$ ,  $\underline{f}_{G2} = -\underline{B}_G$ ,  $\tilde{V}_G = -\rho_{Ge} + j\underline{j}_{Ge}$ ,  $V_G = 0$  – «электрическую»

$$[\underline{\nabla} \underline{E}_G] = 0, \quad -\partial_t \underline{E}_G + [\underline{\nabla} \underline{B}_G] = \underline{j}_{Ge}, \quad (\underline{\nabla} \underline{B}_G) = 0, \quad (\underline{\nabla} \underline{E}_G) = \rho_{Ge}. \quad (15b)$$

Напомним, что системы (15) получаются из двух равнозначных бикватернионных записей уравнений Максвелла в пространстве Минковского ( $i^2 = -1$ ) [1]

$$(-i\partial_{ct} + \underline{\nabla})(\underline{B} - i\underline{E}) = \{i(\underline{\nabla} \underline{E}) + i^2 \partial_{ct} \underline{E} + [\underline{\nabla} \underline{B}]\} + \{-(\underline{\nabla} \underline{B}) - i(\partial_{ct} \underline{B} + [\underline{\nabla} \underline{E}])\} = c^{-1}(ic\rho_e + \underline{j}_e), \quad (16)$$

$$(-i\partial_{ct} + \underline{\nabla})(\underline{E} + i\underline{B}) = \{-(\underline{\nabla} \underline{E}) + i(-\partial_{ct} \underline{E} + [\underline{\nabla} \underline{B}])\} + \{-i(\underline{\nabla} \underline{B}) - i^2 \partial_{ct} \underline{B} + [\underline{\nabla} \underline{E}]\} = c^{-1}(-c\rho_e + \underline{j}_e),$$

при  $i \rightarrow j$ ,  $j^2 = 0$ . В уравнениях (15) нет размерной константы  $c$ , в отличие от уравнений, получаемых из (16). Соответственно поля и токи имеют различные размерности.

«Магнитную» систему (15a) правильнее называть «домаксвелловской» [14]. Очевидно, что при стандартном введении потенциалов ее первое и третье уравнения превращаются в тождества. Из второго следует, что  $(\underline{\nabla} \underline{j}_{Ge}) \equiv 0$ , т. е. все токи замкнуты, порождают магнитные поля и не зависят от плотностей электрических источников. «Разомкнуть» токи и объединить их с зарядами в уравнение непрерывности Максвеллу удалось после введения токов смещения, отсутствующих в (15a). «Электрическая» же система (15b), в сущности, является формальным «неологизмом».

Применим теперь описанный подход к самосогласованному построению уравнений электродинамики в пространстве Кэрролла, параметризуемом бикватернионами  $\tilde{x} \equiv x_C = jt + \underline{x}$ . Тогда при галилеевских бустах вместо (12), (13) из (11б) имеем

$$\underline{x}' = \underline{x}, \quad t' = t + \left( \underline{x} \frac{\hat{U}}{U} \right) = t + (\underline{x}\underline{\beta}_C) \rightarrow \partial'_t = \partial_t, \quad \underline{\nabla}' = \underline{\nabla} - \frac{\hat{U}}{U} \partial_t = \underline{\nabla} - \underline{\beta}_C \partial_t. \quad (17)$$

Это позволяет по аналогии с (14) выписать искомые уравнения

$$\begin{aligned} \nabla_C \underline{F}_C^* &= (\partial_t + j\underline{\nabla})(\underline{f}_{C1} - j\underline{f}_{C2}) = -j(\underline{\nabla} \underline{f}_{C1}) + \partial_t \underline{f}_{C1} - j\partial_t \underline{f}_{C2} + j[\underline{\nabla} \underline{f}_{C1}] = \\ &V_C + \tilde{V}_C = (jV_{C0} + \underline{V}_C) + (\tilde{V}_{C0} + j\underline{V}_C) \rightarrow \\ &-\partial_t \underline{f}_{C2} + [\underline{\nabla} \underline{f}_{C1}] = \tilde{V}_C, \quad \partial_t \underline{f}_{C1} = \underline{V}_C, \quad (\underline{\nabla} \underline{f}_{C1}) = -V_{C0}, \quad \tilde{V}_{C0} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где при бустах кэрролловские токи и поля преобразуются по правилам

$$V'_C = j[V_{C0} + (\underline{\beta}_C \underline{V}_C)] + \underline{V}_C, \quad \tilde{V}'_C = \tilde{V}_{C0} + j(\tilde{V}_C - \underline{\beta}_C \tilde{V}_{C0}), \quad \underline{f}'_{C1} = \underline{f}_{C1}, \quad \underline{f}'_{C2} = \underline{f}_{C2} - [\underline{\beta}_C \underline{f}_{C1}]. \quad (19)$$

Таким образом, система уравнений электродинамики Кэрролла состоит из семи уравнений относительно шести напряженностей и одного ограничения на внешние источники – требование обращения в ноль одного из зарядов. Последнее условие обеспечивает ковариантность относительно преобразований из группы Кэрролла первого уравнения в третьей строке (18). Вызывает

вопрос отсутствие ограничения на  $(\nabla f_{C2})$ , которое является неотъемлемым атрибутом систем уравнений электродинамики в пространствах Минковского и Галилея–Ньютона. Частичный ответ на него следует из неинвариантности этой дивергенции относительно преобразований (17), (19) –  $(\nabla f_{C2})' = (\nabla f_{C2}) + (\beta_C \tilde{V}_C)$  при  $\tilde{V}_C \neq 0$ . Восстановить в правах  $(\nabla f_{C2})$  можно только при отсутствии внешних источников типа  $\tilde{V}_C$ . Для доказательства совместности свободной от  $\tilde{V}_C$  системы (18) введем потенциал

$$\underline{E}_C^* = \underline{f}_{C1} - j\underline{f}_{C2} \equiv -\bar{\nabla}_C A = -\{(\partial_t - j\underline{\nabla})(jA_0 + \underline{A})\}_V = -\partial_t \underline{A} + j[\underline{\nabla} \underline{A}] \rightarrow \underline{f}_{C1} = -\partial_t \underline{A}, \underline{f}_{C2} = [\underline{\nabla} \underline{A}],$$

что влечет за собой «недостающее уравнение» – тождество  $(\nabla f_{C2}) \equiv 0$ . Напомним, что и для уравнений Максвелла последовательное введение потенциалов возможно только в присутствии однотипных электрических источников.

Чтобы установить формальную связь введенных кэрролловских полей и токов с их релятивистскими партнерами, перепишем уравнения Максвелла с электрическими источниками  $(-i\partial_{ct} + \underline{\nabla})(\underline{B} - i\underline{E}) = (ic\rho_e + \underline{j}_e)$  в двух эквивалентных формах

$$(\partial_{ct} + i\underline{\nabla})(\underline{B} - i\underline{E}) = (-c\rho_e + \underline{j}_e), \quad (\partial_{ct} + i\underline{\nabla})(\underline{E} + i\underline{B}) = -\frac{1}{c}(ic\rho_e + \underline{j}_e), \quad i^2 = -1$$

и произведем замену  $i$  на  $j$

$$(\partial_{ct} + j\underline{\nabla})(\underline{B} - j\underline{E}) = -j(\underline{\nabla} \underline{B}) + \partial_{ct} \underline{B} - j\partial_{ct} \underline{E} + j[\underline{\nabla} \underline{B}] = c^{-1}(-c\tilde{\rho}_e + \underline{j}\tilde{j}_e),$$

$$(\partial_{ct} + j\underline{\nabla})(\underline{E} + j\underline{B}) = -j(\underline{\nabla} \underline{E}) + \partial_{ct} \underline{E} + j\partial_{ct} \underline{B} + j[\underline{\nabla} \underline{E}] = -c^{-1}(jc\rho_e + \underline{j}_e).$$

Убирая константу  $c$ , и соответственно, изменяя размерности полей и токов, имеем две кэрролловские системы, в первой из которых электрический ток выступает в роли  $\tilde{V}_C$

$$-\partial_t \underline{E}_C + [\underline{\nabla} \underline{B}_C] = \tilde{j}_{Ce}, \quad \partial_t \underline{B}_C = 0, \quad (\underline{\nabla} \underline{B}_C) = 0, \quad (20a)$$

во второй – в роли  $V_C$  из (18)

$$-\partial_t \underline{E}_C = \underline{j}_{Ge}, \quad \partial_t \underline{B}_C + [\underline{\nabla} \underline{E}_C] = 0, \quad (\underline{\nabla} \underline{E}_C) = \rho_{Ge}. \quad (20b)$$

При отсутствии внешних источников имеем две известные системы уравнений  $[G]$

$$-\partial_t \underline{E}_C + [\underline{\nabla} \underline{B}_C] = 0, \quad \partial_t \underline{B}_C = 0, \quad (\underline{\nabla} \underline{B}_C) = 0, \quad (\underline{\nabla} \underline{E}_C) = 0, \quad (21a)$$

$$\partial_t \underline{E}_C = 0, \quad \partial_t \underline{B}_C + [\underline{\nabla} \underline{E}_C] = 0, \quad (\underline{\nabla} \underline{E}_C) = 0, \quad (\underline{\nabla} \underline{B}_C) = 0. \quad (21b)$$

**Заключение.** Система (20a) описывает постоянное во времени, не зависящее от системы отсчета, роторное магнитное поле  $\underline{B}_C$ , порождаемое постоянными токами и линейно зависящими от времени «электрическими» полями  $\underline{E}_C$ . Переменные токи индуцируют зависящие от времени кэрролловские «электрические» поля, удовлетворяющие уравнению  $\bar{\nabla}_C \nabla_C \underline{E}_C = \partial_t^2 \underline{E}_C = -\partial_t \tilde{j}_{Ce}$ , из которого следует, что линейно зависящие от времени «электрические» поля, наряду с постоянными, являются вакуумными решениями. Как следует из (21a), в отсутствие источников они еще и роторные.

Система (20b) динамически более интересна. Во-первых, из нее следует уравнение непрерывности для внешних источников. Во-вторых, в нее без ограничения общности можно добавить Кэрролл-ковариантное уравнение  $(\underline{\nabla} \underline{B}_C) = 0$ . Главное же в том, что при описании взаимодействия в пространстве Кэрролла в качестве «нулевого» приближения можно выбирать только систему (21b). Система же (21a) описывает «темный» фон, не проявляющий себя в электромагнитных взаимодействиях.

Выражаю благодарность Л. М. Томильчику и Ю. А. Курочкину за полезные комментарии.

### Список использованной литературы

1. Курочкин, Ю. А. Дуальные преобразования в галилеевски инвариантной электродинамике и три вида бикватернионов / Ю. А. Курочкин, Е. А. Толкачев // ДАН БССР. – 1990. – Т. 34, № 8. – С. 695–697.
2. Le Bellac, M. Galilean electromagnetism / M. Le Bellac, J. M. Levy-Leblond // Nuov. Cim. – 1973. – Vol. 14B. – P. 217–233.

3. *Толкачев, Е. А.* Принцип относительности и уравнения галилеевски инвариантной электродинамики с источниками / Е. А. Толкачев // Докл. НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 5. – С. 44–48.
4. Carroll versus Newton and Galilei: two dual non-Einsteinian concepts of time / C. Duval [et al.] // arXiv: gr-qc. 2014. – 1402.0657 v5. – P. 1–32.
5. *Levy-Leblond, J. M.* Une nouvelle limite non-relativiste du groupe de Poincaré / J. M. Levy-Leblond // Annales de l'I.H.P. – 1965. – Section A. – Vol. 3, N 1. – P. 1–12.
6. *Dautcourt, G.* On the Ultrarelativistic Limit of General Relativity / G. Dautcourt // arXiv: gr-qc. 1998. – 9801093 v1. – P. 1–8.
7. *Hartong, J.* Gauging the Carroll Algebra and Ultra-Relativistic Gravity / J. Hartong // arXiv: hep-th. 2015. – 1505011v1. – P. 1–27.
8. *Cardona, B.* Dynamics of Carroll Strings / B. Cardona, J. Gomis, J. M. Ponsa // arXiv: hep-th. 2016. – 1605.05483 v2. – P. 1–12.
9. *Clark, T. E.* AdS-Carroll Branes / T. E. Clark, T. ter Veldhuis // arXiv: hep-th. 2016. – 1605484 v1. – P. 1–47.
10. *Богуш, А. А.* Векторная параметризация некоторых групп, связанных с бикватернионами над двойными и дуальными числами / А. А. Богуш, Ю. А. Курочкин // ДАН Беларуси. – 1995. – Т. 39, № 3. – С. 39–43.
11. *Федоров, Ф. И.* Группа Лоренца / Ф. И. Федоров. – Москва: Наука, 1979. – 384 с.
12. *Mignani, R.* Generalized Lorenz transformations in four dimensions and superluminal objects / R. Mignani, R. E. Re-sami // N. Cim. – 1973. – Vol. 4, N 1. – P. 109–189.
13. *Filipe, L.* Tachyons and psedotachyonic relativity / L. Filipe, T. D. Ferreira // Conc. of Phys. 2007. – Vol. IV, N 1. – P. 35–69.
14. *Фуцич, В. И.* Симметрия уравнений Максвелла / В. И. Фуцич, А. Г. Никитин. – Киев: Наук. думка, 1983. – 200 с.

*Поступило в редакцию 27.06.2016*

УДК 535.37

Академик В. А. ТОЛКАЧЕВ, А. П. БЛОХИН

**НЕОБЫЧНАЯ ФЛУОРЕСЦЕНЦИЯ ЦИС-АЗОАЛКАНОВ –  
РЕЗУЛЬТАТ МИГРАЦИИ ( $n, \pi^*$ )-ВОЗБУЖДЕНИЯ**Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
tolkachev@imaph.bas-net.by; lsfm@imaph.bas-net.by

Причиной формирования необычно широких спектров флуоресценции  $C_{2v}$ -симметричных цис-азоалканов является обратимая миграция между азотами  $-N = N$ -группы начальной остаточной локализации  $n, \pi^*$ -возбуждения на исходном для возбужденного  $n$ -электрона азоте. Приводятся экспериментальные данные, подтверждающие такой механизм флуоресценции.

*Ключевые слова:* флуоресценция цис-азоалканов, диффузные спектры, поляризация флуоресценции, 2,3-диазабицикло[2.2.2]окт-2-ены, расщепление  $n, \pi^*$ -уровня, асимметрия ( $n, \pi^*$ )-состояния.

V. A. TOLKACHEV, A. P. BLOKHIN

**EXTRAORDINARY FLUORESCENCE OF CIS-AZOALKANES FOLLOWS  
FROM ( $n, \pi^*$ )-EXCITATION**B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
tolkachev@imaph.bas-net.by; lsfm@imaph.bas-net.by

The reversible tunnel migration between nitrogen of the  $-N = N$ -group of the initial faint localization of  $n, \pi^*$ -excitation on starting nitrogen for  $n$ -electron excitation is proposed as the mechanism of extraordinary broad  $C_{2v}$ -symmetric *cis*-azoalkanes fluorescence spectra.

*Keywords:* *cis*-azoalkane fluorescence, diffuse spectra, fluorescence polarization, 2,3-diazabicyclo[2.2.2]oct-2-ens,  $n, \pi^*$ -level splitting, ( $n, \pi^*$ )-states asymmetry.

**Введение.** Полвека назад дискутировалась эффективность методов расчета оптических  $n \rightarrow \pi^*$ -переходов  $N$ -гетероциклических молекул в МО- и экситонном подходах [1]. Наряду с признанием преимуществ МО-метода было высказано соображение, что  $n, \pi^*$ -возбуждение, делокализованное на  $\pi^*$ -систему согласно МО подходу, тем не менее асимметрично относительно атомов азота из-за кулоновского притяжения возбужденного электрона к «локализованной на исходном азоте несвязывающей положительной дырке» [2]. Это должно быть выражено наиболее выпукло у цис-азоалканов, где  $\pi^*$ -система сопряжения локализована на  $N = N$ -группе молекулы. В этом случае при симметрии основного состояния  $C_{2v}$  вышеназванная асимметрия возбужденного возможна в двух квазистационарных конфигурациях. Можно предположить их обратимую интерконверсию, туннелирование между азотами. У флуоресцирующих цис-азоалканов симметрии  $C_{2v}$ , с плоскостью симметрии ортогональной  $N = N$ -связи спектры флуоресценции диффузные, с полушириной в разы большей спектров поглощения независимо от агрегатного состояния [3–5]. Колебательная структура у них проявляется лишь в коротковолновой части, где наблюдается и необычный коротковолновый сдвиг относительно спектра поглощения. Причинами необычной ширины спектров флуоресценции рассматривалось испускание из различных возбужденных состояний (флуоресценция и фосфоресценция) или два вида испускания из того же возбужденного состояния [4]. Гипотеза испускания из различных состояний отвергалась, поскольку «спектр испускания 2,3-диазабицикло[2.2.2]окт-2-ена (ДБО) в 5 : 1 смеси 2-метилбутан : метилциклопен-

тан при 4,2 К был почти такой же, как в газовой фазе (348 К)» [4]. Действительно, межмолекулярные взаимодействия в широком спектре растворителей [3] и тушителей флуоресценции [6] должны были существенно изменять парциальные вклады в таком составном, образованном перекрытием, спектре, но этого не наблюдалось. Формирование двух видов испускания из одного возбужденного состояния авторы [4] предполагали, но механизм не смогли предложить. Недавние исследования [7] показали, что даже при струйном охлаждении длинноволновая часть спектра флуоресценции ДБО остается диффузной, в то время как коротковолновая становится хорошо выраженной линейчатой.

В [8] на основании результатов поляризационных измерений сделан вывод об испускании компонент флуоресценции различной поляризации различными возбужденными состояниями, дипольные моменты перехода с которых ортогональны, а в [9] сделано предположение об экситонной природе расщепления возбужденного состояния. По измеренной анизотропии флуоресценции по спектру ДБО и 1,4-диметил-ДБО в предположении, что соответствующие осцилляторы ортогональны, были рассчитаны коротковолновая и длинноволновая парциальные составляющие спектра флуоресценции. Оказалось, что диффузная составляющая смещена в длинноволновую сторону приблизительно на  $2000 \text{ см}^{-1}$  [8]. Информации об измерениях поляризации флуоресценции по спектру других цис-азоалканов в литературе нам не удалось найти. Длительность флуоресценции ДБО в твердом растворе при 77 К около 1 мкс. Тем не менее, как установлено [8], спектр флуоресценции и положительная в коротковолновой части и отрицательная в длинноволновой степени поляризации по спектру остаются одинаковыми на всех этапах затухания. То же наблюдалось и для флуоресценции 1,4-диметил-ДБО.

**Результаты и их обсуждение.** Наличие асимметрии  $n, \pi^*$ -возбуждения на азотах  $-N = N$ -группы при  $C_{2v}$  симметрии основного состояния допускает гипотезу ее возможной обратимой стохастической миграции, туннелирования между азотами. Простейший подход – в условиях равных вероятностей прямой и обратной миграции между квазистационарными конечными состояниями, т. е. регулярного, обратимого периодического туннелирования, учесть влияние стохастичности. Схема регулярного туннелирования рассмотрена в [10], где функция возбужденного состояния молекулы  $\psi$  дана линейной комбинацией исходных квазистационарных  $n, \pi^*$ -состояний, локализованных на «стартовом» ( $\phi_1$ ) или соседнем ( $\phi_2$ ) азоте  $-N = N$ -группы:

$$\psi = a_1(t)\phi_1 + a_2(t)\phi_2.$$

При условиях для состояния молекулы с энергией  $E$   $|a_1(t)|, |a_2(t)| \leq 1$ ,  $\langle \psi | \psi \rangle = \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle = \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle = 1$ ,  $E = \langle \psi | H | \psi \rangle = \langle \phi_1 | H | \phi_1 \rangle = \langle \phi_2 | H | \phi_2 \rangle$ , обменным интегралом  $M = \langle \phi_1 | H | \phi_2 \rangle = \langle \phi_2 | H | \phi_1 \rangle \leq E$  и интегралом перекрытия  $S = \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = \langle \phi_2 | \phi_1 \rangle \leq 1$ , не зависящими от времени, и соотношения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad (1)$$

решение (1) для функции состояния  $\psi$  имеет вид

$$\psi = 0,5(\phi_1 + \phi_2) \exp\left(-\frac{it}{\hbar}(E + \Delta E(1 - S)/2)\right) + 0,5(\phi_1 - \phi_2) \exp\left(-\frac{it}{\hbar}(E - \Delta E(1 + S)/2)\right), \quad (2)$$

где  $\Delta E = 2(M - ES)/(1 - S^2)$ , а  $2(M - ES)$  – обменный потенциал. Выражение (2) совпадает с полученными в [11; 12] для почти ортогональных туннелирующих  $\phi_1$  и  $\phi_2$ , т. е. для  $S \ll 1$ . Таким образом, функция состояния молекулы при постоянной энергии, но с регулярной миграцией между состояниями  $\phi_1$  и  $\phi_2$  эквивалентна образованию двух состояний-подуровней с интервалом между ними  $\Delta E$ . Обменное взаимодействие  $n, \pi^*$ -состояний  $\phi_1$  и  $\phi_2$  приводит к образованию системы двух подуровней на расстоянии  $\Delta E$ , асимметричных относительно первичного уровня возбужденного состояния с энергией  $E$  и смещенных относительно него на

$$\Delta E_+ = (E + M)/(1 + S) - E = \Delta E(1 - S)/2, \quad \Delta E_- = (E - M)/(1 - S) - E = -\Delta E(1 + S)/2. \quad (3)$$

Чисто электронный переход (0–0-переход) для флуоресценции с верхнего подуровня смещен в коротковолновую сторону на  $\Delta\omega_+ = \Delta E(1 - S)/2\hbar$ , а с нижнего – на  $\Delta\omega_- = -\Delta E(1 + S)/2\hbar$  силь-

нее, но в длинноволновую сторону. Отношение сдвигов подуровней (3) определяется лишь величиной интеграла перекрытия  $S$ :

$$S = (1 - \Delta E_+ / |\Delta E_-|) / (1 + \Delta E_+ / |\Delta E_-|) = (1 - \Delta \omega_+ / |\Delta \omega_-|) / (1 + \Delta \omega_+ / |\Delta \omega_-|). \quad (4)$$

Из (2) следует и относительная заселенность  $P$  туннелирующих с частотой  $\Delta E / \hbar$  состояний  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ :

$$P(\varphi_1) = (1 + \cos(t\Delta E / \hbar)) / 2, \quad P(\varphi_2) = (1 - \cos(t\Delta E / \hbar)) / 2.$$

Состояние  $\varphi_1 + \varphi_2$  симметрично относительно направления связи, а  $\varphi_1 - \varphi_2$  – антисимметрично. Поэтому поляризация их флуоресценции при возбуждении в чисто электронном переходе положительна для первого и отрицательна для второго состояния, т. е. противоположна по знаку, что и обнаружено в [8], и в них подчиняется разным правилам отбора по симметрии. Интенсивность спонтанного испускания из обобщенного  $(n, \pi^*)$ -возбужденного состояния, пропорциональна  $|\langle \psi | \mathbf{d} | \psi_0 \rangle|^2$ . Из (1), (2) и (3) получаем при  $|\mathbf{d}_+|^2 = |\langle \varphi_1 + \varphi_2 | \mathbf{d} | \varphi_0 \rangle|^2$ ,  $|\mathbf{d}_-|^2 = |\langle \varphi_1 - \varphi_2 | \mathbf{d} | \varphi_0 \rangle|^2$ ,  $\mathbf{d}_1 = \langle \varphi_1 | \mathbf{d} | \varphi_0 \rangle$ ,  $\mathbf{d}_2 = \langle \varphi_2 | \mathbf{d} | \varphi_0 \rangle$ :

$$|\langle \psi | \mathbf{d} | \psi_0 \rangle|^2 = 0,25(|\mathbf{d}_+|^2 + |\mathbf{d}_-|^2 + 2\text{Re}(\mathbf{d}_+ \mathbf{d}_-^*) \cos(t\Delta E / \hbar) + 2\text{Im}(\mathbf{d}_+ \mathbf{d}_-^*) \sin(t\Delta E / \hbar)) = |\mathbf{d}_1|^2 \cos^2(t\Delta E / 2\hbar) + |\mathbf{d}_2|^2 \sin^2(t\Delta E / 2\hbar) - \text{Im}(\mathbf{d}_1^* \mathbf{d}_2) \sin(t\Delta E / \hbar). \quad (5)$$

Вероятность перехода для интегральной флуоресценции модулируется частотой  $\Delta E / \hbar$ , а глубина модуляции связана с поляризацией переходов с подуровней «фантомных» состояний.

Корреляционная функция  $B(t)$  квадрата дипольного момента перехода с испусканием (5) для рассмотренного регулярного туннелирования равна

$$B(t) = 0,125(\text{Re}(\mathbf{d}_+ \mathbf{d}_-^*)^2 + \text{Im}(\mathbf{d}_+ \mathbf{d}_-^*)^2) \cos(t\Delta E / \hbar).$$

Такой процесс имеет неслучайную амплитуду, распределение фазы с постоянной плотностью  $1 / 2\pi$  в интервале  $[-\pi, \pi]$  и частотный спектр [13]

$$G(\omega) = 2 \int_0^\infty B(t) \exp(-i\omega t) dt = G(\omega) \delta(\omega - \Delta E / \hbar). \quad (6)$$

Приведенное выше относится к модели регулярного периодического туннелирования. Для аперiodического, стохастического процесса значения  $M$ ,  $S$  и  $\Delta E$  изменяются с каждым последующим полупериодом  $\tau$  миграции, с каждым изменением направления туннелирования. В этом случае в (6) войдет зависимость от  $\tau$ :  $\Delta E(\tau)$  и  $\omega(\tau)$ , а спектр уширения  $G(\Delta E(\tau) / \hbar)$  определится вероятностным распределением  $\tau$ .

Миграция возбуждения налагает и еще одно дополнительное условие на рассматриваемый механизм. Поскольку общим решением (1) является  $\psi = C \exp(-itE / \hbar)$ , где  $C$  – стационарная часть волновой функции, из соотношения (2) следует по условию *локализованное* на группе  $-N = N$  – соотношение взаимосвязи волновых функций подуровней,

$$(\varphi_1 + \varphi_2) \exp(-it\Delta E(1 - S) / 2\hbar) + (\varphi_1 - \varphi_2) \exp(it\Delta E(1 + S) / 2\hbar) = 2C.$$

В условиях стохастического туннелирования частоты модуляции волновых функций верхнего  $\Delta E(\tau)(1 - S(\tau)) / 2\hbar$  и нижнего  $\Delta E(\tau)(1 + S(\tau)) / 2\hbar$  подуровней и, соответственно, их уширение различаются. Если асимметрия  $n, \pi^*$ -системы мала ( $1 - S = 2 / (1 + \Delta \omega_- / \Delta \omega_+) \ll 1$ ), можно ожидать, что средние частоты флуоресцентных 0–0-переходов с подуровней  $\bar{\omega}_+$  и  $\bar{\omega}_-$  будут близки к ожидаемым для регулярного туннелирования:  $\bar{\omega}_+ \cong \omega_0 + \Delta E(1 - S) / 2\hbar$  и  $\bar{\omega}_- \cong \omega_0 - \Delta E(1 + S) / 2\hbar$ . В этом случае  $\omega_0 - \bar{\omega}_- \cong \Delta E / \hbar$ , а  $\omega_0 - \bar{\omega}_+$  в  $(1 + S) / (1 - S)$  раз меньше.

В экспериментально наблюдаемых спектрах коротковолновая составляющая спектра флуоресценции смещена несущественно [4; 5], поэтому смещение диффузной, в соответствии с (3) почти равно среднему расстоянию  $\Delta E$  между подуровнями расщепления. Например, в [8] для ДБО оно составляет около  $2000 \text{ см}^{-1}$ . Поэтому для периода модуляции туннелированием флуо-

ресцентного состояния ( $\phi_1 - \phi_2$ ) даже без учета стохастичности получаем величину порядка фемтосекунд, что, естественно, объясняет диффузность спектра флуоресценции.

Интенсивность парциальных вкладов флуоресценции с подуровней регулируется кроме заселенности еще и правилами отбора переходов по симметрии. Дипольный момент перехода с верхнего подуровня параллелен абсорбционному, т. е. ортогонален, как принято считать, плоскости цис-структуры, с нижнего – ортогонален ему, лежит в этой плоскости. Поэтому соотношение парциальных вкладов в интенсивность может различаться в широких пределах для разных молекул, что, по-видимому, и наблюдается в многообразии форм спектров флуоресценции цис-азоалканов [5; 14]. Слабое уширение верхнего подуровня, наблюдавшееся по флуоресценции при струйном охлаждении [7], предполагает возможность измерения разности частот флуоресцентного и возбуждающего 0–0-переходов в таких условиях и из (4) количественно находить величину интеграла перекрытия состояний  $S$ . Уже по полуколичественным оценкам из известных спектров, где всегда  $|\Delta\omega_-| \gg \Delta\omega_+$ , можно утверждать, что отклонение  $S$  от единицы не превышает единиц процентов.

**Заключение.** Сопоставление выводов модели с известными, в т. ч. полученными недавно, экспериментальными данными подтверждает специфичность  $n \rightarrow \pi^*$  перехода, наличие асимметрии у нижнего  $n, \pi^*$ -состояния азогруппы симметричных азоалканов, как это предполагалось еще в [2]. Миграция асимметрии  $n, \pi^*$ -возбуждения проявляется образованием двух подуровней, флуоресценция с которых обладает различающимися спектрально-поляризационными свойствами.

Быстрый, вплоть до фемтосекундного, мономолекулярный механизм модуляции испускания  $n, \pi^*$ -системой, локализованной на  $-N = N$ -группе, т. е. в субнаномасштабе, представляет самостоятельный интерес, поскольку имеются различные пути внешнего физико-химического воздействия на молекулярном уровне на частоту миграции и тем самым на процесс испускания, в особенности длинноволновой компоненты спектра. Асимметричное возмущение  $n, \pi^*$ -системы будет в первую очередь затрагивать это крыло спектра флуоресценции. Действительно, у асимметричного 1-винил-ДБО диффузная часть спектра флуоресценции существенно уже, чем у симметричного 1,4-дивинил-ДБО [15]. Это можно объяснить очевидным увеличением асимметрии  $n, \pi^*$ -системы и ростом препятствий миграции, вызывающих снижение ее частоты и тем самым коротковолновый сдвиг и сужение длинноволновой диффузной компоненты спектра флуоресценции. Однако при таком же асимметричном замещении в 1-положении более простым, ковалентно связанным с ДБО заместителем – метиленом или его производными, значительного сужения спектров не наблюдается [16], что использовано для образования линкеров эффективных флуоресцентных меток на основе ДБО для биофизических исследований. Даже предварительные оценки асимметрии зарядов на азотах в  $n, \pi^*$ -состоянии методами функционала плотности, показывают, что у 1-винил-ДБО она в 1,5–2 раза выше, чем у 1-метил-ДБО. Можно ожидать, что рассмотренная модуляция будет сказываться не только на флуоресценции, но и на процессах внутри- и межмолекулярного переноса энергии возбуждения.

Работа выполнена при поддержке БРФФИ (проект № Ф16-103).

### Список использованной литературы

1. *Kearns, D. R.* Comparison of Exciton and Molecular Orbital Calculations on  $n \rightarrow \pi^*$  Transitions / D. R. Kearns, M. A. El-Bayoumi // J. Chem. Phys. – 1963. – Vol. 38. – P. 1508–1517.
2. *El-Sayed, M.* Comment on a Communication by M. El-Sayed, G. W. Robinson / M. El-Sayed, G. W. Robinson // J. Chem. Phys. – 1961. – Vol. 35. – P. 1896–1897.
3. *Mohanty, J.* Refractive index effects on the oscillator strength and radiative decay rate of 2,3-diazabicyclo[2.2.2]oct-2-ene / J. Mohanty, W. N. Nau // Photochem. Photobiol. Sci. – 2004. – Vol. 3. – P. 1026–1031.
4. *Solomon, B. S.* Primary Processes in the Photochemistry of Bicyclic Azo Compounds / B. S. Solomon, T. F. Thomas, C. Steel // J. Amer. Chem. Soc. – 1968. – Vol. 90. – P. 2249–2258.
5. Spectroscopic Properties of Cyclic and Bicyclic Azoalkanes / M. J. Mirbach [et al.] // J. Amer. Chem. Soc. – 1978. – Vol. 100. – P. 5122–5129.
6. *Klapstein, D.* Quenching of  $n, \pi^*$ -Excited States in the Gas Phase: Variations in the Absolute Reactivity and Selectivity / D. Klapstein, U. Pischel, W. M. Nau // J. Amer. Chem. Soc. – 2002. – Vol. 124. – P. 11349–11357.

7. Особенности флуоресценции струйно охлажденных паров 2,3-диазабциклооктена / А. П. Луговский [и др.] // *Опт. и спектроск.* – 2013. – Т. 114. – С. 390–395.
8. *Луговский, А. П.* Анизотропия дуальной флуоресценции 2,3-диазабцикло[2.2.2]окт-2-ена и 1,4-диметил-(2,3-диазабцикло[2.2.2]окт-2-ена) / А. П. Луговский, В. А. Поведайло, Д. Л. Яковлев // *Журн. прикл. спектроск.* – 2014. – Т. 81. – С. 356–360.
9. *Поведайло, В. А.* Экситонная природа дуальной флуоресценции 2,3-диазабцикло[2.2.2]окт-2-ена и 1,4-диметил-(2,3-диазабцикло[2.2.2]окт-2-ена) / В. А. Поведайло, Д. Л. Яковлев // *Оптика и спектроскопия.* – 2014. – Т. 117, № 4. – С. 552–558.
10. *Толкачев, В. А.* Проявление туннелирования ( $n, \pi^*$ )-возбуждения во флуоресценции цис-азоалканов / В. А. Толкачев // *Журн. прикл. спектроск.* – 2014. – Т. 81. – С. 632–637.
11. *Никитин, Е. Е.* Атомно-молекулярные процессы / Е. Е. Никитин, Б. М. Смирнов. – Москва: Наука, 1988. – 304 с.
12. *Chen, C. J.* Perturbation Theory of Exchange Interaction / C. J. Chen, R. Wiesendanger // *Phys. Rev. B.* – 2006. – Vol. 74. – P. 113102-1–113102-4.
13. *Ахманов, С. А.* Введение в статистическую радиофизику и оптику / С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин. – Москва: Наука, 1981. – 640 с.
14. *Rau, H.* Spectroscopic Properties of Organic Azo Compounds / H. Rau // *Angew. Chem. Internat. Edit.* – 1973. – Vol. 12. – P. 224–234.
15. *Engel, P. S.* Photochemical Decomposition and Isomerization of Aliphatic Azo Compounds / **P. S. Engel, Ch. J. Nalepa** // *Pure & Appl. Chem.* – 1980. – Vol. 52. – P. 2621–2632.
16. Exploiting Long-Lived Molecular Fluorescence / W. M. Nau [et al.] // *Chimia.* – 2003. – Vol. 57, N 4. – P. 161–167.

*Поступило в редакцию 22.06.2016*

УДК 539.1.07

Член-корреспондент Ф. Ф. КОМАРОВ<sup>1</sup>, А. С. КАМЫШАН<sup>1</sup>, В. В. ПИЛЬКО<sup>1</sup>,  
А. А. ШЕКУНОВ<sup>1</sup>, О. Ф. РОМАНОВСКАЯ<sup>2</sup>, Г. А. УРЬЕВ<sup>3</sup>

### КОМПЛЕКС ДЛЯ ЛОКАЛЬНОЙ ИОННОЙ ИМПЛАНТАЦИИ И ЭЛЕМЕНТНОГО МИКРОАНАЛИЗА С ВЫВОДОМ ИОННОГО ПУЧКА В АТМОСФЕРУ

<sup>1</sup>Институт прикладных физических проблем им. А. Н. Севченко  
Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь

KomarovF@bsu.by; kamyshana@mail.ru; pilkow@mail.ru; shekunovantonandreevich@gmail.com

<sup>2</sup>Белорусский государственный медицинский университет, Минск, Беларусь  
koma03@rambler.ru

<sup>3</sup>Республиканский научно-практический центр травматологии  
и ортопедии Министерства здравоохранения Республики Беларусь, Минск, Беларусь  
uryev11@tut.by

На базе ионного ускорителя AN-2500 изготовлен и апробирован измерительный комплекс для локального элементного анализа, состоящий из устройства вывода ионного пучка в атмосферу на основе конического стеклянного капилляра и спектрометра характеристического рентгеновского излучения (ХРИ). Измерены угловые зависимости коэффициента пропускания протонного пучка с энергией 150–250 кэВ через конусообразные капилляры с выходными диаметрами 5 и 10 мкм. Показано, что прохождение протонов через капилляр носит пороговый характер и определяется степенью зарядки его внутренней поверхности. Исследованы токовые и энергетические характеристики ионного пучка, выведенного в атмосферу. Показано, что величина выходного тока может изменяться от 0,5 до 3 нА и энергия ионов практически равна энергии исходного пучка. Измерены энергетические спектры ХРИ при атмосферном давлении от различных материалов, включая и костную ткань. Показано, что интенсивности выходного пучка достаточно для достоверного определения элементного состава исследуемых образцов.

*Ключевые слова:* конический стеклянный капилляр, характеристическое рентгеновское излучение, имплантация, спектрометр ХРИ, ускоритель ионов.

F. F. KOMAROV<sup>1</sup>, A. S. KAMYSHAN<sup>1</sup>, V. V. PILKO<sup>1</sup>, A. A. SHEKUNOV<sup>1</sup>, O. F. ROMANOVSKAYA<sup>2</sup>, G. A. URJEV<sup>3</sup>

### IN-AIR ION BEAM EXTRACTION SET-UP FOR THE EXTERNAL MICRO- PIXE ANALYSIS AND LOCAL IMPLANTATION

<sup>1</sup>A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems of Belarusian State University, Minsk, Belarus  
KomarovF@bsu.by; kamyshana@mail.ru; pilkow@mail.ru; shekunovantonandreevich@gmail.com

<sup>2</sup>Belarusian State Medical University, Minsk, Belarus  
koma03@rambler.ru

<sup>3</sup>Republican Scientific and Practical Centre for Traumatology and Orthopedics, Minsk, Belarus  
uryev11@tut.by

A measuring system for local elemental analysis is constructed on the basis of an ion accelerator AN-2500. It comprises a device of an in-air ion beam extraction through a tapered glass capillary and a PIXE spectrometer. The angular dependence of the proton beam possessing the transmission energy of 150–250 keV through the tapered capillary with the output diameters of 5 and 10 μm is determined. The transit of protons through the capillary is found to be in threshold character and to be determined by the charging rate of its internal surface. The characteristics of current and energy of the ion beam extracted into the atmosphere are analyzed. It is found that the value of output current can be varied from 0.5 to 3 nA, while the ion energy is almost equal to the initial beam energy. The PIXE energy spectra of various materials are measured at the atmospheric pressure. It is found that the output beam intensity is enough for an accurate determination of the elemental composition of the samples under analysis.

*Keywords:* tapered glass capillary, characteristic X-rays, implantation, spectrometer PIXE, ion accelerator.

**Введение.** Условия высокого вакуума, необходимые для реализации исследований по микроанализу материалов и структур с помощью неразрушающих ядернофизических методов, таких как резерфордское обратное рассеяние ионов и индуцированное протонами характеристиче-

ское рентгеновское излучение, накладывают жесткие ограничения на тип и состояние исследуемого объекта, что часто делает применение этих методик невозможным или затруднительным, особенно в области медицины, биологии и экологии. Наиболее распространенными в этих областях являются исследования элементного состава на образцах, нахождение которых в вакуумной камере нежелательно или невозможно. Одним из технологических решений данной проблемы является методика вывода пучка в атмосферу и проведение микроанализа в условиях этой среды.

Метод фокусировки заряженных частиц с использованием капилляров из диэлектрических капилляров был разработан в течение последнего десятилетия [1–3]. В случае ионных пучков кэВ- и МэВ-ных энергий, известно, что одиночные микрокапилляры, изготовленные из стекла и металла, могут использоваться в качестве как прекрасных коллиматоров, так и хороших вакуумных окон. Хотя есть несколько методов для получения микропучка, такие как микрощели или электромагнитная система линз, техника фокусировки с помощью капилляра является более простой и дешевой. С помощью капилляров можно генерировать микропучки, которые имеют почти одинаковый размер с внутренним диаметром капилляра. Кроме того, лучевая оптика с использованием капилляров имеет то преимущество, что можно вывести ионный пучок в атмосферу, благодаря низкой скорости натекания воздуха из внешней среды через капилляры микронных размеров. Был разработан ряд методов анализа в воздухе с использованием капилляров [4].

В настоящее время существует несколько способов вывода ионного пучка, генерируемого ускорителями, в атмосферу. Для этой цели используются металлические капилляры [5] или фольги микронных толщин из различных материалов [6].

Эти способы не позволяют превысить плотности исходного ионного пучка, что негативно сказывается на скорости набора статистических данных в вышеуказанных методиках. В то же время известно, что при прохождении ионного пучка через диэлектрические конусные капилляры плотность тока на выходе может быть увеличена на несколько порядков за счет явления самофокусировки [1–3]. Именно это обстоятельство послужило основополагающим критерием для реализации обсуждаемой методики. В качестве генерирующих характеристическое рентгеновское излучение в материале мишени были выбраны протоны, как обладающие максимальным пробегом в воздухе и для которых имеются хорошо апробированные системы компьютерной обработки спектров PIXE.

Цель работы – изучение угловых зависимостей прохождения ускоренных протонов через конические капилляры с диаметром выходного отверстия 5 мкм, создание системы по выводу ионного пучка с энергией от 0,5 до 1,5 МэВ в атмосферу для локальной имплантации и элементного микроанализа различных материалов методом PIXE, а также апробация системы на ряде материалов.

**Материалы и методы исследования.** Измерения угловых распределений прошедших через капилляр ускоренных ионов атомарного водорода проводились на установке, созданной на базе электростатического ускорителя ионов, схема которой и ее описание приведены в работе Комарова и др. [7, рис. 1]. Параметры установки: погрешность при измерениях угловых зависимостей и угловых распределений прошедших через капилляр ионов не превышает  $3,3 \cdot 10^{-3}$  градуса и погрешность ориентации капилляра относительно оси пучка не более  $2,5 \cdot 10^{-2}$  градуса. Энергия ускоренных ионов составляла 150 кэВ и определялась магнитным анализатором с точностью 0,1 %.

С использованием цилиндра Фарадея, совмещенного с держателем капилляра, были проведены исследования коэффициента пропускания протонов через конусные капилляры с диаметром выходного отверстия 5 мкм. Диаметр входного отверстия равен 0,8 мм. Величина входного тока в капилляр в этих экспериментах составляла 1 и 2 нА.

Измерения величины выводимого в атмосферу ионного тока осуществлялось с помощью цилиндра Фарадея и электрометрического усилителя У5-9.

Энергетические спектры ионно-индуцированного характеристического рентгеновского излучения измерялись спектрометром фирмы ORTEC. Энергетическое разрешение спектрометра, определенное с использованием источника  $^{55}\text{Fe}$  типа ОСГИ-3х активностью 9 кБк, составляло 151 эВ.

**Результаты и их обсуждение.** На рис. 1, *а* представлена зависимость коэффициента пропускания протонного пучка с энергией частиц 150 кэВ от угла наклона капилляра ( $\varnothing_{\text{вых}} = 5$  мкм) относительно оси пучка для двух значений входного тока.

Ширина на полувысоте кривой, изображенной на рис. 1, *а*, составляет около 3,5 градусов. Это свидетельствует о том, что ионный пучок проходит через капилляр в широком диапазоне углов наклона капилляра. Такая большая ширина кривой не может быть объяснена прямым пролетом ионов через капилляр, поскольку угол прямой видимости выходного отверстия относительно оси пучка составляет около 0,5 градуса. Таким образом, прохождение протонного пучка через капилляр при столь больших углах влета обусловлено образованием самоорганизующейся системы пучок–капилляр (**ion-guiding эффектом**) **внутри капилляра**. Максимальный коэффициент пропускания достигает 25 %, что соответствует увеличению плотности выходного тока в  $1,8 \cdot 10^3$  раз.

На рис. 1, *б* приведено угловое распределение протонов с энергией 150 кэВ, прошедших через капилляр с выходным диаметром 5 мкм при нулевом угле влета. Из рис. 1, *б* следует, что прошедшие через капилляр частицы распределены по Гауссу с угловой шириной 0,36°, что более чем в шесть раз превышает расходимость исходного пучка. Это означает, что при проведении локальных исследований состава объекта, с использованием сфокусированного капилляром пучка, изучаемую мишень следует располагать как можно ближе к выходному торцу капилляра. Кроме того, вследствие достаточно большой ширины угловой зависимости ионного пучка, прошедшего через капилляр, допускается отклонение в пределах от  $-0,5^\circ$  до  $+0,5^\circ$  оси капилляра относительно оси ионного пучка. Аналогичные угловые зависимости интенсивности сфокусированного пучка протонов зарегистрированы нами и для капилляров с выходным диаметром 10 мкм (спектры не приводятся).

На базе ионного ускорителя AN-2500 создан комплекс по выводу ионного пучка в атмосферу и измерению энергетических спектров ионноиндуцированного ХРИ с использованием выведенного пучка. Общий вид комплекса приведен на рис. 2. Дифференциальная откачка модуля осуществляется турбомолекулярным и диффузионным вакуумными насосами 7 и 9 соответственно, что позволяет получать вакуум внутри камеры капилляра на уровне  $1,0 \cdot 10^{-3}$  Па. Ионный пучок, монохроматизированный магнитом-сепаратором ускорителя ионов AN-2500, через ионопровод ускорителя и входной коллиматор щелевого прибора 13, контролирующего точку входа пучка в ионопровод комплекса и стабилизирующего энергию ионного пучка, через входную диафрагму камеры капилляра диаметром 10 мм подается на вход стеклянного капилляра. Благодаря явлению автофокусировки на выходе стеклянного капилляра 4 можно получать весьма высокие значения плотности ионного тока.

Проведенные испытания модуля вывода ионного пучка ускорителя в атмосферу показали, что при плотности ионного тока на входе в капилляр  $20$  мкА/см<sup>2</sup> плотность тока на выходе из него достигает  $2,5$  мА/см<sup>2</sup>. При этом средний выходной ионный ток составляет 0,5 нА. Эти зна-

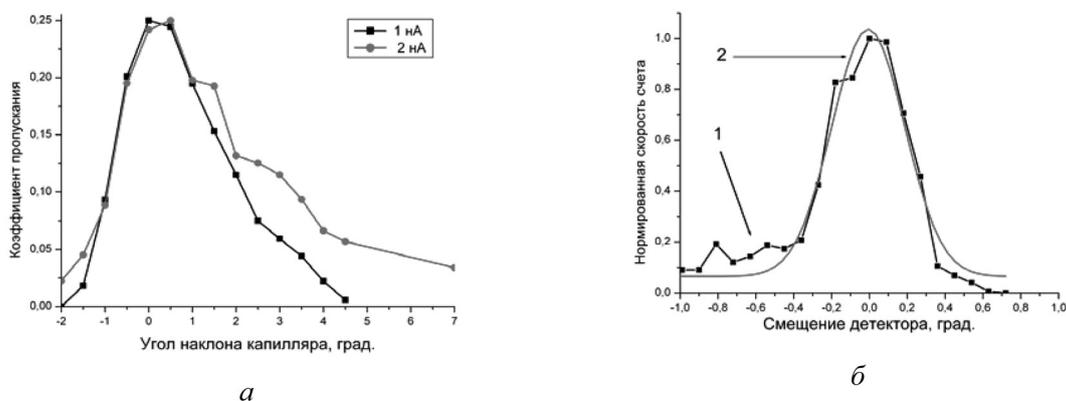


Рис. 1. Угловые характеристики протонов с энергией 150 кэВ, прошедших через конический стеклянный капилляр с  $\varnothing_{\text{вых}} = 5$  мкм (*а*) от угла наклона капилляра относительно оси пучка; *б* – угловое распределение за капилляром: 1 – эксперимент, 2 – аппроксимация кривой Гаусса

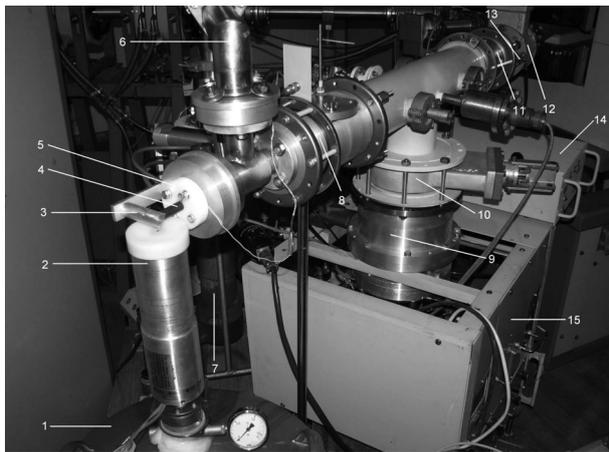


Рис. 2. Общий вид комплекса по выводу ионного пучка ускорителя в атмосферу и измерению энергетических спектров ионноиндуцированного ХРИ: 1 – дьюар с жидким азотом; 2 – детектор ХРИ с предусилителем; 3 – держатель мишени; 4 – капилляр с защитой; 5 – держатель капилляра; 6 – тракт откачки объема капилляра; 7 – диффузионный вакуумный насос; 8, 10, 13 – вакуумные затворы; 9 – турбомолекулярный вакуумный насос; 11 – сиффон; 12 – щелевой прибор; 14 – блок питания турбомолекулярного вакуумного насоса; 15 – блок управления форвакуумными и диффузионным насосами

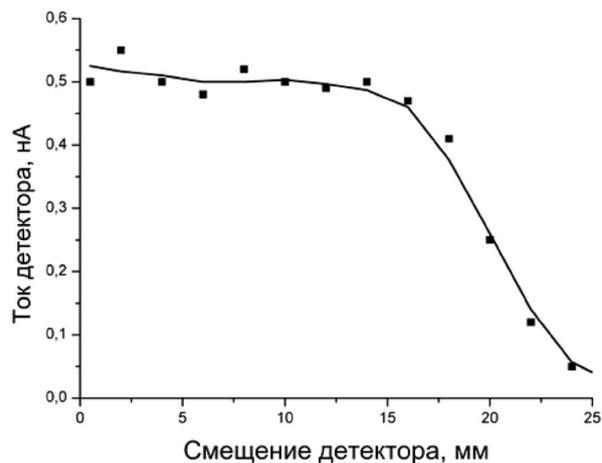
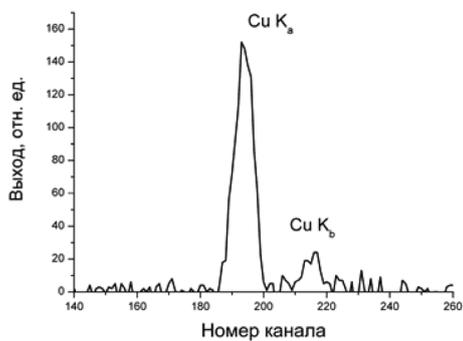


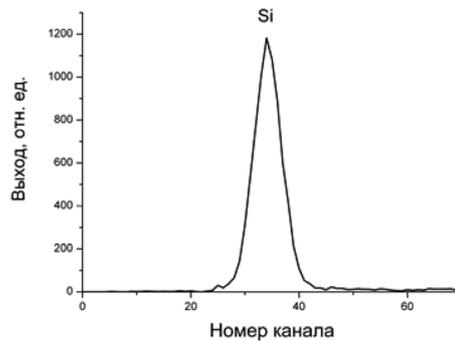
Рис. 3. Зависимость среднего выходного тока ионов водорода с энергией 1,4 МэВ от расстояния между выходным торцом капилляра и внутренней поверхностью цилиндра Фарадея

Дифференцирование этой зависимости дает среднюю длину пробега ионов водорода в воздухе  $R$  порядка 20 мм, что совпадает с данными работы [8], следовательно, энергия ионов в пучке на выходе из капилляра незначительно отличается от энергии ионов на его входе.

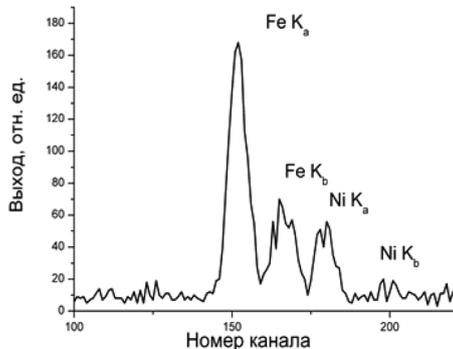
Значения выходного тока сохраняются при изменении энергии ионов на входе в капилляр от 0,5 до 1,5 МэВ. На рис. 3 приведена экспериментальная зависимость среднего выходного тока ионов водорода с энергией 1,4 МэВ от расстояния между выходным торцом капилляра и внутренней поверхностью цилиндра Фарадея.



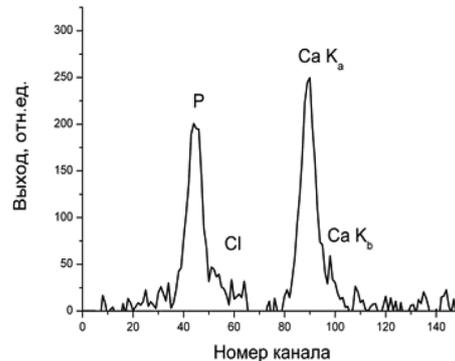
а



б



в



г

Рис. 4. Энергетические спектры ХРИ (а – меди; б – кремния; в – инвара, г – головки тазобедренного сустава человека)

Исследуемый образец помещается на держатель, который поворачивается на угол 45 градусов относительно осей пучка и детектора соответственно. Мониторирование ионного тока осуществляется колиматором, помещенным в держатель капилляра и включенным в цепь измерителя тока на пульте ускорителя, что позволяет определять количество ионов, попавших на образец.

В качестве регистрирующего спектры PIXE блока использовался Si(Li) детектор с предварительным усилителем производства фирмы ORTEC. Измеренное энергетическое разрешение спектрометра на линии 5,9 кэВ составляет 151 эВ.

На рис. 4 приведены энергетические спектры от различных материалов.

При всех измерениях энергия протонов была 1,4 МэВ, средний ток на мишени 1 нА, количество ионов, попавших на мишень, соответствует заряду 0,5 мкК. Полученные результаты свидетельствуют об эффективности использования выведенного в атмосферу ионного пучка для локального элементного микроанализа различных материалов методом ионноиндуцированного быстрыми ионами ХРИ. Рис. 4, з также демонстрирует перспективность разработанного измерительного комплекса для диагностики медицинских и биологических объектов, включая и жидкие среды (кровь, лимфа и др.)

**Заключение.** Измерены угловые зависимости и угловые распределения коэффициента пропускания протонного пучка с энергией 150 кэВ через конусообразный капилляр с выходными диаметрами 5 и 10 мкм. Показано, что угловая ширина ионного пучка, прошедшего через капилляр с диаметром 5 мкм, в шесть раз больше угловой ширины исходного пучка. Полученное максимальное значение коэффициента пропускания соответствует увеличению плотности тока на выходе из этого капилляра в 1800 раз.

Исследованы токовые и энергетические характеристики ионного пучка, выведенного в атмосферу. Показано, что величина выходного тока может изменяться от 0,5 до 3 нА и энергия ионов практически равна энергии исходного пучка.

Измерены энергетические спектры ХРИ при атмосферном давлении от различных материалов. Показано, что интенсивности выходного пучка достаточно для достоверного определения элементного состава исследуемых образцов. Результаты тестирования системы свидетельствуют об эффективности ее использования также и для микроанализа биологических и медицинских тканей и жидкостей.

### Список использованной литературы

1. Focusing of MeV ion beams by means of tapered glass capillary optics / T. Nebiki [et al.] // J. Vac. Sci. Technol. – 2003. – A21. – P. 1671–1674.
2. Taper angle dependence of the focusing effect of high energy heavy ion beams by glass capillaries / T. Nebiki [et al.] // Nucl. Inst. Meth. – 2008. – B266. – P. 1324–1327.
3. Komarov, F. F. Peculiarities of Swift Proton Transmission through Tapered Glass Capillaries / F. F. Komarov, A. S. Kamyshan, V. V. Pil'ko // Acta Physica Polonica A. – 2011. – Vol. 120, N 1. – P. 16–18.
4. Nebiki, T. In-air PIXE analysis by means of glass capillary optics / T. Nebiki, H. Robir, T. Narusawa // Nucl. Inst. Meth. – 2006. – B249. – P. 226–229.
5. Lemell, C. Interaction of charged particles with insulating capillary targets – The guiding effect / C. Lemell, J. Burgdürfer, F. Aumayr // Prog. Surf. Sci. – 2013. – Vol. 88. – P. 237–278.
6. Converging of Argon Cluster Ion Beams with a Glass Capillary / T. Ikeda [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2006. – Vol. 89. – P. 163502.
7. Komarov, F. F. A fine structure in angular distributions of protons transmitted through insulating capillaries / F. F. Komarov, A. S. Kamyshan, Gz. Karwat // Vacuum. – 2009. – Vol. 83. – P. 51–53.
8. Fujita, N. Development of In-Air-RBS method with tapered glass capillary / N. Fujita, K. Ishii, H. Ogawa // J. of Physics. Conference Series (Online). – 2009. – Vol. 194 (14). – [1 p.]; ISSN 1742-6596.

Поступило в редакцию 21.07.2016

UDC 621.383.7

V. S. PAVLOVICH

**INTERNAL ELECTRIC FIELD, ELECTRON-TRAPPING VOIDS, DEAD ELECTRONS,  
AND THE INCREASING OF THE EFFICIENCY OF POLYMER SOLAR CELLS WITH FLUORINATION***(Communicated by Academician S. V. Gaponenko)**Military Academy of Belarus, Minsk, Belarus  
u.s.paulovich@tut.by*

We propose a model that allows an understanding of the nature of electron traps in  $\pi$ -conjugated polymers that are used in photovoltaic devices. It is assumed that the free-cavity voids in the polar  $\pi$ -conjugated polymer exhibit electron-accepting affinity and are filled with electrons, called herein as 'dead' electrons because they are held by a static random internal electric field and are not driven to the cathode by external built-in voltage. As a result, the dead electrons into electron-trapping voids are unsuitable for use in the external circuit of organic solar cells. As justified here, the exciton dissociation on the surfaces of voids, the capture of drift electrons by voids, the emerging of the dead electrons and their non-geminate recombination are the main obstacles to create highly efficient polymer solar cells. The model of dead electrons allows explaining the increase in the power conversion efficiency of solar cells caused by the polymer fluorination, side-chain polymer manipulation, and dopant-controlled trap-filling. Some characteristics of hybrid P3HT:CdSe solar cells are also analyzed with the help of this model.

*Keywords:* polymer solar cells, internal electric field, electron-trapping voids, dead electrons, binding energy, polymer fluorination.

В. С. ПАВЛОВИЧ

**ВНУТРЕННЕЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ, ЗАХВАТЫВАЮЩИЕ ЭЛЕКТРОНЫ ПУСТОТЫ,  
МЕРТВЫЕ ЭЛЕКТРОНЫ И УВЕЛИЧЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ  
ПОЛИМЕРНЫХ СОЛНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ ФТОРИРОВАНИИ***Военная академия Беларуси, Минск, Беларусь  
u.s.paulovich@tut.by*

Предложена модель, позволяющая понять природу электронных ловушек в  $\pi$ -сопряженных полимерах, которые используются в фотоэлектрических устройствах. Предполагается, что пустоты со свободными полостями в полярном  $\pi$ -сопряженном полимере проявляют электроноакцепторные свойства и заполняются электронами, которые названы здесь «мертвыми» электронами, так как они удерживаются статическим случайным внутренним электрическим полем и не направляются к катоду с помощью внешнего напряжения. В результате, захваченные пустотами мертвые электроны непригодны для использования во внешней цепи органических солнечных элементов. Обосновано, что диссоциация экситонов на поверхности пустот, захват электронов пустотами при дрейфе к катоду, появление мертвых электронов и их негеминальная рекомбинация являются главными препятствиями при создании высокоэффективных полимерных солнечных элементов. Модель мертвых электронов позволяет объяснить увеличение эффективности преобразования энергии солнечных элементов, вызванное фторированием полимера, изменением боковых цепей полимера и наполнением ловушек добавками растворителей. Некоторые характеристики гибридных P3HT:CdSe солнечных элементов также анализируются с помощью этой модели.

*Ключевые слова:* полимерные солнечные элементы, внутреннее электрическое поле, захватывающие электрон пустоты, мертвые электроны, энергия связи, фторирование полимера.

**Introduction.** In the last 15 years a significant progress has been achieved on the improvement of the power conversion efficiency (PCE) of polymer solar cells (PSCs) operating on the principle of bulk heterojunction (BHJ) when the blends of electron-donating polymers and electron-accepting fullerene derivatives are employed as active layers [1]. Nevertheless the efficiency of PSCs is still greatly lower

than their inorganic counterparts – such as silicon, CdTe and CIGS – that slows down large-scale practical applications. Therefore, much attention is paid to the fluorination of  $\pi$ -conjugated polymer backbone, which provides a significant increase in PCE [2]. Recently Zhao et al. [3] described an environmentally friendly processing system of difluorinated polymer that yields single junction cells with PCE of up to 11.7 %. For acceptable morphology of blend their polymer:fullerene processing system incorporate the synergistic effects of the hydrocarbon solvent as additive, a suitable choice of side chains and aggregation temperature of difluorinated polymer.

The impact of fluorination on the morphology of pure films and their blends with fullerenes arises mainly from the higher polymer planarity due to intramolecular non-covalent interactions, like hydrogen-bonding  $F\cdots H$  and electrostatics  $S\cdots F$ ,  $F\cdots F$  [4; 5]. The higher molecule planarity of the fluorinated backbones induce stronger  $\pi$ - $\pi$  stacking, polymer molecular ordering and higher crystallinity [5; 6]. As known today [7] a good blend should not only contain ordered regions to promote charge transport but also disordered ones to assist exciton dissociation. Nguyen et al. [5] demonstrated that (dialkoxylphenylene-benzothiadiazole)-based copolymers (PPDTBT, PPDTFBT, PPDT2FBT) in the blend with PC70BM possess a semi-crystalline morphology and tight interchain packing. This gives well-balanced charge transport with h/e mobility ratio of 2, showing hole and electron mobility of  $3.0 \cdot 10^{-3}$  and  $1.5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$  for 2F-polymer PPDT2FBT, that  $\sim 1$  order higher relative to F-polymer PPDTFBT and non-fluorinated polymer PPDTBT. The single junction cells based on PPDT2FBT exhibited 8–9 % PCE with a thick active layer of 290 nm. The PPDT2FBT:PC70BM film of 290 nm provided strong light absorption, yielding a high short-circuit current density ( $J_{SC}$ ) of 15.7–16.3  $\text{mA cm}^{-2}$  without the loss in open-circuit voltage ( $V_{OC} = 0.78\text{--}0.79 \text{ V}$ ) and in fill factor ( $FF = 0.71\text{--}0.73$ ) [5]. It is particularly remarkable for mass-scale production, that only negligible changes are observed in the PPDT2FBT carrier mobility even at  $\sim 1 \mu\text{m}$  film thickness [5].

Many reasons have been suggested [2–6] to explain the positive effects of fluorination on the polymer photovoltaic properties. Nevertheless the fluorinated and non-fluorinated polymers exhibit in many relations the similar non-geminate recombination behaviour, so there is bound to be a common reason both of high and low device performance that remained to date a mystery. In our opinion, presented in this work, this common reason can be mainly attributed to the electron-trapping voids which exist always in all  $\pi$ -conjugated polymers, fluorinated or non-fluorinated. The free voids cavity are filled with electrons called herein as “dead” electrons because they are hold down by voids and are not driven to the cathode by a built-in voltage; in other words, the dead electrons are unusable for collection at the external circuit of solar cell.

The trap-limited electron transport in semiconducting disordered polymers is investigated by many authors [7; 8], but goal of our work is to understand the nature of traps and to get deeper insight into mechanism of electron capture by traps in fluorinated polymers.

**Free spherical cavity in the polar solvent.** As shown in Fig. 1, *a*, in a polar solvent chaotic reorientation of dipoles  $\mu_s$  gives rise a chance electric field  $\mathbf{R}$  at the centre of a free spherical cavity (of spherical void) of radius  $a$ . The internal electric field  $\mathbf{R}$  changes in both value and direction. Let  $\mathbf{x}$  be an arbitrary fixed axis passing through the centre of free cavity. Inasmuch as field  $\mathbf{R}$  originates from a high number of dipoles  $\mu_s$ , the density probability  $P(R_x)$  ( $R_x$  is a component  $\mathbf{R}$  along  $\mathbf{x}$ ) is Gaussian [9; 10] with the variance

$$\sigma^2 = \frac{2k_B T}{a^3} \Delta f. \quad (1)$$

The mean of internal chance electric field  $\langle R \rangle$  at the free cavity is

$$\langle R \rangle = \langle |\mathbf{R}| \rangle = \sqrt{\frac{4k_B T}{\pi a^3} \Delta f}, \quad \Delta f = f(\varepsilon) + f(n) = \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1} - \frac{n - 1}{2n + 1}, \quad (2)$$

where  $k_B$  is Boltzmann constant,  $T$  is the temperature,  $\Delta f$  is Lippert–Mataga factor,  $\varepsilon$  and  $n$  are the dielectric constant and refractive index of medium. The results (1) and (2) have been originally obtained in [9; 10] using Onsager’s approximation.

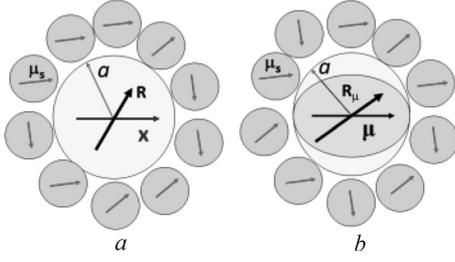


Fig. 1. Chance electric field  $\mathbf{R}$  in a free spherical cavity (in a spherical void) of radius  $a$  for liquid solvent (a) and chance reaction electric field  $\mathbf{R}_\mu$  when solute molecule  $\mu$  is placed at the centre of free spherical cavity for liquid solution (b)

When polar solute molecules with dipole momentum  $\mu$  are placed into a solution as it depicted in Fig. 1, b, to calculate the mean reaction electric field  $\langle \mathbf{R}_\mu \rangle$ , variance  $d^2$ , mean interaction energy between  $\mu$  and solvent dipoles  $\mu_s$  ( $\langle W \rangle$ ), we also start from free-spherical-cavity model to obtain respectively [9; 10]:

$$\langle \mathbf{R}_\mu \rangle = -\frac{2\mu}{a^3} \Delta f, \quad (3)$$

$$d^2 = \frac{2\mu^2 k_B T}{a^3} \Delta f, \quad (4)$$

$$\langle W \rangle = -\frac{2\mu^2}{a^3} \Delta f. \quad (5)$$

Eqs (3)–(5) have been successfully employed to create a theory of solvent effect on the spectra and fluorescence nonradiative decay of dyes [10] and linear pigments, for instance, for peridinin in liquid solutions [11; 12]. Despite the complexity of problem, the theory of polarity-dependent fluorescence quenching turned out to be in a good agreement with experimental data [10; 11]. Consequently, it should be realized that the existence of full orientation disorder in the environment of free cavity must be taken as proved for liquids and likely for some glass-forming polymeric media, such as non-aggregated and low-aggregated  $\pi$ -conjugated polymers or amorphous regions in semi-crystalline  $\pi$ -conjugated polymers. Following this presupposition we are able to gain an insight into charge transport losses in the disordered polymer media through Eqs (1)–(5) with the proviso that  $T = T_{\text{polym}}$ , where  $T_{\text{polym}}$  is the temperature of polymerization. The reaction electric field  $\langle \mathbf{R}_\mu \rangle$  in Eq (3) can be considered as a drive force, which is of prime importance for electrons and holes transport, when  $\mu$  is ground-state dipole momentum of repeating backbone link of  $\pi$ -conjugated polymer, and  $a$  is effective radius of such link.

**Electron-trapping voids, dead electrons and fluorination.** For planar heterojunction SCs Petersen et al. [13] introduced an exciton dissociation model based on a field-dependent tunnel process and demonstrated its consistency with experimental observations. One can assume that when after percolation the excitons fall on the free-cavity border they dissociate just as it occurs at any donor/acceptor interface. In other words, in the polar  $\pi$ -conjugated polymer the voids are capable to exhibit electron-accepting affinity. The chance electric field  $\langle R \rangle$  captures electrons at the voids of polymer and thus prevents their transport to cathode. In a like manner it takes place also when the drift electrons fall on the border with voids. As shown via Eq (2) a mean binding energy of trapped electrons in the voids is given by Eq (6) [14]:

$$W_{\text{void}}^- = -\sqrt{\frac{4\Delta f q^2 k_B T_{\text{polym}}}{\pi a_{\text{void}}}}, \quad (6)$$

where  $q$  is the elementary charge,  $a_{\text{void}}$  is a mean radius of the voids.

In the deep traps, when binding energy meets the condition

$$|W_{\text{void}}^-| > k_B T, \quad (7)$$

the electrons are the dead ones, because they are not able to leave the voids and recombine (mainly nonradiative, or with photons emission) not reaching the cathode. As a result, a part of sunlight absorbed by PSC is converted into heat without avail. To shatter the electron-trapping voids and to reduce the losses on heating one can apparently use annealing of active-layer polymer under high pressure, but it is a time-consuming way. In our opinion the fluorination of  $\pi$ -conjugated polymer backbone is more readily available procedure that inhibits emergence of dead electrons because they are extruded out from voids due to repulsion from fluorine atoms.

After fluorination the binding energy of trapped electrons in Eqs (6), (7) can be writing as  $W_{\text{void}}^- + W_{\text{void}}^+$ , where  $W_{\text{void}}^+$  is repulsion energy of trapped electron. In the fluorinated polymer the dead electrons populate only the deepest traps with binding energy

$$\left|W_{\text{void}}^- + W_{\text{void}}^+\right| > k_{\text{B}}T. \quad (8)$$

As soon as in Eq (8) repulsion energy  $W_{\text{void}}^+$  is greater than energy  $W_{\text{void}}^-$ , the chance electric field  $\mathbf{R}$  is unable to capture electron into voids. Schematically, it is explained in Figs 2. As shown in Fig. 2, *a* in the case of ideal spherical voids the dead electrons move in circular orbits. Nevertheless, the voids of arbitrary shape with a suitable electric field  $\mathbf{R}$  are also able to capture electrons and no matter where they are located, in the disordered or semi-crystalline region of polymer active layer.

In the light of our model the fluorination of  $\pi$ -conjugated polymer improves dramatically PCE of solar cells inasmuch as the number of dead electrons in the voids is greatly reduced due to repulsion from non-shielded negatively charged fluorine atoms. Good points of fluorination depend on the number of fluorine atoms, their arrangement in the  $\pi$ -conjugated chain of polymer, their shielding by side groups as well as on the other factors.

**Known experiments and model of dead electrons.** We included a number of known results for discussion in this heading: 1) well-balanced transport of holes and electrons after fluorination [5; 6]; 2) dielectric constant side-chain polymer manipulation [15; 16]; 3) photovoltaic performance of films processed from different solvents [17]; 4) dopant controlled trap-filling induced by nanocrystals [18].

In view of the fact that dead electrons occupy voids up to recombination and do not take part in electron transport, their drift mobility is equal to zero. On the other hand, as may be inferred from Eqs (7), (8) using Boltzmann-like factors  $1 - \exp(-|W_{\text{void}}^-|/kT)$  and  $1 - \exp(-|W_{\text{void}}^- + W_{\text{void}}^+|/kT)$ , the concentration of dead electrons is lower for fluorinated polymers; consequently, they should exhibit higher electron mobility. Therefore, the model of electron-trapping voids and dead electrons must be invoked to account for balanced hole and electron transport with high h/e mobility ratio of 1–2 in the case of PPDT2FBT [5] (some details was already called in Introduction). If there is minor amount of dead electrons in polymer voids the h/e mobility ratio is come close to unity. When the electrons do not fall into the voids along their drift path to the cathode, the thickness-independent active layers become enable up to 300–1000 nm [5; 6]. It is also evident from our model that the larger open-circuit voltage of PPDT2FBT devices is correlated with slower non-geminate (bimolecular) recombination rate  $k_{\text{rec}}$  [5] which are strongly suppressed due to lack of dead electrons in active layer of fluorinated polymer PPDT2FBT.

Cho et al. [16] demonstrate that tailoring the dielectric constant can be used to control recombination dynamics in PSCs. They introduce polar nitrile side-chains tethered to the electron deficient diketopyrrolopyrrole (DPP) unit of an indacenodithiophene-based (IDT) copolymer (PIDT-DPP-CN) to control the dielectric properties of this active layers compared to an analogous polymer with alkyl side-chains (PIDT-DPP-Alkyl). Up to this, it has been shown [15] that PIDT-DPP-Alkyl and PIDT-DPP-CN have similar hole mobilities, orbital energy levels, and optical absorption. This suggests that the side-chain manipulation has a negligible impact on the called properties. Nevertheless, the transient photovoltage (TPV) measurements demonstrated that  $k_{\text{rec}}$  is substantially reduced in the PIDT-DPP-CN/C<sub>60</sub> in contrast to the faster charge recombination rates  $k_{\text{rec}}$  observed for PIDT-DPP-Alkyl/C<sub>60</sub>, with voltage decay times  $\tau_1$  and  $\tau_2$  of 73 and 15  $\mu\text{s}$  respectively [16]. The bilayer heterojunctions made with the high dielectric polymer PIDT-DPP-CN show improvements in  $V_{\text{OC}}$ ,  $FF$ , and  $J_{\text{SC}}$ . To understand these behaviours and TPV results the authors have used the Coulomb attraction between the electron and hole, and that the binding energy is inversely proportional to dielectric constant  $\epsilon$ . They inferred that the improvements in device performance appear to be linked to suppressed non-geminate recombination [16].

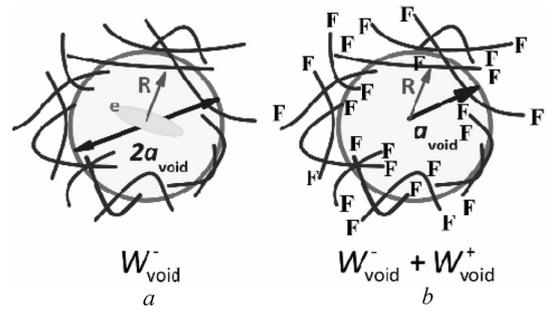


Fig. 2. Electron captured by chance electric field  $\mathbf{R}$  for void of radius  $a_{\text{void}}$  in non-fluorinated disordered polymer (*a*) and free-of-electron void due to repulsion effect in fluorinated polymer when binding energy  $W_{\text{void}}^- + W_{\text{void}}^+ \geq 0$  (*b*)

We think that the nitrile side-chains manipulation, as with fluorination, inhibit the emergence of dead electrons, because electrons are partly extruded out from voids due to repulsion from N atoms of CN-groups. A polaron pair interaction between hole in surrounding medium, on the one hand, and dead electron into void, on the other, is given by Eq (6) rather than the Coulomb attraction. The binding energy of trapped electrons is  $W_{\text{void}}^-$  (Eq (6)) for PIDT-DPP-Alkyl and  $W_{\text{void}}^- + W_{\text{void}}^+$  for PIDT-DPP-CN. In the latter case  $W_{\text{void}}^+$  is the repulsion energy between trapped electron and negatively charged nitrogen atoms of CN-groups. The non-geminate recombination rate  $k_{\text{rec}}$  (second order rate constant) is proportional to  $np$  and we can employ the Boltzmann-like factors for examination of rate constant  $k_{\text{rec}}$  affected by dead electrons with help of relations  $1 - \exp(-|W_{\text{void}}^-|/kT)$  and  $1 - \exp(-|W_{\text{void}}^- + W_{\text{void}}^+|/kT)$  for PIDT-DPP-Alkyl and PIDT-DPP-CN respectively. Since  $|W_{\text{void}}^-| > |W_{\text{void}}^- + W_{\text{void}}^+|$  the population of the dead electrons into voids predominates for PIDT-DPP-Alkyl. Thus, the decay time of transient open-circuit voltage  $\tau_1$  for PIDT-DPP-CN/C<sub>60</sub> will be considerably greater than  $\tau_2$  for PIDT-DPP-Alkyl, that have been observed by Cho et al. [16].

Not only side CN-group, but the others substituent are able to suppress the negative influence of dead electrons. It is only necessary that the substituent includes a negatively charged and slightly shielded atom. Uddin et al. [19] synthesized alkoxy-containing donor-acceptor copolymers with the high carrier mobility and PCE of 8.28 % for PPDT2FBT/PC70BM device. One can probably consider this success as finding of fine-drawn conjunction of repulsive forces on the side of negatively charged oxygen atom belonging to alkoxy-group as well as on the side of two non-shielded fluorine atoms. Such molecular design promotes the expulsion of dead electrons from PPDT2FBT voids.

The PSCs performance is closely related to surface and bulk morphologies of active layer [2–6; 17]. Guo et al. [17] investigated PBDTTT-C-T/PC71BM blend with high boiling points additives of solvents 1,8-octanedithiol (OT), 1,8-diiodooctane (DIO) and N-methyl pyrrolidone (NMP) to optimize the morphologies of active layer when *o*-dichlorobenzene have been used as host solvent. Four films processed without solvent and with solvents show low crystallinities, implying that the use of these additives has no impact on molecular packing structure in the PBDTTT-C-T/PC71BM films and the their material is largely amorphous and disordered. Nevertheless, the photovoltaic parameters of the PSCs changed greatly by using different solvent additives. For instance, the PCE amounted 5.43, 7.37, 7.44, 4.48 % for active layer materials, without solvent and with solvents DIO, NMP, OT respectively. The film possess the bad-balanced hole and electron transport with h/e mobility ratio of 104.9, 10.43, 41.22, 78.8, showing low electron mobility of  $6.37 \cdot 10^{-5}$ ,  $8.37 \cdot 10^{-4}$ ,  $1.88 \cdot 10^{-4}$ , and  $8.08 \cdot 10^{-5}$  cm<sup>2</sup> V<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup> respectively as in the above sequence. From our standpoint in the case of pure PBDTTT-C-T/PC71BM blend the low electron mobility of  $6.37 \cdot 10^{-5}$  cm<sup>2</sup> V<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup> and bad h/e mobility ratio of 104.9 exist owing the amorphous nature of material that have a lot of free electron-trapping voids. Following Eqs (6), (7) most of the voids with a small radius can be related to the deep traps which in active layer of PSC are populated by dead electrons. As noted above, this inevitably leads to a drop in electron mobility and a decrease in the PCE. The additives of solvents fill the void and prevent the appearance of the dead electrons to a greater or lesser extent. The most effective additive is DIO by reason of electron repulsion exerted by two non-shielded negatively charged iodine atoms. The protective effect of additives depends on their molecular structure, on sizes of voids, on the number of molecules which occupy voids as well as on the interaction of additive molecules with electrons, which are directed to the voids by reaction electric field  $\langle \mathbf{R}_{\mu} \rangle$  and built-in voltage. This is a complex issue, which should not be attempted to be discussed now.

For further confirmation of our model we turn to the work of Gao et al. [18], which investigated P3HT:CdSe films with different CdSe nanocrystals (NCs) having average diameters of 3.3, 4.4, and 5.3 nm and constant shape. Employing the TPV measurements it was found that the photoinduced charge carrier lifetime  $\tau$  includes slow component of 21, 10, and 1.8 ms respectively. After extensive research the authors have inferred that there are traps in all three P3HT:CdSe devices with charge trapping affecting the device performance regardless to the size of NCs. They have also drawn the important conclusion that the trap-mediated recombination is responsible for the loss of photogenerated charge carriers in such hybrid solar cells.

To insight into the nature of these traps we can suggest, that NCs fall into the P3HT voids when preparing blends, and being polarized by the internal chance electric field  $\langle R \rangle$ , themselves are becoming the traps. The electron trapped by polarized NC is apparently localized in the surface layer of NC and for the idealized spherical nanodots it moves in a circular-like orbit in the surface layer of radius  $a_{\text{NC}}$ . For the disorder polymer the internal chance electric field  $\mathbf{R}$  is the vector with the randomly oriented direction, moreover there are free voids of different size in polymer. Taken together these reasons lead to the fact that some part of the trapped electrons is dead electrons.

In approximation of spherical nanodots, in the case when  $a_{\text{NC}} = a_{\text{void}}$ , it can be shown that the mean binding energy  $|W_{\text{NC}}^-|$  of electron, trapped by polarized NC, is given by Eq (9):

$$W_{\text{NC}}^- = -\sqrt{\frac{\Delta f q^2 k_{\text{B}} T_{\text{polym}}}{\pi \epsilon_{\text{NC}}^2 a_{\text{void}}}}, \quad (9)$$

where  $\epsilon_{\text{NC}}$  is the dielectric constant of NC. One can see that the trapped electrons have higher binding energy  $|W_{\text{NC}}^-|$  in the case of small NCs. Accordingly with Eq (9), the lifetime  $\tau$  decreases with increasing of particle size in sequence 21, 10, and 1.8 ms, since the non-geminate recombination rate  $k_{\text{rec}}$  is proportional to concentration of dead electrons with factor  $1 - \exp(-|W_{\text{NC}}^-|/kT)$ . Thus, the decrease of amount of dead electrons with the growth of NC size is also in consistent with the fact that the photocurrent generation in P3HT: CdSe films increase with increasing of NC size [18].

Employing Eq (2) one evaluates the internal chance electric field  $\langle R \rangle$  of  $6.51 \cdot 10^7$ ,  $4.24 \cdot 10^7$ , and  $3.20 \cdot 10^7$  V/m for P3HT free voids with a diameter of 3.3, 4.4, and 5.3 nm respectively. Next data are used for these calculation:  $T_{\text{polym}} = 423$  K, since the P3HT was annealed at 150 °C [18];  $\epsilon \approx 3$ ; the second part of factor  $\Delta f$  was ignored i.e.  $\Delta f = f(\epsilon)$ . With  $V_{\text{OC}} = 0.2-0.6$  V for P3HT: CdSe thick films of 80 nm [18], the built-in electric field  $R_{\text{built-in}}$  have to be of  $2.5 \cdot 10^6-7.5 \cdot 10^6$  V/m. This example demonstrates the testing of Eq (2), and that the internal chance electric field  $\langle R \rangle$  on the order of magnitude greater than the built-in electric field  $R_{\text{built-in}}$  even for relatively large voids. But there are always free voids of smaller sizes in polymer and, as followed by reference to Eq (6) and factor  $1 - \exp(-|W_{\text{NC}}^-|/kT)$  they are a major refuge for dead electrons in the active layer in hybrid P3HT: CdSe solar cells with large NCs. All presented evaluations are of importance for photovoltaic devices operating on the BHJ principle, but its detail discussion is beyond the framework of basic concept of this study.

**Conclusions.** Herein it is substantiated that the voids – not only spherical, but any other shape – are the most widespread kind of the electron traps in disordered or semi-crystalline polymer active layers of photovoltaic devices. The internal chance electric field in polymer captures and maintains the electrons after CT excitons dissociation on the surface of voids or when the electrons are driven to the cathode by a built-in voltage. So there appear dead electrons in the voids, and such expected to be the nature of the deep traps in  $\pi$ -conjugated polymer. Due to non-geminate recombination the dead electrons are unusable to be collected to external circuit of solar cell. For this reason the electron-trapping voids and non-geminate recombination of dead electrons are the main obstacles to create the highly efficient PSCs. Fluorination, side-chain manipulation in polymer backbone, and trap-filling additives in active layers prevent the appearance of dead electrons inside voids and partially eliminate these obstacles.

We come also to the conclusion that in P3HT: CdSe films the deep traps originate not only from free voids of smaller sizes but as well from polarization of CdSe NCs in the internal chance electric field of polymer, because after polarization the NCs become themselves the traps. Thus, the polarized NCs are able to capture electrons, some part of which are also classified here as dead electrons.

## Notes and references

1. Heeger, A. J. 25th Anniversary Article: Bulk heterojunction solar cells: Understanding the mechanism of operation / A. J. Heeger // *Advanced Materials*. – 2014. – Vol. 26, N 1. – P. 10–28; doi: 10.1002/adma.201304373.
2. Impact of backbone fluorination on  $\pi$ -conjugated polymers in organic photovoltaic devices: A review / N. Leclerc [et al.] // *Polymers*. – 2016. – Vol. 8, N 1. – P. 11-1-27; doi:10.3390/polym8010011.
3. Efficient organic solar cells processed from hydrocarbon solvents / J. Zhao [et al.] // *Nature Energy*. – 2016. – Vol. 1, N 2. – P. 15027-1-7; doi: 10.1038/nenergy.2015.27.

4. Development of fluorinated benzothiadiazole as a structural unit for a polymer solar cell of 7 % efficiency / H. Zhou [et al.] // *Angewandte Chemie International Edition*. – 2011. – Vol. 50, N 13. – P. 2995–2998; doi: 10.1002/ange.201005451.
5. Semi-crystalline photovoltaic polymers with efficiency exceeding 9 % in a ~300 nm thick conventional single-cell device / T. L. Nguyen [et al.] // *Energy & Environmental Science*. – 2014. – Vol. 7, N 6. – P. 3040–3051; doi: 10.1039/C4EE01529K.
6. Mobility-controlled performance of thick solar cells based on fluorinated copolymers / W. Li [et al.] // *Journal of the American Chemical Society*. – 2014. – Vol. 136, N 44. – P. 15566–15576; doi: 10.1021/ja5067724.
7. Nicolai, H. T. Electron traps in semiconducting polymers: Exponential versus Gaussian trap distribution / H. T. Nicolai, M. M. Mandoc, P. W. M. Blom // *Physical Review B*. – 2011. – Vol. 83, N 19. – P. 1952041-1-5; doi: 10.1103/PhysRevB.83.195204.
8. Mobility relaxation and electron trapping in a donor/acceptor copolymer / M. Schubert [et al.] // *Physical Review B*. – 2013. – Vol. 87, N 2. – P. 024203-1-12; doi: 10.1103/PhysRevB.87.024203.
9. Pavlovich, V. S. Fluctuations of local electric field in polar media and a variance of frequency distribution of electronic transition of polar impurity molecules / V. S. Pavlovich // *Doklady Akademii Nauk BSSR (Dokl. Akad. Nauk BSSR)*. – 1987. – Vol. 31, N 5. – P. 412–415 [in Russian].
10. Pavlovich, V. S. Solvatochromism and nonradiative decay of intramolecular charge-transfer excited states: bands-of-energy model, thermodynamics, and self-organization / V. S. Pavlovich // *European Journal of Chemical Physics and Physical Chemistry*. – 2012. – Vol. 13, N 18. – P. 4081–4093; doi: 10.1002/cphc.201200426.
11. Pavlovich, V. S. Solvent polarity effect on excited-state lifetime of carotenoids and some dyes / V. S. Pavlovich // *Biopolymers*. – 2006. – Vol. 82, N 4. – P. 435–441; doi: 10.1002/bip.20464.
12. Pavlovich, V. S. Gas-phase energy of the  $S_2 \leftarrow S_0$  transition and electrostatic properties of the  $S_2$  state of carotenoid peridinin via a solvatochromic shift and orientation broadening of the absorption spectrum / V. S. Pavlovich // *Photochemical & Photobiological Sciences*. – 2014. – Vol. 13, N 10. – P. 1444–1455; doi: 10.1039/C4PP00124A.
13. Field-dependent exciton dissociation in organic heterojunction solar cells / A. Petersen [et al.] // *Physical Review B*. – 2012. – Vol. 85, N 24. – P. 245208-1-10; doi: 10.1103/PhysRevB.85.245208.
14. Pavlovich, V. S. Photoprocesses in biomolecules, carbon nanoparticles and polymer solar cells / V. S. Pavlovich. – Minsk, 2016. – 318 p. [in Russian].
15. Improved thin film morphology and bulk-heterojunction solar cell performance through systematic tuning of the surface energy of conjugated polymers / Y. Sun [et al.] // *Journal of Materials Chemistry*. – 2012. – Vol. 22, N 12. – P. 5587–5595; doi: 10.1039/C2JM15517F.
16. High-dielectric constant side-chain polymers show reduced non-geminate recombination in heterojunction solar cells / N. Cho [et al.] // *Advanced Energy Materials*. – 2014. – Vol. 4, N 10. – P. 1301857-1-5; doi: 10.1002/aenm.201301857.
17. Effect of solvent additive on active layer morphologies and photovoltaic performance of polymer solar cells based on PBDTTT-C-T/PC<sub>71</sub>BM / X. Guo [et al.] // *RSC Advances*. – 2016. – Vol. 6 (Issue in progress). – P. 51924–51931; doi: 10.1039/C6RA06020J.
18. Trap-induced losses in hybrid photovoltaics / F. Gao [et al.] // *ACS Nano*. – 2014. – Vol. 8, N 4. – P. 3213–3221; doi: 10.1021/nn501185h.
19. Interplay of intramolecular noncovalent Coulomb interactions for semicrystalline photovoltaic polymers / M. A. Uddin [et al.] // *Chemistry of Materials*. – 2015. – Vol. 7, N 17. – P. 5997–6007; doi: 10.1021/acs.chemmater.5b02251.

Received 14.09.2016

УДК 539.12

В. В. КИСЕЛЬ<sup>1</sup>, Е. М. ОВСИЮК<sup>2</sup>, Я. А. ВОЙНОВА<sup>3</sup>, О. В. ВЕКО<sup>4</sup>, В. М. РЕДЬКОВ<sup>5</sup>**КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1  
И АНОМАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ***(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)*<sup>1</sup>Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь  
vasiliy-bspu@mail.ru<sup>2</sup>Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Беларусь  
e.ovsiyuk@mail.ru<sup>3</sup>Гимназия г. Калинковичи, Беларусь  
vekoolga@mail.ru<sup>4</sup>Кочицанская средняя школа Ельского района, Беларусь  
voinyuschka@mail.ru<sup>5</sup>Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
v.redkov@dragon.bas-net.by

Обобщенное уравнение Даффина–Кеммера для частицы со спином 1 и аномальным магнитным моментом исследуется в присутствии внешнего однородного магнитного поля. На основе использования техники проективных операторов проведено разделение переменных. Задача сведена к системе уравнений для трех независимых функций, решения построены в терминах вырожденных гипергеометрических функций. Найдены три серии уровней энергии, отвечающих связанным состояниям частицы в магнитном поле. Если требовать, чтобы уровни энергии имели физический смысл при всех значениях главного квантового числа ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), то на описывающий аномальный магнитный момент параметр необходимо накладывать ограничения – они найдены в явном виде. Также рассмотрена нейтральная векторная частица. В этом случае связанных состояний не существует, а проявление аномального магнитного момента сводится к присутствию зависящего от величины и знака параметра аномального магнитного момента масштабного фактора в аргументе волновых функций.

*Ключевые слова:* векторный бозон, аномальный магнитный момент, магнитное поле, точные решения.

V. V. KISEL<sup>1</sup>, E. M. OVSIYUK<sup>2</sup>, O. V. VEKO<sup>3</sup>, Y. A. VOYNOVA<sup>4</sup>, V. M. RED'KOV<sup>5</sup>**QUANTUM MECHANICS OF A SPIN 1 PARTICLE WITH THE ANOMALOUS MAGNETIC MOMENT  
IN THE MAGNETIC FIELD**<sup>1</sup>Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus  
vasiliy-bspu@mail.ru<sup>2</sup>Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Belarus  
e.ovsiyuk@mail.ru<sup>3</sup>Gymnasium, Kalinkovichi, Belarus  
vekoolga@mail.ru<sup>4</sup>Secondary school, Kochischany, Yelsk region, Belarus  
voinyuschka@mail.ru<sup>5</sup>B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
v.redkov@dragon.bas-net.by

The generalized Duffin–Kemmer equation for a spin 1 particle with the anomalous magnetic moment in the external uniform magnetic field is investigated. The separation of variables in the wave equation is performed on the basis of projective operator techniques. The problem is reduced to a system of differential equations for three independent functions that have been solved in terms of the confluent hypergeometric functions. Three series of the energy levels are found. To assign them the physical sense at all values of the main quantum number  $n = 0, 1, 2, \dots$ , special restrictions on anomalous magnetic moment values must be imposed – they are formulated in explicit form. Otherwise, only some part of the energy levels corresponds to the bound states. The neutral spin 1 particle is considered as well. In this case, no bound states exist in the systems. The main qualitative manifestation of the anomalous magnetic moment is the space scaling of the arguments of the wave functions in comparison with a particle without such a moment.

*Keywords:* vector boson, anomalous magnetic moment, magnetic field, exact solutions.

**Введение.** Петрашем [1] была предложена 20-компонентная теория для частицы со спином 1/2 и аномальным магнитным моментом. В присутствии внешних электромагнитного и гравитационного полей теория была исследована в [2–4]; было показано, что после исключения дополнительного вектор-биспинора уравнение для основного биспинора сводится к общековариантному уравнению Дирака, содержащему, помимо минимального и паулиевского членов взаимодействия, дополнительное взаимодействие частицы со спином 1/2 с внешним гравитационным полем, осуществляемое через скалярную кривизну  $R(x)$ . Аналогичное обобщение волнового уравнения для спина 1 было предложено впервые Шамали и Капри [5]; см. также [6].

В работах [7; 8] обобщенное уравнение Дирака было решено точно во внешних магнитном и электрическом полях. В данной работе обобщенное уравнение для векторной частицы с аномальным магнитным моментом решено в присутствии внешнего однородного магнитного поля. Используется 10-мерный матричный формализм Даффина–Кеммера, наличие аномального магнитного момента учитывается с помощью дополнительного члена взаимодействия в волновом уравнении.

**Разделение переменных.** Обобщенное уравнение для векторной частицы с аномальным магнитным моментом задается в виде [3; 4]

$$\left( \beta_\mu D_\mu + \frac{ie}{M} \lambda_3 \lambda_3^* F_{[\mu\nu]} P J_{[\mu\nu]} + M \right) \Psi = 0, \quad \Psi = \begin{vmatrix} \Psi_\mu \\ \Psi_{[\mu\nu]} \end{vmatrix}, \quad (1)$$

используются 10-мерные матрицы Даффина–Кеммера;  $J_{[\mu\nu]} = \beta_\mu \beta_\nu - \beta_\nu \beta_\mu$ ;  $P$  – проективный оператор, выделяющий из  $\Psi$  векторную составляющую  $\Psi_\mu$  ( $P + \bar{P} = I$ );  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ .

В тензорной форме уравнения имеют вид (используется метрика с мнимой единицей)

$$D_\mu \Psi_\nu - D_\nu \Psi_\mu + M \Psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad D_\nu \Psi_{[\mu\nu]} + 2 \frac{ie}{M} \lambda_3 \lambda_3^* F_{[\mu\nu]} \Psi_\nu + M \Psi_\mu = 0.$$

Вводим матрицу  $Y = iJ_{[12]}$ ; она удовлетворяет уравнению  $Y^3 = Y$ , что позволяет ввести три проективных оператора и разбить волновую функцию  $\Psi$  в сумму трех составляющих:

$$P_0 = 1 - Y^2, \quad \Psi_0 = P_0 \Psi, \quad P_\pm = \frac{1}{2} Y(Y \pm 1), \quad \Psi_\pm = P_\pm \Psi.$$

Преобразуя уравнение (1) к цилиндрическим координатам (учитываем однородное магнитное поле  $\vec{B} = (0, 0, B)$ ), затем применяя подстановки

$$\Psi_0 = e^{ip_4 x_4} e^{ip_3 x_3} e^{im\phi} f_0(r), \quad \Psi_\pm = e^{ip_4 x_4} e^{ip_3 x_3} e^{i(m \pm 1)\phi} f_\pm(r),$$

находим радиальные уравнения в следующей алгебраической форме:

$$\begin{aligned} (i\hat{p} + M)f_0 + \beta_+ \hat{a}_{m+1} f_+ - \beta_- \hat{b}_{m-1} f_- &= 0, \\ (i\hat{p} + \Gamma P + M)f_+ - \beta_- \hat{b}_m f_0 &= 0, \quad (i\hat{p} - \Gamma P + M)f_- + \beta_+ \hat{a}_m f_0 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В (2) использованы обозначения

$$\begin{aligned} \hat{a}_m &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( + \frac{d}{dr} + \frac{m - B_0 r^2}{r} \right), \quad \hat{b}_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( - \frac{d}{dr} + \frac{m - B_0 r^2}{r} \right), \\ eB/2 = B_0, \quad \lambda_3 \lambda_3^* (2eB/M) &= \Gamma, \quad ip_3 \beta_3 + ip_4 \beta_4 = i\hat{p}. \end{aligned} \quad (3)$$

После необходимых вычислений с использованием алгебры  $\beta$ -матриц систему радиальных уравнений можно преобразовать к более простой форме

$$(i\hat{p} + M)f_0 + \beta_+ \hat{a}_{m+1} f_+ - \beta_- \hat{b}_{m-1} f_- = 0,$$

$$(A+M)f_+ - \beta'_- \hat{b}_m f_0 = 0, \quad (C+M)f_- + \beta'_+ \hat{a}_m f_0 = 0,$$

где использованы обозначения

$$\frac{M+\Gamma\bar{P}}{M+\Gamma} i\hat{p} = A, \quad \frac{M+\Gamma\bar{P}}{M+\Gamma} \beta_- = \beta'_-, \quad \frac{M-\Gamma\bar{P}}{M-\Gamma} i\hat{p} = C, \quad \frac{M-\Gamma\bar{P}}{M-\Gamma} \beta_+ = \beta'_+.$$

Введем в рассмотрение операторы со свойствами (пусть  $p^2 = p_3^2 + p_4^2$ )

$$\overline{(i\hat{p}+M)}(i\hat{p}+M) = p^2 + M^2, \quad \overline{(A+M)}(A+M) = p^2 + M^2, \\ \overline{(C+M)}(C+M) = p^2 + M^2;$$

с точностью до нормировки эти формулы определяют обратные матрицы. Тогда систему уравнений можно переписать в существенно более простом виде:

$$(i\hat{p}+M)(p^2+M^2)f_0 + \beta_+ \hat{a}_{m+1}(p^2+M^2)f_+ - \beta_- \hat{b}_{m-1}(p^2+M^2)f_- = 0, \quad (4a)$$

$$(p^2+M^2)f_+ - \overline{(A+M)}\beta'_- \hat{b}_m f_0 = 0, \quad (p^2+M^2)f_- + \overline{(C+M)}\beta'_+ \hat{a}_m f_0 = 0. \quad (4b)$$

Уравнение (4a) с использованием (4b) преобразуется к виду матричного дифференциального уравнения относительно одной компоненты  $f_0$ :

$$\left[ (i\hat{p}+M)(p^2+M^2) + \beta_+ \hat{a}_{m+1} \overline{(A+M)}\beta'_- \hat{b}_m + \beta_- \hat{b}_{m-1} \overline{(C+M)}\beta'_+ \hat{a}_m \right] f_0 = 0. \quad (5)$$

Фактически достаточно решить уравнение (5) относительно  $f_0$ ; две другие компоненты  $f_+$ ,  $f_-$  вычисляются по  $f_0$  с помощью уравнений из (4b).

Нужно знать явный вид введенных выше обратных операторов. Для решения этой задачи достаточно установить вид минимальных полиномов [3] соответствующих матриц. После выполнения необходимых вычислений устанавливаем, что требуемые обратные операторы должны быть квадратичными по соответствующим матрицам; они задаются соотношениями

$$\overline{(M+i\hat{p})} = \frac{1}{M} \left[ (i\hat{p})^2 - M(i\hat{p}) + (p^2+M^2) \right], \\ \overline{(A+M)} = \frac{p^2+M^2}{M} \left[ 1 - \frac{M+\Gamma}{p^2+M^2+M\Gamma} A + \frac{M+\Gamma}{M(p^2+M^2+M\Gamma)} A^2 \right], \\ \overline{(C+M)} = \frac{p^2+M^2}{M} \left[ 1 - \frac{M-\Gamma}{p^2+M^2-M\Gamma} C + \frac{M-\Gamma}{M(p^2+M^2-M\Gamma)} C^2 \right], \quad (11)$$

где

$$A = \frac{M+\Gamma\bar{P}}{M+\Gamma} i\hat{p}, \quad A^2 = -\frac{M\hat{p}^2}{M+\Gamma}, \quad C = \frac{M-\Gamma\bar{P}}{M-\Gamma} i\hat{p}, \quad C^2 = -\frac{M\hat{p}^2}{M-\Gamma}.$$

С учетом этого уравнение для компоненты  $f_0(r)$  можно привести к виду

$$\left\{ (p^2+M^2) + \hat{a}_{m+1} \hat{b}_m \frac{1}{M^2(p^2+M^2+M\Gamma)} \frac{1}{M+\Gamma} \times \right. \\ \left. [ (p^2+M^2+M\Gamma)(i\hat{p})^2 \beta_+ - M(p^2+M^2+M\Gamma)i\hat{p}\beta_+ + (p^2+M^2)(p^2+M^2+M\Gamma)\beta_+ - \right. \\ \left. (p^2+M^2)\beta_+ i\hat{p}(M+\Gamma\bar{P}) + (p^2+M^2)\beta_+(i\hat{p})^2 ] (M+\Gamma\bar{P})\beta_- + \right. \\ \left. \hat{b}_{m-1} \hat{a}_m \frac{1}{M^2(p^2+M^2-M\Gamma)} \frac{1}{M-\Gamma} \times \right. \\ \left. [ (p^2+M^2-M\Gamma)(i\hat{p})^2 \beta_- - M(p^2+M^2-M\Gamma)i\hat{p}\beta_- + (p^2+M^2)(p^2+M^2-M\Gamma)\beta_- - \right.$$

$$(p^2 + M^2)\beta_- i\hat{p}(M - \Gamma P) + (p^2 + M^2)\beta_- (i\hat{p})^2](M - \Gamma\bar{P})\beta_+ \} f_0 = 0.$$

Дальше предстоит учесть явный вид составляющих в компоненте  $f_0$  (она зависит от функций  $f_3, f_4, f_{12}, f_{34}$ ) и явный вид всех матриц. После необходимых вычислений можно привести задачу к набору из четырех уравнений

$$f_{34} = -\frac{i}{M}(p_4 f_3 - p_3 f_4), \quad (6a)$$

$$\left[\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + p^2 + M^2\right](p_4 f_3 - p_3 f_4) = 0, \quad (6b)$$

$$\left[\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + p^2 + M^2\right](p_3 f_3 + p_4 f_4) = p^2 \left(\frac{2B_0}{M} - \Gamma\right) f_{12}, \quad (6c)$$

$$\left[\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + p^2 + M^2\right] f_{12} = \Gamma \left(-\frac{2B_0}{M} + \Gamma\right) f_{12} + \left(-\frac{2B_0}{M} + \Gamma\right) (p_3 f_3 + p_4 f_4). \quad (6d)$$

Анализ уравнений (6a) и (6b) очевиден. Система (6c), (6d) решается через диагонализацию матрицы смешивания. Для этого введем функции

$$\Phi_1 = (p_3 f_3 + p_4 f_4) + \lambda_1 f_{12}, \quad \Phi_2 = (p_3 f_3 + p_4 f_4) + \lambda_2 f_{12},$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – решения уравнения  $\lambda^2 - \lambda\Gamma + p^2 = 0$ :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left( \Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - 4p^2} \right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \left( \Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - 4p^2} \right).$$

Для функций  $\Phi_1, \Phi_2$  получаем отдельные уравнения с похожей структурой:

$$\left(\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + p^2 + M^2 + \lambda'_{1,2}\right)\Phi_{1,2} = 0, \quad \lambda'_{1,2} = \left(\frac{2B_0}{M} - \Gamma\right)\lambda_{1,2}.$$

**Получение спектров энергии.** В явном виде два последних уравнения записываются так:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 - \lambda'_{1,2} - \frac{(m - B_0 r^2)^2}{r^2}\right)\Phi_{1,2} = 0.$$

Вводим переменную  $x = |B_0| r^2$ , уравнение для  $\Phi_1$  примет вид

$$\left[4|B_0| \left(x \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}\right) - \frac{|B_0|(m - xB_0/|B_0|)^2}{x} + \varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 - \lambda'_1\right]\Phi_1 = 0.$$

Для определенности полагаем  $B_0 = -|B_0|$ :

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - \frac{(m+x)^2}{4x} + \frac{\varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 - \lambda'_1}{4|B_0|}\right]\Phi_1 = 0.$$

Используем подстановку  $\Phi_1 = x^A e^{-Cx} \bar{\Phi}_1$ ,  $A = +|m|/2$ ,  $c = 1/2$ , в результате получаем

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} + (|m|+1-x) \frac{d}{dx} - \left(\frac{|m|+m+1}{2} - \frac{\varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 - \lambda'_1}{4|B_0|}\right)\right]\bar{\Phi}_1 = 0.$$

Это вырожденное гипергеометрическое уравнение; условие обрыва ряда до полинома имеет вид

$$\frac{|m|+m+1}{2} - \frac{\varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 - \lambda'_1}{4|B_0|} = -n;$$

откуда следует правило квантования

$$\Phi_1, \quad \varepsilon_1^2 - M^2 - p_3^2 = 2|B_0|(m+|m|+1+2n) + \lambda'_1;$$

для решений  $\Phi_2$  имеем спектр с похожей структурой:

$$\Phi_2, \quad \varepsilon_2^2 - M^2 - p_3^2 = 2|B_0|(m+|m|+1+2n) + \lambda'_2.$$

Введем упрощающие обозначения:

$$2|B_0|(m+|m|+1+2n) = N, \quad -p^2 = \varepsilon^2 - p_3^2 = E > 0, \quad \frac{2B_0}{M} - \Gamma = x,$$

$$\lambda'_1 = \frac{x}{2}(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 + 4E}), \quad \lambda'_2 = \frac{x}{2}(\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 + 4E}),$$

тогда формулы квантования представляются в виде

$$\Phi_1, \quad B_0 = -|B_0|, \quad E_1 - M^2 = N + \frac{x}{2}(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 + 4E});$$

$$\Phi_2, \quad B_0 = -|B_0|, \quad E_2 - M^2 = N + \frac{x}{2}(\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 + 4E}).$$

Эти формулы легко разрешаются относительно  $E$  (следим одновременно за двумя возможностями):

$$2E - 2M^2 - 2N - x\Gamma = \pm x\sqrt{\Gamma^2 + 4E},$$

или

$$z \equiv 2N + 2M^2 + x\Gamma, \quad (2E - z)^2 = x^2(\Gamma^2 + 4E).$$

Тогда

$$E^2 - E(z + x^2) + \frac{z^2 - x^2\Gamma^2}{4} = 0,$$

и корни равны

$$E_1 = \frac{z + x^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(z + x^2)^2 - (z^2 - x^2\Gamma^2)},$$

$$E_2 = \frac{z + x^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(z + x^2)^2 - (z^2 - x^2\Gamma^2)}.$$

Чтобы оба корня  $E_1, E_2$  были вещественными и положительными (это отвечает физическим спектрам), нужно требовать

$$(z + x^2)^2 - (z^2 - x^2\Gamma^2) > 0, \quad z + x^2 > 0, \quad z^2 - x^2\Gamma^2 > 0. \quad (7a)$$

Рассматриваем третье неравенство в (7a):

$$z^2 - x^2\Gamma^2 = (z - x\Gamma)(z + x\Gamma) > 0 \quad \Rightarrow \quad (2N + 2M^2)(2N + 2M^2 + 2x\Gamma) > 0;$$

для его выполнения при всех значениях  $N$  достаточно требовать положительности параметра  $x\Gamma > 0$  (напоминаем, что сейчас рассматривается случай  $B_0 = -|B_0| < 0$ )

$$x\Gamma > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left( \frac{2|B_0|}{M} + \Gamma \right) \Gamma < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2|B_0|}{M} < \Gamma < 0. \quad (7b)$$

Второе неравенство из (7a)  $z + x^2 = (2N + 2M^2) + x\Gamma + x^2 > 0$  с учетом (7b) выполняется автоматически. Первое неравенство  $2zx^2 + x^4 + x^2\Gamma^2 > 0$  выполняется в силу положительности  $z$ :  $z = 2N + 2M^2 + x\Gamma, x\Gamma > 0$ . Поскольку в рассмотренном случае  $B_0 = -|B_0| < 0$  и (см. (3)) имеем равенство

$$\Gamma = \pm 4 \frac{-|B_0|}{M} \lambda_3 \lambda_3^*;$$

то можно использовать только возможность с верхним знаком, когда  $\Gamma < 0$ .

Легко получить аналогичные результаты в случае противоположной ориентации магнитного поля  $B_0 = +|B_0|$ :

$$\Phi_1, \quad \varepsilon_1^2 - M^2 - p_3^2 = 2|B_0|(-m+|m|+1+2n) + \lambda'_1.$$

$$\Phi_2, \quad \varepsilon_2^2 - M^2 - p_3^2 = 2|B_0|(-m+|m|+1+2n) + \lambda'_2.$$

Используя прежние обозначения, формулы квантования представляются так же

$$\Phi_1, \quad B_0 = -|B_0|, \quad E - M^2 = N + \frac{x}{2}(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 + 4E}),$$

$$\Phi_2, \quad B_0 = -|B_0|, \quad E - M^2 = N + \frac{x}{2}(\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 + 4E});$$

эти формулы разрешаются относительно  $E$ :

$$E_1 = \frac{z+x^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(z+x^2)^2 - (z^2 - x^2\Gamma^2)},$$

$$E_2 = \frac{z+x^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(z+x^2)^2 - (z^2 - x^2\Gamma^2)}.$$

Чтобы оба корня  $E_1, E_2$  были вещественными и положительными, нужно, как и прежде, требовать

$$(z+x^2)^2 - (z^2 - x^2\Gamma^2) > 0, \quad z+x^2 > 0, \quad z^2 - x^2\Gamma^2 > 0.$$

Первое неравенство

$$z^2 - x^2\Gamma^2 = (z-x\Gamma)(z+x\Gamma) > 0 \quad \Rightarrow \quad (2N+2M^2)(2N+2M^2+2x\Gamma) > 0$$

выполняется при (напоминаем, что рассматривается случай  $B_0 = +|B_0| < 0$ )

$$x\Gamma > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(-\frac{2|B_0|}{M} + \Gamma\right)\Gamma > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma < 0.$$

Формально возможную область положительных значений  $\Gamma > 0, \Gamma > 2|B_0|/M$  рассматриваем как отвечающую нефизической ситуации, поскольку в нее не попадают заведомо разрешенные как угодно близкие к нулю значения  $\Gamma$ . Два оставшихся неравенства выполняются автоматически:

$$z+x^2 = (2N+2M^2) + x\Gamma + x^2 > 0;$$

$$2zx^2 + x^4 + x^2\Gamma^2 > 0 \quad (z = 2N+2M^2 + x\Gamma, \quad x\Gamma > 0).$$

Спектр энергии, отвечающий уравнению (6а) для функции  $(p_4f_3 - p_3f_4)$ , имеет вид

$$B_0 = -|B_0|, \quad \varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 = 2|B_0|(m+|m|+1+2n),$$

$$B_0 = +|B_0|, \quad \varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 = 2|B_0|(-m+|m|+1+2n).$$

**Нейтральная векторная частица в магнитном поле.** Самостоятельный интерес представляет случай электрически нейтрального векторного бозона с аномальным магнитным моментом. В данном случае система уравнений относительно компонент  $f_3, f_4, f_{12}, f_{34}$  упрощается:

$$f_{34} = -\frac{i}{M}(p_4f_3 - p_3f_4), \quad (8a)$$

$$\left[\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + p^2 + M^2\right](p_4f_3 - p_3f_4) = 0, \quad (8b)$$

$$\left[\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + p^2 + M^2\right](p_3f_3 + p_4f_4) = -p^2\Gamma f_{12}, \quad (8c)$$

$$\left[\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + p^2 + M^2\right]f_{12} = \Gamma^2 f_{12} + \Gamma(p_3f_3 + p_4f_4). \quad (8d)$$

Анализ уравнений (8a) и (8b) очевиден. Система (8b)–(8d) решается через диагонализацию матрицы смешивания. Введем обозначения:

$$\Delta = \frac{1}{\Gamma} [\hat{a}_{m+1} \hat{b}_m + \hat{b}_{m-1} \hat{a}_m + p^2 + M^2], \quad (p_3 f_3 + p_4 f_4) = \Phi_1, \quad f_{12} = \Phi_2;$$

систему уравнений (8c), (8d) можно переписать короче в матричном виде так:

$$\Delta \begin{vmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -p^2 \\ 1 & \Gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta S \begin{vmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{vmatrix} = S \begin{vmatrix} 0 & -p^2 \\ 1 & \Gamma \end{vmatrix} S^{-1} S \begin{vmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{vmatrix}.$$

Требуем

$$S \begin{vmatrix} 0 & -p^2 \\ 1 & \Gamma \end{vmatrix} S^{-1} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}, \quad S = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix};$$

получаем

$$\begin{vmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ -p^2 & (\Gamma - \lambda_1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ -p^2 & (\Gamma - \lambda_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_{21} \\ s_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Решения выглядят так:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - 4p^2}), \quad s_{11} = 1, \quad s_{12} = \lambda_1;$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - 4p^2}), \quad s_{21} = 1, \quad s_{22} = \lambda_2.$$

Таким образом, для функций  $\Phi_1, \Phi_2$  находим отдельные уравнения:

$$\left( \hat{a}_{m+1} \hat{b}_m + \hat{b}_{m-1} \hat{a}_m + p^2 + M^2 - \Gamma \lambda_{1,2} \right) \Phi_{1,2} = 0.$$

В явном виде два последних уравнения записываются так:

$$\varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 + \Gamma \lambda_{1,2} \equiv D, \quad \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + D - \frac{m^2}{r^2} \right) \Phi_{1,2} = 0.$$

Будем искать решение в виде  $\Phi = r^A e^{Br} f(r)$ ; для функции  $f(r)$  получим уравнение

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \left( \frac{2A+1}{r} + 2B \right) \frac{df}{dr} + \left( \frac{A^2 - m^2}{r^2} + \frac{2AB+B}{r} + B^2 + D \right) f = 0.$$

На параметры  $A, B$  накладываем следующие ограничения:

$$A^2 - m^2 \equiv 0 \Rightarrow A = \pm |m|; \quad B^2 = -D \Rightarrow B = \pm i\sqrt{D},$$

тогда уравнение примет вид

$$r \frac{d^2 f}{dr^2} + (2A+1+2Br) \frac{df}{dr} + (2AB+B)f = 0. \quad (9)$$

Отмечаем, что только при положительном  $A = +|m|$  будем иметь решения, конечные в нуле  $r=0$ : дальше будем предполагать это условие выполненным. Кроме того, из физических соображений должны требовать положительности параметра  $D$  – только тогда введение дополнительного параметра аномального магнитного момента  $\Gamma$  согласуется с принципом соответствия:

$$\Gamma = 0 \Rightarrow D \rightarrow D_0 = \varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 > 0.$$

Также для определенности выбираем  $B = +i\sqrt{D}$ ; это не уменьшает общности дальнейшего рассмотрения.

Чтобы преобразовать уравнение (9) к канонической форме вырожденного гипергеометрического уравнения, вводим новую переменную:

$$2Br = -x, \quad x \frac{d^2 f}{dx^2} + (2A+1-x) \frac{df}{dx} - \left(A + \frac{1}{2}\right) f = 0,$$

что сопоставляется с вырожденным гипергеометрическим уравнением

$$F'' + (c-x)F' - aF = 0, \quad a = A + 1/2, \quad c = 2A + 1 = 2a.$$

Напоминаем, что

$$x = -2Br = -2i\sqrt{M^2 - p_3^2 + \Gamma\lambda_{1,2}}.$$

Фактически проявление аномального магнитного момента у электрически нейтральной векторной частицы сводится к появлению зависящего от величины и знака параметра  $\Gamma$  ( $\Gamma = +|\Gamma|, -|\Gamma|$ ) масштабного фактора в аргументе волновых функций. Имеем два типа состояний при каждом значении  $\Gamma$ :

$$\lambda_{1,2}, \quad x = -2Br = -2i\sqrt{M^2 - p_3^2 + \Gamma \frac{1}{2} (\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 4p^2})},$$

При каждом значении  $\Gamma$  есть третий класс состояний, в которых параметр  $\Gamma$  никак себя не проявляет (см. уравнение (8b)):

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) (p_4 f_3 - p_3 f_4) = 0,$$

отвечают решения с обычным (немодифицированным) аргументом  $x$  (как для частицы без аномального момента)

$$x = -2Br = -2i\sqrt{M^2 - p_3^2}.$$

В заключение отметим, что аномальный магнитный момент для частицы со спином 1 проявляет себя во внешнем магнитном поле в свойствах параметров решений и спектрах квантовых чисел; причем и для заряженной и для незаряженной частиц.

Авторы благодарны участникам семинара Лаборатории теоретической физики Института физики НАН Беларуси за полезное обсуждение и советы.

### Список использованной литературы

1. Petras, M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin 3/2 / M. Petras // Czech. J. Phys. – 1955. – Vol. 5, N 3. – P. 418–419.
2. Кисель, В. В. Теория Петраша для частицы со спином 1/2 в искривленном пространстве–времени / В. В. Кисель, Н. Г. Токаревская, В. М. Редьков. – Препринт № 737 / Институт физики НАНБ. – Минск, 2002. – 25 с.
3. Теория Петраша для частицы со спином 1/2 в искривленном пространстве–времени / А. А. Богуш [и др.] // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2002. – № 1. – С. 63–68.
4. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 496 с.
5. Shamaly, A. Unified theories for massive spin 1 fields / A. Shamaly, A. Z. Capry // Can. J. Phys. – 1973. – Vol. 51, N 14. – P. 1467–1470.
6. Кисель, В. В. Релятивистские волновые уравнения с расширенным набором представлений: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / В. В. Кисель. – Минск, 1984. – 11 с.
7. Квантовая механика электрона в магнитном поле, учет аномального магнитного момента / Е. М. Овсюк [и др.] // Докл. НАН Беларусі. – 2016. – Т. 60, № 4. – С. 67–73.
8. Частица со спином 1/2 и аномальным моментом в однородном электрическом поле / Е. М. Овсюк [и др.] // Весн. Брэсцкага ун-та. Сер. 4. Фізіка, матэматыка. – 2016. – № 1. – С. 22–28.

Поступило в редакцию 12.09.2016

## ХИМИЯ

УДК 544.774.4+547.855.7+535.36

А. В. ПЕТКЕВИЧ, Ж. В. ИГНАТОВИЧ, Е. В. КОРОЛЁВА,  
А. Н. ЕРЕМИН, академик В. Е. АГАБЕКОВ

**ОДНОСТАДИЙНЫЙ МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ АССОЦИАТОВ ПРОИЗВОДНЫХ  
2-АРИЛАМИНОПИРИМИДИНА С МАГНЕТИТОМ**

*Институт химии новых материалов НАН Беларуси, Минск, Беларусь*  
m\_a\_w1987@mail.ru; ignatovichz@inbox.ru; evk@basnet.by; yan47@mail.ru; agabekov@ichnm.basnet.by

Разработан одностадийный метод получения ассоциатов наночастиц на основе магнетита с биоактивными соединениями ряда 2-ариламинопиримидина, содержащих фармакофорные фрагменты ингибиторов протеинкиназы и SH-группы. Особенностью метода является присутствие диметилсульфоксида и производных 2-ариламинопиримидина в среде формирования наночастиц магнетита.

*Ключевые слова:* наночастицы, ассоциаты, магнетит, производные 2-ариламинопиримидина.

A. V. PIETKIEVICH, Zh. V. IGNATOVICH, E. V. KOROLEVA, A. N. ERYOMIN, V. E. AGABEKOV

**ONE-STEP METHOD FOR OBTAINING THE DERIVATIVES OF 2-ARYLAMINOPYRIMIDINE  
ASSOCIATES WITH MAGNETITE**

*Institute of Chemistry of New Materials of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*  
m\_a\_w1987@mail.ru; ignatovichz@inbox.ru; evk@basnet.by; yan47@mail.ru; agabekov@ichnm.basnet.by

A one-step method for preparing associates of magnetite nanocarriers with bioactive 2-arylaminopyrimidine derivatives containing the pharmacophore fragments of protein kinase inhibitors and SH-group was developed. The feature of the method is the presence of dimethyl sulfoxide and 2-arylaminopyrimidines in the medium of formation of magnetite nanoparticles.

*Keywords:* nanoparticles, associates, magnetite, derivatives of 2-arylaminopyrimidine.

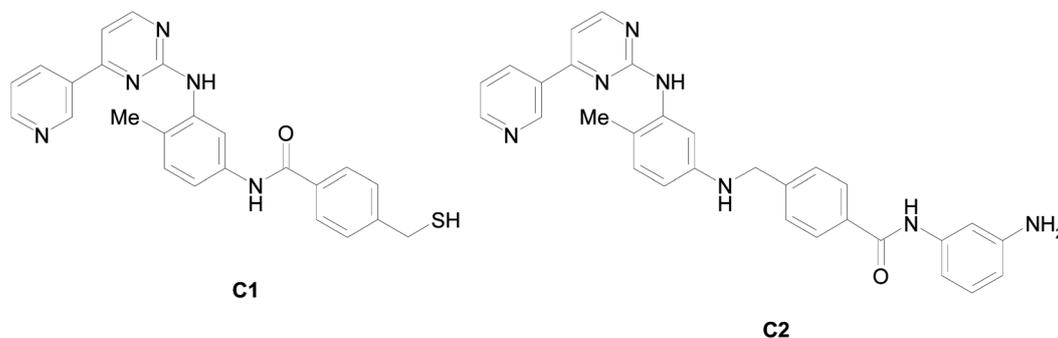
**Введение.** Разработка методов и средств целевой доставки лекарственных препаратов к органам и тканям особенно актуальна в терапии онкологических заболеваний, так как токсичность используемых лекарств часто является препятствием для эффективного лечения. Применение наночастиц (НЧ) для целевой доставки лекарств позволяет повысить качество лечения, обеспечивая биодоступность плохо растворимых соединений и их контролируемое высвобождение в органах-мишенях. Имобилизованные на НЧ терапевтические агенты в большей степени защищены от химической и биологической деградации, чем свободные [1; 2].

На основе синтетических производных 2-аминопиримидина разработаны ингибиторы протеинкиназы для терапии хронического миелолейкоза, опухолей легких, мозга, неоперабельных и/или метастатических стромальных опухолей желудочно-кишечного тракта [3]. Нами синтезированы новые арил(гетарил)аминометилбензамиды, содержащие в структуре как фармакофорные фрагменты ингибиторов протеинкиназы, так и функциональные группы, обеспечивающие хемосорбцию этих соединений на наносорбентах [4–6].

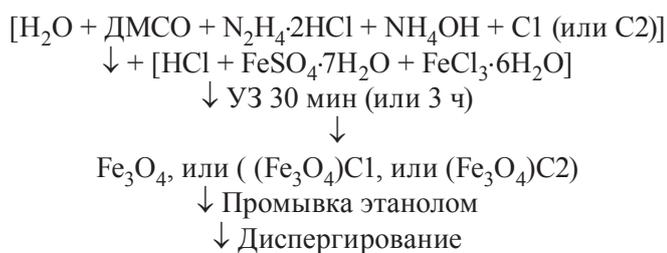
НЧ оксидов железа могут быть использованы в целевой доставке лекарственных веществ, так как имеют насыщенную гидроксильными группами поверхность, на которой сравнительно легко можно хемосорбировать органические соединения [7; 8]. В зависимости от pH среды Fe-OH центры могут реагировать с ионами H<sup>+</sup> или OH<sup>-</sup>, создавая на поверхности положительный (Fe-OH<sub>2</sub><sup>+</sup>) или отрицательный (Fe-O<sup>-</sup>) заряд [8].

Цель исследования – разработка одностадийного способа получения ассоциатов НЧ магнетита с производными 2-ариламинопиридина и характеристика их гидродинамических свойств в среде, близкой к нейтральной.

**Материалы и методы исследования.** В работе использовали гидразин дигидрохлорид (Sigma-Aldrich, Испания),  $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$  и  $\text{FeCl}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  (Alfa Aesar, Германия), поливинилпирролидон (Sigma-Aldrich, США) и синтезированные нами 4-(меркаптометил)-N-[4-метил-3{4-(пиридин-3-ил)пиридин-2-иламино}фенил]бензамид C1 [4] и N-[(3-аминофенил)]-4-{4-метил-3-[(4-пиридин-3-ил)пиридин-2-иламино]фенил}амино]метил} бензамид C2 [6]:



Синтез магнетита и формирование его ассоциатов с соединениями C1, C2 проводили по схеме:



Готовили два охлажденных до 5–8 °С раствора: первый содержал 0,04 Н НСl, 150 мМ  $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$  и 300 мМ  $\text{FeCl}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ , второй – 11,1 об. % ДМСО, 100 мМ  $\text{N}_2\text{H}_4 \cdot 2\text{HCl}$ , 2,222 М  $\text{NH}_4\text{OH}$  и C1 или C2. К 1,80 мл раствора 2 добавляли 0,20 мл раствора 1 и полученный золь обрабатывали УЗ (Elmasonic S 30Н, Германия) в течение 30 мин (для получения ассоциата) или 3 ч (для получения магнетита) в условиях роста температуры до 24–25 °С или до 61–65 °С соответственно. Золь центрифугировали (5000 об/мин, 5 мин, 5 °С), супернатант удаляли, а осадок промывали этанолом и диспергировали в водном растворе 0,1 мг/мл ПВП (поливинилпирролидона) или в дистиллированной воде.

Размер и форму частиц оценивали методом просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ), используя микроскоп JEM–100СХ (Япония). Гидродинамические характеристики частиц определяли методом динамического лазерного рассеяния света на анализаторе ZetaSizer Nano-ZS (Malvern, Великобритания), используя золи как в среде их получения, так и после очистки частиц и диспергирования их в дистиллированной воде или 0,1 мг/мл водном растворе ПВП. При проведении измерений золи разводили дистиллированной водой.

**Результаты и их обсуждение.** Золь магнетита имеет рН 9,0 и содержит частицы с размером <20 нм (рис. 1). При его 50-кратном разведении средний гидродинамический диаметр частиц составляет 699 нм, т. е. существенно больший, чем размер частиц, определенный методом ПЭМ (рис. 1).

Ввиду того, что C1 и C2 мало растворимы в воде в среду синтеза добавляли ДМСО, который применяется в медицине как местное противовоспалительное и обезболивающее средство. Время осаждения частиц магнетита в поле постоянного магнита (~85 мТл) увеличивается с ростом концентрации ДМСО в среде синтеза: в отсутствие ДМСО и при его содержании 10 об. % магнетит осаждается за 11 с, а в среде с 30 об. % ДМСО – за 15 с. Агломераты магнетита, сформиро-

ванные без ДМСО, при разведении золя дистиллированной водой диспергируют эффективнее, чем полученные в среде с ДМСО (табл. 1). Так, в первом случае при 40-кратном разведении золя магнетита средний гидродинамический диаметр агломератов равен 840 нм, а во втором – 1100–1200 нм (табл. 1). С разведением золя магнетита, сформированного в среде с 10–30 об. % ДМСО, поверхность частиц перезаряжается: при 40-кратном разведении дзета-потенциал отрицательный, а при 100-кратном – положительный (табл. 1). Наиболее существенные изменения дзета-потенциала наблюдаются в присутствии 10 об. % ДМСО.

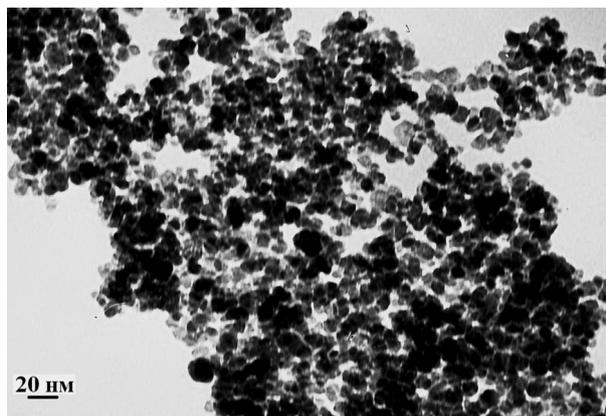


Рис. 1. ПЭМ изображение НЧ магнетита

Т а б л и ц а 1. Гидродинамические характеристики золь магнетита в реакционной среде, содержащей различные концентрации ДМСО

ДМСО, %	Разведение золя дистиллированной водой, раз	Диаметр частиц, нм	Дзета-потенциал, мВ	Удельная проводимость, мСм/см
0	20	1251		
	40	838	–0,03	0,549
	100	919	–8,58	0,239
10	20	1575		
	40	1053	–5,37	0,707
	100	1026	23,80	0,153
20	20	1316		
	40	1155	–8,33	0,981
	100	1071	6,51	0,486
30	20	2015		
	40	1102	–6,04	0,783
	100	796	5,39	0,267

Дзета-потенциал очищенного магнетита в водном растворе ПВП равен –5,9 и –11,5 мВ (рис. 2, а), а в дистиллированной воде – –27,1 и –18,3 мВ при 40- и 100-кратном разведении золь соответственно. Известно, что ПВП проявляет катионактивные свойства и способен формировать комплексы с анионными полимерами [9]. Уменьшение дзета-потенциала указывает на связывание ПВП с Fe-O<sup>-</sup> центрами на поверхности магнетита.

Дзета-потенциал ассоциатов (Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub>)C1, образованных в присутствии разных концентраций C1, во всех случаях положительный (рис. 2, а, зависимости 1 и 2). Изменение знака дзета-потенциала магнетита в присутствии C1 свидетельствует о связывании частиц магнетита с C1 путем как ковалентного взаимодействия с SH-группой, так и образованием водородных связей с другими фрагментами молекулы.

Связываясь с магнетитом, C1 не только изменяет его дзета-потенциал, но и влияет на агрегацию частиц. В наибольшей степени агрегирует ассоциат (Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub>)C1, полученный в среде, содержащей 0,05 и 0,3 мМ раствор C1 (рис. 3, зависимости 2 и 5). Агломерация (Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub>)C1, полученного в среде 0,05 мМ C1, по-видимому, обусловлена преимущественным включением его в пористую структуру агломератов магнетита. Насыщение внутреннего пространства агломератов достигается в среде 0,1 мМ C1 (рис. 2, а, кривая 1), а с ростом его концентрации функционализируется поверхность агломератов. Между ассоциатом (Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub>)C1 и ПВП возможен обмен молекулами C1 с образованием комплексов (Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub>)C1–ПВП, ПВП–C1. Известно, что ПВП эффективно адсорбирует токсины, красители, лекарственные вещества и образует комплексы с сульфатами, новокаином, пенициллином, тетрациклином [9].

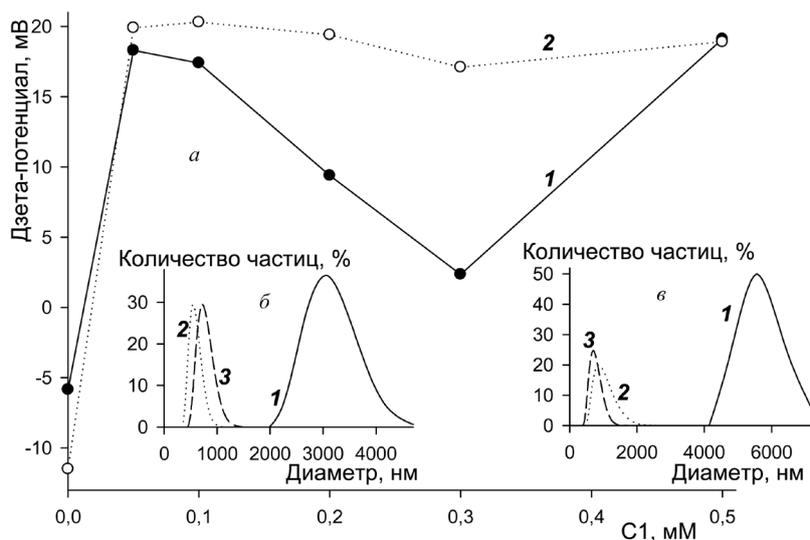


Рис. 2. Зависимость величины дзета-потенциала ассоциата ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ )C1 от концентрации C1 в среде его получения (а) (золи в водном растворе 0,1 мг/мл ПВП разведены в 40 (1) и 100 (2) раз); распределение количества частиц в зависимости от их гидродинамического диаметра для магнетита (б) и ассоциата ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ )C1 (в), полученного в среде с 0,05 мМ C1 (концентрированный золь (1), разведенный в 40 (2) и 100 (3) раз)

По мере десорбции C1 с поверхности ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ )C1 уменьшается дзета-потенциал ассоциата, достигая минимальной величины в случае 0,3 мМ C1 (рис. 2, а, кривая 1). Из-за малой величины поверхностного заряда возрастает агломерация ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ )C1 (рис. 3, зависимость 5). В случае 0,5 мМ C1 обеспечивается насыщение как ПВП, так и агломератов магнетита. Сравнительно высокая величина и незначительное изменение дзета-потенциала при разведении золя ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ )C1 в 100 раз (рис. 2, а, кривая 2) отражает большее сродство C1 к магнетиту, чем к ПВП.

В наиболее устойчивой конформации по данным расчетов методом ММ2 (программа Chem.3D.Ultra 9.0) молекула C1 имеет планарную структуру ариламинопиримидинового фрагмента амида, вне плоскости находится лишь меркаптометилфенильный заместитель (рис. 4). По-видимому, характер связывания C1 с поверхностью частиц магнетита зависит от его концентрации в растворе. При большем содержании C1 уменьшается число водородных связей с магнетитом, что облегчает десорбцию C1 в среде с ПВП и стимулирует образование комплекса ПВП–C1.

В отличие от ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ )C1, ассоциаты ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ )C2 были диспергированы в дистиллированной воде. Незначительная величина проводимости зелей (табл. 2) свидетельствует об отсутствии не связанных с частицами ионных компонентов среды синтеза.

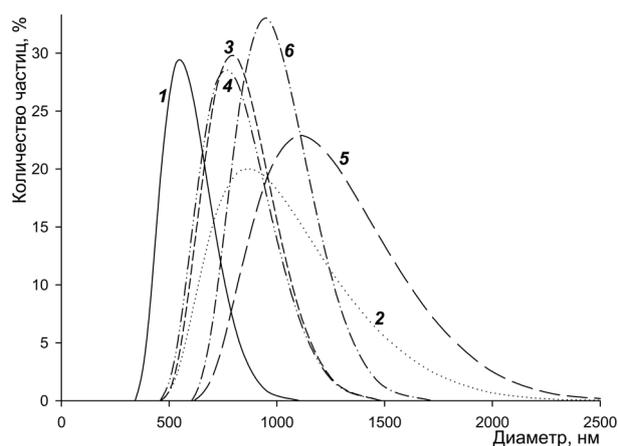


Рис. 3. Распределение количества частиц в зависимости от их гидродинамического диаметра магнетита (1) и ассоциата ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ )C1 (2–6): золи получены в среде, содержащей 0 (1), 0,05 (2), 0,1 (3), 0,2 (4), 0,3 (5) и 0,5 (6) мМ C1 и разведены дистиллированной водой в 40 раз

Магнетит в водной среде агрегирует в большей степени (табл. 2, рис. 5, зависимости 1 и 2), чем ассоциат ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ )C2, сформированный в среде 0,3 мМ C2 (рис. 5, распределения 3 и 4). При содержании C2, равном 0,45 мМ,

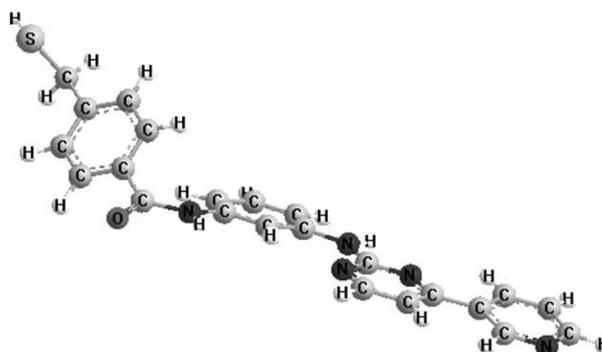


Рис. 4. 3D модель пространственной структуры C1

Т а б л и ц а 2. Гидродинамические характеристики частиц магнетита и ассоциата (Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub>)C2 в дистиллированной воде

Образец	Разведение, раз	Диаметр частиц, нм	PdI	Дзета-потенциал, мВ	Удельная проводимость, мСм/см
Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub>	20	889	0,947		
	40	1215	0,112	-27,1	0,076
	100	868	0,088	-18,3	0,027
(Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub> )C2 (0,30 мМ С2)	20	575	0,282		
	40	365	0,193	-21,6	0,053
	100	373	0,211	-13,2	0,016
(Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub> )C2 (0,45 мМ С2)	20	455	0,264		
	40	474	0,267	-27,8	0,042
	100	558	0,310	-14,4	0,016

агломерация ассоциата (Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub>)C2 увеличивается (табл. 2), однако ее степень меньше (рис. 5, зависимости 3 и 4), чем у Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub> (рис. 5, зависимости 1 и 2) и (Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub>)C1 (рис. 3, зависимость 6). При 40-кратном разведении в максимальном количестве представлены частицы (Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub>)C1 с гидродинамическим диаметром 1201 нм (рис. 3, зависимость 5), а в случае (Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub>)C2 – 295 нм. Следовательно, С2 проявляет большую антиагрегативную способность, чем С1.

Дзета-потенциал как золя магнетита, так и ассоциата (Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub>)C2 уменьшается при разведении дистиллированной водой (табл. 2), что указывает на десорбцию потенциалопределяющих соединений с поверхности наночастиц. В присутствии С1 и ПВП этот процесс не наблюдается (рис. 2, а, кривая 2), что возможно обусловлено более слабым взаимодействием аминогрупп с поверхностью частиц, чем SH-групп.

**Заключение.** Производные 2-ариламинопиримидина, содержащие SH- и H<sub>2</sub>N-группы, способны связываться с магнетитом в процессе его синтеза с образованием ассоциатов. Эффективность ассоциации зависит от их взаимодействия с полимерным коллоидным стабилизатором и концентрации в среде, что отражают гидродинамические характеристики ассоциатов. Производное С2, содержащее концевую NH<sub>2</sub>-группу, проявляет большую диспергирующую активность, чем С1, имеющее доступную SH-группу.

#### Список использованной литературы

1. Nanochemistry and Nanomedicine for Nanoparticle-based Diagnostics and Therapy / G. Chen [et al.] // Chem. Rev. – 2016 – Vol. 116. N 5. – P. 2826–2885.
2. Thanh, N. T. K. Functionalisation of nanoparticles for biomedical applications / N. T. K. Thanh, L. A. W. Green // Nano Today. – 2010 – Vol. 5, N 3. – P. 213–230.
3. Производные аминопиримидина как ингибиторы протеинкиназ. Молекулярный дизайн, синтез и биологическая активность / Е. В. Королева [и др.] // Журн. орган. химии. – 2016 – Т. 52, № 2. – С. 159–196.
4. Получение и свойства ассоциатов наночастиц золота с 4-(меркаптометил)-N-[4-метил-3-(пиридин-3-ил)-пиримидин-2-иламино}фенил] бензамидом / А. В. Абакшонок [и др.] // Докл. НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 6. – С. 52–56.
5. Ассоциация амидов 2-ариламинопиримидина и фолиевой кислоты с композитными наночастицами на основе сульфида цинка и магнетита / А. В. Абакшонок [и др.] // Весці НАН Беларусі. Сер. хім. навук. – 2015. – № 2. – С. 72–81.
6. Synthesis of N-[2(3,4)-aminophenyl]-4-({4-methyl-3-[4-(pyridin-3-yl)pyrimidin-2-ylamino]phenyl}aminomethyl)-benzamides / Zh. V. Ignatovich [et al.] // Russ. J. Org. Chem. – 2015. – Vol. 51, N 10. – P. 1449–1452.
7. Resolving the Structure of Ligands Bound to the Surface of Superparamagnetic Iron Oxide Nanoparticles by High-Resolution Magic-Angle Spinning NMR Spectroscopy / L. Polito [et al.] // J. Am. Chem. Soc. – 2008. – Vol. 130, N 38. – P. 12712–12724.
8. Illés, E. The effect of humic acid adsorption on pH-dependent surface charging and aggregation of magnetite nanoparticles / E. Illés, E. Tombácz // J. Colloid and Interface Science. – 2006. – Vol. 295, N 1. – P. 115–123.
9. Сидельковская, Ф. П. Химия N-винилпирролидона и его полимеров / Ф. П. Сидельковская. – М.: Наука, 1970. – 150 с.

Поступило в редакцию 28.06.2016

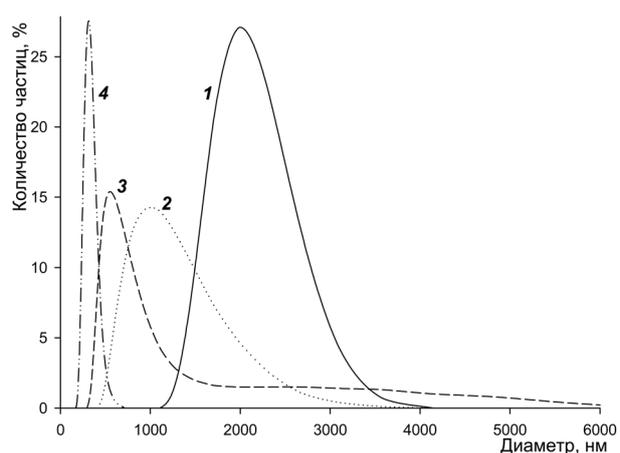


Рис. 5. Распределение количества частиц в зависимости от их гидродинамического диаметра магнетита (1, 2) и ассоциата (Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub>)C2 (3, 4): 1 и 3 – исходный золь, 2 и 4 – разведенный дистиллированной водой в 40 раз

УДК 577.3'32/'36

*Г. Г. МАТИНОВИЧ, И. В. МАТИНОВИЧ, А. В. ВЧЕРАШНЯЯ,  
О. И. ШАДЫРО, академик С. Н. ЧЕРЕНКЕВИЧ*

## **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ РЕГУЛЯЦИЯ ПРОДУКЦИИ АКТИВНЫХ ФОРМ КИСЛОРОДА И МЕХАНИЗМОВ ГИБЕЛИ ОПУХОЛЕВЫХ КЛЕТОК ПАРА-БЕНЗОХИНОНАМИ**

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

*martinovichgg@bsu.by; parkun@bsu.by; tuata\_de\_danann@mail.ru; shadyro@open.by; cherenkevich@bsu.by*

Установлено, что тимохинон (2-изопропил-5-метил-1,4-бензохинон) и 1,4-бензохинон регулируют внутриклеточную продукцию активных форм кислорода (АФК) и индуцируют гибель опухолевых клеток по различным механизмам. Показано, что токсическое действие 1,4-бензохинона связано с ингибированием переноса электронов в митохондриальной дыхательной цепи и развитием клеточного окислительного стресса. Тимохинон, инициирующий выход АФК более низкий в сравнении с 1,4-бензохиноном, является более токсичным для опухолевых клеток. Обнаружено, что образующиеся при действии тимохинона АФК являются участниками редокс-сигнальных процессов, ведущих к формированию митохондриальных пор высокой проницаемости и запуску программируемой гибели клеток.

*Ключевые слова:* активные формы кислорода, бензохинон, тимохинон, митохондрии, апоптоз, редокс-сигнализация.

*G. G. MARTINOVICH, I. V. MARTINOVICH, A. V. VCHERASHNIAYA, O. I. SHADYRO, S. N. CHERENKEVICH*

## **DIFFERENTIAL REGULATION OF THE REACTIVE OXYGEN SPECIES PRODUCTION AND THE MECHANISMS OF TUMOR CELL DEATH BY PARA-BENZOQUINONES**

*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

*martinovichgg@bsu.by; parkun@bsu.by; tuata\_de\_danann@mail.ru; shadyro@open.by; cherenkevich@bsu.by*

It is established that thymoquinone (2-isopropyl-5-methyl-1,4-benzoquinone) and 1,4-benzoquinone regulate the intracellular reactive oxygen species (ROS) production and induce the death of tumor cells by different mechanisms. It is shown that the toxic action of 1,4-benzoquinone is associated with the inhibition of electron transfer in the mitochondrial respiratory chain and with the development of cellular oxidative stress. Thymoquinone initiating a lower level of ROS production in comparison with 1,4-benzoquinone is more toxic to tumor cells. It is established that thymoquinone-induced ROS are involved in the redox signaling processes that lead to the opening of mitochondrial transition pores of high permeability and the activation of the programmed death of cells.

*Keywords:* reactive oxygen species, benzoquinone, thymoquinone, mitochondria, apoptosis, redox signaling.

**Введение.** Необходимым этапом развития современных биомедицинских технологий является изучение механизмов передачи и обработки информации внутри клеток. Один из важнейших путей передачи информации в клетках реализуется на основе электрон-транспортных процессов, протекающих с участием редокс-активных соединений и белков [1]. Физико-химические и биологические свойства редокс-активных соединений позволяют их выделить в отдельную группу биорегуляторов, основными отличительными свойствами которых, в сравнении с другими биологически активными веществами, являются широкий спектр клеточных ответов, определяемых величиной концентрации соединений, и отсутствие специфических молекулярных мишеней в клетках [2]. Биологический эффект действия редокс-активных соединений определяется не конкретной молекулой, а группой взаимодействующих молекул, образующих электрон-транспортные цепи [3; 4]. Близкие по структуре редокс-активные соединения могут выступать участниками разных электрон-транспортных цепей, запуская при этом различные клеточные ответы.

Ранее нами было показано, что водорастворимые фенольные серосодержащие антиоксиданты 3-(3'-трет-бутил-4'-гидроксифенил)-пропилтиосульфат натрия (ТС-13) и 3,5-диметил-4-гидроксибензилтиоэтанат калия (БЭК-11-К) вызывают эффекты противоположно направленного действия на рост опухолевых клеток [5; 6]. Обнаружено, что БЭК-11-К стимулирует пролиферацию, а индуктор сигнальной системы Keap1/Nrf2/ARE – фенольный антиоксидант ТС-13 – ингибирует рост опухолевых клеток в культуре. Установлено, что при действии ТС-13 из-за открытия пор высокой проницаемости индуцируется запуск митохондриально-опосредованного апоптоза [5]. Активация апоптоза происходит через редокс-зависимый механизм [6], и, вероятно, в ней участвуют активные формы кислорода (АФК). Однако роль внутриклеточных АФК в механизмах действия экзогенных регуляторов требует детального изучения, поскольку с участием этих посредников реализуются как регуляторные, так и повреждающие эффекты действия соединений.

Следует также отметить, что внутриклеточные физико-химические условия, сформированные в результате поддержания клеточного редокс-гомеостаза, определяют протекание ряда метаболических и регуляторных процессов и специфичность отклика клеток на действие редокс-активных соединений [1; 7]. Важным фактором, определяющим биологический эффект действия АФК в клетках, является также внутриклеточная локализация структур, их продуцирующих [8]. Ранее нами было показано, что механизм аскорбат-зависимой регуляции  $\text{Ca}^{2+}$ -сигнализации клеток включает усиление локальной продукции АФК в клетках за счет участия митохондриальных оксидоредуктаз [9]. Согласно предложенному механизму, кроме редокс-активных соединений и их мишеней, в редокс-регуляторных процессах участвуют также белки-ферменты – оксидоредуктазы, локализация которых вблизи белков-мишеней определяет специфический отклик клеток.

Поиск новых регуляторов продукции АФК и изучение детальных механизмов их действия является актуальной задачей современной медицинской биофизики. Эффективными регуляторами продукции АФК в клетках являются *para*-бензохиноны и их производные. Ряд природных и синтетических *para*-бензохинонов проявляют противовирусную, противовоспалительную и противоопухолевую активность [10; 11]. Однако механизмы действия хинонов в биологических системах, определяющие их биологическую активность, включая противоопухолевую, остаются не изученными. В данной работе исследованы реализующиеся с участием внутриклеточных АФК механизмы отклика опухолевых клеток на действие *para*-бензохинонов.

**Материалы и методы исследования.** В работе использовали 2-изопропил-5-метил-1,4-бензохинон (тимохинон) и 1,4-бензохинон (все *para*-бензохиноны фирмы Sigma-Aldrich, США). Тимохинон и 1,4-бензохинон являются близкими по структуре соединениями с различными физико-химическими характеристиками. Молекула тимохинона, так же как и молекула 1,4-бензохинона, содержит две карбонильные группы в 1 и 4 положении. В отличие от 1,4-бензохинона в структуре тимохинона содержится изопропильная и метильная группы, определяющие его взаимодействие с гидрофобным окружением. Редокс-потенциал тимохинона значительно ниже, чем у 1,4-бензохинона [12].

В работе использовали клетки карциномы гортани человека линии Нер-2, которые культивировали в среде DMEM (Sigma-Aldrich) с добавлением 8–10 % эмбриональной бычьей сыворотки и гентамицина (0,08 мг/мл) при температуре 37 °С в атмосфере 5 %  $\text{CO}_2$ . При определении влияния препаратов на пролиферативную активность опухолевых клеток исследуемое соединение добавляли в чашки Петри через 24 ч после пересева клеток. Подсчет клеток проводили через трое суток культивирования. Для получения суспензии клетки снимали раствором трипсин-версен в соотношении 1 : 3 через 6 сут. культивирования.

Оценку внутриклеточной продукции АФК проводили на основе анализа скорости окисления флуоресцентного зонда 5-(6)-хлорметил-2',7'-дихлордигидрофлуоресцеина (CM- $\text{H}_2\text{DCF}$ , Sigma-Aldrich) эндогенными окислителями, аналогично используемому ранее нами методу анализа скорости окисления для 2',7'-дихлордигидрофлуоресцеина ( $\text{H}_2\text{DCF}$ ) [5; 13]. Определяли скорость окисления CM- $\text{H}_2\text{DCF}$  ( $v_0$ ) эндогенными окислителями в контроле, начальную скорость окисления CM- $\text{H}_2\text{DCF}$  после добавления хинона ( $v_1$ ) и конечную скорость окисления CM- $\text{H}_2\text{DCF}$  после добавления хинона ( $v_2$ ).

Мониторинг изменений митохондриального мембранного потенциала ( $\psi_m$ ) проводили с использованием этилового эфира тетраметилпродамина (TMRE, Sigma-Aldrich) [14]. Для определения направления изменения митохондриального мембранного потенциала использовали протонофор карбонилцианид-3-хлорфенилгидразон (CCCP, Sigma-Aldrich). В работе также использовали антимицин А – ингибитор убухинол-цитохром *c* оксидоредуктазы, циклоспорин А – ингибитор сборки митохондриальных пор высокой проницаемости, и водорастворимый антиоксидант N-ацетил-L-цистеин (все соединения фирмы Sigma-Aldrich).

Измерения проводили при температуре 37 °С в сбалансированном буферном солевом растворе (СБСР) следующего состава: NaCl – 131 мМ, KCl – 5 мМ, CaCl<sub>2</sub> – 1,3 мМ, MgSO<sub>4</sub> – 1,3 мМ, КН<sub>2</sub>Р<sub>4</sub> – 0,4 мМ, Нерес – 20 мМ, глюкоза – 6 мМ, рН 7,4. Интенсивность флуоресценции внутриклеточных зондов измеряли с использованием спектрофлуориметра SM 2203 (СОЛАР, Республика Беларусь).

Результаты представлены как средние значения плюс-минус стандартное отклонение среднего для 3–5 независимых экспериментов. Достоверность значений определяли с помощью *t*-критерия Стьюдента, принимая различия достоверными при уровне значимости  $p < 0,05$ .

**Результаты и их обсуждение.** Установлено, что при действии исследуемых бензохинонов скорость роста клеток в культуре снижается. Величина концентрации 50-процентного ингибирования (IC<sub>50</sub>) роста клеток в культуре для тимохинона составила 8 мкМ, а IC<sub>50</sub> для 1,4-бензохинона – 25 мкМ. После добавления хинонов в суспензию клеток скорость окисления SM-H<sub>2</sub>DCF увеличивалась, что указывает на усиление внутриклеточной продукции АФК. В процессе внутриклеточного окисления зонда, индуцированного действием хинонов, можно выделить две стадии: на первой стадии наблюдается высокая скорость окисления SM-H<sub>2</sub>DCF, на второй – скорость окисления SM-H<sub>2</sub>DCF значительно ниже, чем на первой (рис. 1). Выход АФК при действии тимохинона, наблюдаемый на первой стадии, оказался значительно ниже, чем выход АФК при действии 1,4-бензохинона.

С другой стороны, при действии тимохинона на второй стадии редокс-отклика клеток наблюдалось снижение эндогенной продукции АФК в сравнении с контролем. С ростом концентрации тимохинона снижение внутриклеточной продукции АФК, индуцируемое агентом, увеличивалось (рис. 2). Величина скорости окисления SM-H<sub>2</sub>DCF на второй стадии при действии 1,4-бензохинона не изменялась при увеличении концентрации агента и была сравнима с величиной скорости окисления SM-H<sub>2</sub>DCF в контроле. Выявленные отличия в редокс-отклике клеток на действие хинонов свидетельствуют об участии различных механизмов внутриклеточной продукции АФК, активируемых в клетках при действии агентов.

Согласно полученным результатам, при действии тимохинона усиливается продукция АФК в митохондриях. Повышение продукции АФК в митохондриях вызывает окисление сульфгидрильных групп АДФ/АТФ-транслоказы (АНТ) внутренней мембраны митохондрий, что приво-

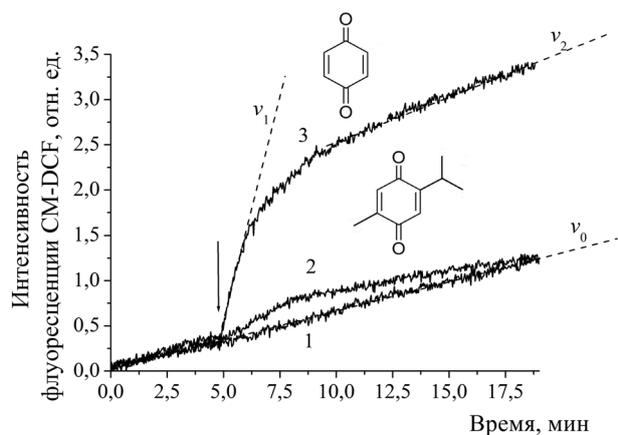


Рис. 1. Влияние хинонов на продукцию АФК клетками линии НЕР-2: 1 – контроль, 2 – 20 мкМ тимохинона, 3 – 20 мкМ 1,4-бензохинона

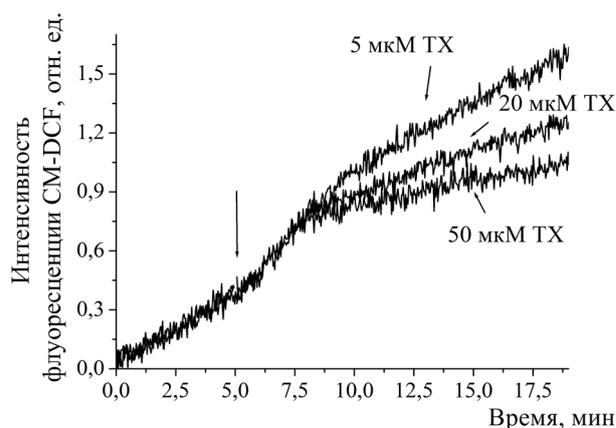


Рис. 2. Кинетика изменения интенсивности флуоресценции SM-DCF в клетках линии НЕР-2 при действии тимохинона (TX)

дит к образованию пор высокой проницаемости в результате формирования комплексов с участием циклофилина D, ANT и потенциал-зависимого анионного канала (VDAC) внешней мембраны митохондрий. Открытие пор высокой проницаемости (mPTPs) является ключевым этапом сигнальной стадии митохондриально-опосредованного апоптоза, сопровождаемым снижением  $\psi_m$  и высвобождением цитохрома *c* и апоптоз-индуцирующего фактора (AIF) [15]. Деполяризация внутренней мембраны митохондрий, индуцированная открытием mPTPs, приводит к уменьшению продукции АФК, что и вызывает наблюдаемое при действии тимохинона снижение скорости окисления CM-H<sub>2</sub>DCF.

Снижение величины митохондриального мембранного потенциала при действии тимохинона было установлено с использованием флуоресцентного зонда TMRE. При добавлении тимохинона в суспензию клеток наблюдалось уменьшение интенсивности флуоресценции TMRE. С ростом концентрации тимохинона величина снижения  $\psi_m$  увеличивалась (рис. 3). Показано, что циклоспорин А (ингибитор открытия mPTPs), предварительно введенный в суспензию клеток, ингибировал снижение  $\psi_m$  при действии хинона (рис. 3). Снижение митохондриального мембранного потенциала индуцировалось также 1,4-бензохиноном (рис. 3). Однако величина снижения  $\psi_m$  при действии 1,4-бензохинона была меньше, чем величина снижения  $\psi_m$ , индуцированного тимохиноном. Кроме того, снижение  $\psi_m$ , индуцированное действием 1,4-бензохинона, не блокировалось циклоспорином А (рис. 3). Вероятно, механизм снижения величины митохондриального мембранного потенциала с участием 1,4-бензохинона происходит без формирования mPTPs и включает ингибирование трансмембранного переноса протонов компонентами дыхательной цепи митохондрий. Нами показано, что при незначительном снижении  $\psi_m$ , индуцированным протонофором СССР в нетоксических дозах (0,5 мкМ), ингибирование роста клеток при действии 1,4-бензохинона усиливалось, а снижение роста клеток при действии тимохинона не изменялось (рис. 4).

В работе обнаружено, что усиление митохондриальной продукции АФК, индуцированное антимицином А (ингибитором переноса электронов в комплексе III), также приводит к дозозависимому снижению величины митохондриального мембранного потенциала (рис. 3). Механизм рассматриваемого явления включает формирование mPTPs, поскольку снижение  $\psi_m$ , индуцированное антимицином А, блокировалось циклоспорином А.

Результаты экспериментов, проведенных с культурой клеток карциномы гортани линии Нер-2, также подтвердили роль митохондриально-опосредованного пути гибели клеток в механизме действия тимохинона. Показано, что при введении в культуру опухолевых клеток Нер-2 циклоспорина А уменьшается индуцированное тимохиноном снижение скорости роста клеток. Цито-

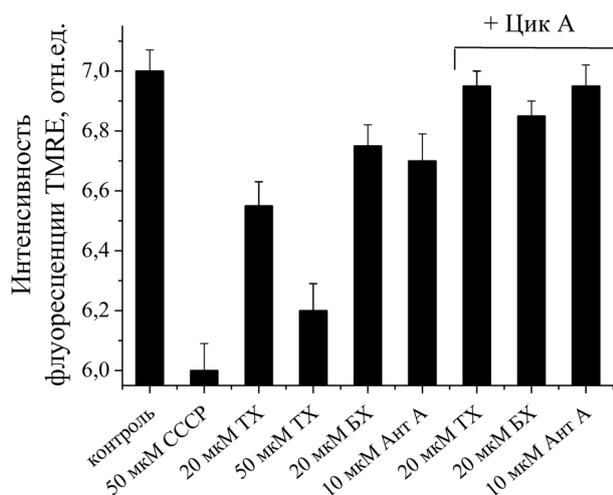


Рис. 3. Влияние хинонов и ингибиторов на величину митохондриального потенциала в клетках линии Нер-2: БХ – 1,4-бензохинон, Ант А – антимицин А, Цик А – циклоспорин А

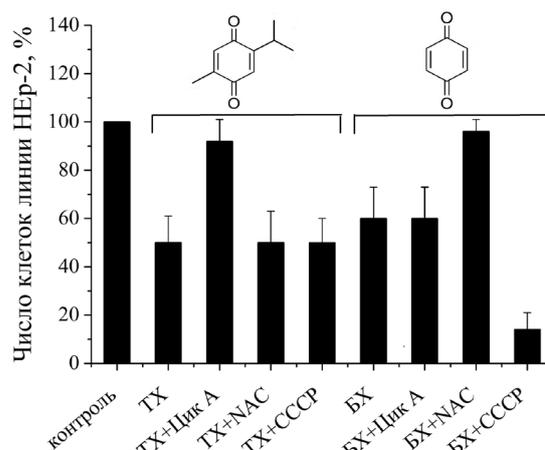


Рис. 4. Влияние тимохинона (8 мкМ ТХ) и 1,4-бензохинона (20 мкМ БХ) на рост клеток линии Нер-2 в присутствии циклоспорина А (0,5 мкМ), НАС (1 мМ) и СССР (0,5 мкМ)

токсическое действие 1,4-бензохинона не блокировалось циклоспорином А. С другой стороны, эксперименты, проведенные с использованием антиоксиданта **N-ацетил-L-цистеина (НАС)**, накапливающегося в цитозоле клеток, привели к результатам с противоположным эффектом. При добавлении в культуру клеток НАС наблюдалось уменьшение токсического эффекта 1,4-бензохинона. Токсическое действие тимохинона не блокировалось НАС (рис. 4).

**Заключение.** Полученные в работе данные свидетельствуют о том, что токсическое действие 1,4-бензохинона связано с ингибированием переноса электронов в митохондриальной дыхательной цепи и повреждением биомолекул в результате развития клеточного окислительного стресса. Тимохинон, индуцирующий выход АФК более низкий в сравнении с 1,4-бензохиноном, тем не менее, является более токсичным в отношении опухолевых клеток. Более высокая токсичность тимохинона обусловлена активацией специфического редокс-сигнального механизма, функционирование которого при невысоком уровне внутриклеточных АФК обеспечивается колокализацией митохондриальных оксидоредуктаз, вовлеченных в образование АФК, и соответствующего редокс-сенсора – АДФ/АТФ-транслоказы, участвующего в механизме запуска апоптоза. Таким образом, методы направленной регуляции продукции АФК в клетках с использованием редокс-активных соединений и модуляторов активности АФК-продуцирующих ферментов могут быть использованы для управления клеточными функциями, включая программы клеточной гибели.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке БРФФИ (грант М15-019).

### Список используемой литературы

1. *Мартинovich, Г. Г.* Окислительно-восстановительные процессы в клетках / Г. Г. Мартинovich, С. Н. Черенкевич. – Минск: БГУ, 2008.
2. Редокс-регуляция клеточной активности: концепции и механизмы / С. Н. Черенкевич [и др.] // Весці НАН Беларусі. Сер. біял. навук. – 2013. – № 1. – С. 92–108.
3. *Jones, D. P.* Redox sensing: orthogonal control in cell cycle and apoptosis signaling / D. P. Jones // J. Intern. Med. – 2010. – Vol. 268. – P. 432–448.
4. *Мартинovich, Г. Г.* Редокс-регуляция клеточных процессов: биофизическая модель и эксперимент / Г. Г. Мартинovich, И. В. Мартинovich, С. Н. Черенкевич // Биофизика. – 2011. – Т. 56, № 3. – С. 465–474.
5. Индуктор экспрессии ARE-регулируемых генов фенольный антиоксидант ТС-13 вызывает гибель опухолевых клеток через митохондриально-опосредованный путь / Г. Г. Мартинovich [и др.] // Биофизика. – 2015. – Т. 60, № 1. – С. 120–128.
6. Редокс-свойства опухолевых клеток и их пролиферативная активность при действии фенольных антиоксидантов / Г. Г. Мартинovich [и др.] // Докл. НАН Беларусі. – 2015. – Т. 59, № 3. – С. 82–87.
7. *Мартинovich, Г. Г.* Редокс-гомеостаз клеток / Г. Г. Мартинovich, С. Н. Черенкевич // Успехи физиолог. наук. – 2008. – Т. 39, № 3. – С. 29–44.
8. *Terada, L. S.* Specificity in reactive oxidant signaling: think globally, act locally / L. S. Terada // J. Cell Biology. – 2006. – Vol. 174. – P. 615–623.
9. Redox regulation of calcium signaling in cancer cells by ascorbic acid involving the mitochondrial electron transport chain / G. G. Martinovich [et. al.] // J. of Biophys. – 2012. – Vol. 2012. – P. 921653.
10. Thymoquinone and its therapeutic potentials / S. Darakhshan [et al.] // Pharmacol. Res. – 2015. – Vol. 95–96. – P. 138–158.
11. The chemical and biological activities of quinones: overview and implications in analytical detection / N. El-Najjar [et al.] // Photochem. Rev. – 2011. – Vol. 10. – P. 353–370.
12. *Song, Y.* Thermodynamic and kinetic considerations for the reaction of semiquinone radicals to form superoxide and hydrogen peroxide / Y. Song, G. R. Buettner // Free Radic. Biol. Med. – 2010. – Vol. 49, N 6. – P. 919–962.
13. *Мартинovich, Г. Г.* Утилизация пероксида водорода эпителиальными клетками амниона человека / Г. Г. Мартинovich, С. Н. Черенкевич // Биомедицинская химия. – 2005. – Т. 51, № 6. – С. 626–633.
14. *Nicholls, D. G.* Fluorescence measurement of mitochondrial membrane potential changes in cultured cells / D. G. Nicholls // Mitochondrial Bioenergetics: Methods and Protocols / ed.: C. M. Palmeira, A. J. Moreno. – New York, 2012.
15. *Kroemer, G.* Mitochondrial control of cell death / G. Kroemer, J. C. Reed // Nat. Med. – 2000. – Vol. 6. – P. 513–519.

Поступило в редакцию 27.06.2016

## БИОЛОГИЯ

УДК 575.222.78+575.832:635.64(582.951.4)

М. Н. ШАПТУРЕНКО<sup>1</sup>, Л. А. ТАРУТИНА<sup>1</sup>, Л. А. МИШИН<sup>2</sup>, С. В. КУБРАК<sup>1</sup>,  
член-корреспондент А. В. КИЛЬЧЕВСКИЙ<sup>1</sup>, академик Л. В. ХОТЫЛЕВА<sup>1</sup>

**СВЯЗЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ДНК-ПОЛИМОРФИЗМА ТОМАТА  
(*SOLANUM LYCOPERSICUM* L.) С ГЕТЕРОТИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ ГИБРИДОВ F<sub>1</sub>**

<sup>1</sup>Институт генетики и цитологии НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
*m.shapturenko@igc.by; l.tarutina@igc.by; s.kubrak@igc.by; kilchev@presidium.bas-net.by; l.khotyleva@igc.by*

<sup>2</sup>Институт овощеводства НАН Беларуси, Самохваловичи, Беларусь  
*leo123@tut.by*

При изучении роли дифференциального ДНК-полиморфизма исходного материала в формирование гетерозиготного преимущества гибридов F<sub>1</sub> выполнен скрининг аллельного состава микросателлитных локусов томата. Проведен генетический анализ линий и гибридов, полученных по схеме топкросса. В результате показано, что общая и локус-специфическая гетерозиготность имеют важное значение при формировании гетеротического ответа в F<sub>1</sub> и оценка молекулярно-генетического полиморфизма может быть полезна для предсказания перспективных комбинаций.

*Ключевые слова:* томат (*Solanum lycopersicum* L.), ДНК-полиморфизм, гетерозис, комбинационная способность, SSR-маркеры.

M. N. SHAPTURENKO<sup>1</sup>, L. A. TARUTINA<sup>1</sup>, L. A. MISHIN<sup>2</sup>, S. V. KUBRAK<sup>1</sup>, A. V. KILCHEVSKY<sup>1</sup>, L. V. KHOTYLEVA<sup>1</sup>

**IMPACT OF DIFFERENTIAL DNA POLYMORPHISM OF TOMATO (*SOLANUM LYCOPERSICUM* L.)  
ON THE FORMATION OF THE SUPERIOR F<sub>1</sub> HYBRID PERFORMANCE**

<sup>1</sup>Institute of Genetics and Cytology of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
*m.shapturenko@igc.by; l.tarutina@igc.by; s.kubrak@igc.by; kilchev@presidium.bas-net.by; l.khotyleva@igc.by*

<sup>2</sup>Institute of vegetable growing of the National Academy of Sciences of Belarus, Samokhvalovichy, Belarus  
*leo123@tut.by*

To investigate the impact of differential DNA polymorphisms of initial breeding sources on the superior F<sub>1</sub> performance, we carried out the screening of their allelic composition and performed the genetic analysis of lines and its hybrids in the test cross design. As a result, it is shown that the overall and locus-specific heterozygosity is important for the formation of the F<sub>1</sub> heterotic response, and the evaluation of molecular polymorphisms could be useful for the prediction of promising cross-combinations.

*Keywords:* tomato (*Solanum lycopersicum* L.), DNA-polymorphism, heterosis, combining ability, SSR-markers.

**Введение.** Гетерозис, или гибридная мощьность, является одним из наиболее значимых феноменов генетики, эволюционной биологии и селекции. Терминологически, это превосходство гибрида F<sub>1</sub> над родителями в плодовитости, биомассе, адаптивной способности и др. К настоящему времени в производстве большинства хозяйственно ценных растений используются гибриды F<sub>1</sub>, что обеспечивает получение выровненной высокоурожайной и качественной продукции. Тем не менее, генетические механизмы, объясняющие гибридную мощьность, детально не выяснены.

Классические теории рассматривают гетерозиготность гибридов F<sub>1</sub> как основной фактор, обуславливающий гетерозис и в связи с этим предполагают существование линейной зависимости между генетическими дистанциями (GD) исходных родительских форм и гетеротическим ответом F<sub>1</sub> [1]. Теоретически, варианса потомства F<sub>1</sub> увеличится в скрещиваниях более дивергентных родителей, так как число гетерозиготных локусов максимизировано [2]. Исходя из этого предположения, были предприняты попытки разработки эффективных критериев для отбора

перспективных комбинаций скрещивания на основе использования различных типов ДНК-маркеров [3]. В результате таких исследований были предложены некоторые методические подходы для предсказания гетерозисного преимущества  $F_1$  и создания гетеротических групп [4; 5]. Однако полученные результаты оказались разноречивыми [6]. С одной стороны, на точность предсказания могла влиять генетическая структура экспериментального материала и тип маркерной системы [7; 8], с другой – важным фактором искажения оценки являются взаимодействия генотип–среда [9]. Y.-I. Cho и соавт. (2004) [10] показали, что прогностическая модель может быть улучшена за счет селективного комбинирования аллелей. Авторы предложили стратегию создания ключевых маркеров, основанную на отборе «положительных», «нейтральных» и «негативных» для гетерозисной селекции аллелей. Многообещающими также оказались выводы Crossa и соавт. (2010) [11], которые, основываясь на обширных исследованиях кукурузы и пшеницы в различных условиях среды и данных селективного набора ДНК-маркеров, показали, что модели, использующие информацию DAT (Diversity Array Technology) и SNP (single-nucleotide polymorphisms), имеют высокую прогностическую способность.

В настоящем исследовании проведено изучение генетической гетерогенности томата и дана оценка эффективности использования данных о дифференциальном полиморфизме ДНК исходных родительских форм для отбора перспективных комбинаций скрещивания.

**Материалы и методы исследования.** Проводили изучение 10 линий томата, полученных в результате отбора из образцов различного происхождения, отличающихся по морфологическим признакам, элементам продуктивности, скороспелости, устойчивости к заболеваниям. Гибридизацию выполняли вручную в фазе желто-зеленого бутона по схеме топкросса  $4 \times 6$ . Испытания  $F_1$  гибридов осуществляли в остекленных необогреваемых теплицах Института генетики и цитологии НАН Беларуси в весенне-летнем обороте 2011–2012 гг. в четырехкратной повторности в рендомизированных блоках с площадью питания  $60 \times 40$  см<sup>2</sup>. В период вегетации учитывали основные количественные признаки, которые характеризуют общую продуктивность: масса плодов с растения (МПП), количество плодов с растения (КПП), средняя масса плода (МсрП).

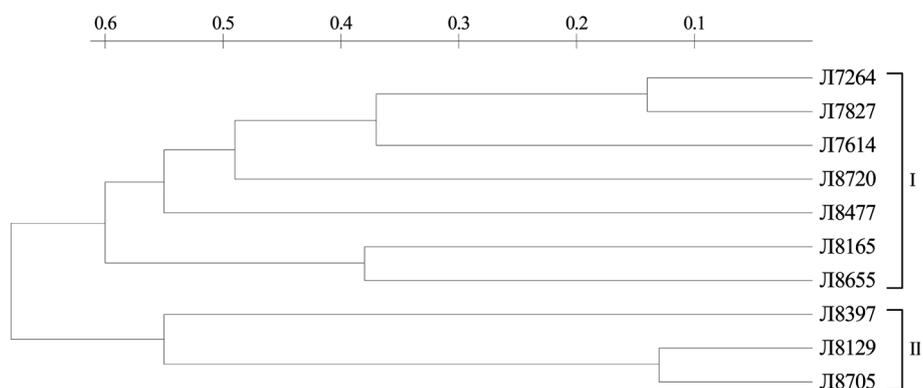
Анализ комбинационной способности родительских линий выполнен согласно Comstock и Robinson (1948) [12]. Относительный гипотетический гетерозис (ГГ) рассчитывали как превышение  $F_1$  над средней величиной обеих родительских линий, истинный (ИГ) – как превышение  $F_1$  над лучшим родителем. Если показатель гибрида  $F_1$  оказывался хуже худшего родителя, гетерозис считали как отклонение гибрида от худшего родителя. В этом случае величина истинного гетерозиса была отрицательной [13].

При проведении молекулярно-генетических исследований ДНК выделяли из листьев сеянцев в 3-кратной повторности. Для анализа аллельного состава микросателлитных (SSR – Simple Sequence Repeats) локусов использовали апробированные нами ранее информативные праймеры [14] в соответствии с предложенными протоколами. Разделение флуоресцентно-меченых SSR-фрагментов выполнено на автоматическом секвенаторе Applied Biosystems Genetic Analyzer 3500 (США) в трис-боратном буфере. Полученные данные анализировали с помощью пакета прикладных программ GeneMapper Software Version 4.1.

Анализ ДНК полиморфизма включал составление бинарных матриц, в которых отмечали присутствие (1) или отсутствие (0) фрагментов с одинаковой молекулярной массой. Генетические дистанции (GD) рассчитывали по Nei и Li (1979) [15]. Для оценки дифференциального полиморфизма (DP) проводили подсчет числа и соотношения полиморфных/мономорфных локусов в каждой парной комбинации скрещивания. Кластеризацию экспериментального материала осуществляли методом UPGMA с использованием программного пакета Treeconw (vers. 1.3b).

Оценка связи генетической дивергенции родительских форм с эффектом гетерозиса  $F_1$  и константой специфической комбинационной способности осуществлена на основе подсчета парных корреляций.

**Результаты и их обсуждение.** Анализ аллельного состава SSR-локусов томата. При исследовании аллельного состава SSR-локусов томата использовали 11 пар микросателлитных маркеров, локализованных на II, V, VI, X и XII хромосомах [14]. Уровень выявленного полиморфизма



Иерархическая кластеризация линий томата, выполненная на основе оценки аллельного состава SSR-локусов

составил 96,2 %. В целом у 10 экспериментальных линий рассмотрено 52 аллеля. Число аллелей на маркер варьировало от 3 до 9. В целом уровень индекса информативности достигал значений 0,28–0,85 в зависимости от маркера.

Величина генетических дистанций, рассчитанных на основе бинарных SSR-матриц при помощи Nei–Li коэффициента (GD), варьировала от 13,3 до 80,6. В результате иерархической дифференциации линии распределились в пределах двух кластеров (рисунок). Кластер I с величинами дистанций 14,2–72,4 образовали линии: L7264, L7827, L7614, L8720, L8477, L8165, L8655. Второй кластер с диапазоном GD 13,3–56,2 составили L8397, L8129 и L8705.

Генетический анализ линий и гибридов  $F_1$  томата. Дисперсионный анализ показал, что между гибридами существуют достоверные генотипические различия по всем проанализированным признакам, которые обусловлены комбинационной ценностью родительских линий.

Сравнение оценок дисперсий СКС и ОКС (объединенной по матерям и тестерам) указывает на преобладание аддитивного действия генов в наследовании признака «количество плодов с растения» ( $\sigma^2_{\text{гса}} \text{ объем} > \sigma^2_{\text{ска}}$ ) и эффективность отбора по нему. Для массы плодов с растения и средней массы плода отмечено преимущество неаддитивного действия генов ( $\sigma^2_{\text{гса}} \text{ объем} < \sigma^2_{\text{ска}}$ ) (табл. 1).

Т а б л и ц а 1. Оценки комбинационной способности и наследуемости основных компонентов продуктивности линий томата

Причина вариации	Степень свободы (df)	Средний квадрат (MS)		
		МПП	КПП	МсрП
Общая	95			
Повторности	3	0,77**	119,8*	51,7**
Гибриды	23	3,85**	537,1**	273,6**
ОКС <sub>♀</sub>	3	5,42**	1890,2**	245,7*
ОКС <sub>♂</sub>	5	11,07**	813,1**	924,3**
СКС	15	1,13**	174,5**	62,4**
Наследуемость $h^2$		0,63	0,65	0,61
$h^2_{\text{♀}}$		0,24	0,53	0,32
$h^2_{\text{♂}}$		0,76	0,67	0,79

П р и м е ч а н и я: \* –  $p < 0,05$ , \*\* –  $p < 0,01$ ; МПП – масса плодов с растения, КПП – количество плодов с растения, МсрП – средняя масса плода.

По всем анализируемым признакам вклад отцовских форм в дисперсию ОКС выше, чем материнских ( $\sigma^2_{\text{гса♀}} < \sigma^2_{\text{гса♂}}$ ), следовательно, большинство взаимодействующих аллелей, определяющих развитие признаков у гибридов, привносятся отцовскими формами.

При анализе наследуемости в узком смысле ( $h^2$ ) выявлено, что удельный вес вариации, обусловленной наследственными различиями, выше, чем вариации, вызванной влиянием условий среды, что подтверждает высокую эффективность отбора по признакам «масса» и «количество плодов с растения». По соотношению коэффициентов наследуемости материнских линий и те-

стеров также можно заключить, что вклад отцовских форм в аддитивную изменчивость выше, чем материнских ( $h^2_{\sigma} > h^2_{\rho}$ ).

При оценке эффектов ОКС ( $g_i$ ) и дисперсии СКС ( $\sigma^2_{si}$ ) выявлены значительные различия между линиями по всем компонентам урожайности. Высокие значения  $g_i$  по массе и количеству плодов имели Л8655 и Л8165, что определяет их высокую ценность при получении высокоурожайных гибридов  $F_1$ . По средней массе плода выделилась Л8477, которая при высокой ОКС имела сравнительно высокую дисперсию СКС ( $\sigma^2_{si} = 11,0$ ) и, следовательно, имеет хорошие перспективы при получении крупноплодных гибридов  $F_1$ . Линия Л7614 имеет относительно высокие значения  $\sigma^2_{si}$  по всем компонентам продуктивности. Это свидетельствует о том, что в отдельных гибридных комбинациях, полученных с участием Л7614, могут наблюдаться значимые отклонения от ожидаемой величины, полученной на основе оценки эффектов ОКС самой линии.

Анализ эффекта гетерозиса  $F_1$  томата по основным компонентам продуктивности выявил достоверные различия по степени проявления гетерозиса. Наиболее часто гетерозис проявлялся по массе и количеству плодов с растения. Так, гипотетический гетерозис по массе плодов с растения был отмечен у 11 гибридов из 24, причем 10 гибридов достоверно превосходили среднюю обоим родителей и только один показал отрицательный гетерозис (табл. 2). Аналогичные результаты получены по признаку «количество плодов с растения». Здесь гипотетический гетерозис выявлен в 9 гибридных комбинациях.

Т а б л и ц а 2. Генетические дистанции, эффект гетерозиса  $F_1$  и константы специфической комбинационной способности томата по некоторым компонентам продуктивности

Гибрид (♀ × ♂)	GD	Средняя (x)			Гипотетический гетерозис, %			Истинный гетерозис, %			Константа СКС ( $s_{ij}$ )		
		МсрП, г	МПР, кг	КПР, шт.	МсрПл	МПР	КПР	МсрПл	МПР	КПР	МсрПл	МПР	КПР
Л8477×Л7614	55,5	57,6	2,77	48	3,2	30,0*	17,1*	—	3,7	15,1	1,67	0,21	1,7
Л8477×Л7827	57,1	59,4	2,63	44,3	2,4	21,2	8,3	—	—	6,2	3,49	0,09	-1,9
Л8477×Л8165	58,6	72,1	4,4	56,3	-4,6	15,1	10,4*	—	—	—	-2,93	-0,52	-5,6
Л8477×Л8129	73,3	54,3	2,37	43,5	0,4	11,8	-2,2	—	—	—	-1,93	0,04	2,5
Л8477×Л7264	57,1	58,8	2,86	48,8	10,3	55,4**	31,9*	—	7,1	17	1,9	0,24	2,7
Л8477×Л8720	51,7	54,7	2,6	47,5	-4	26,8*	23,4*	—	—	13,9	-2,19	-0,05	0,5
Л8655×Л7827	50	47,9	3,04	63,3	-10,3	17,8	23,6*	—	—	1,6	-2,05	0,14	5,4
Л8655×Л8165	37,9	66	4,61	69,5	-7,2	17,6	13,4*	—	6,0	11,6	-2,99	-0,31	-4,1
Л8655×Л8129	60	56,3	2,89	51	13,7*	14,25	-6,9	—	—	—	6	0,2	-1,7
Л8655×Л7264	50	55,1	3,46	63	13,1*	53,8**	33,2*	—	—	1,1	4,16	0,48	5,2
Л8655×Л8720	51,7	52,8	3,3	62,5	0,8	34,1*	28,1*	—	—	0,3	1,9	0,29	3,8
Л8397×Л7614	79,3	53	2,38	45	9,1	64,1**	38,0*	—	49,7*	11,7	2,36	0,59	8,5
Л8397×Л7827	66,6	49,4	1,64	33,3	-2,6	10,1	2,5	—	—	—	-1,27	-0,15	-3,1
Л8397×Л8165	67,7	70,8	3,4	47,3	3,5	20,1	11	—	—	—	1,11	-0,4	-4,9
Л8397×Л8129	56,2	513	1,88	36,5	9,6	30,5	0,8	—	19,0	—	0,33	0,3	5,3
Л8397×Л7264	53,3	48,9	1,52	31	6,3	31*	8	—	16,0	—	-2,73	-0,35	-5,2
Л8397×Л8720	67,7	51,8	1,89	36,5	4,2	38*	20,9*	—	32,2*	3,4	0,2	0,0	-0,7
Л8705×Л7614	70,3	51,7	2,23	43	6,2	13,8	2,4	—	—	—	2,99	0,0	-1,7
Л8705×Л7827	64,2	48,5	2,15	44,3	-4,7	7,5	6	—	—	1,4	-0,16	-0,08	-0,3
Л8705×Л8165	79,3	72,5	5,48	75	5,8	64,1**	44,2*	—	26,0*	24,4*	4,82	1,24	14,6
Л8705×Л8129	13,3	44,6	1,47	33,3	-5,1	-24,6*	-26,8*	—	-7,0	-23,8*	-4,41	-0,54	-6,2
Л8705×Л7264	50	46,3	1,94	41,8	0,2	16,2	10,0*	—	—	—	-3,33	-0,37	-2,7
Л8705×Л8720	72,4	49,7	2,08	41,8	-0,4	10,6	5,8	—	—	—	0,09	-0,25	-3,7
Ошибка средней		2,0	0,17	2,9									

Примечания: «—» – промежуточное наследование; \* – значимо при  $p < 0,05$ ; \*\* – значимо при  $p < 0,01$ ; МсрП – средняя масса плода, МПР – масса плодов с растения, КПР – количество плодов с растения.

Значимое превосходство над лучшим родителем (истинный гетерозис) отмечено у трех гибридов по массе плодов с растения и только у одного по количеству плодов с растения. По средней массе плода гибриды, преимущественно, имели промежуточное наследование (табл. 2).

Анализ сопряженности генетической разнородности родительских линий томата с эффектом гетерозиса  $F_1$ . Основываясь на данных проведенного анализа, которые позволили установить иерархические связи между экспериментальными формами, оценить комбинационную ценность линий и эффект гетерозиса  $F_1$ , мы исследовали перспективы использования SSR-маркеров для предсказания генетического потенциала томата при его селекции на гетерозис.

Проведенные исследования показали, что уровень общей ДНК-дивергенции, оцененный на основе анализа аллельного состава SSR-локусов достоверно ассоциирован с истинным гетерозисом топкроссных гибридов  $F_1$  томата по признакам «масса» и «количество плодов с растения» (табл. 3). Позитивный вклад дивергенции отмечен в реализации гипотетического гетерозиса для признака «масса плодов с растения».

Т а б л и ц а 3. Сопряженность генетических дистанций с эффектом гетерозиса, константой СКС и абсолютным выражением некоторых компонентов продуктивности в выборке гетерозисных комбинаций томата

Показатель		SSR GD	
		Все гибриды	Гетерозисные гибриды
$x_i$	МсрПл	-0,02	0,04
	МПР	0,11	0,30
	КПР	0,02	0,27
ГГ	МсрПл	0,27	0,73*
	МПР	0,41*	0,95**
	КПР	0,38	0,89**
ИГ	МсрПл	–	–
	МПР	0,45*	0,84**
	КПР	0,48*	0,75*
$s_{ij}$	МсрПл	0,40*	0,86**
	МПР	0,39	0,82**
	КПР	0,35	0,79*

П р и м е ч а н и е. \*, \*\* – значимо при  $p < 0,05$ ;  $p < 0,01$  соответственно.

Следует отметить, что наибольшие значения истинного и гипотетического гетерозиса по продуктивности растения получены в  $F_1$  от комбинаций наиболее дивергентных родителей Л8397×Л7614 и Л8397×Л7614 (GD = 79,3). Самые низкие негативные значения гетерозиса отмечены в потомстве наименее дивергентных линий Л8705 и Л8129 (SSR GD = 13,3) (табл. 2). Несмотря на то что в нашем эксперименте крайние значения величины гетерозиса в  $F_1$  соответствуют комбинациям с максимальными и минимальными GD, основная группа представляет значительный разброс значений, вследствие чего выявленные корреляции характеризуются низким прогностическим потенциалом.

Поскольку при формировании гетерозиса отдельных признаков и гибридных комбинаций вклад СКС родительских линий был более важен, чем ОКС, нами была предпринята попытка найти связь между GD, оцененными с использованием молекулярных маркеров, и константами СКС. При подсчете корреляций позитивные ассоциации установлены для GD и  $s_{ij}$  по массе и числу плодов с растения (табл. 3). Вероятно, часть использованных маркеров может находиться в сцеплении с локусами с неаддитивным действием аллелей (доминирование, сверхдоминирование, эпистаз), которые при взаимодействии оказывают влияние на формирование гетеротического ответа в  $F_1$ .

Поскольку выявление потенциальных гетеротических маркеров возможно при анализе комбинаций, проявляющих истинный гетерозис по целевым признакам, мы отобрали 9 комбинаций, в которых гибриды проявляли положительный, либо отрицательный гетерозис по массе и количеству плодов с растения, а также достоверно превосходили среднюю обоим родителям по этим же признакам. Такой подход позволил исключить из анализа «негетеротические» сочетания аллелей.

При изучении связи GD с гетерозисом в данной выборке генотипов мы обнаружили, что оценка GD позитивно коррелирует с ИГ на уровне 0,75–0,84 и с ГГ на уровне 0,73–0,95, в зависимости от признака (табл. 3). При этом вклад SSR-GD в детерминацию гетерозиса основных компонентов урожая достигает 62–74 %.

Поскольку SSR GD были ассоциированы с гетерозисом, мы оценили вклад дифференциального полиморфизма (DP), выраженного количеством и соотношением общего числа полиморфных/мономорфных локусов, в реализацию гетеротического потенциала гибридов F<sub>1</sub> и выявили некоторые закономерности. Результаты показали, что для общей выборки генотипов существуют достоверные положительные связи между общим числом полиморфных локусов, истинным и гипотетическим гетерозисом ( $r$ ; 0,43–0,47), но их величина непредсказательна для отбора. В то же время дифференциальный полиморфизм в выборке гетерозисных комбинаций предопределяет ( $r^2$ , %) превосходство гибридов F<sub>1</sub> над лучшим и средней обоих родителей на 75 и 84 % соответственно (табл. 4). Число неполиморфных локусов связано с гетерозисом обратно пропорциональной зависимостью. Высокую прогностическую ценность, согласно нашим результатам, имеет коэффициент соотношения числа полиморфных локусов к общему числу неполиморфных локусов (табл. 4). Помимо этого, в нашем эксперименте наблюдался значимый вклад дифференциального полиморфизма родительских форм в константу СКС, позволяя обсуждать селекционную ценность отдельных комбинаций на основе этого показателя.

Т а б л и ц а 4. Корреляционный анализ связи дифференциального полиморфизма с гетерозисом, константой специфической комбинационной способности и абсолютным выражением некоторых признаков у топкроссных гибридов F<sub>1</sub> томата

Показатель		Средняя ( $\bar{x}$ )			Гипотетический гетерозис			Истинный гетерозис			Константа СКС ( $s_{ij}$ )		
		МсрПл	МПР	ЧПР	МсрПл	МПР	ЧПР	МсрПл	МПР	ЧПР	МсрПл	МПР	ЧПР
<i>24 гибридные комбинации с различной степенью проявления истинного и гипотетического гетерозиса</i>													
DP	SSR GD				0,35	0,48*	0,4*	–	0,46*	0,49*	0,39	0,45*	0,4*
	Число мономорфных локусов	0,07	–0,16	–0,16	–0,15	–0,38	–0,45*	–	–0,36	–0,48*	–0,38	–0,42*	–0,42*
	Число полиморфных локусов	0,06	0,15	0,10	0,32	0,47*	0,43*	–	0,44*	0,42*	0,47*	0,47*	0,44*
	K <sup>+</sup>	–0,07	0,19	0,14	0,22	0,43*	0,42*	–	0,55**	0,39	0,39	0,53**	0,53**
<i>Комбинации, проявляющие истинный гетерозис</i>													
DP	SSR GD	0,86**	0,82**	0,79*	0,73*	0,95**	0,89**	–	0,84**	0,75**			
	Число мономорфных локусов	0,02	–0,34	–0,31	–0,67*	–0,93**	–0,89**	–	–0,83**	–0,77**	–0,86**	–0,81**	–0,78*
	Число полиморфных локусов	0,12	0,24	0,21	0,74*	0,92**	0,83**	–	0,87**	0,68*	0,81**	0,78*	0,77*
	K <sup>+</sup>	–0,10	0,38	0,36	0,52	0,80**	0,79**	–	0,86**	0,58	0,80**	0,86**	0,85**

Примечание: K<sup>+</sup> – коэффициент соотношения полиморфных локусов к общему числу неполиморфных локусов; \*, \*\* – значимо при  $p < 0,05$ ;  $p < 0,01$  соответственно.

Полученные данные позволяют рассматривать отдельные сочетания SSR-локусов в данной группе генотипов как потенциальный прогностический критерий для отбора перспективных пар скрещивания.

**Заключение.** Результаты наших исследований подтверждают важность различных типов действия генов для экспрессии гетерозиса. Причем преимущественная роль тех или иных механизмов зависит от признака и генетического фона. Общая и локус-специфическая гетерозиготность имеют важное значение при формировании гетеротического ответа в F<sub>1</sub>. Поэтому оценка молекулярно-генетического полиморфизма может быть полезна в предсказании перспективных комбинаций. Однако для понимания генетических основ гетерозиса и его эффективного практического использования необходимо проводить детализацию оценки ДНК-полиморфизма на основе отбора «позитивных» маркеров, т. е. обеспечивающих выявление той части гетерогенности, которая связана с экспрессией гетерозиса в F<sub>1</sub>.

## Список использованной литературы

1. Falconer, D. S. Introduction to quantitative Genetics / D. S. Falconer, T. F. Mackay. – London: Longman Group Ltd., 1996. – 4th ed. – 255 p.
2. Relationship between coefficient of parentage and genetic similarity indices in the soybean / T. Cox [et al.] // Crop. Sci. – 1984. – Vol. 25. – P. 529–532.
3. Reif, J. C. Genetic basis of heterosis and prediction of hybrid performance / J. C. Reif, V. Hahn, Melchinger // Helia. – 2012. – Vol. 35. – P. 1–8.
4. Improved Heterosis Prediction by Combining Information on DNA- and Metabolic Markers / T. Gärtner [et al.] // PLoS ONE. – 2009. – Vol. 4(4). – e5220.
5. Prediction of hybrid performance in maize using molecular markers and joint analyses of hybrids and parental inbreds / T. A. Schrag [et al.] // Theor. Appl. Genet. – 2010. – Vol. 120(2). – P. 451–461.
6. Lee, E. A. Re-examining the relationship between degree of relatedness, genetic effects, and heterosis in maize / E. A. Lee, M. J. Ash, B. Good // Crop. Sci. – 2007. – Vol. 47(2). – P. 629–635.
7. Accuracies of genomic breeding values in American Angus beef cattle using K-means clustering for cross-validation / M. Saatchi [et al.] // Genetics Selection Evolution. – 2011. – Vol. 43. – P. 40.
8. Genomic and metabolic prediction of complex heterotic traits in hybrid maize / C. Riedelsheimer [et al.] // Nat. Genet. – 2012. – Vol. 44(2). – P. 217–220.
9. Genomic Prediction of Breeding Values when Modeling Genotype  $\times$  Environment Interaction using Pedigree and Dense Molecular Markers / J. Burgueño [et al.] // Crop. Sci. – 2012. – Vol. 52. – P. 707–719.
10. Key DNA markers for predicting heterosis in F1 hybrids of japonica rice / Y. I. Cho [et al.] // Breeding Sci. – 2004. – Vol. 54. – P. 389–397.
11. Prediction of Genetic Values of Quantitative Traits in Plant Breeding Using Pedigree and Molecular Markers / J. Crossa [et al.] // Genetics. – 2010. – Vol. 186(2). – P. 713–724.
12. Comstock, R. E. The components of genetic variance in population of biparental progenies and their use in estimating the average degree of dominance / R. E. Comstock, H. F. Robinson // Biometrics. – 1948. – Vol. 4(3). – P. 254–266.
13. Mather, K. Biometrical Genetics / K. Mather, J. L. Jinks. – London: Chapman and Hall, 1982. – 3rd ed.
14. The possibilities of the prediction of the genetic potential of the tomato (*Solanum lycopersicum* L.) F1 based on the assessment of a simple sequence research polymorphism / M. Shapturenko [et al.] // Russian J. of Genetics: Applied Research. – 2015. – Vol. 5(5). – P. 486–493.
15. Nei, M. Mathematical model for studying genetic variation in terms of restriction endonucleases / M. Nei, M. H. Li // Proc. Natl. Acad. Sci. – 1979. – Vol. 76. – P. 5269–5273.

Поступило в редакцию 25.05.2016

**НАУКИ О ЗЕМЛЕ**

УДК 550.42+551.1 (476)

*Академик А. В. МАТВЕЕВ***РАЙОНИРОВАНИЕ ТЕРРИТОРИИ БЕЛАРУСИ  
ПО СТЕПЕНИ РАДОНОВОЙ ОПАСНОСТИ ГРУНТОВ***Институт природопользования НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
matveyev@ecology.basnet.by*

На основании определений объемной активности радона в четвертичных отложениях, породах платформенного чехла и фундамента построена схема районирования, на которой выделено пять типов территорий: потенциально радоноопасные, потенциально радоноопасные на отдельных площадях, потенциально радоноопасные на локальных участках, относительно радонобезопасные и радонобезопасные.

*Ключевые слова:* радон, радоновая опасность, четвертичные отложения, породы чехла и фундамента, разломы, районирование.

*A. V. MATVEYEV***DIVISION OF THE TERRITORY OF BELARUS INTO THE REGIONS  
WITH DIFFERENT RADON CONTAMINATION HAZARD LEVELS OF SOILS***Institute for Nature Management the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
matveyev@ecology.basnet.by*

The volumetric activity of the region determined in Quaternary deposits, platform cover and basement rocks was used to compile a diagram representing five types of territories as follows: potentially hazardous in radon contamination, including separate areas potentially hazardous in radon contamination, including local sites potentially hazardous in radon contamination, relatively nonhazardous in radon and nonhazardous in radon.

*Keywords:* radon, radon contamination hazard, Quaternary deposits, platform cover rocks, basement rocks, faults, division into regions.

**Введение.** Общеизвестно, что облучение от радона и многочисленных дочерних продуктов его распада составляет не менее половины дозы, получаемой среднестатистическим жителем Земли от всех источников ионизирующего облучения, и является одной из основных причин развития онкологических заболеваний рака легкого, в меньшей степени желудка, кожи и других органов [1; 2]. Это свидетельствует об актуальности для любого региона выявления радоновых аномалий и оценки их влияния на экологическую обстановку, различные сферы хозяйственной деятельности. Поэтому радонометрические исследования активно проводятся во многих странах мира (Бельгия, Великобритания, Германия, Италия, Россия, США, Чехия, Швеция и др.). Определенное внимание уделяется этой проблеме и в Беларуси [2–4]. В нашем регионе исследуются особенности распределения объемной активности радона (ОАР) в почвах, подземных водах, в воздухе жилых помещений. Однако до сих пор не проведено районирование территории страны по степени радоновой опасности покровных отложений (грунтов), содержание газа в которых в значительной степени влияет на его поступление в жилые и иные сооружения. Именно этой проблеме посвящено представляемое сообщение.

**Материалы и методы исследования.** Основной материал для исследований был собран в процессе выполнения работ по заданию 1.6.7 «Разработать и внедрить схему районирования территории Беларуси по распределению радоновых аномалий в почвенном воздухе, методические рекомендации по использованию радонометрических данных для решения геологических и геоэкологических задач» (2013–2015 гг.) ГНТП «Природные ресурсы и окружающая среда» и проекту Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований Х15УК/А-009 «Системный анализ природных и природно-антропогенных опасностей и рисков на территории Украины и Беларуси» (2015–2017 гг.), анализировались также материалы, опубликованные в [3; 6–8].

Определение концентраций радона осуществлялось с использованием гамма-спектрального комплекса, состоящего из анализатора импульсов Canberra-Packard Series 10<sup>+</sup> и сцинтилляционного детектора гамма-излучения Silena, радиометра PPA-01M-03 и комплекса Альфарад-плюс. Измерения проводились как в полевых условиях, так и по отобраным образцам в лаборатории. Методика измерений описана в [6; 8]. Всего выполнено 462 анализа ОАР в покровных отложениях. Обобщенная характеристика полученных результатов приведена в табл. 1. Кроме этих определений для характеристики концентраций радона в покровных отложениях использовались данные по распределению газа в зонах активных разрывных нарушений, приведенные в [9] и свидетельствующие, что независимо от типа отложений в активных геодинамических зонах ОАР приповерхностных грунтов превышает в 2–3 раза значения на прилегающих территориях.

Т а б л и ц а 1. **Объемная активность радона в поровом воздухе покровных отложений**

Отложения	Кол-во образцов	Объемная активность радона (Бк/м <sup>3</sup> )	
		средняя	пределы колебаний
Моренные супеси и суглинки	75	25300	14200–48900
Пески, песчано-гравийный материал краевых ледниковых образований	55	14200	3600–38000
Флювиогляциальные пески	118	14400	6600–27800
Аллювиальные пески	30	10400	3800–16900
Аллювиальные пески с прослоями глины	5	20000	18500–23600
Лессовидные супеси и суглинки	77	28000	12700–51300
Озерно-аллювиальные пески	55	18400	8700–35300
Озерно-ледниковые суглинки и глины	25	42500	28400–54600
Торф	22	17600	3100–58000

Все результаты измерений концентраций радона наносились на геологическую карту четвертичных отложений [10] и затем с учетом контуров распределения генетических типов отложений строилась схема распределения ОАР в покровных грунтах.

Для районирования территории Беларуси по степени радоновой опасности, помимо этой схемы, с целью увеличения достоверности проводимых оценок учитывалось возможное дополнительное влияние на геоэкологическую обстановку пород чехла и фундамента. Такой подход обусловлен тем, что на отдельных площадях коренные породы образуют выходы на земную поверхность либо же залегают на относительно небольших глубинах (до 20–30 м). Поэтому их влияние на ОАР в зданиях и поровом воздухе грунтов может заметно возрастать. Результаты определения концентраций радона в коренных породах приведены в табл. 2.

Обобщение всех материалов аналитических исследований с учетом площадей распространения и глубин залегания коренных пород, распространения активных разломов по [8] позволило построить схему районирования территории Беларуси по степени радоновой опасности. Оценка радоновой опасности проводилась в соответствии с подходами Инспекции Госатомнадзора Российской Федерации [11]. К радонобезопасным отнесены грунты с ОАР в поровом воздухе менее 10000 Бк/м<sup>3</sup>, относительно радоноопасным – 10000–50000 Бк/м<sup>3</sup>, радоноопасным – более 50000 Бк/м<sup>3</sup>.

**Результаты и их обсуждение.** На основании комплексного подхода к районированию выделено пять типов территорий: потенциально радоноопасные, потенциально радоноопасные на от-

Т а б л и ц а 2. Объемная активность радона (Бк/м<sup>3</sup>) в основных типах пород платформенного чехла и фундамента

Порода	Кол-во образцов	Объемная активность радона	
		средняя	пределы колебаний
Пески кварцево-палеовошпатовые	4	13800	12000–17800
Пески кварцево-глауконитовые	6	29400	18400–47100
Глины	14	37300	27800–50600
Алеврит	2	16900	15600–18100
Бурый уголь	2	19300	17500–21000
Мел	3	19300	18400–20200
Мергель	3	33700	32700–34700
Известняк	5	33300	18500–50100
Доломит	6	17600	5000–32300
Песчаник	4	34400	24000–51000
Алевролит	2	36700	35900–37600
Гранит	4	82600	73800–90700
Гранодиорит	1	48700	
Диорит	2		65200–68200
Трахиродацит	3	105600	83000–135100
Габбро	8	24300	6000–41400
Габбро измененный	2	83400–128400	
Долерит	1	8400	
Гнейсы	6	40200	27000–57500
Пироксенит	3	27100	7200–53100
Сиенит	6	54500	24000–70500
Базальт	3	26600	5700–66900
Амфиболит	3	47400	24900–81800
Чарнокит	3	28900	22400–34300
Мигматит	1	25800	
Кварцит	2		8600–66400

дельных площадях, потенциально радоноопасные на локальных участках, относительно радоно-безопасные и радонобезопасные (рисунки).

*Потенциально радоноопасные территории* характеризуются преобладанием среди покровных отложений озерно-ледниковых глин и суглинков, лессовидных и моренных суглинков и глин, в поровом воздухе которых ОАР может достигать 50000 Бк/м<sup>3</sup> и более. Кроме того, на этих площадях из неглубоко залегающих коренных осадочных пород распространены девонские глины, юрские и палеогеновые глины, мергели и кварцево-глауконитовые пески (песчаники), ОАР в которых превышает 40000 Бк/м<sup>3</sup>. Среди пород фундамента преобладают гранитоиды, общая ОАР в которых более 70000 Бк/м<sup>3</sup>.

*Потенциально радоноопасные территории на отдельных площадях* характеризуются распространением озерно-ледниковых глин и суглинков в тех случаях, когда в контурах этих отложений в платформенном чехле и фундаменте отсутствуют породы с ОАР выше 40000 Бк/м<sup>3</sup> в чехле и более 70000 Бк/м<sup>3</sup> в фундаменте. К этому типу территорий отнесены также площади распространения лессовидных и моренных суглинков и глин, ОАР в почвенном воздухе которых в основном варьирует в интервале 20000–40000 Бк/м<sup>3</sup>, а среди коренных пород, подстилающих четвертичную толщу, преобладают ордовикские, палеогеновые и неогеновые глины, алевриты, пески и известняки. ОАР в перечисленных коренных породах преимущественно изменяется от 30000 до 40000 Бк/м<sup>3</sup>. Среди относительно неглубоко залегающих пород фундамента преобладают диориты, гнейсы, андезиты, кварциты, гранулиты, ОАР в которых варьирует в диапазоне 50000–70000 Бк/м<sup>3</sup>. В этот тип территорий также включены площади распространения флювиогляциальных, озерно-аллювиальных, аллювиальных, краевых ледниковых песков, моренных супесей, торфа, ОАР в почвенном воздухе которых в основном составляет 20000–30000 Бк/м<sup>3</sup>, в кровле коренных пород представлены девонские, юрские и палеогеновые

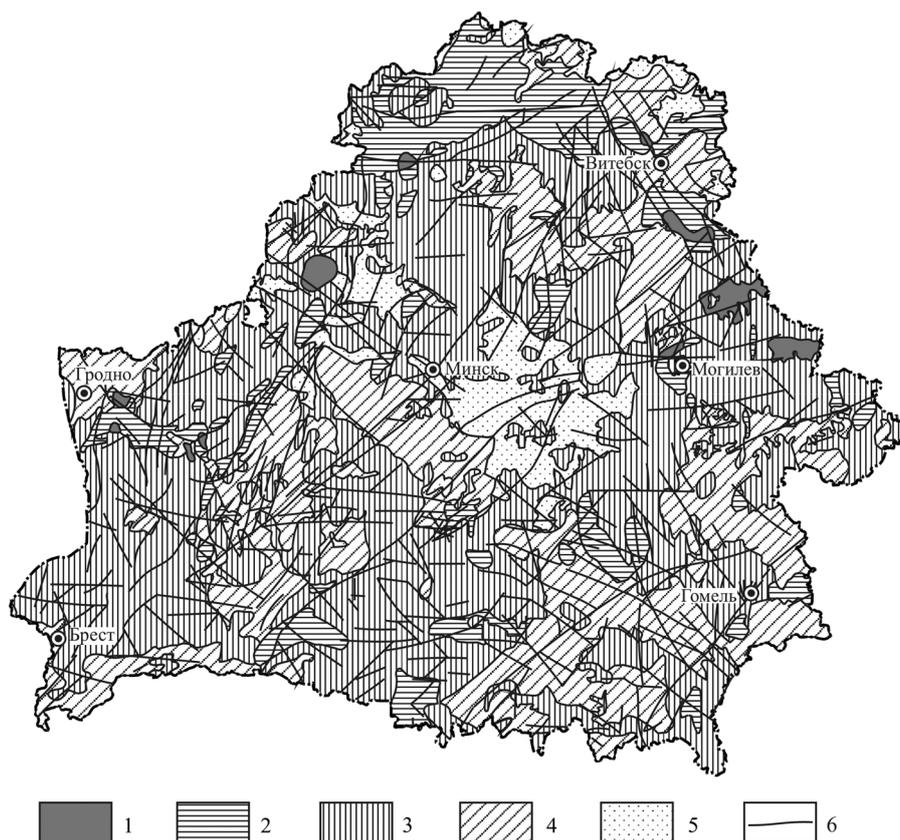


Схема районирования территории Беларуси по степени радоновой опасности грунтов: территории потенциально радоноопасные (1), потенциально радоноопасные на отдельных площадях (2), потенциально радоноопасные на локальных участках (3), относительно радонобезопасные (4), радонобезопасные (5); потенциально радоноопасные участки в зонах активных в четвертичное время разрывных нарушений (6)

глины, мергели и пески, а среди пород фундамента преобладают неглубоко залегающие гранитоиды.

*Потенциально радоноопасные территории на локальных участках* характеризуются распространением среди покровных отложений преимущественно песков разного генезиса с ОАР в поровом воздухе в основном в интервале 9000–20000 Бк/м<sup>3</sup>. Из пород чехла, подстилающих четвертичную толщу, на этих территориях преобладают ордовикские, палеогеновые и неогеновые глины, пески, алевролиты и известняки (ОАР 30000–40000 Бк/м<sup>3</sup>), а среди пород фундамента – диориты, гнейсы, андезиты, кварциты, гранулиты (ОАР 50000–70000 Бк/м<sup>3</sup>). К этой градации земель отнесены также участки распространения флювиогляциальных, озерно-аллювиальных, краевых ледниковых песков, реже супесей, моренных супесей и торфа, в контурах которых в верхней части коренных пород преобладают вендские, девонские, меловые и палеогеновые пески, алевролиты, алевролиты, доломиты с общей ОАР 15000–24000 Бк/м<sup>3</sup>. В породах фундамента чаще представлены относительно неглубоко залегающие диориты, гнейсы, андезиты, кварциты, гранулиты. В потенциально опасные территории на локальных участках также входят площади распространения моренных и лессовидных суглинков и глин при условии, что из коренных пород на этих площадях преобладают вендские, девонские, меловые и палеогеновые пески, алевролиты, алевролиты, доломиты, а из пород фундамента – залегающие относительно неглубоко диориты, гнейсы, андезиты, кварциты, гранулиты.

*Относительно радонобезопасные территории* характеризуются распространением среди покровных отложений флювиогляциальных, краевых ледниковых, озерно-аллювиальных, аллювиальных песков, реже тонких супесей и торфа (объемная активность радона в поровом воздухе составляет в основном 9000–20000 Бк/м<sup>3</sup>), среди коренных пород преобладают вендские, девонские, меловые и палеогеновые пески, алевролиты, алевролиты и доломиты (ОАР 15000–24000 Бк/м<sup>3</sup>),

из пород глубоко залегающего фундамента основными являются диориты, гнейсы, андезиты, кварциты, гранулиты (ОАР 50000–70000 Бк/м<sup>3</sup>).

К *радонобезопасным территориям* отнесены площади распространения флювиогляциальных, краевых ледниковых, озерно-аллювиальных песков и торфа, ОАР в поровом воздухе которых составляет преимущественно 9000–15000 Бк/м<sup>3</sup>. Среди подстилающих четвертичную толщу коренных пород преобладают вендские, ордовикские, силурийские, девонские и меловые пески, известняки, доломиты с общей объемной активностью радона в основном менее 15000 Бк/м<sup>3</sup> (в поровом воздухе менее 10000 Бк/м<sup>3</sup>). В породах глубокозалегающего фундамента (кварциты, гнейсы, амфиболиты, гранулиты, чарнокиты) концентрация радона, как правило, не превышает 40000 Бк/м<sup>3</sup>.

На схему районирования также вынесены зоны *потенциально радоноопасных линейных нарушений*, в пределах которых заметно повышена ОАР в почвенном воздухе независимо от состава почвообразующих пород. Концентрации радона в этих зонах нередко превышают 40000 Бк/м<sup>3</sup>, достигая иногда 60000–70000 Бк/м<sup>3</sup>.

Во всех перечисленных выше таксонах разной степени радоноопасности термин «потенциально» использован по двум причинам. Во-первых, это связано с масштабом проведенных исследований, а во-вторых, с возможным значительным техногенным воздействием на покровные отложения, при котором будет возрастать влияние на здания и сооружения более радононасыщенных коренных пород.

Построенная по описанному выше подходу схема районирования территории Беларуси свидетельствует, что линейные радоноопасные зоны распространены практически повсеместно. Их некоторая разреженность в северной (северо-западной) части страны скорее всего связана с неравномерной геолого-геофизической изученностью.

В противоположность этому некоторые более изометричные площади с разной степенью радоноопасности отложений встречаются относительно неравномерно. Так, потенциально радоноопасные покровные отложения приурочены только к северо-западной и северо-восточной частям Беларуси. Суммарно на них приходится около 2 % площади региона. Другие типы радоновой опасности грунтов распространены значительно шире: потенциально радоноопасный на локальных площадях занимает 15 %, потенциально радоноопасный на локальных участках – 40 %, относительно радонобезопасный – 35 %, радонобезопасный – 8 % поверхности страны.

### Список использованной литературы

1. Публикация 50 МКРЗ. Риск заболеть раком легких от воздействия дочерних продуктов распада радона в помещениях. – М., 1992. – 105 с.
2. Диденко, П. Н. Экологические аспекты воздействия радона на население / П. Н. Диденко / Техногенно-экологична безпека та цивільний захист. – 2013. – № 6. – С. 72–81.
3. Автушко, М. И. Концентрация радона в приповерхностных грунтах на территории Солигорского геодинамического полигона (Беларусь) / М. И. Автушко, А. В. Матвеев // Літасфера. – 2010. – № 2 (33). – С. 98–105.
4. Исследования по проблемам радона в Беларуси и других странах Европы / О. И. Ярошевич [и др.] // Вестн. БРФФИ. – 2013. – № 4 (66). – С. 101–117.
5. Липницкий, Л. В. Оценка медицинских последствий при облучении дочерними продуктами распада радона населения Могилевской области / Л. В. Липницкий, Е. В. Костицкая // Агроэкология. – 2004. – Вып. 1. – С. 100–105.
6. Автушко, М. И. Проявление линейных нарушений в концентрациях радона в покровных отложениях на территории Воложинского грабена / М. И. Автушко, А. В. Матвеев, Л. А. Нечипоренко // Докл. Академии наук Беларуси. – 1996. – Т. 40, № 6. – С. 92–94.
7. Радон в природных и техногенных комплексах Беларуси / А. В. Матвеев [и др.] // Літасфера. – 1996. – № 5. – С. 151–161.
8. Концентрации радона в почвенном воздухе на смежных площадях Белорусской антеклизы и Припятского прогиба / А. В. Матвеев [и др.] // Природопользование. – 2012. – Вып. 21. – С. 68–74.
9. Влияние зон разрывных нарушений на концентрацию радона в почвенном воздухе на территории Беларуси / А. В. Матвеев [и др.] // Геохимия и рудообразование. Поисковая геохимия. Геохимия окружающей среды. – Киев, 2014. – Вып. 34. – С. 69–76.
10. Чацвярцічны адклады. М 1 : 1250000 // Нацыянальны атлас Беларусі. – Мінск, 2002. – С. 42–43.
11. Реализация федеральной программы «Радон» в 1997 г. Анализ достоверности проведенных измерений. Оценка радоноопасности территории / Н. А. Манаков [и др.] // АНРИ. – 1998. – № 4. – С. 8–18.

Поступило в редакцию 11.04.2016

УДК 551.464.6.02;551.733 (476)

Академик А. А. МАХНАЧ<sup>1</sup>, С. А. КРУЧЕК<sup>1</sup>, Б. Г. ПОКРОВСКИЙ<sup>2</sup>

## ГИПС В СИЛУРИЙСКИХ ОТЛОЖЕНИЯХ БЕЛАРУСИ: ИЗОТОПНЫЙ СОСТАВ СЕРЫ И ПРОИСХОЖДЕНИЕ

<sup>1</sup>Научно-производственный центр по геологии, Минск, Беларусь  
amahnach@geology.org.by; kruchek@geology.org.by

<sup>2</sup>Геологический институт РАН, Москва, Россия  
pokrov@ginras.ru

В силурийских отложениях Беларуси впервые выявлен гипс. Он слагает гнезда-желваки и выполняет трещины и фенестры в глинисто-карбонатных породах разреза скважины Давтюны 3к (Гродненская область, Островецкий район). С использованием данных об изотопном составе серы показано, что образование гипса протекало на стадии диагенеза в среде силурийской морской воды, сконцентрированной при внутригрунтового испарении. Процесс инициировался многократным наложением надприливных обстановок на глинисто-карбонатные отложения, сформированные в мелководных подприливных и межприливных условиях.

*Ключевые слова:* Беларусь, силурийские отложения, гипс, изотопы серы, надприливная обстановка, внутригрунтового испарение.

A. A. MAKHNACH<sup>1</sup>, S. A. KRUCHEK<sup>1</sup>, B. G. POKROVSKY<sup>2</sup>

## GYPSUM IN THE SILURIAN DEPOSITS OF BELARUS: SULPHUR ISOTOPIC COMPOSITION AND ORIGIN

<sup>1</sup>Research and Production Centre for Geology, Minsk, Belarus  
amahnach@geology.org.by; kruchek@geology.org.by

<sup>2</sup>Geological Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
pokrov@ginras.ru

Gypsum was found in the Silurian deposits of Belarus for the first time. It composes nodules and fills cracks and fenestras in clayey-carbonate rocks revealed by the Davtiuny 3k borehole (Grodno area, Ostrovets region). With the use of the sulphur isotope data, it is shown that gypsum was formed at the diagenetic stage in the Silurian seawater concentrated under interground evaporation. The process was the result of a repeated **superimposition of supratidal environment onto clayey-carbonate deposits** formed in shallow subtidal and intratidal conditions.

*Keywords:* Belarus, the Silurian deposits, gypsum, sulphur isotopes, supratidal environment, interground evaporation.

**Введение.** Силурийские отложения Беларуси залегают на ее крайнем северо-западе и крайнем юго-западе (рис. 1) и занимают самую незначительную площадь территории страны по сравнению с образованиями всех остальных геологических систем фанерозоя [1]. Из-за невысокой перспективности этих отложений на полезные ископаемые они долгое время оставались недостаточно изученными. Недавно в связи с проведением крупномасштабной геологической съемки и инженерно-геологических изысканий в пределах северо-западного сегмента распространения отложений (на склоне Белорусской антеклизы в зоне ее сочленения с Балтийской синеклизой) был пробурен ряд скважин, давших новый каменный материал. В глинисто-карбонатных и карбонатно-глинистых силурийских отложениях, вскрытых скважиной Давтюны 3к в Островецком районе Гродненской области (рис. 1), были впервые обнаружены многочисленные проявления гипса. В настоящее время наиболее древним эвапоритовым бассейном на территории страны считается среднедевонский (эйфельский), в котором образовались пластовые гипсы, широко распространенные на территории Северной и Средней Беларуси, а также пласты анги-



Рис. 1. Площадь распространения силурийских отложений на территории Беларуси (заштрихована) [1] и местоположение изучавшегося разреза

в лаборатории изотопной геохимии и геохронологии Геологического института РАН (Москва). Значения изотопного отношения  $^{34}\text{S}/^{32}\text{S}$  ( $\delta^{34}\text{S}$ ) приведены к стандарту CDT. Точность (воспроизводимость) определений  $\delta^{34}\text{S}$  находится в пределах  $\pm 0,2\%$ . Для точной диагностики глинисто-карбонатных и карбонатно-глинистых пород, вмещающих гипс, в Научно-производственном центре по геологии (Минск) производились изучение петрографических шлифов (А. А. Махнач, Г. Д. Стрельцова) и анализ карбонатности по методу В. Н. Щербины с дериватографическим контролем (И. Н. Тетерева).

**Результаты и их обсуждение.** Силурийские отложения в скважине Давтюны 3к вскрыты на глубине 98,3 м под образованиями освейского горизонта эйфельского яруса среднего девона, представленными чередованием доломитов, мергелей, глин и алевролитов. Бурение скважины остановлено на глубине 226,6 м; из силурийской толщи она не вышла. Основная часть разреза представлена отложениями нижнего силура. В ней выделены породы теличского яруса (швянчёнская свита) лландоверийского отдела, шейнвудского (ячёнская свита) и гомерского (островецкая свита) ярусов венлокского отдела. Венчается разрез образованиями горстийского яруса (вилейская свита) лудловского отдела верхнего силура.

Силурийские породы, за исключением самой нижней части пройденного разреза, где залегают чистые известняки, сложены карбонатным и глинистым материалом в разнообразных соотношениях. Чаще всего встречаются мергели известковисто-доломитовые и доломитисто-известковые, доломиты глинистые и известковистые глинистые. Карбонатность пород, начиная с кровли и до верхней части толщи теличского яруса, преимущественно доломитовая, затем вниз постепенно начинает меняться на известковую. Цвет пород серый, реже – светло-серый, иногда с бежевым или зеленоватым оттенком. Текстура обычно массивная, редко – брекчиевидная и тонкослоистая, структура – преимущественно пелитоморфно-микрозернистая и микро-мелкозернистая.

Помимо миоспор, акритарх, остатков ихтиофауны и конодонтов, по которым произведено стратиграфическое расчленение разреза, в породах присутствуют остатки иглокожих, брахиопод, остракод, мшанок, червей, другой бентосной фауны и водорослей. По всему изученному разрезу встречается гипс. Выделяются три морфологических вида его проявлений: гнезда-желваки (1), выполнение трещин (2), выполнение фенестральных полостей (3) (рис. 2).

Чаще всего встречаются гнезда-желваки. Этим термином мы объединили округлые, иногда шаровидные плотноупакованные во вмещающих породах скульптуры (явные желваки) и скульптуры, тоже плотноупакованные, но не имеющие отчетливо округлых очертаний или определить истинную форму которых в керне не представлялось возможным. Размер гнезд-желваков обычно от нескольких миллиметров до 2,5 см, а самое крупное из отмеченных проявлений этого

дрита и местами каменной соли – в Припятском прогибе. Представляло интерес выяснить, чем обусловлена природа гипсовых проявлений в силурийских отложениях – сгущением силурийской морской воды или инфильтрацией рассолов эйфельского бассейна галогенеза.

**Материалы и методы исследования.** Изучался разрез скважины Давтюны 3к. Стратиграфическое расчленение отложений выполнено по миоспорам, акритархам, конодонтам и ихтиофауне [2]. Вовлеченный в работу каменный материал охватывал чуть более 105 м разреза и включал 37 образцов глинисто-карбонатных и карбонатно-глинистых пород, содержащих проявления гипса.

Изотопный анализ серы в гипсе выполнен Б. Г. Покровским с помощью масс-спектрометра Delta V Advanced и установки Gas-Bench-I

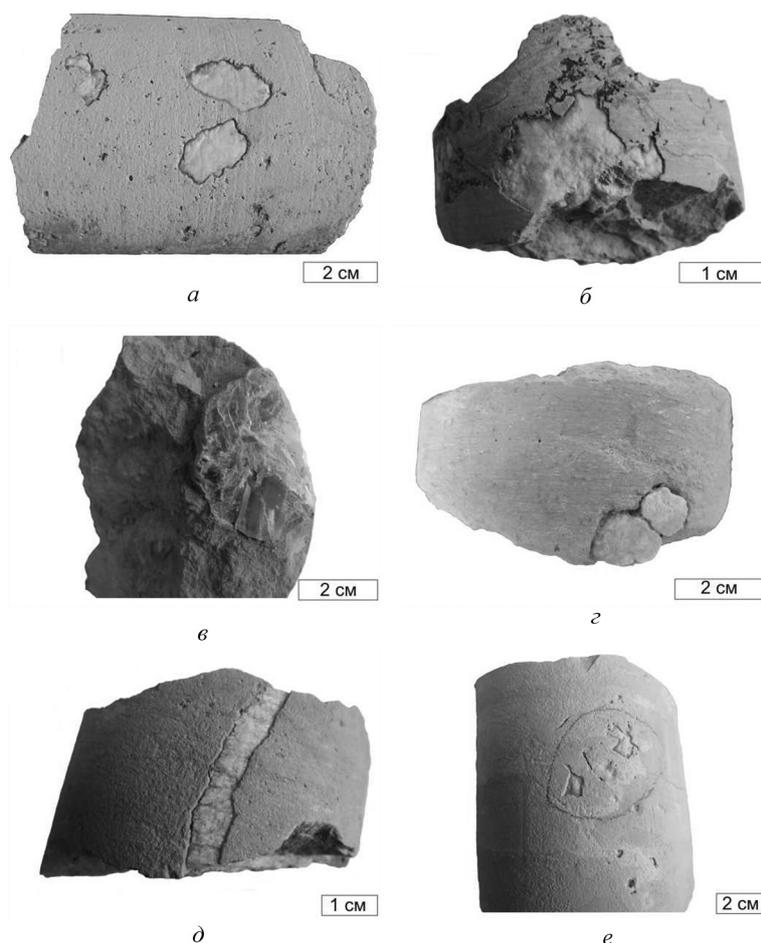


Рис. 2. Гипс, слагающий гнезда-желваки (а–z), выполняющий трещину (d) и фенестры (e) в силурийских отложениях, вскрытых скважиной Давтюны 3к: а – гл. 163,4 м, шейнвудский ярус; б – гл. 159,0 м, гомерский ярус; в – гл. 184,5 м, шейнвудский ярус; z – гл. 215,3 м, теличский ярус; d – гл. 174,0 м, шейнвудский ярус; e – гл. 140,0 м, гомерский ярус

типа имеет величину  $3 \times 4$  см. Цвет гипсовых гнезд-желваков светло-оранжевый, оранжевый, розовый, белый, серый. Гипс сахаровидный и пластинчатый. В последнем случае, особенно когда пластины крупные, гипс бесцветный или желтоватый.

Трещины с гипсом вертикальные. Их ширина от 2 до 6 мм. Гипс в них пластинчатый и крупнопластинчатый, иногда волокнистый, бесцветный. Ориентировка гипсовых кристаллов обычно горизонтально параллельна, реже перпендикулярна стенкам трещин, иногда – под углом  $30^\circ$  к горизонту.

Реже всего гипс выполняет фенестральные полости (поры усыхания или очень ранние разрывы в быстро литифицирующемся осадке) [3; 4]. Фенестры приурочены к верхней части нашего разреза и имеют угловатую, то вытянутую, то изометричную форму; их размер от нескольких миллиметров до 1,5 см. Гипс в них бесцветный и прозрачный, монокристаллический. В одном случае фенестры с оранжевым гипсом имеют псевдокубическую с вогнутыми гранями форму, подобную той, что характерна для полостей, возникающих в результате растворения кристаллов галита в полулитифицированном осадке.

Завершая краткую литологическую характеристику разреза, заострим внимание на трех примечательных чертах локализации гипса в породах, существенных для реконструкции условий его формирования. Во-первых, несмотря на частую встречаемость гипсовых проявлений в разрезе, не обнаружено ни пластов гипса, ни, хотя бы, его прослоек, проходящих через весь керн. Во-вторых, в разрезе, а иногда даже в одном образце керна соседствуют плотноупакованные желваки гипса, образование которых возможно в нелиффицированном субстрате, и гипс в вертикальных четко очерченных трещинах, которые могли появиться лишь в хрупкой консо-

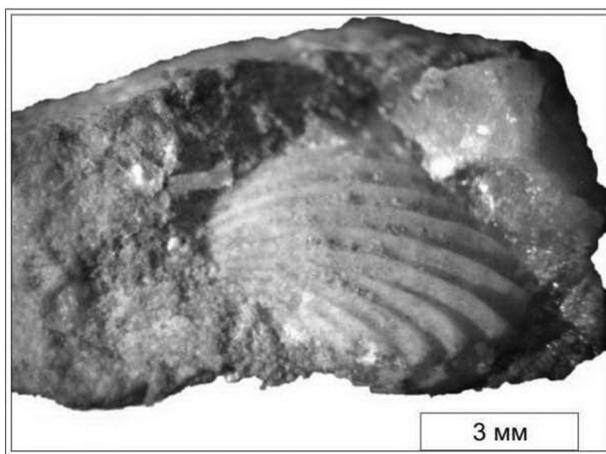


Рис. 3. Ассоциация раковины брахиоподы *Hemitoechia* sp. и гипса (светлое) в глинистом доломите из шейнвудской толщи, пройденной скважиной Давтюны 3к (гл. 178,6 м)

лидированной породе. В-третьих, интересна ассоциация выделений гипса с остатками бентосной фауны, в т. ч. явно стеногалинной (рис. 3), не выдерживающей соленость растворов, при которой возможно гипсообразование.

Изотопный состав серы в гипсе гнезд-желваков, трещинных выполнений и фенестр существенно изменчив по разрезу (таблица). Значения  $\delta^{34}\text{S}$  в нижней половине разреза (21,3–22,1 ‰) ниже, чем в верхней (22,3–26,7 ‰). Трудно сказать, с чем связана эта особенность распределения  $\delta^{34}\text{S}$ . Возможно, она несет хемотратиграфическую нагрузку, а может быть, обусловлена изменениями в интенсивности сульфат-редукции, которая, как известно [5 и др.], сопровождается облегчени-

ем формирующейся сульфидной серы и утяжелением остаточной сульфатной.

Более определенно можно трактовать порядок значений  $\delta^{34}\text{S}$ . Тридцать лет назад был изучен изотопный состав серы гипса в отложениях нижнего девона, ордовика, кембрия и верхнего протерозоя на территории Северной и Средней Беларуси [6]. Эти гипсовые проявления (гнезда, желваки, выполнения трещин в карбонатных породах, цементы в песчаниках, алевролитах, гравелитах) по особенностям локализации и морфологии похожи на те, что впервые и совсем недавно обнаружены в силурийских отложениях скв. Давтюны 3к и являются объектом настоящего исследования. Происхождение гипса в нижнедевонских, ордовикских, кембрийских и верхнепротерозойских отложениях было объяснено влиянием нисходящих рассолов среднедевонского (эйфельского) бассейна галогенеза, продуктом которого являются пластовые гипсы, широко распространенные в Оршанской впадине, на Белорусской антеклизе, Латвийской и Жлобинской седловинах. Обоснованием этой версии стали два аргумента. Первый – гидрогеологические данные. Например, в вендских ледниковых, вулканогенно-осадочных и нормально-морских терригенных отложениях Оршанской впадины, не имеющих никакого отношения к эвапоритовому процессу, но залегающих под пластовыми гипсами эйфельского возраста, заключены рассолы с минерализацией до 150 г/л. Второй аргумент – изотопный состав серы гипса. Диапазоны и средние арифметические значения  $\delta^{34}\text{S}$  таковы: нижний девон (эмс) – 14,3–19,4 (17,7 ± 0,3 ‰), ордовик – 15,2–20,0 (18,8 ± 0,4), кембрий – 15,4–22,0 (19,4 ± 0,9), верхний протерозой – 16,3–19,9 (18,6 ± 0,6 ‰). Как видим, изотопные характеристики гипса в этих разновозрастных отложениях весьма близки между собой, но, самое главное, что они близки цифрам для пластового эйфельского гипса (16,9 ± 0,3 ‰), свойственным, в свою очередь, сульфатам среднего девона на глобальной кривой (~19 ‰) [7]. Изотопный состав серы гипса из силурийских отложений нашего разреза ощутимо более тяжелый: значения  $\delta^{34}\text{S}$  изменяются от 21,3 до 26,7, в среднем составляют 22,9 ± 0,4 ‰ и близки диапазону значений (~24–28 ‰), характерному для силура на фанерозойской изотопной кривой [7; 8]. Это, очевидно, указывает на то, что проявления гипса в силурийских отложениях северо-запада Беларуси, в отличие от таковых в нижнем девоне, ордовике, кембрии и верхнем протерозое, образованных под влиянием нисходящих эйфельских рассолов, сформировались с участием сгущенной силурийской морской воды. Данный тезис с общегеологических позиций можно подкрепить тем, что эйфельские отложения, перекрывающие силурийские в изучавшемся разрезе и окрестностях, не содержат пластов гипса, что свидетельствует об отсутствии здесь среднедевонского эвапоритового бассейна, рассолы которого могли бы быть потенциальным агентом гипсообразования в нижележащих отложениях. Кроме того, судя по упоминаниям литовских геологов [9; 10] о включениях и даже прослойках гипса в силурийских отложениях Южной и Восточной Литвы (Пренай, Жежмаряй, Кауно-Воке, Вильнюс, Швянче-

**Распределение проявлений гипса в силурийских отложениях скв. Давтюны 3к и изотопный состав его серы**

Глубина, м	Вмещающая порода	Форма проявления гипса	$\delta^{34}\text{S}$ , ‰ (CDT)
<i>Верхний силур, лудловский отдел, горстийский ярус (вилейская свита)</i>			
119,5	Доломит известковистый глинистый	Выполнение трещин	
120,5	– // –	Выполнение фенестр	
<i>Нижний силур, венлокский отдел, гомерский ярус (островецкая свита)</i>			
140,0	Мергель доломитовый	Выполнение фенестр	
156,0	Мергель известковисто-доломитовый	Гнезда-желваки	
159,0	Доломит известковистый глинистый	Выполнение фенестр и гнезда-желваки	26,7
159,2	– // –	Гнезда-желваки	22,7
160,5	– // –	– // –	23,7
160,6	– // –	– // –	
161,6	– // –	– // –	22,3
161,9	Доломит известковистый	– // –	
<i>Нижний силур, венлокский отдел, шейнвудский ярус (ячёнская свита)</i>			
163,4	Доломит глинистый	Гнезда-желваки	25,7
170,5	– // –	Гнезда-желваки и выполнение трещин	
171,5	– // –	Гнезда-желваки	
174,0	– // –	Выполнение трещин	24,0
177,0	– // –	Гнезда-желваки	
178,6	– // –	– // –	23,6
181,2	– // –	– // –	
183,0	– // –	– // –	
184,5	Мергель известковисто-доломитовый	– // –	21,7
187,2	Мергель доломитовый	Выполнение трещин	
188,0	– // –	– // –	21,7
189,0	Мергель известковисто-доломитовый	Выполнение трещин и гнезда желваки	21,8
191,0	– // –	Гнезда-желваки	
193,0	– // –	Выполнение трещин и гнезда желваки	
194,5	– // –	Выполнение трещин	21,7
197,5	Мергель доломитовый	– // –	
<i>Нижний силур, лландоверийский отдел, теличский ярус (швянчёнская свита)</i>			
200,0	Мергель известковисто-доломитовый	Гнезда-желваки	
200,5	– // –	Выполнение трещин	
204,0	Мергель глинистый известковисто-доломитовый	Гнезда-желваки	22,0
207,7	Мергель доломитисто-известковый	– // –	
211,0	Мергель известковисто-доломитовый	– // –	
211,5	Мергель доломитисто-известковый	– // –	
212,5	– // –	– // –	
215,3	– // –	– // –	22,1
218,7	– // –	– // –	
220,0	– // –	– // –	
222,8	– // –	– // –	21,3

нис), т. е. недалеко от места наших исследований, эвапоритовый процесс силуру белорусско-литовского региона в той или иной форме «не был противопоказан».

Следующий из изотопных данных вывод о том, что источником гипсообразующих рассолов являлась силурийская морская вода, еще не раскрывает механизма гипсообразования. Для создания модели процесса этот вывод должен быть согласован со следующими двумя фактами: 1 – образование гипса было постседиментационным, что вытекает из нахождения его в породах вместе с остатками нормально-морской фауны, форм его локализации и отсутствия в разрезе гипсовых прослоев; 2 – оно осуществлялось как в нелитифицированном (гнезда-желваки), так и литифицированном (выполнение трещин и фенестр) глинисто-карбонатном субстрате.

Нам представляется, что канвой предлагаемой модели формирования гипса в силурийских отложениях на северо-западе Беларуси может стать предположение о связанном с миграцией береговой линии частом чередовании здесь трех фациальных обстановок: мелководной подприливной, межприливной и надприливной. Данное предположение вполне вероятно для этой, самой прибрежной, части обширного Балтийского седиментационного бассейна.

Важной чертой эволюции фациальных условий на этой территории было также несомненное существование нередких и, вероятно, долгих перерывов в осадконакоплении. Это вытекает из сопоставления длительности накопления и мощности изучавшейся части силурийского разреза в скв. Давтюны 3к. Отрезок времени с лландовери до лудлова включительно, в течение которого сформировалась наша толща мощностью ~106 м, составляет ~15 млн лет [11]. Вместе с тем, если приблизительно принять скорость седиментации равной 3 см в 1000 лет [12], легко рассчитать, что для накопления такой толщи при отсутствии пауз в осадконакоплении хватило бы гораздо меньше времени (~3,5 млн лет).

Наконец, по аналогии с районами современной карбонатной седиментации можно допустить, что на фоне быстрой консолидации накапливающихся силурийских осадков, характерной для подприливной мелководной и межприливной зон, в разрезе имело место чередование литифицированных и нелитифицированных пластов [13].

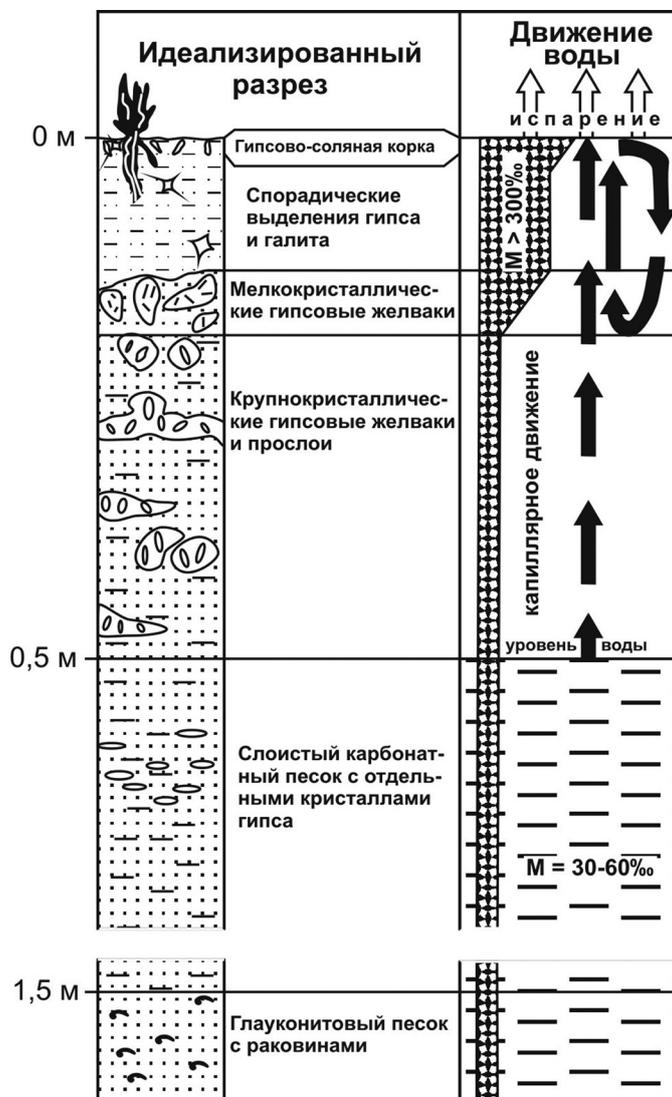


Рис. 4. Обстановка в зоне диагенеза карбонатного осадка в пределах надприливной равнины на средиземноморском побережье Египта [15] как современная модель условий гипсообразования в силуре на северо-западе Беларуси. Минерализация (M) растворов увеличивается вверх по разрезу в результате внутригрунтового испарения, сопровождаемого восходящим капиллярным движением воды

С учетом сказанного выше, модель гипсообразования в силурийских отложениях Беларуси выглядит следующим образом. В связи с частыми колебаниями уровня моря глинисто-карбонатные и карбонатно-глинистые отложения, накапливавшиеся в подприливной и межприливной обстановках периодически выводились в субаэральные условия. Это были эпизоды перерывов в осадконакоплении. Территория представляла собой пляж, сложенный неравномерно литифицированными осадками, который заливался морской водой во время сильных штормов и ветровых нагонов. После них здесь, в наиболее пониженных частях рельефа плоской надприливной равнины, определенное время сохранялась морская вода. В условиях аридного климата, существование которых можно предполагать, исходя из расположения территории Беларуси в силуре вблизи экватора [14], она подвергалась интенсивному испарению и концентрированию и, будучи уже сконцентрированной на поверхности, просачивалась в карбонатный осадок и насыщала его. Здесь «включалось» внутригрунтовое испарение, вызывавшее формирование гнезд-желваков гипса в не успевших литифицироваться осадках и выполнение гипсом трещин и фенестр в литифицированном субстрате. Модель такого своеобразного диагенетического гипсообразования реализуется в пределах целого ряда современных надприливных равнин. Для примера на рис. 4 показана подобная ситуация на средиземноморском побережье Египта.

**Заключение.** Изотопный состав серы гипса, впервые выявленного в отложениях силура Беларуси, свидетельствует о том, что средой гипсообразования были сгущенные дериваты силурийской морской воды. К диагенетическому формированию гипсовых гнезд-желваков и выполнению трещин и фенестр привело многократное наложение надприливных обстановок на глинисто-карбонатные и карбонатно-глинистые отложения, сформированные в мелководных подприливных и межприливных условиях. Процесс протекал в аридном климате с участием внутригрунтового испарения.

Авторы выражают благодарность Т. Ф. Саченко за определение родовой принадлежности брахиоподы, изображенной на рис. 3, Е. А. Василёнок – за ее фотографирование, С. М. Василевичу – за содействие в подборе каменного материала.

#### Список использованной литературы

1. Геология Беларуси / ред. А. С. Махнач [и др.]. – Мн.: Институт геологических наук НАН Беларуси, 2001. – 815 с.
2. Плакс, Д. П. Новые местные стратиграфические подразделения верхнего силура и среднего девона северо-западной части Белорусской антеклизы / Д. П. Плакс, С. А. Кручек, В. Ю. Обуховская // *Літасфера*. – 2016. – № 1 (44). – С. 3–25.
3. Tebbut, G. E. Lithogenesis of a distinctive carbonate rock fabric / G. E. Tebbut, C. D. Conley, D. W. Boyd // *Univ. Wyoming. Contr. Geology*. – 1965. – N 4. – P. 1–13.
4. Уилсон, Дж. Л. Карбонатные фации в геологической истории. Пер. с англ. / Дж. Л. Уилсон. – М.: Недра, 1980. – 463 с.
5. Гриненко, В. А. Геохимия изотопов серы / В. А. Гриненко, Л. Н. Гриненко. – М.: Наука, 1974. – 274 с.
6. Махнач, А. А. Изотопный состав серы сульфатных минералов Белоруссии / А. А. Махнач, Г. М. Ефремов, Т. В. Иванова // *Докл. АН БССР*. – 1987. – Т. XXXI, № 3. – С. 260–263.
7. Kampschulte, A. The sulfur isotopic evolution of Phanerozoic sea water based on the analysis of structurally substituted sulphate in carbonates / A. Kampschulte, H. Strauss // *Chemical Geology*. – 2004. – N 204. – P. 255–286.
8. Paytan, A. Sulfur Isotope Stratigraphy / A. Paytan, E. T. Gray // *The Geologic Time Scale 2012*. Amsterdam, Boston, Heidelberg, London, New York, Oxford, Paris, San Diego, San Francisco, Singapore, Sydney, Tokyo: Elsevier, 2012. – P. 167–180.
9. Коркутис, В. А. Литология и фации нефтеносных отложений нижнего палеозоя Южной Прибалтики / В. А. Коркутис, П. П. Лапинскас, Е. М. Лашков. – М.: Недра, 1972. – 180 с.
10. Lapinskas, P. Structure & Petroliferosity of the Silurian in Lithuania / P. Lapinskas. – Vilnius: Institute of Geology, 2000. – 203 p.
11. Melchin, M. J. The Silurian Period / M. J. Melchin, P. M. Sadler, B. D. Cramer // *The Geologic Time Scale 2012*. – Amsterdam, Boston, Heidelberg, London, New York, Oxford, Paris, San Diego, San Francisco, Singapore, Sydney, Tokyo: Elsevier, 2012. – P. 525–558.
12. Геологический словарь. Т. 2 / ред. К. Н. Паффенгольц [и др.]. – М.: Недра, 1973. – 456 с.
13. Махнач, А. А. Стадиальный анализ литогенеза / А. А. Махнач. – Мн.: БГУ, 2000. – 255 с.
14. Nance, R. D. The Rheic Ocean: Origin, Evolution, and Significance / R. D. Nance, U. Linnemann // *GSA Today*. – 2008. – Vol. 18, N 12. – P. 4–12.
15. West, I. M. Primary gypsum nodules in a modern sabkha on the Mediterranean coast of Egypt / I. M. West, A. Ali Yehia, M. E. Hilmy // *Geology*. – 1979. – Vol. 7, N 7. – P. 354–358.

Поступило в редакцию 23.08.2016

**СОЦИАЛЬНО-ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ**

УДК 902/904(476.5)“8/10”

О. Н. ЛЕВКО

**КОРДОН – НОВЫЙ ПАМЯТНИК АРХЕОЛОГИИ ЭПОХИ ВИКИНГОВ  
В ВОСТОЧНОЙ ЕВРОПЕ***(Представлено академиком М. П. Костюком)**Институт истории НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
onlevko@gmail.com*

В Витебском Подвинье впервые исследован археологический комплекс Кордон (городище, два селища и курган) середины IX – первой половины X в. Широкий ассортимент североευропейских, болгарских и ближневосточных изделий, арабские и византийские монеты, метрологический материал, наличие ювелирного производства и активной торговой деятельности поселения ставят его в ряд значимых памятников археологии эпохи викингов. Открытие Кордона подтвердило ведущую роль Витебского Подвинья в формировании связи севера с югом на «пути из варяг в греки».

*Ключевые слова:* памятник археологии, эпоха викингов, Витебское Подвинье, «путь из варяг в греки».

O. N. LEVKO

**CORDON IS A NEW ARCHEOLOGICAL SITE OF THE VIKING AGE  
IN THE TERRITORY OF EASTERN EUROPE***Institute of History of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
onlevko@gmail.com*

The archeological complex Cordon situated in the Vitebsk Dvina area was investigated for the first time. The complex includes a hill-fort, two settlements, and a burial mound dated back to the middle of IX – first half of X century. A broad spectrum of artifacts of North European and Middle Eastern origin, Arabian and Byzantine coins, metrological materials, and the existence of jewelry production and trade activities put Cordon in line with the important archaeological sites of the Viking Age. The discovery of Cordon proved the leading role of the Vitebsk Dvina area in the establishment of contacts between the North and the South on the way ‘from the Vikings to the Greeks’.

**Keywords:** archeological site, Viking Age, Vitebsk Dvina area, way “from the Vikings to the Greeks”.

**Введение.** Со второй половины IX в. в Восточной Европе начали формироваться раннегосударственные структуры: Новгородское, Полоцкое, Киевское княжества. Через их территорию пролегли две важнейшие водные артерии – Западная Двина и Днепр. На белорусских землях расположились его мощные притоки: Березина, Друть, Припять. Регион Витебского Подвинья, максимально сближающийся с Верхним Поднепровьем, именно благодаря этому фактору стал центральным связующим звеном между севером и югом на пути «из варяг в греки» (рис. 1).

**Основная часть.** Для понимания процессов, реально происходивших в Восточной Европе и оказавших наибольшее влияние на политическое, экономическое и культурное развитие территорий, занятых славянскими племенами, а впоследствии выросшими на их основе раннегосударственными структурами, необходимо еще раз рассмотреть имеющийся фактический материал и сложившиеся концепции. Новейшими исследованиями белорусских археологов [1] установлено, что с первых веков н. э. через бассейны Белорусского Поднепровья и Подвинья осуществлялось активное движение населения – носителей разных археологических культур и этносов

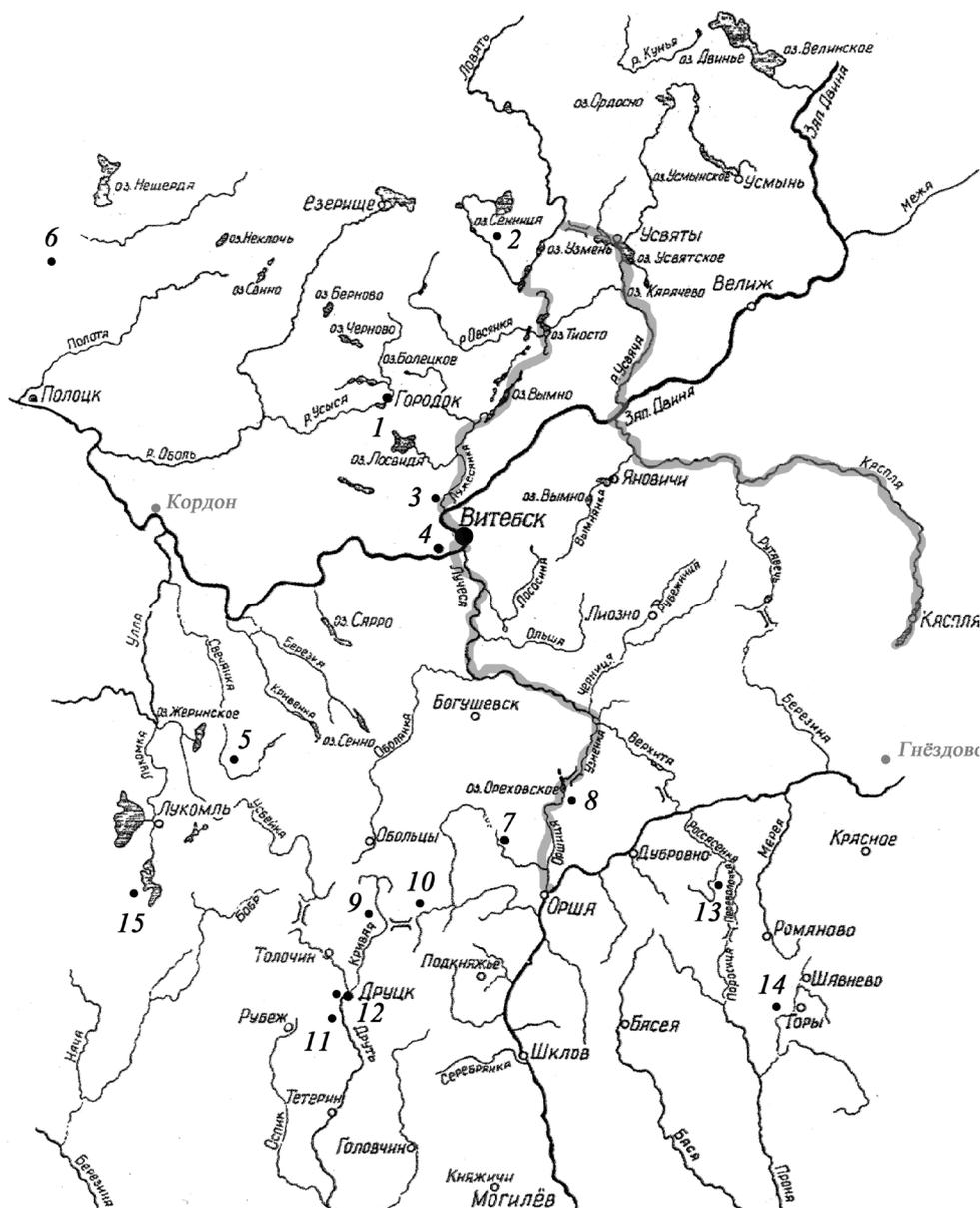


Рис. 1. Зона размещения лесного отрезка формирования пути «из варяг в греки» в IX–XI вв. по археологическим и нумизматическим данным

с юга на север и наоборот. Богатый реками, озерами и лесами край осваивался и обживался, приспособившись к взаимодействию с внешним миром, впитывал в себя новые веяния, развивая сложившиеся местные культурные традиции. Во второй половине I тысячелетия н. э. **расселившиеся** на белорусских землях славяне ассимилировали разноэтничные группы аборигенов в той степени, которая впоследствии способствовала выработке отличительных черт белорусской народности от русских и украинцев.

Последняя четверть I тысячелетия н. э. – время больших перемен на карте Восточноевропейского региона. В этот период обозначились два взаимосвязанных и взаимодополняющих друг друга процесса: начало преобразования племенных княжений в раннегосударственные структуры и формирование знаменитого пути «из варяг в греки».

Исследователями, при всем различии в трактовке имеющихся в их распоряжении немногочисленных источников, за многие десятилетия выработана четкая схема связи двух раннегосударственных центров – Новгорода (на севере) и Киева (на юге) посредством пролегающего между ними отрезка пути «из варяг в греки» через Гнездово (ранний Смоленск). Было сформулиро-

вано понятие «Древнерусское государство», в которое скандинавы с севера несли основы политического устройства, а Византия с юга внедряла в государственную идеологию христианские представления, вытесняя языческие. Экономическое благополучие молодого государства базировалось на успешном взаимовыгодном торговом сотрудничестве от Бирки до Константинополя в пределах пути «из варяг в греки».

Белорусские земли этой поры в трудах историков представляются в качестве периферии сначала Новгородских владений (Рюрика), а затем Киевских (Владимира). Период правления в «Полоцкой земле» династии Рогволодовичей (XI–XII вв.) **рассматривается как сепаратистские проявления по отношению к центру государства (Киеву), а торговля по Западной Двине – как результат более позднего западного ответвления пути «из варяг в греки».**

В противоречие с такой постановкой вопроса вступают археологические и нумизматические источники. К настоящему времени материалы археологических исследований и нумизматики позволяют более объективно и достоверно представить те процессы, которые происходили на пространстве Восточной Европы в IX–X вв. **Рассматривая возможность единовременного формирования нескольких раннегосударственных образований, не следует забывать, что первые письменные упоминания об их центрах относятся к 862–865 гг.** Это время появления варяга Рюрика в северной части Восточной Европы (Новгородчина), «раздача» им городов своим мужам и поход второго варяга – Аскольда на Полоцк из Киева. Таким образом, можно полагать, что к середине IX в. **уже имелись территориально-племенные структуры, которые приобретают черты политических образований, стремящихся подчинить себе своих соседей (взимать дань путем «находничества»).** Всякое территориально-политическое образование должно иметь границы, в пределах которых оно сформировалось. Путем сопоставления письменных свидетельств с данными археологии автором статьи была установлена зона, занимаемая Полоцким княжеством на ранней стадии его существования: между левыми притоками Западной Двины – Уллой и Ушачей [2, с. 36–37]. На правом берегу Западной Двины при впадении в нее Полоты сформировался центр полочан – Полоцк, состоящий из городища и селища. **Г. В. Штыхов зафиксировал в основании насыпи вала укрепленного городища горшок, относящийся к культуре длинных курганов, и сделал вывод, что городище было обустроено кривичами.** Тот факт, что кривичи были первыми «населенниками» Полоцка имеет и летописное подтверждение. По наблюдению Е. А. Шмидта, **с рубежа VIII–IX вв. на территорию Смоленщины, также входившей в зону расселения многочисленного племени кривичей, перестают поступать по Западной Двине балтские украшения.** При раскопках Полоцкого городища В. А. Булкиным, а позднее М. В. Климовым были выявлены значимые для ранней его стадии, как центра политического образования, артефакты: куфические дирхемы первой половины IX в. [3, с. 42–43]. **Следовательно, в это время Полоцк перекрывает движение балтских импортов по Западной Двине, замыкая на себе торговые контакты с западом, севером и югом.** Материалы IX–X вв., **обнаруженные на памятниках, расположенных западнее Полоцка (Свило 1, Городец на Мнютю)** указывают на расширение его влияния в данном направлении. Появление в 70-е годы X в. в Полоцке Рогволода «из-за моря» положило начало формированию княжеской династии у полочан. Следует отметить, что, несмотря на скандинавское (или поморское) происхождение князя Рогволода, Д. В. Дуком доказан факт отсутствия на Полоцком городище североевропейского контингента, в отличие от Новгородского Рюрика городища. Это свидетельствует об управлении Полоцким княжеством в ключе местных традиций, диктуемых вышедшим из племенной знати боярством («мужами») [3, с. 79].

На востоке Полоцкое княжество в IX–X вв. **граничило с обширной зоной Витебского Подвинья по рекам Улле (левый приток Западной Двины) и Оболь (правый ее приток).** Улла устремлялась на юг к верховьям Друти, а Оболь уходила на север к бассейнам рек Великой и Ловати.

Именно на границе полоцких владений и Витебского Подвинья расположился современный населенный пункт Кордон, где в течение 2015–2016 гг. Институтом истории НАН Беларуси под руководством автора данной статьи проведены археологические разведки и раскопки на археологическом комплексе, состоящем из городища (вал), двух селищ и кургана, занимающем площадь в несколько гектаров вдоль Западной Двины. Селища по линии юг–север разделены ручьем, впадающим в Западную Двину и образующим прикрытый с ее стороны городищем (валом) водоем,

возможно, гавань для небольших судов. Селище 1 и городище (вал) располагаются со стороны д. Кордон, а селище 2 – со стороны д. Илово (рис. 2). Следует отметить, что в течение последних лет активное «выбивание» археологического материала из верхнего слоя памятника проводилось «черными копателями».

В результате проведенных на селищах 1, 2 и городище стационарных исследований, общей площадью около 370 кв. м, а также поисковых работ на распаханых участках полей и шурфовки, была собрана значительная коллекция артефактов, свидетельствующих о постоянном функционировании комплекса в пределах IX–X вв. В вещевом материале (свыше 600 индивидуальных находок) выделяются разнообразные украшения из цветных металлов, накладки на пояса и сумки, имеющие североευропейское и ближневосточное происхождение. Часть вещей происходит из Волжской Булгарии. Наличие на памятнике ювелирного производства фиксируется развалами производственных сооружений, тиглями, шлаками, заготовками изделий, каплями цветного металла. Из культурного слоя городища и двух селищ происходят весы, разнообразные гири-разновесы, пломбы. Монетное серебро (целые экземпляры и фрагменты), по определению научного сотрудника Госэрмитажа Российской Федерации В. С. Кулешова (таблица), указывает на активное функционирование комплекса в пределах середины IX – первой половины X в. Около 40 % (6 экз.) составляют монеты раннеисламских династий – Умайядов (первая половина VIII в.) и раннеаббасидские монеты чекана халифов ар-Рашида и ал-Ма'муна первой четверти IX в. (рис. 3:4,7). Они происходят из культурного слоя селища 1. Еще 1 экз. (рис. 3:1), выявленный в культурном слое раскопа I городища, представляет рудничный чекан Баниджуридов и их современников (тяжелый дирхам на литой заготовке из региона Андарабы и Панджхира на территории современного Афганистана). К среднеаббасидским относится фрагмент дирхама 850-х годов. Примерно 53 % определимых куфических монет (8 экз.) принадлежат к чекану поздних Аббасидов и независимых исламских династий – среднеазиатских Саманидов и иранских Бувайхидов. Они распределяются на отрезке от 900-х до 960-х годов (рис. 3:5,6) и происходят из культурного слоя селищ 1, 2. Один дирхам 920-х годов из Волжской Булгарии является подражанием Саманидам (рис. 3:8). Находки двух византийских фоллисов конца IX – середины X в. в культурном слое селища 2 (рис. 3:2,3) подтверждают датировку второй фазы существования памятника.

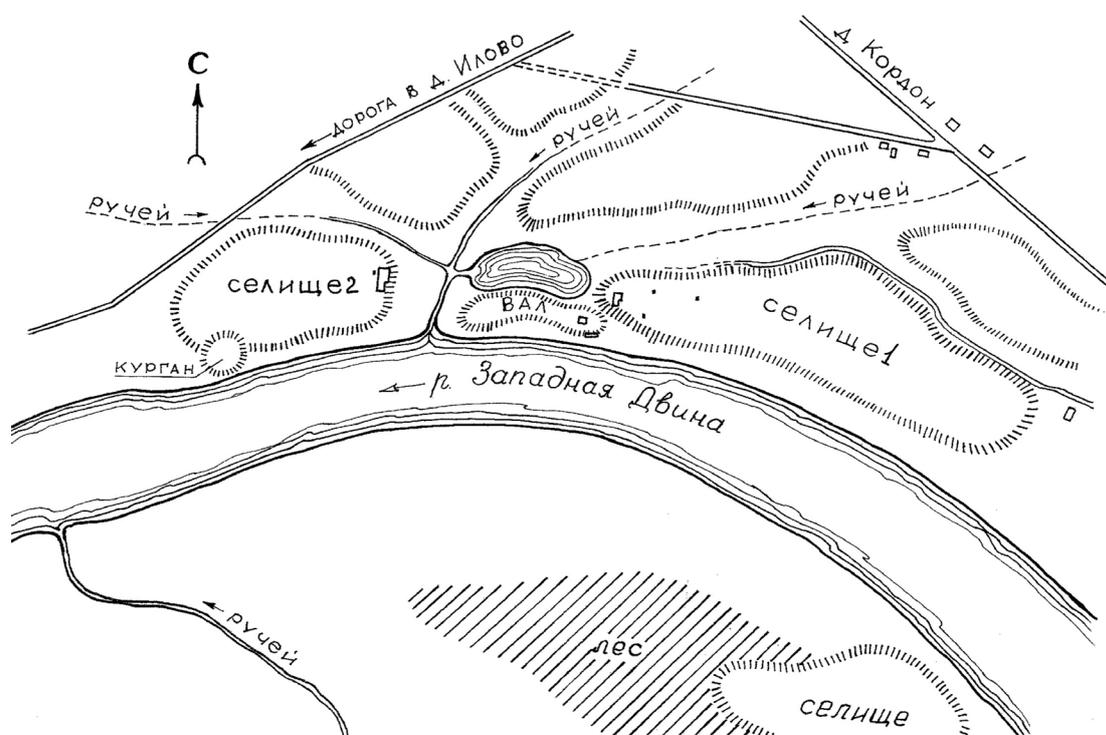


Рис. 2. План-схема размещения археологического комплекса Кордон на границе Витебского Подвинья и Полоцкого княжения

**Определение В. С. Кулешовым нумизматического и метрологического материала из исследований комплекса памятников эпохи викингов у посёлка Кордон Шумилинского района Витебской области в 2015–2016 годах**

Полевой шифр	Определение находки	Материал	Вес
<i>Серебряные куфические монеты VIII–IX вв. – 7 экз.</i>			
Кордон-2016, селище 1, картофельное поле, № 53	Дирхам (мелкий фрагмент). Умаййады, выпускные данные обломаны (первая половина VIII в.)	Серебро	0,57 г
Кордон-2016, селище 1, картофельное поле, № 8	Дирхам (фрагмент неправильной формы). Умаййады, место чеканки и год обломаны (конец 120 – начало 130-х годов х.)	Серебро	0,95 г
Кордон-2016, городище, ров с восточной стороны, № 28	Дирхам (фрагмент в 1/2 целой монеты). ‘Аббасиды, ар-Рашид, место чеканки обломано (начало 180-х годов х.)	Серебро	1,11 г
Кордон-2016, селище 1, картофельное поле, № 73	Дирхам (фрагмент в 1/2 целой монеты). ‘Аббасиды, ар-Рашид, Мадинат ас-Салам, год обломан (вторая половина 180-х годов х.)	Серебро	1,34 г
Кордон-2016, селище 1, картофельное поле, № 74	Дирхам (фрагмент в 1/2 целой монеты). ‘Аббасиды, ал-Ма’мун, Самарканд, 201 г. х.	Серебро	0,79 г
Кордон-2016, зачистка склона городища над Зап. Двиной, № 27	Дирхам (фрагмент в 1/3 целой монеты). ‘Аббасиды, ал-Мутаваккил ‘ала-ллах или ал-Му’тазз би-ллах, место чеканки обломано, 24[х] г. х.	Серебро	0,81 г
Кордон-2016, городище, р. I, кв. 5, пл. 2, № 3	Дирхам на шаровидной литой заготовке. Баниджуриды и их современники. Эпиграфический рельеф полностью стёрт. Регион Андалузии и Панджхира, 260–270-е годы х.	Серебро	4,61 г
<i>Серебряные куфические монеты X в. – 8 экз.</i>			
Кордон-2016, городище, р. I, кв. 7, пл. 1, № 29	Дирхам (фрагмент в 1/2 целой монеты). ‘Аббасиды, ал-Муктафи би-ллах, место чеканки стёрто, год не читается (290-е годы х.)	Серебро	1,90 г
Илово-2016, селище 2, р. I, кв. 33, дёрн, № 1	Дирхам. Правители Волжской Булгарии, подражание Саманидам. Л.с. «аш-Шаш, 308 г. х.», о. с. с именем Исма’ила ибн Ахмада (920-е годы)	Серебро	2,52 г
Илово-2016, селище 2, раскоп I, кв. 4а, гл. 217, № 200	Дирхам (фрагмент в 1/3 целой монеты). Саманиды, Наср ибн Ахмад, аш-Шаш, год обломан (по эпиграфике – 920–930-е годы)	Серебро	1,11 г
Кордон-2016, зачистка склона городища над Зап. Двиной, № 17	Дирхам (фрагмент в 1/3 целой монеты). Саманиды, Наср ибн Ахмад, место чеканки обрезано, 324 г. х.	Серебро	0,81 г
Кордон-2016, селище 1, картофельное поле, № 26	Дирхам (фрагмент в 1/2 целой монеты). Саманиды. Нух ибн Наср, Самарканд, 332 г. х.	Серебро	0,89 г
Кордон-2016, селище 1, картофельное поле, № 75	Дирхам (фрагмент в 1/2 целой монеты). Саманиды, ‘Абд ал-Малик ибн Нух, место чеканки обломано, 34[х] г. х.	Серебро	1,30 г
Кордон-2016, селище 1, картофельное поле, № 76	Дирхам (фрагмент неправильной формы в 1/3 целой монеты). Саманиды, Мансур ибн Нух, место чеканки обломано, 35[х] г. х.	Серебро	0,80 г
Кордон-2016, селище 1, раскоп I, кв. 3А, пл. 2, № 84	Дирхам (крупный фрагмент неправильной формы). Бувайхиды, Рукн ад-даула и ‘Адуд ад-даула, место чеканки и год обломаны (950–960-е годы)	Серебро	1,16 г
<i>Византийские медные монеты – 2 экз.</i>			
Илово-2015, селище 2, № 24	Фоллис. Византийская империя, Лев VI (886–912). Остатки спленного приклепанного ушка	Медный сплав	6,06 г
Илово-2016, селище 2, р. I, кв. 11, пл. 2, № 76	Фоллис. Византийская империя, Константин VII (913–959), Константинополь (определение В. М. Сидоровича).	Медный сплав	3,61 г
<i>Памятники метрологии IX–X вв. (весовые гирьки и эталон платёжного слитка) – 6 экз.</i>			
Кордон-2016, городище, р. I, кв. 6, пл. 2, № 6	Весовая гирька 14-гранная, кратностью 1 единица	Медный сплав	0,96 г
Кордон-2016, селище 1, раскоп I, кв. 16, пл. 2, № 30	Весовая гирька 14-гранная, кратностью 2 единицы	Медный сплав	1,36 г
Илово-2015, селище 2, № 48	Весовая гирька-«таблетка», кратностью 3 единицы	Свинцово-оловянистый сплав	3,27 г
Кордон-2015, селище 1, № 3	Весовая гирька-«таблетка»	Свинцово-оловянистый сплав	1,46 г
Кордон-2016, селище 1, картофельное поле, № 3	Весовая гирька 10-гранная, кратностью 1 единица	Медный сплав	7,10 г
Илово-2015, селище 2, № 26	Палочковидный трёхгранный слиток (фрагмент в 1/2) – весовой эталон серебряного слитка весом в 1 гривну Русской правды. X в.	Медный сплав	25,1 г

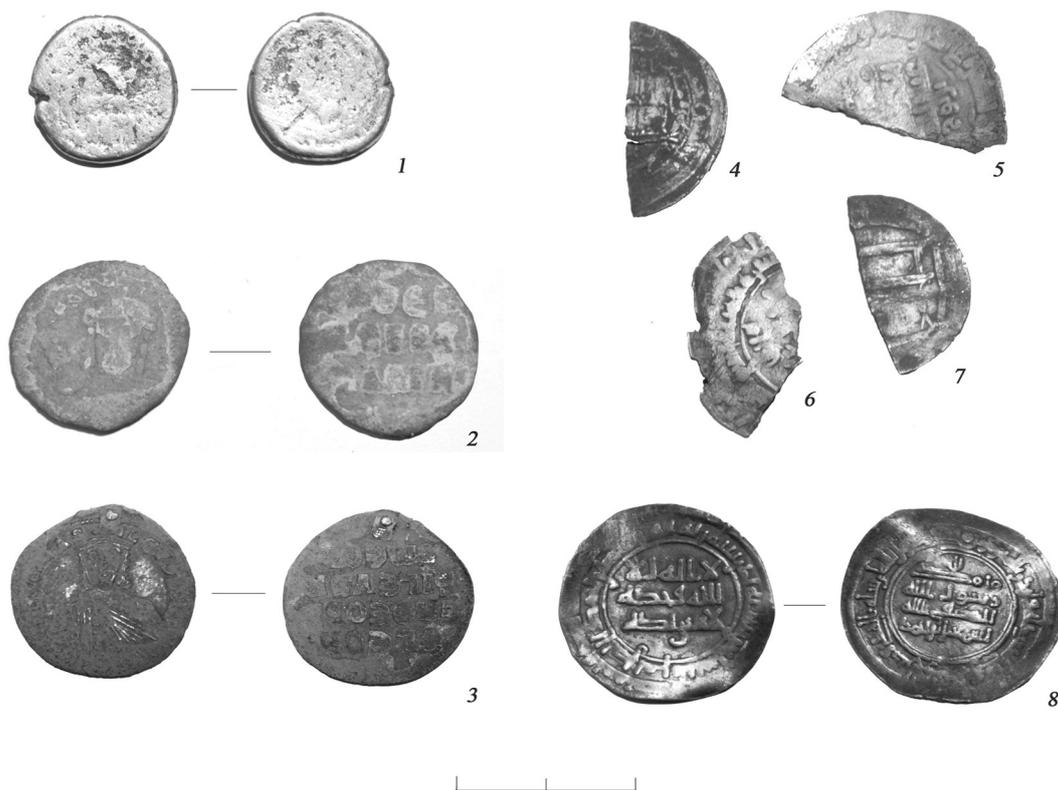


Рис. 3. Нумизматический материал VIII–X вв. из раскопок археологического комплекса Кордон

Уникальной является находка медного слитка, морфологически соотносимого с серебряными трехгранными палочковидными слитками Северной и Восточной Европы IX–X вв. Слиток наполовину фрагментирован, его вес (25,1 г) позволяет реконструировать исходный вес отливки около 50 г и соотнести его с известной единицей весового серебра – гривной Русской правды (51 г). Весовые гири разной формы: 14-гранные и боченкообразные, оба вида с широким диапазоном кратности. Встречаются 10-гранные гири и гири-«таблетки». Богатый метрологический материал характеризует активную торговую деятельность, а также развитое ювелирное производство.

Следует также отметить, что нижний слой археологического комплекса Кордон представлен слабо выраженными культурными напластованиями второй и третьей четверти I тыс. н. э., предшествующими эпохе викингов. В них присутствует небольшое количество лепной керамики, глиняные пряслица, костяная проколка и некоторые другие предметы, характерные для хозяйственной жизни поселений этого времени. Однако в этом же слое были выявлены и весьма значимые артефакты – серебряные римские монеты начала н. э. Одна из них найдена при зачистке материка в раскопе на городище и имеет хорошую сохранность (рис. 4:1), а вторая происходит из культурного слоя раскопа на селище 1. На ее аверсе и реверсе нечеткое изображение двух императоров, что само по себе достаточно редко встречается (рис. 4:2). Такие монеты имели хождение во второй четверти I тыс. н. э., распространяясь с периферии Римского мира. Данные находки подчеркивают тот факт, что несколькими веками ранее викингов правый берег Западной Двины в белорусских землях также посещался иноземцами с целью осуществления торговых операций.

Летописное упоминание о волоке с «верха Днепра до Ловати» направляло поиск учеными гипотетических подступов IX в. от среднего течения Ловати к притокам Западной Двины – рекам Торопе и Кунье [4, с. 505–506]. Наиболее очевидным в X в. исследователи считали маршрут, проходивший от Ловати с сухопутной дорогой на Усвячу, далее через Двину вверх по течению Каспли и по суше к Днепру через Гнездово [5, с. 382–401]. Так выстраивался отрезок пути «из варяг в греки», связывающий север с югом. Однако все клады куфических монет IX в., датированные в пределах 815–867 гг., обнаружены на окраинных территориях Смоленщины, расположен-

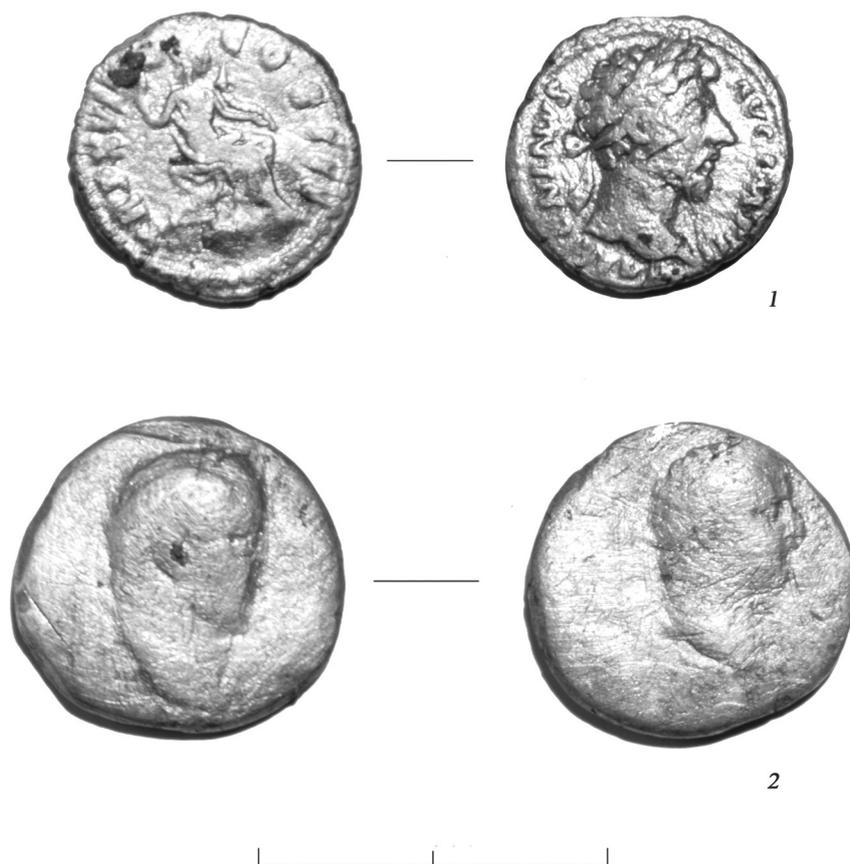


Рис. 4. Римские монеты из раскопок археологического комплекса Кордон

ных в бассейнах верхней Волги или Западной Двины. Они удалены от зоны среднего течения Ловати, Торопы и Куньи и их местоположение соотносится с пунктами единичных находок вещей североευропейского происхождения. В смоленском течении р. Днепр клады этого времени вообще неизвестны. К ближайшей округе Гнездово относятся два монетных клада 960-х годов, выявленные на р. Дубровенке и у д. Боровой и двенадцать кладов этого времени происходят из самого Гнездово. С середины X в. в Гнездово и его ближайшей округе (Новоселки и Рокот) концентрируются и скандинавские вещи.

В отличие от Смоленщины, зона северо-восточной Беларуси в полной мере отражает ранний этап связи Днепровского и Двинского бассейнов в рамках формирования пути «из варяг в греки» на переходе от Днепра к Ловати через Витебск. На волоках из Оршанского Поднепровья в Витебское Подвинье зафиксировано шесть кладов. Из них два клада найдены у днепровских притоков в окрестностях д. Добрино и д. Соболево. В районе самого Витебска на Западной Двине обнаружено четыре клада. Г. В. Штыхов отмечает, что наиболее ранний клад (младшая монета датируется 815 г.) выявлен на территории современного г. Орши. К 823/24 гг. относятся младшие монеты из витебского клада, а к 841/842 гг. монеты из денежно-вещевого клада у д. Добрино Лиозненского района на волоке от впадающей в Днепр Узменки к Лучесе. К 862 г. относится младшая монета из клада, выявленного в п. Лучеса.

**Заключение.** Таким образом, открытие нового памятника эпохи викингов Кордон показывает, что Витебское Подвинье было не только зоной активного формирования торговым населением лесного отрезка пути «из варяг в греки», но и зоной его проживания в период становления этого пути. Данный процесс происходил параллельно с зарождением раннегосударственных образований в Полоцком Подвинье с центром в Полоцке, Новгородском с центром в Новгороде и Киевском с центром в Киеве племенных княжениях. Новые археологические и нумизматические материалы в совокупности с уже известными фактами позволяют уверенно говорить о том,

что отрезок пути «из варяг в греки», связующий север с югом, в первую очередь сформировался на белорусских землях, стимулируя дальнейшее экономическое и политическое развитие данного региона.

### **Список использованной литературы**

1. Славяне на территории Беларуси в догосударственный период: серия «Славянские древности Беларуси». – Минск, 2016. – Кн. 1, 2.
2. *Левко, О. Н.* Средневековые территориально-административные центры северо-восточной Беларуси / О. Н. Левко. – Минск, 2004.
3. Полоцк: серия «Древнейшие города Беларуси». – Минск, 2012.
4. *Еремеев, И. И.* Очерки исторической географии лесной части Пути из варяг в греки. Археологические и палеогеографические исследования между Западной Двиной и озером Ильмень / И. И. Еремеев, О. Ф. Дзюба // Тр. ИИМК. – СПб., 2010. – Т. 33.
5. *Леонтьев, А. Е.* Восточноевропейские пути сообщения и торговые связи в конце VIII – X в. / А. Е. Леонтьев, Е. Н. Носов // Русь в IX–X веках. Археологическая панорама. – Москва; Вологда, 2012.

*Поступило в редакцию 19.09.2016*

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Редакция журнала «Доклады Национальной академии наук Беларуси» просит авторов руководствоваться приведенными ниже правилами.

I. «Доклады НАН Беларуси» печатают сообщения академиков и членов-корреспондентов, а также научных сотрудников НАН Беларуси, высших учебных заведений республики и других научных учреждений **по представлению академиков или членов-корреспондентов НАН Беларуси**. Представленные сообщения могут быть направлены на рецензию.

II. «Доклады» помещают не более трех сообщений одного автора в год. Это правило не распространяется на академиков и членов-корреспондентов НАН Беларуси.

Сообщения о результатах работ, проведенных в научных учреждениях, должны иметь разрешение на опубликование (сопроводительное письмо ректората или дирекции соответствующего института, акт экспертизы). Авторы должны определить раздел, в который следует поместить сообщение.

III. Сообщение представляется распечатанным в двух экземплярах на русском, белорусском или английском языках, межстрочный интервал – 1,5, кегль – 12, шрифт – Times New Roman.

IV. Сообщение должно иметь следующую структуру:

1. Индекс по Универсальной десятичной классификации (УДК);

инициалы и фамилии авторов;

название статьи;

полное наименование учреждений, где работают авторы, с указанием города и страны, адрес электронной почты каждого автора.

2. Аннотация (авторское резюме) объемом 150–250 слов должна кратко представлять результаты работы и быть понятной, в том числе и в отрыве от основного текста статьи; должна быть информативной, хорошо структурированной (один из вариантов написания аннотации – краткое повторение структуры статьи, включающее введение, цели и задачи, методы, результаты, заключение или выводы).

3. Ключевые слова – набор слов, отражающих содержание текста в терминах объекта, научной отрасли и методов исследования; рекомендуемое количество ключевых слов 5–10.

4. Метатекстовые данные (все то, что предшествует основному тексту статьи) приводятся *на английском языке*, причем аннотация должна быть оригинальной (т. е. не являться дословным переводом русскоязычной аннотации). Если статья англоязычная – вышеуказанные данные приводятся на русском (белорусском) языке.

5. Основной текст сообщения должен составлять 6–7 журнальных страниц (т. е. около 35 тыс. знаков); в этот объем также входят таблицы и рисунки, число которых не должно превышать 4. Изложенный материал должен быть четко структурированным: введение, цели и задачи, методы, результаты, заключение (выводы). В русско- и белорусскоязычных статьях рекомендуется делать подрисовочные подписи и надписи на самих иллюстрациях на двух языках – *русском (белорусском) и английском*.

6. Список использованной литературы (до 15 ссылок) оформляется в соответствии с требованиями Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь (ГОСТ 7.1–2003). Цитируемая литература приводится общим списком по мере упоминания, ссылки в тексте даются порядковым номером в квадратных скобках (напр., [1]); ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

7. Затем приводится список цитированных источников *в романском алфавите* («References») со следующей структурой: авторы (транслитерация), название статьи в транслитерированном варианте [перевод названия статьи на английский язык в квадратных скобках], название русскоязычного источника (транслитерация) [перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)], выходные данные с обозначениями на английском языке.

8. Если присутствует информация о финансировании (поддержке грантами проектов и т. п.), ее следует давать *на русском (белорусском) и английском языках* под заголовками «Благодарности» («Падзяка») и «Acknowledgements».

V. Для подготовки метаданных (так называемый информационный лист) на отдельной странице следует указать *на русском и английском языках* для каждого автора: фамилию, имя и отчество (полностью), звание, ученую степень, должность, место работы с указанием адреса, контактную информацию (e-mail, телефоны).

VI. Электронный вариант сообщения представляется на диске, флешке или присылается по электронной почте в редакцию журнала – doklady\_nanb@mail.ru. Текст должен быть набран в Word под Windows, формулы должны быть набраны в редакторе MathType. Собственным редактором формул версий Microsoft Office 2007 и выше пользоваться нельзя, так как в редакционно-издательском процессе он не поддерживается. Формульным редактором MathType в Word пользоваться только для набора сложных формул (например,  $C_4^4$ ). Вставку символов выполнять через меню «Вставка\Символ». Выключку вверх и вниз ( $C^2$ ,  $C_4$ ) выполнять через меню «Формат\Шрифт\Верхний индекс», «Формат\Шрифт\Нижний индекс». Греческие буквы необходимо набирать прямо, латинские – курсивом. Для набора греческих символов пользоваться гарнитурой Symbol. Обозначения математических функций (lim, sup, In, sin, Re, Im и т. п.), символы химических элементов (N, Cl) также набираются прямым шрифтом.

Рисунки даются в виде отдельных файлов в формате tif (600 точек на дюйм для штриховых, 300 – для тоновых). Желательно также предоставлять рисунки в формате оригинала (Corel, диаграммы в Excel, Origin Pro и т. д.), т. е. в той программе, в которой они сделаны. Текст на рисунках набирается основной гарнитурой, причем начертание символов (греческое, латинское) должно соответствовать их начертанию в тексте. Размер кегля соизмерим с размером рисунка (желательно 8). Площадь рисунка должна быть в диапазоне 100–150 см<sup>2</sup>. На обороте рисунков (если они представляются отдельно) указываются фамилии авторов, название статьи. Фотографии представляются в виде файлов (tif, jpg, png, eps) и в распечатанном виде (размер фотографии должен быть 50 × 70 мм).

VII. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что сообщение принято к печати. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

VIII. Публикация сообщения в «Докладах» не препятствует напечатанию расширенного ее варианта в другом периодическом издании.