

ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

МИНСК. БЕЛОРУССКАЯ НАУКА. 2017. ТОМ 61. № 1

Выходит шесть номеров в год

Журнал основан в июле 1957 года

Учредитель – Национальная академия наук Беларуси

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,
свидетельство о регистрации № 387 от 18.05.2009.

*Входит в Перечень научных изданий Республики Беларусь
для опубликования результатов диссертационных исследований, включен в базу данных
Российского индекса научного цитирования (РИНЦ)*

Главный редактор

В. Г. Гусаков

Председатель Президиума Национальной академии наук Беларуси

Редакционная коллегия

С. А. Чижик

первый заместитель Председателя Президиума Национальной академии наук Беларуси

(заместитель главного редактора)

С. Я. Клиин

заместитель Председателя Президиума Национальной академии наук Беларуси *(заместитель главного редактора)*

А. В. Кильчевский

главный ученый секретарь Национальной академии наук Беларуси *(заместитель главного редактора)*

Т. П. Петрович

(ведущий редактор журнала)

И. М. Богдевич – Институт почвоведения и агрохимии Национальной академии наук Беларуси

П. А. Витязь – Президиум Национальной академии наук Беларуси

И. Д. Волоотовский – Институт биофизики и клеточной инженерии Национальной академии наук Беларуси

И. В. Гайшун – Институт математики Национальной академии наук Беларуси

С. В. Гапоненко – Белорусский республиканский фонд фундаментальных исследований

А. Е. Дайнеко – Институт мясо-молочной промышленности Научно-практического центра

Национальной академии наук Беларуси по продовольствию

И. В. Залуцкий – Институт физиологии Национальной академии наук Беларуси

О. А. Ивашкевич – Белорусский государственный университет

Н. А. Изобов – Институт математики Национальной академии наук Беларуси

Н. С. Казак – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси

А. А. Коваленя – Президиум Национальной академии наук Беларуси

Ф. Ф. Комаров – Институт прикладных физических проблем имени А. Н. Севченко

Белорусского государственного университета

И. В. Котляров – Институт социологии Национальной академии наук Беларуси

В. А. Лабунов – Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

А. П. Ласковнев – Президиум Национальной академии наук Беларуси

- О. Н. Левко** – Институт истории Национальной академии наук Беларуси
А. И. Лесникович – Белорусский государственный университет
В. Ф. Логинов – Институт природопользования Национальной академии наук Беларуси
А. А. Махнач – Научно-производственный центр по геологии
А. А. Михалевич – Институт энергетики Национальной академии наук Беларуси
М. Е. Никифоров – Президиум Национальной академии наук Беларуси
В. А. Орлович – Президиум Национальной академии наук Беларуси
О. Г. Пенязков – Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси
Ю. М. Плескачевский – Президиум Национальной академии наук Беларуси
Н. С. Сердюченко – Президиум Национальной академии наук Беларуси
А. Ф. Смянович – Республиканский научно-практический центр неврологии и нейрохирургии
Л. М. Томильчик – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси
С. А. Усанов – Президиум Национальной академии наук Беларуси
Л. В. Хотылева – Институт генетики и цитологии Национальной академии наук Беларуси
В. А. Хрипач – Институт биорганической химии Национальной академии наук Беларуси
И. П. Шейко – Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по животноводству

Р е д а к ц и о н н ы й с о в е т

- Ж. И. Алферов** – Санкт-Петербургский национальный исследовательский академический университет
Российской академии наук (Российская Федерация)
К. П. Валуцкас – Национальный институт рака (Литовская Республика)
С. Воденичаров – Болгарская академия наук (Республика Болгария)
И. М. Дунин – Всероссийский научно-исследовательский институт племенного дела
Министерства сельского хозяйства Российской Федерации (Российская Федерация)
Н. Желев – Медицинский биотехнологический центр молекулярной и клеточной технологии
Абертейского университета (Великобритания)
Н. Н. Казанский – Институт лингвистических исследований Российской академии наук (Российская Федерация)
А. Карклинш – Институт почвоведения и растениеводства Латвийского сельскохозяйственного университета в Елгаве
(Латвийская Республика)
С. П. Карпов – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (Российская Федерация)
М. Ларссон – Университетский центр Алба Нова Стокгольмского университета (Королевство Швеция)
А. Г. Наумовец – Национальная академия наук Украины (Украина)
И. Д. Рашаль – Институт биологии Латвийского университета (Латвийская Республика)
В. А. Садовничий – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (Российская Федерация)
А. Г. Тарарико – Национальная академия аграрных наук Украины (Украина)
Л. Трипольская – Литовский центр аграрных и лесных наук (Литовская Республика)
Тьяу Ван Минь – Вьетнамская академия наук и технологий (Социалистическая Республика Вьетнам)
А. Цайлингер – Институт квантовой оптики и квантовой информатики Австрийской академии наук
(Австрийская Республика)
В. Ф. Чехун – Институт экспериментальной патологии, онкологии и радиологии имени Р. Е. Кавецкого
Национальной академии наук Украины (Украина)
Чжао Лян – Хэнаньская академия наук (Китайская Народная Республика)

Адрес редакции:

*ул. Академическая, 1, к. 119, 220072, Минск, Республика Беларусь.
Тел.: +375 17 284-19-19; e-mail: doklady_nanb@mail.ru
doklady.belnauka.by*

ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ. 2017. Т. 61, № 1

Выходит на русском, белорусском и английском языках

Редактор Т. П. П е т р о в и ч
Компьютерная верстка Н. И. К а ш у б а

Сдано в набор 30.01.2017. Выпуск в свет 24.02.2017. Формат 60×84¹/₈. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 16,4. Тираж 158 экз. Заказ 21.

Цена: индивидуальная подписка – 10,34 руб.; ведомственная подписка – 25,29 руб.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/18 от 02.08.2013. ЛП № 02330/455 от 30.12.2013. Ул. Ф. Скорины, 40, 220141, г. Минск.

© «Издательский дом «Беларуская навука».
Доклады НАН Беларуси, 2017

DOKLADY OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

MINSK. BELARUSKAYA NAVUKA. 2017. Vol. 61. No. 1

Published bimonthly

The journal has been published since July, 1957

Founder – National Academy of Sciences of Belarus

The journal is registered on May 18, 2009 by the Ministry of Information of the Republic of Belarus
in the State Registry of Mass Media, reg. no. 387.

*The journal included in the List of Journal for Publication of the Results of Dissertation Research
in the Republic of Belarus and in the Database of Russian Science Citation Index (RSCI)*

E d i t o r - i n - C h i e f

V. G. Gusakov

Chairman of the Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus

E d i t o r i a l B o a r d

S. A. Chizhik

First Vice Chairman of the Presidium of the National Academy
of Sciences of Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)

S. Ya. Kilin

Vice Chairman of the Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus
(*Associate Editor-in-Chief*)

A. V. Kilchevsky

Chief Scientific Secretary of the National Academy
of Sciences of Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)

T. P. Petrovich

(*Lead editor*)

I. M. Bogdevich – Institute for Soil Science and Agrochemistry of the National Academy of Sciences of Belarus

A. Ye. Daineko – Institute for Meat and Dairy Industry of the Scientific
and Practical Center for Foodstuffs of the National Academy of Sciences of Belarus

I. V. Gaishun – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus

S. V. Gaponenko – Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research

O. A. Ivashkevich – Belarusian State University

N. A. Izobov – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus

N. S. Kazak – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus

L. V. Khotyleva – Institute of Genetics and Cytology of the National Academy of Sciences of Belarus

V. A. Khripach – Institute of Bioorganic Chemistry of the National Academy of Sciences of Belarus

F. F. Komarov – A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems of the Belarusian State University

I. V. Kotlyarov – Institute of Sociology of the National Academy of Sciences of Belarus

A. A. Kovalenya – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus

V. A. Labunov – Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

A. P. Laskovnev – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus

A. I. Lesnikovich – Belarusian State University

O. N. Levko – Institute of History of the National Academy of Sciences of Belarus

- V. F. Loginov** – Institute for Nature Management of the National Academy of Sciences of Belarus
A. A. Makhnach – Scientific and Practical Center on Geology
A. A. Mikhalevich – Institute of Power Engineering of the National Academy of Sciences of Belarus
M. Ye. Nikiforov – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus
V. A. Orlovich – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus
O. G. Penyazkov – A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus
Yu. M. Pleskachevsky – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus
N. S. Serduchenko – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus
I. P. Sheiko – Scientific and Practical Center for Animal Breeding
A. F. Smeyanovich – Republican Scientific and Practical Center of Neurology and Neurosurgery
L. M. Tomilchik – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus
S. A. Usanov – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus
P. A. Vitiaz – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus
I. D. Volotovskii – Institute of Biophysics and Cell Engineering of the National Academy of Sciences of Belarus
I. V. Zalutsky – Institute of Physiology of the National Academy of Sciences of Belarus

E d i t o r i a l C o u n c i l

- Zh. Alferov** – Saint Petersburg National Research Academic University of the Russian Academy of Sciences (Russian Federation)
Chau Van Minh – Vietnam Academy of Science and Technology (Socialist Republic of Vietnam)
V. F. Chekhun – Kavetsky Institute of Experimental Pathology, Oncology and Radiology of the National Academy of Sciences (Ukraine)
I. M. Dunin – All-Russian Scientific Research Institute of Breeding of the Ministry of Agriculture Economy of the Russian Federation (Russian Federation)
A. Karklinsh – Institute of Soil Science and Plant of the Latvia University of Agriculture in Elgava (Republic of Latvia)
S. P. Karpov – Lomonosov Moscow State University (Russian Federation)
N. N. Kazansky – Institute for Linguistic Studies of the Russian Academy of Sciences (Russian Federation)
M. Larsson – Alba Nova University Center of the University of Stockholm (Kingdom of Sweden)
A. G. Naumovets – National Academy of Sciences of Ukraine (Ukraine)
I. D. Rashal – Institute of Biology of the University of Latvia (Republic of Latvia)
V. A. Sadovnichiy – Lomonosov Moscow State University (Russian Federation)
A. G. Tarariko – National Academy of Agrarian Sciences of Ukraine (Ukraine)
L. Tripolskaya – Lithuanian Centre of Agricultural and Forest Sciences (Republic of Lithuania)
K. P. Valuckas – National Cancer Institute (Republic of Lithuania)
S. Vodenicharov – Bulgarian Academy of Sciences (Republic of Bulgaria)
A. Zeilinger – Institute for Quantum Optics and Quantum Information of the Austrian Academy of Sciences (Republic of Austria)
Zhao Liang – Henan Academy of Sciences (People's Republic of China)
N. Zhelev – Medical Biotechnology Center of Molecular and Cellular Technology of the Abertay University (Great Britain)

Address of the Editorial Office:

*1, Akademicheskaya Str., room 119, 220072, Minsk, Republic of Belarus.
 Tel.: +375 17 284-19-19; e-mail: doklady_nanb@mail.ru
 doklady.belnauka.by*

DOKLADY OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS. 2017. VOL. 61. No. 1

Printed in Russian, Belarusian and English languages

Editor T. P. Petrovich
 Computer Imposition N. I. Kashuba

Sent for press 30.01.2016. Output 24.02.2017. Format 60×84¹/₈. Offset paper.
 Digital press. Printed sheets 14,88. Publisher's signatures 16,4. Circulation 158 copies. Order 21.
 Price: individual subscription – 10,34 BYN, departmental subscription – 25,29 BYN

Publisher and printing execution:

Republican unitary enterprise "Publishing House "Belaruskaya Navuka".
 Certificate on the state registration of the publisher, manufacturer, distributor of printing editions no. 1/18 dated of August 2, 2013. License for press no. 02330/455 dated of December 30, 2013.
 40, F. Skorina Str., 220141, Minsk, Republic of Belarus.

© RUE "Publishing House "Belaruskaya Navuka".
 Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Можей Н. П. Трехмерные редуктивные однородные пространства неразрешимых групп Ли	7
Забрейко П. П., Михайлов А. В. Квалифицированные оценки погрешности последовательных приближений в теории некорректных линейных задач	18
Ровба Е. А., Поцейко П. Г. Об одной системе рациональных дробей Чебышева–Маркова	24
Антоневич А. Б., Шукур Али А. Оценка норм степеней оператора, порожденного иррациональным поворотом.	30

ФИЗИКА

Томильчик Л. М. Модель пульсирующего массивного шара как точное решение уравнений самовзаимной гамильтоновой динамики.	36
---	----

ХИМИЯ

Опанасенко О. Н., Крутько Н. П., Жигалова О. Л., Лукша О. В., Козинец Т. А. Стабилизация нефтяных дисперсий композициями поверхностно-активных веществ	47
Плиско Т. В., Бильдюкевич А. В., Исайчикова Я. А., Волков В. В. Получение мембран на основе смесей полифениленсульфона и полисульфона	54
Божок Т. С., Калининченко Е. Н. Синтез 2'-дезоксидеокси-2'-фтор-D-арабинонуклеозидов 6-замещенного тимина	61

БИОЛОГИЯ

Семенченко В. П. Соотношение между выживаемостью и плодовитостью в когортах <i>Daphnia longispina</i> (Cladocera) при разных трофических условиях	68
Вежновец В. В. Влияние повышения температуры на состояние популяции реликтового рачка <i>Limnocalanus macrurus</i> Sars в мезотрофном озере	73
Пилипчук Т. А., Валентович Л. Н., Титок М. А., Коломиец Э. И. Особенности молекулярно-генетической организации фага Pf-10	78

МЕДИЦИНА

Николаевич Л. Н., Залуцкий И. В., Руденкова И. В. Новые подходы в диагностике опухолей толстой кишки по критерию ДНК-плоидности.	85
---	----

НАУКИ О ЗЕМЛЕ

Чешик И. А., Чунихин Л. А., Дроздов Д. Н., Власова Н. Г., Карабанов А. Г. Оценка влияния радона на радиационную обстановку в Республике Беларусь.	89
--	----

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Байков В. И., Чорный А. Д. Увлечение вязкопластической жидкости движущейся вертикально пластиной (на англ. яз.)	95
Артемьев В. М., Наумов А. О., Кохан Л. Л. Рекуррентная линейная фильтрация случайных последовательностей методом наименьших квадратов с регуляризацией решения.	102
Кот В. А. Прямое интегрирование уравнения теплопроводности для полуограниченного пространства	108

АГРАРНЫЕ НАУКИ

Барулин Н. В. Обнаружение внешних полосспецифических признаков в строении производных кориума личинок и молоди стерляди <i>Acipenser rhuthenus</i>	119
---	-----

CONTENTS

MATHEMATICS

Mozhey N. P. Three-dimensional reductive homogeneous spaces of unsolvable Lie groups.....	7
Zabreiko P. P., Mikhailov A. V. Qualified error estimates of successive approximations in theory of ill-posed linear problems.....	18
Rovba Y. A., Potsejko P. G. About one system of the Chebyshev–Markov rational fractions.....	24
Antonevich A. B., Shukur Ali A. Estimations of the norm of the powers of the operator generated by irrational rotation.....	30

PHYSICS

Tomilchik L. M. Model of massive pulsating sphere as an exact solution of the Hamiltonian self reciprocal dynamics equations.....	36
--	----

CHEMISTRY

Opanasenko O. N., Krut’ko N. P., Zhigalova O. L., Luksha O. V., Kozinets T. A. Stabilization of petroleum dispersions by the compositions of surfactants.....	47
Plisko T. V., Bilyukevich A. V., Isaichykava Y. A., Volkov V. V. Preparation of polyphenylsulfone/polysulfone blend membranes.....	54
Bozhok T. S., Kalinichenko E. N. Synthesis of 6-substituted thymine 2'-deoxy-2'-fluoro-D-arabinofuranosyl nucleosides.....	61

BIOLOGY

Semenchenko V. P. Ratio between the survival and fecundity in the cohorts of <i>Daphnia longispina</i> (Cladocera) under different trophic conditions.....	68
Vezhnavevets V. V. Influence of a temperature increase on the condition of the relic crustacean <i>Limnocalanus macrurus</i> Sars population in a mesotrophic lake.....	73
Pilipchuk T. A., Valentovich L. N., Titok M. A., Kolomiets E. I. Peculiarities of the molecular-genetic structure of phage Pf-10.....	78

MEDICINE

Nikolaevich L. N., Zalutsky I. V., Rudenkova I. V. New approaches to the diagnosis of sigmoid colon cancer of patients with colorectal cancer by the DNA-ploidy criterion.....	85
---	----

EARTH SCIENCES

Cheshik I. A., Chunikhin L. A., Drozdov D. N., Vlasova N. G., Karabanov A. K. Assessment of the radon influence on the radiation situation in the Republic of Belarus.....	89
---	----

TECHNICAL SCIENCES

Baikov V. I., Chorny A. D. Capturing a viscoplastic liquid by a moving vertical plate.....	95
Artemiev V. M., Naumov A. O., Kokhan L. L. Recursive linear filtering of random sequences using the least squares method with solution regularization.....	102
Kot V. A. Direct integration of the heat conduction equation for a semi-bounded space.....	108

AGRARIAN SCIENCES

Barulin N. V. Detection of the external sex specific features in the structure of corium derivatives of larvae and juveniles of sterlet <i>Acipenser ruthenus</i>	119
--	-----

МАТЕМАТИКА**MATHEMATICS**

УДК 514.765.1

Поступило в редакцию 26.09.2016

Received 26.09.2016

Н. П. Можей*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск,
Республика Беларусь***ТРЕХМЕРНЫЕ РЕДУКТИВНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА
НЕРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ***(Представлено академиком В. И. Корзюком)*

В работе представлена локальная классификация трехмерных редуктивных однородных пространств, допускающих нормальную связность. Рассматривается случай неразрешимой группы Ли преобразований с разрешимым стабилизатором. Описаны все инвариантные аффинные связности вместе с их тензорами кривизны и кручения, выписаны канонические связности, а также естественные связности без кручения. Исследованы алгебры голономии однородных пространств и найдено, когда инвариантная связность нормальна.

Ключевые слова: нормальная связность, редуктивное пространство, группа преобразований, алгебра голономии.

N. P. Mozhey*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus***THREE-DIMENSIONAL REDUCTIVE HOMOGENEOUS SPACES OF UNSOLVABLE LIE GROUPS***(Communicated by Academician V. I. Korzyuk)*

In this article we present a local classification of three-dimensional reductive homogeneous spaces allowing a normal connection. We have concerned the case of the unsolvable Lie group of transformations with a solvable stabilizer. We describe all invariant affine connections together with their curvature and torsion tensors, canonical connections and natural torsion-free connections. We have studied the holonomy algebras of homogeneous spaces and have found when the invariant connection is normal.

Keywords: normal connection, reductive space, transformation group, holonomy algebra.

Инвариантные связности на редуктивных однородных пространствах изучались П. К. Рашевским, М. Куритой, Э. Б. Винбергом, Ш. Кобаяси, К. Номидзу [1] и др. Настоящее сообщение является продолжением работы автора о нормальных связностях на редуктивных однородных пространствах, в которой приведен более подробный тематический обзор, а также обоснование применяемых методов; при изложении сохранены обозначения, введенные ранее. В данной работе также изучаются трехмерные редуктивные пространства, но внимание сосредоточено на пространствах с неразрешимой группой преобразований и разрешимым стабилизатором.

Цель работы – описать трехмерные редуктивные однородные пространства, допускающие нормальную связность, сами связности, их тензоры кривизны, кручения и алгебры голономии.

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа \bar{G} , $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств (M, \bar{G}) равносильна классификации пар групп Ли (\bar{G}, G) , где $G \subset \bar{G}$ (см., напр., [2]). Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли \bar{G} , а \mathfrak{g} – подалгебра, соответствующая подгруппе G . Однородное

пространство \bar{G}/G *редуктивно*, если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ для \bar{G} может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли \mathfrak{g} для G и $\text{ad}(G)$ -инвариантного подпространства \mathfrak{m} , т. е. если $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$; $\text{ad}(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Второе условие влечет $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и наоборот, если G связна. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление подалгебры \mathfrak{g} (если \bar{G}/G редуктивно, то линейное представление изотропии для G всегда точное). Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к \mathfrak{g} в $\bar{\mathfrak{g}}$, и фактор-пространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Если \bar{G}/G редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность.

Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, \dots, e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Будем полагать, что подалгебра Ли \mathfrak{g} порождается векторами e_1, \dots, e_{n-3} , а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис \mathfrak{m} . Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в [3], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$.

Т е о р е м а. *Все трехмерные редуктивные однородные пространства, допускающие нормальную связность, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима, а \mathfrak{g} разрешима ($\mathfrak{g} \neq \{0\}$), локально имеют следующий вид:*

<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="padding: 2px;">3.19.14.</td><td>e_1</td><td>e_2</td><td>e_3</td><td>u_1</td><td>u_2</td><td>u_3</td></tr> <tr><td>e_1</td><td>0</td><td>$-e_2$</td><td>e_3</td><td>0</td><td>u_2</td><td>$-u_3$</td></tr> <tr><td>e_2</td><td>e_2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>u_1</td><td>0</td></tr> <tr><td>e_3</td><td>$-e_3$</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>u_1</td></tr> <tr><td>u_1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>e_3</td><td>e_2</td></tr> <tr><td>u_2</td><td>$-u_2$</td><td>$-u_1$</td><td>0</td><td>$-e_3$</td><td>0</td><td>e_1</td></tr> <tr><td>u_3</td><td>u_3</td><td>0</td><td>$-u_1$</td><td>$-e_2$</td><td>$-e_1$</td><td>0</td></tr> </table>	3.19.14.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	e_1	0	$-e_2$	e_3	0	u_2	$-u_3$	e_2	e_2	0	0	0	u_1	0	e_3	$-e_3$	0	0	0	0	u_1	u_1	0	0	0	0	e_3	e_2	u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	$-e_3$	0	e_1	u_3	u_3	0	$-u_1$	$-e_2$	$-e_1$	0	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="padding: 2px;">3.21.6.</td><td>e_1</td><td>e_2</td><td>e_3</td><td>u_1</td><td>u_2</td><td>u_3</td></tr> <tr><td>e_1</td><td>0</td><td>$-e_3$</td><td>e_2</td><td>0</td><td>$-u_3$</td><td>u_2</td></tr> <tr><td>e_2</td><td>e_3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>u_1</td><td>0</td></tr> <tr><td>e_3</td><td>$-e_2$</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>u_1</td></tr> <tr><td>u_1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>e_2</td><td>e_3</td></tr> <tr><td>u_2</td><td>u_3</td><td>$-u_1$</td><td>0</td><td>$-e_2$</td><td>0</td><td>e_1</td></tr> <tr><td>u_3</td><td>$-u_2$</td><td>0</td><td>$-u_1$</td><td>$-e_3$</td><td>$-e_1$</td><td>0</td></tr> </table>	3.21.6.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	e_1	0	$-e_3$	e_2	0	$-u_3$	u_2	e_2	e_3	0	0	0	u_1	0	e_3	$-e_2$	0	0	0	0	u_1	u_1	0	0	0	0	e_2	e_3	u_2	u_3	$-u_1$	0	$-e_2$	0	e_1	u_3	$-u_2$	0	$-u_1$	$-e_3$	$-e_1$	0
3.19.14.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3																																																																																													
e_1	0	$-e_2$	e_3	0	u_2	$-u_3$																																																																																													
e_2	e_2	0	0	0	u_1	0																																																																																													
e_3	$-e_3$	0	0	0	0	u_1																																																																																													
u_1	0	0	0	0	e_3	e_2																																																																																													
u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	$-e_3$	0	e_1																																																																																													
u_3	u_3	0	$-u_1$	$-e_2$	$-e_1$	0																																																																																													
3.21.6.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3																																																																																													
e_1	0	$-e_3$	e_2	0	$-u_3$	u_2																																																																																													
e_2	e_3	0	0	0	u_1	0																																																																																													
e_3	$-e_2$	0	0	0	0	u_1																																																																																													
u_1	0	0	0	0	e_2	e_3																																																																																													
u_2	u_3	$-u_1$	0	$-e_2$	0	e_1																																																																																													
u_3	$-u_2$	0	$-u_1$	$-e_3$	$-e_1$	0																																																																																													
<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="padding: 2px;">3.21.7.</td><td>e_1</td><td>e_2</td><td>e_3</td><td>u_1</td><td>u_2</td><td>u_3</td></tr> <tr><td>e_1</td><td>0</td><td>$-e_3$</td><td>e_2</td><td>0</td><td>$-u_3$</td><td>u_2</td></tr> <tr><td>e_2</td><td>e_3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>u_1</td><td>0</td></tr> <tr><td>e_3</td><td>$-e_2$</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>u_1</td></tr> <tr><td>u_1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>$-e_2$</td><td>$-e_3$</td></tr> <tr><td>u_2</td><td>u_3</td><td>$-u_1$</td><td>0</td><td>e_2</td><td>0</td><td>$-e_1$</td></tr> <tr><td>u_3</td><td>$-u_2$</td><td>0</td><td>$-u_1$</td><td>e_3</td><td>e_1</td><td>0</td></tr> </table>		3.21.7.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	e_1	0	$-e_3$	e_2	0	$-u_3$	u_2	e_2	e_3	0	0	0	u_1	0	e_3	$-e_2$	0	0	0	0	u_1	u_1	0	0	0	0	$-e_2$	$-e_3$	u_2	u_3	$-u_1$	0	e_2	0	$-e_1$	u_3	$-u_2$	0	$-u_1$	e_3	e_1	0																																																	
3.21.7.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3																																																																																													
e_1	0	$-e_3$	e_2	0	$-u_3$	u_2																																																																																													
e_2	e_3	0	0	0	u_1	0																																																																																													
e_3	$-e_2$	0	0	0	0	u_1																																																																																													
u_1	0	0	0	0	$-e_2$	$-e_3$																																																																																													
u_2	u_3	$-u_1$	0	e_2	0	$-e_1$																																																																																													
u_3	$-u_2$	0	$-u_1$	e_3	e_1	0																																																																																													
<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="padding: 2px;">2.9.12.</td><td>e_1</td><td>e_2</td><td>u_1</td><td>u_2</td><td>u_3</td></tr> <tr><td>e_1</td><td>0</td><td>$-e_2$</td><td>u_1</td><td>$-2u_2$</td><td>$2u_3$</td></tr> <tr><td>e_2</td><td>e_2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>u_1</td></tr> <tr><td>u_1</td><td>$-u_1$</td><td>0</td><td>0</td><td>e_2</td><td>0</td></tr> <tr><td>u_2</td><td>$2u_2$</td><td>0</td><td>$-e_2$</td><td>0</td><td>$-e_1$</td></tr> <tr><td>u_3</td><td>$-2u_3$</td><td>$-u_1$</td><td>0</td><td>e_1</td><td>0</td></tr> </table>	2.9.12.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	e_1	0	$-e_2$	u_1	$-2u_2$	$2u_3$	e_2	e_2	0	0	0	u_1	u_1	$-u_1$	0	0	e_2	0	u_2	$2u_2$	0	$-e_2$	0	$-e_1$	u_3	$-2u_3$	$-u_1$	0	e_1	0	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="padding: 2px;">2.21.4.</td><td>e_1</td><td>e_2</td><td>u_1</td><td>u_2</td><td>u_3</td></tr> <tr><td>e_1</td><td>0</td><td>e_2</td><td>u_1</td><td>0</td><td>$-u_3$</td></tr> <tr><td>e_2</td><td>$-e_2$</td><td>0</td><td>0</td><td>u_1</td><td>u_2</td></tr> <tr><td>u_1</td><td>$-u_1$</td><td>0</td><td>0</td><td>u_1</td><td>u_2</td></tr> <tr><td>u_2</td><td>0</td><td>$-u_1$</td><td>$-u_1$</td><td>0</td><td>u_3</td></tr> <tr><td>u_3</td><td>u_3</td><td>$-u_2$</td><td>$-u_2$</td><td>$-u_3$</td><td>0</td></tr> </table>	2.21.4.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$	e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2	u_1	$-u_1$	0	0	u_1	u_2	u_2	0	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3	u_3	u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0																										
2.9.12.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3																																																																																														
e_1	0	$-e_2$	u_1	$-2u_2$	$2u_3$																																																																																														
e_2	e_2	0	0	0	u_1																																																																																														
u_1	$-u_1$	0	0	e_2	0																																																																																														
u_2	$2u_2$	0	$-e_2$	0	$-e_1$																																																																																														
u_3	$-2u_3$	$-u_1$	0	e_1	0																																																																																														
2.21.4.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3																																																																																														
e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$																																																																																														
e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2																																																																																														
u_1	$-u_1$	0	0	u_1	u_2																																																																																														
u_2	0	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3																																																																																														
u_3	u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0																																																																																														
<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="padding: 2px;">1.1.5.</td><td>e_1</td><td>u_1</td><td>u_2</td><td>u_3</td></tr> <tr><td>e_1</td><td>0</td><td>u_1</td><td>$-u_2$</td><td>0</td></tr> <tr><td>u_1</td><td>$-u_1$</td><td>0</td><td>e_1</td><td>0</td></tr> <tr><td>u_2</td><td>u_2</td><td>$-e_1$</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>u_3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	1.1.5.	e_1	u_1	u_2	u_3	e_1	0	u_1	$-u_2$	0	u_1	$-u_1$	0	e_1	0	u_2	u_2	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0	0	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="padding: 2px;">1.1.7.</td><td>e_1</td><td>u_1</td><td>u_2</td><td>u_3</td></tr> <tr><td>e_1</td><td>0</td><td>u_1</td><td>$-u_2$</td><td>0</td></tr> <tr><td>u_1</td><td>$-u_1$</td><td>0</td><td>e_1+u_3</td><td>0</td></tr> <tr><td>u_2</td><td>u_2</td><td>$-e_1-u_3$</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>u_3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	1.1.7.	e_1	u_1	u_2	u_3	e_1	0	u_1	$-u_2$	0	u_1	$-u_1$	0	e_1+u_3	0	u_2	u_2	$-e_1-u_3$	0	0	u_3	0	0	0	0	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="padding: 2px;">1.3.3.</td><td>e_1</td><td>u_1</td><td>u_2</td><td>u_3</td></tr> <tr><td>e_1</td><td>0</td><td>$-u_2$</td><td>u_1</td><td>0</td></tr> <tr><td>u_1</td><td>u_2</td><td>0</td><td>e_1+u_3</td><td>0</td></tr> <tr><td>u_2</td><td>$-u_1$</td><td>$-e_1-u_3$</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>u_3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	1.3.3.	e_1	u_1	u_2	u_3	e_1	0	$-u_2$	u_1	0	u_1	u_2	0	e_1+u_3	0	u_2	$-u_1$	$-e_1-u_3$	0	0	u_3	0	0	0	0																						
1.1.5.	e_1	u_1	u_2	u_3																																																																																															
e_1	0	u_1	$-u_2$	0																																																																																															
u_1	$-u_1$	0	e_1	0																																																																																															
u_2	u_2	$-e_1$	0	0																																																																																															
u_3	0	0	0	0																																																																																															
1.1.7.	e_1	u_1	u_2	u_3																																																																																															
e_1	0	u_1	$-u_2$	0																																																																																															
u_1	$-u_1$	0	e_1+u_3	0																																																																																															
u_2	u_2	$-e_1-u_3$	0	0																																																																																															
u_3	0	0	0	0																																																																																															
1.3.3.	e_1	u_1	u_2	u_3																																																																																															
e_1	0	$-u_2$	u_1	0																																																																																															
u_1	u_2	0	e_1+u_3	0																																																																																															
u_2	$-u_1$	$-e_1-u_3$	0	0																																																																																															
u_3	0	0	0	0																																																																																															
<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="padding: 2px;">1.3.4.</td><td>e_1</td><td>u_1</td><td>u_2</td><td>u_3</td></tr> <tr><td>e_1</td><td>0</td><td>$-u_2$</td><td>u_1</td><td>0</td></tr> <tr><td>u_1</td><td>u_2</td><td>0</td><td>$-e_1+u_3$</td><td>0</td></tr> <tr><td>u_2</td><td>$-u_1$</td><td>e_1-u_3</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>u_3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>		1.3.4.	e_1	u_1	u_2	u_3	e_1	0	$-u_2$	u_1	0	u_1	u_2	0	$-e_1+u_3$	0	u_2	$-u_1$	e_1-u_3	0	0	u_3	0	0	0	0	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="padding: 2px;">1.3.5.</td><td>e_1</td><td>u_1</td><td>u_2</td><td>u_3</td></tr> <tr><td>e_1</td><td>0</td><td>$-u_2$</td><td>u_1</td><td>0</td></tr> <tr><td>u_1</td><td>u_2</td><td>0</td><td>e_1</td><td>0</td></tr> <tr><td>u_2</td><td>$-u_1$</td><td>$-e_1$</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>u_3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>		1.3.5.	e_1	u_1	u_2	u_3	e_1	0	$-u_2$	u_1	0	u_1	u_2	0	e_1	0	u_2	$-u_1$	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0	0																																														
1.3.4.	e_1	u_1	u_2	u_3																																																																																															
e_1	0	$-u_2$	u_1	0																																																																																															
u_1	u_2	0	$-e_1+u_3$	0																																																																																															
u_2	$-u_1$	e_1-u_3	0	0																																																																																															
u_3	0	0	0	0																																																																																															
1.3.5.	e_1	u_1	u_2	u_3																																																																																															
e_1	0	$-u_2$	u_1	0																																																																																															
u_1	u_2	0	e_1	0																																																																																															
u_2	$-u_1$	$-e_1$	0	0																																																																																															
u_3	0	0	0	0																																																																																															
<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="padding: 2px;">1.3.6.</td><td>e_1</td><td>u_1</td><td>u_2</td><td>u_3</td></tr> <tr><td>e_1</td><td>0</td><td>$-u_2$</td><td>u_1</td><td>0</td></tr> <tr><td>u_1</td><td>u_2</td><td>0</td><td>$-e_1$</td><td>0</td></tr> <tr><td>u_2</td><td>$-u_1$</td><td>e_1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>u_3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>		1.3.6.	e_1	u_1	u_2	u_3	e_1	0	$-u_2$	u_1	0	u_1	u_2	0	$-e_1$	0	u_2	$-u_1$	e_1	0	0	u_3	0	0	0	0	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="padding: 2px;">1.8.2.</td><td>e_1</td><td>u_1</td><td>u_2</td><td>u_3</td></tr> <tr><td>e_1</td><td>0</td><td>0</td><td>u_1</td><td>u_2</td></tr> <tr><td>u_1</td><td>0</td><td>0</td><td>u_1</td><td>u_2</td></tr> <tr><td>u_2</td><td>$-u_1$</td><td>$-u_1$</td><td>0</td><td>u_3</td></tr> <tr><td>u_3</td><td>$-u_2$</td><td>$-u_2$</td><td>$-u_3$</td><td>0</td></tr> </table>		1.8.2.	e_1	u_1	u_2	u_3	e_1	0	0	u_1	u_2	u_1	0	0	u_1	u_2	u_2	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3	u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0																																														
1.3.6.	e_1	u_1	u_2	u_3																																																																																															
e_1	0	$-u_2$	u_1	0																																																																																															
u_1	u_2	0	$-e_1$	0																																																																																															
u_2	$-u_1$	e_1	0	0																																																																																															
u_3	0	0	0	0																																																																																															
1.8.2.	e_1	u_1	u_2	u_3																																																																																															
e_1	0	0	u_1	u_2																																																																																															
u_1	0	0	u_1	u_2																																																																																															
u_2	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3																																																																																															
u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0																																																																																															

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть \mathfrak{g} – подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ такая, что пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ допускает нормальную связность, $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима, а \mathfrak{g} разрешима ($\mathfrak{g} \neq \{0\}$). Тогда \mathfrak{g} сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр [4]:

$$\begin{array}{l}
 4.21 \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & y & u \\ \hline & & z \\ \hline \end{array}; 3.13 \begin{array}{|c|c|} \hline x & z \\ \hline & y \\ \hline & \mu x \\ \hline \end{array}, \begin{array}{l} \mu = -1, \\ \mu = 0; \end{array} 3.19 \begin{array}{|c|c|} \hline y & z \\ \hline x & \\ \hline & -x \\ \hline \end{array}; \\
 3.21 \begin{array}{|c|c|} \hline y & z \\ \hline & x \\ \hline & -x \\ \hline \end{array}; 3.25 \begin{array}{|c|c|} \hline x & z \\ \hline & y \\ \hline \end{array}; 2.8 \begin{array}{|c|c|} \hline & x \\ \hline y & \\ \hline \end{array}; 2.9 \begin{array}{|c|c|} \hline y & x \\ \hline & -2y \\ \hline & 2y \\ \hline \end{array}; 2.17 \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline y \\ \hline \end{array}; \\
 2.21 \begin{array}{|c|c|} \hline x & y \\ \hline & y \\ \hline & -x \\ \hline \end{array}; 1.1 \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline -x \\ \hline \end{array}; 1.3 \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline -x \\ \hline \end{array}; 1.5 \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array}; 1.8 \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline x \\ \hline \end{array}.
 \end{array}$$

Предполагается, что переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат \mathbb{R} (μ – параметр).

Для каждой такой подалгебры найдем редуцирующие изотропно-точные пары, выберем пары, допускающие нормальную связность, а также выпишем сами аффинные связности, их тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии. Рассмотрим, например, подалгебру \mathfrak{g} в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ типа 2.21. Пусть $E = \{e_1, e_2\}$ – базис \mathfrak{g} , где

$$e_1 = \Lambda(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \Lambda(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Через \mathfrak{h} обозначим нильпотентную подалгебру алгебры Ли \mathfrak{g} , порожденную вектором e_1 . Имеем $\bar{\mathfrak{g}}^\alpha(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h}) \times U^\alpha(\mathfrak{h})$ для всех $\alpha \in \mathfrak{h}^*$. Тогда

$$\mathfrak{g}^{(0)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}e_1, U^{(1)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}u_1, \mathfrak{g}^{(1)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}e_2, U^{(0)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}u_2, U^{(-1)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}u_3,$$

проверив тождество Якоби, получим, что $[u_1, u_2] = \alpha_1 u_1, [u_1, u_3] = \alpha_1 u_2, [u_2, u_3] = \alpha_1 u_3$. При $\alpha_1 \neq 0$ отображение $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_4 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$, где $\pi(e_1) = e_1, \pi(e_2) = e_2, \pi(u_1) = \frac{1}{\alpha_1} u_1, \pi(u_2) = \frac{1}{\alpha_1} u_2, \pi(u_3) = \frac{1}{\alpha_1} u_3$, устанавливает эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и 2.21.4 (это пространство является редуцирующим с каноническим разложением). При $\alpha_1 = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ тривиальна, т. е. у полученной пары алгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ является разрешимой и не входит в рассматриваемый в работе класс алгебр. Разумеется, пары не сопряжены друг другу, так как в случае 2.21.4 алгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ не является разрешимой.

Для остальных подалгебр рассуждения аналогичны. В частности, рассмотрим, например, подалгебру 3.21. Пусть $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ – базис \mathfrak{g} , где

$$e_1 = \Lambda(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \Lambda(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \Lambda(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Через \mathfrak{h} обозначим нильпотентную подалгебру алгебры Ли \mathfrak{g} , порожденную вектором e_1 . Рассмотрим комплексный обобщенный модуль $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, U^{\mathbb{C}})$. Положим $\tilde{e}_i = e_i \otimes 1, i = 1, 2, 3$, и $\tilde{u}_j = u_j \otimes 1, j = 1, 2, 3$. Тогда $\tilde{E} = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ – базис $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Векторное пространство $U^{\mathbb{C}}$ может быть отождествлено с \mathbb{C}^3 , и $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3\}$ – стандартный базис в $U^{\mathbb{C}}$. Тогда $\mathfrak{g}^{(0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}\tilde{e}_1, \mathfrak{g}^{(i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{e}_2 + i\tilde{e}_3), \mathfrak{g}^{(-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{e}_2 - i\tilde{e}_3)$,

$$(U^{\mathbb{C}})^{(0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}\tilde{u}_1, (U^{\mathbb{C}})^{(+i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3), (U^{\mathbb{C}})^{(-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3)$$

и

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= -e_3, \\ [e_1, e_3] &= e_2, \quad [e_2, e_3] = 0, \\ [e_1, u_1] &= 0, \quad [e_2, u_1] = pe_2, \quad [e_3, u_1] = pe_3, \\ [e_1, u_2] &= qe_3 - u_3, \quad [e_2, u_2] = u_1, \quad [e_3, u_2] = pe_1, \\ [e_1, u_3] &= u_2 + re_3, \quad [e_2, u_3] = -pe_1, \quad [e_3, u_3] = u_1, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} (\bar{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}})^{(0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) &= \mathbb{C}\tilde{e}_1 + \mathbb{C}\tilde{u}_1, \quad (\bar{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}})^{(i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{e}_2 + i\tilde{e}_3) + \mathbb{C}(\tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3), \\ (\bar{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}})^{(-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) &= \mathbb{C}(\tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3) + \mathbb{C}(\tilde{e}_2 - i\tilde{e}_3). \end{aligned}$$

Поэтому

$$[u_1, u_2] = a_2e_2 + a_3e_3 + \alpha_2u_2 + \alpha_3u_3, \quad [u_1, u_3] = b_2e_2 + b_3e_3 + \beta_2u_2 + \beta_3u_3, \quad [u_2, u_3] = c_1e_1 + \gamma_1u_1.$$

При $p \neq 0$ пространство не является редуктивным (не существует разложения $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$), так как не выполняется условие $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. При $p = 0$, используя тождество Якоби, видим, что $[u_1, u_2] = a_2e_2, [u_1, u_3] = a_2e_3, [u_2, u_3] = a_2e_1 + \gamma_1u_1, q = 0$. При $r \neq 0$ пространство также не является редуктивным. При $a_2 = r = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре 3.21.1 при помощи отображения $\pi: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}_1, \pi(e_i) = e_i, i = 1, 2, 3, \pi(u_1) = u_1, \pi(u_2) = u_2 - \frac{\gamma_1}{2}e_3, \pi(u_3) = u_3 - \frac{\gamma_1}{2}e_2$. Полученная алгебра является разрешимой и не входит в рассматриваемый в работе класс алгебр.

При $a_2 > 0, r = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 3.21.6 (это пространство является редуктивным с каноническим разложением) при помощи отображения $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_6 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$ такого, что

$$\pi(e_i) = e_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \pi(u_1) = \frac{1}{\sqrt{a_2}}u_1, \quad \pi(u_2) = \frac{1}{\sqrt{a_2}}\left(u_2 - \frac{\gamma_1}{2}e_3\right), \quad \pi(u_3) = \frac{1}{\sqrt{a_2}}\left(u_3 - \frac{\gamma_1}{2}e_2\right).$$

При $a_2 < 0, r = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 3.21.7 (пространство является редуктивным с каноническим разложением).

Заметим, что $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_6, \dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_7$; подалгебра Леви в $\bar{\mathfrak{g}}_6$ изоморфна $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, а подалгебра Леви в $\bar{\mathfrak{g}}_7$ изоморфна $\mathfrak{su}(2)$. Отсюда следует, что пары не эквивалентны друг другу.

Проведя вычисления, аналогичные приведенным выше, получаем, что редуктивные пространства задают только пары, приведенные в теореме. Выпишем для найденных пар разложение Леви:

Пара	Разложение Леви	Пара	Разложение Леви
3.19.14	$\{-e_2, u_1, e_3\}, \{-u_1 + u_2, -u_3, e_1 - e_2\}$	1.1.7	$\{u_3\}, \{-e_1 - u_3, -u_1, -u_2\}$
3.21.6	$\{-e_3, e_2, u_1\}, \{-u_3, -u_1 + u_2, e_1 - e_3\}$	1.3.3	$\{u_3\}, \{e_1 + u_3, u_1, u_2\}$
3.21.7	$\{u_1, e_2, -e_3\}, \{-u_3, u_1 + u_2, -e_1 - e_3\}$	1.3.4	$\{u_3\}, \{-e_1 + u_3, -u_1, -u_2\}$
2.9.12	$\{u_1, -e_2\}, \{-2u_2, 2u_1 + 2u_3, -e_1 - e_2\}$	1.3.5	$\{u_3\}, \{e_1, u_1, u_2\}$
2.21.4	$\{e_1 + u_2, -e_2 + u_1\}, \{u_1, -u_3, u_2\}$	1.3.6	$\{u_3\}, \{-e_1, -u_1, -u_2\}$
1.1.5	$\{u_3\}, \{-e_1, -u_1, -u_2\}$	1.8.2	$\{-e_1 + u_1\}, \{u_1, u_2, u_3\}$

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на \mathfrak{g} есть изотропное представление подалгебры, а все отображения являются \mathfrak{g} -инвариантными. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве (M, \bar{G}) находятся во взаимно однозначном соответствии со связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ (см., напр., [5]). Будем описывать аффинную связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1), \Lambda(u_2), \Lambda(u_3)$. Пусть

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{pmatrix}$$

для некоторых $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j} \in \mathbb{R}$ (при $i, j = 1, 2, 3$). Пусть, например, далее $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – локально однородное пространство 2.21.4. Отображение является \mathfrak{g} -инвариантным, следовательно,

$$[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = 0,$$

получим $p_{2,1} = 0, p_{2,2} = p_{1,1}, p_{2,3} = p_{1,2}, p_{3,1} = 0, p_{3,2} = p_{2,1}, p_{3,3} = p_{1,1}, p_{3,2} = 0$. Поскольку

$$[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_1, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1), p_{1,1} = p_{1,3} = 0.$$

Так как

$$[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = \Lambda([e_2, u_2]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_1),$$

$$q_{2,2} = q_{1,1} + p_{1,2}, q_{2,3} = q_{1,2} + p_{1,3}, q_{3,3} = q_{2,2} + p_{1,2}, q_{2,1} = q_{3,1} = q_{3,2} = 0.$$

Если

$$[\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = \Lambda([e_1, u_2]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = 0,$$

то $q_{1,2} = q_{1,3} = 0$. Поскольку

$$[\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)] = \Lambda([e_2, u_3]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_2),$$

$$q_{1,1} = -p_{1,2} = r_{2,1} = r_{3,2}, r_{2,2} = r_{1,1}, r_{2,3} = r_{1,2}, r_{3,1} = 0, r_{3,3} = r_{2,2}.$$

Так как

$$[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = \Lambda([e_1, u_3]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = -\Lambda(u_3),$$

имеем $r_{1,1} = r_{1,2} = r_{1,3} = 0$, таким образом,

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Прямыми вычислениями получаем, что аффинные связности на найденных парах имеют вид:

Пара	Связность
3.19.14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.21.6 3.21.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -q_{1,3} & q_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.12	нулевая
2.21.4	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
1.1.5 1.1.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ q_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
1.3.3 1.3.4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & 0 \\ -r_{1,2} & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
1.3.5 1.3.6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & 0 \\ -r_{1,2} & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
1.8.2	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{1,2} + p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ -p_{1,2} & r_{1,1} + q_{1,2} & r_{1,2} + q_{1,3} \\ 0 & -p_{1,2} & r_{1,1} + 2q_{1,2} + p_{1,3} \end{pmatrix}$

Инвариантная связность, определяемая равенством $\Lambda|_{\mathfrak{m}} = 0$, называется *канонической связностью* (относительно разложения $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$), ее также называют *канонической связностью второго рода*. Для канонической связности каждая геодезическая, исходящая из o , имеет вид $f_t(o)$, где $f_t = \exp(tx)$, $x \in \mathfrak{m}$. Таким образом, связность является канонической, если $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$. Выпишем, при каких условиях связность имеет те же геодезические, что и каноническая:

3.19.14	$r_{12} = -q_{13}$	1.1.7	$q_{31} = -p_{32}, r_{33} = 0, r_{11} = -p_{13}, r_{22} = -q_{23}$
3.21.6	$q_{12} = 0$	1.3.3	$p_{31} = 0, r_{33} = 0, r_{11} = -p_{13}, r_{12} = p_{23}$
3.21.7	$q_{12} = 0$	1.3.4	$p_{31} = 0, r_{33} = 0, r_{11} = -p_{13}, r_{12} = p_{23}$
2.9.12	нулевая	1.3.5	$p_{31} = 0, r_{33} = 0, r_{11} = -p_{13}, r_{12} = p_{23}$
2.21.4	p_{12} – любое	1.3.6	$p_{31} = 0, r_{33} = 0, r_{11} = -p_{13}, r_{12} = p_{23}$
1.1.5	$q_{31} = -p_{32}, r_{33} = 0, r_{11} = -p_{13}, r_{22} = -q_{23}$	1.8.2	$q_{12} = 0, r_{13} = 0, r_{11} = -p_{13}, r_{12} = -q_{13}$

Каждое редуktивное однородное пространство допускает единственную инвариантную аффинную связность без кручения, имеющую те же геодезические, что и каноническая связность: $\Lambda_{\mathfrak{m}}(x)y = 1/2[x, y]_{\mathfrak{m}}$, $x, y \in \mathfrak{m}$. Такая связность называется *естественной связностью без кручения*, ее также называют *канонической связностью первого рода*. Выпишем, при каких условиях связность является естественной связностью без кручения:

Пара	Естественная связность без кручения	Пара	Естественная связность без кручения
3.19.14	$r_{12} = q_{13} = 0$ (нулевая)	1.1.7	$q_{31} = -1/2, p_{32} = 1/2, r_{33} = r_{11} = p_{13} = r_{22} = q_{23} = 0$
3.21.6	$q_{12} = q_{13} = 0$ (нулевая)	1.3.3	$p_{31} = r_{33} = r_{11} = p_{13} = r_{12} = p_{23} = 0, p_{32} = 1/2$
3.21.7	$q_{12} = q_{13} = 0$ (нулевая)	1.3.4	$p_{31} = r_{33} = r_{11} = p_{13} = r_{12} = p_{23} = 0, p_{32} = 1/2$
2.9.12	параметры нулевые	1.3.5	$p_{31} = r_{33} = r_{11} = p_{13} = r_{12} = p_{23} = p_{32} = 0$ (нулевая)
2.21.4	$p_{12} = 1/2$	1.3.6	$p_{31} = r_{33} = r_{11} = p_{13} = r_{12} = p_{23} = p_{32} = 0$ (нулевая)
1.1.5	$q_{31} = p_{32} = r_{33} = r_{11} = p_{13} = r_{22} = q_{23} = 0$ (нулевая)	1.8.2	$q_{12} = r_{13} = r_{11} = p_{13} = r_{12} = q_{13} = 0, p_{12} = 1/2$

Тензор кручения $T \in \text{Inv}T_2^1(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R \in \text{Inv}T_3^1(\mathfrak{m})$ имеют вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}, \quad R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$$

для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Будем описывать тензор кривизны R через $R(u_1, u_2), R(u_1, u_3), R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T через $T(u_1, u_2), T(u_1, u_3), T(u_2, u_3)$. Тензоры кривизны и кручения на редуktивных пространствах:

Пара	Тензор кривизны
3.19.14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3.21.6	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3.21.7	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.12	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$

2.21.4	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2 - p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2 - p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}^2 + p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2 - p_{1,2} \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2}^2 + p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2}^2 + p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
1.1.5	$\begin{pmatrix} p_{1,3}q_{3,1} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_{3,2}q_{2,3} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & p_{3,2}q_{2,3} - p_{1,3}q_{3,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2}r_{2,2} - r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3}r_{3,3} - r_{2,2}q_{2,3} \\ q_{3,1}r_{1,1} - r_{3,3}q_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.1.7	$\begin{pmatrix} p_{1,3}q_{3,1} - 1 - r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{3,2}q_{2,3} + 1 - r_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{3,2}q_{2,3} - p_{1,3}q_{3,1} - r_{3,3} \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2}r_{2,2} - r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3}r_{3,3} - r_{2,2}q_{2,3} \\ q_{3,1}r_{1,1} - r_{3,3}q_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.3.3	$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1} - r_{1,1} & p_{1,3}p_{3,1} + p_{2,3}p_{3,2} - 1 - r_{1,2} & 0 \\ -p_{2,3}p_{3,2} - p_{1,3}p_{3,1} + 1 + r_{1,2} & -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1} - r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{2,3}p_{3,1} + 2p_{1,3}p_{3,2} - r_{3,3} \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3}r_{3,3} + r_{1,2}p_{1,3} - r_{1,1}p_{2,3} \\ p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1} & p_{3,1}r_{1,2} + p_{3,2}r_{1,1} - r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}r_{3,3} - r_{1,2}p_{1,3} + r_{1,1}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1} - p_{3,1}r_{1,2} + r_{3,3}p_{3,2} & p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}$
1.3.4	$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1} - r_{1,1} & p_{1,3}p_{3,1} + p_{2,3}p_{3,2} + 1 - r_{1,2} & 0 \\ -p_{2,3}p_{3,2} - p_{1,3}p_{3,1} - 1 + r_{1,2} & -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1} - r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{2,3}p_{3,1} + 2p_{1,3}p_{3,2} - r_{3,3} \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3}r_{3,3} + r_{1,2}p_{1,3} - r_{1,1}p_{2,3} \\ p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1} & p_{3,1}r_{1,2} + p_{3,2}r_{1,1} - r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}r_{3,3} - r_{1,2}p_{1,3} + r_{1,1}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1} - p_{3,1}r_{1,2} + r_{3,3}p_{3,2} & p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}$

1.3.5	$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1} & p_{1,3}p_{3,1} + p_{2,3}p_{3,2} - 1 & 0 \\ -p_{2,3}p_{3,2} - p_{1,3}p_{3,1} + 1 & -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1} & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{2,3}p_{3,1} + 2p_{1,3}p_{3,2} \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3}r_{3,3} + r_{1,2}p_{1,3} - r_{1,1}p_{2,3} \\ p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1} & p_{3,1}r_{1,2} + p_{3,2}r_{1,1} - r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}r_{3,3} - r_{1,2}p_{1,3} + r_{1,1}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1} - p_{3,1}r_{1,2} + r_{3,3}p_{3,2} & p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}$
1.3.6	$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1} & p_{1,3}p_{3,1} + p_{2,3}p_{3,2} + 1 & 0 \\ -p_{2,3}p_{3,2} - p_{1,3}p_{3,1} - 1 & -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1} & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{2,3}p_{3,1} + 2p_{1,3}p_{3,2} \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3}r_{3,3} + r_{1,2}p_{1,3} - r_{1,1}p_{2,3} \\ p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1} & p_{3,1}r_{1,2} + p_{3,2}r_{1,1} - r_{3,3}p_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}r_{3,3} - r_{1,2}p_{1,3} + r_{1,1}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1} - p_{3,1}r_{1,2} + r_{3,3}p_{3,2} & p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}$
1.8.2	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2 - p_{1,2} & 3p_{1,3}p_{1,2} - p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2 - p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} -p_{1,2}^2 + p_{1,2} & q_{1,2}p_{1,2} - p_{1,3}p_{1,2} - q_{1,2} & p_{1,2}q_{1,3} + 2p_{1,3}q_{1,2} + p_{1,3}^2 - q_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{1,2}p_{1,2} + 2p_{1,3}p_{1,2} - q_{1,2} - p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2 - p_{1,2} \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} -q_{1,2}p_{1,2} - r_{1,1} & -r_{1,2}p_{1,2} + q_{1,2}^2 - p_{1,2}q_{1,3} - r_{1,2} & A \\ -p_{1,2}^2 + p_{1,2} & -p_{1,3}p_{1,2} - r_{1,1} - q_{1,2} & B \\ 0 & -p_{1,2}^2 + p_{1,2} & C \end{pmatrix},$ $A = -2p_{1,2}r_{1,3} + 3q_{1,2}q_{1,3} + q_{1,3}p_{1,3} - r_{1,2}p_{1,3} - r_{1,3},$ $B = q_{1,2}^2 + 2p_{1,3}q_{1,2} + p_{1,3}^2 - r_{1,2}p_{1,2} - r_{1,2} - q_{1,3},$ $C = q_{1,2}p_{1,2} + p_{1,3}p_{1,2} - r_{1,1} - 2q_{1,2} - p_{1,3}$
Пара	Тензор кручения
3.19.14	$(0, 0, 0), (0, 0, 0), (q_{1,3} - r_{1,2}, 0, 0)$
3.21.6	$(0, 0, 0), (0, 0, 0), (2q_{1,3}, 0, 0)$
3.21.7	$(0, 0, 0), (0, 0, 0), (2q_{1,3}, 0, 0)$
2.9.12	нулевой
2.21.4	$(2p_{1,2} - 1, 0, 0), (0, 2p_{1,2} - 1, 0), (0, 0, 2p_{1,2} - 1)$
1.1.5	$(0, 0, p_{3,2} - q_{3,1}), (p_{1,3} - r_{1,1}, 0, 0), (0, q_{2,3} - r_{2,2}, 0)$

1.1.7	$(0, 0, p_{3,2} - q_{3,1} - 1), (p_{1,3} - r_{1,1}, 0, 0), (0, q_{2,3} - r_{2,2}, 0)$
1.3.3	$(0, 0, 2p_{3,2} - 1), (p_{1,3} - r_{1,1}, p_{2,3} + r_{1,2}, 0), (-p_{2,3} - r_{1,2}, p_{1,3} - r_{1,1}, 0)$
1.3.4	$(0, 0, 2p_{3,2} - 1), (p_{1,3} - r_{1,1}, p_{2,3} + r_{1,2}, 0), (-p_{2,3} - r_{1,2}, p_{1,3} - r_{1,1}, 0)$
1.3.5	$(0, 0, 2p_{3,2}), (p_{1,3} - r_{1,1}, p_{2,3} + r_{1,2}, 0), (-p_{2,3} - r_{1,2}, p_{1,3} - r_{1,1}, 0)$
1.3.6	$(0, 0, 2p_{3,2}), (p_{1,3} - r_{1,1}, p_{2,3} + r_{1,2}, 0), (-p_{2,3} - r_{1,2}, p_{1,3} - r_{1,1}, 0)$
1.8.2	$(2p_{1,2} - 1, 0, 0), (p_{1,3} - r_{1,1}, 2p_{1,2} - 1, 0), (q_{1,3} - r_{1,2}, p_{1,3} - r_{1,1}, 2p_{1,2} - 1)$

Алгебра Ли группы голономии инвариантной связности $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \dots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Положим \mathfrak{a} равной подалгебре в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, порожденной множеством $\{\Lambda(x) \mid x \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Если \mathfrak{h}^* – алгебра Ли группы голономии, то $\mathfrak{h}^* \subset \mathfrak{a} \subset \mathbb{N}(\mathfrak{h}^*)$, где $\mathbb{N}(\mathfrak{h}^*)$ – нормализатор \mathfrak{h}^* в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$.

Будем говорить, что инвариантная связность *нормальна*, если $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}$; например, в случае 2.21.4 это верно при $p_{1,2} \neq 0, p_{1,2} \neq 1$, тогда алгебра голономии $\begin{pmatrix} p_3 & p_1 & 0 \\ p_2 & 0 & p_1 \\ 0 & p_2 & -p_3 \end{pmatrix}$, а в противном случае алгебра голономии нулевая. Аналогично получаем:

Пара	Алгебра голономии	Пара	Алгебра голономии
3.19.14	$\begin{pmatrix} 0 & p_2 & p_1 \\ 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 \end{pmatrix}$	2.9.12	$\begin{pmatrix} p_2 & 0 & p_1 \\ 0 & -2p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_2 \end{pmatrix}$
3.21.6 3.21.7	$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & -p_3 \\ 0 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$	2.21.4	$p_{1,2} \neq 0, 1 \begin{pmatrix} p_3 & p_1 & 0 \\ p_2 & 0 & p_1 \\ 0 & p_2 & -p_3 \end{pmatrix}$ $p_{1,2} = 0, 1$ нулевая

Определим, в каких случаях \mathfrak{h}^* совпадает с \mathfrak{a} . Для пар 3.19.14, 3.21.6, 3.21.7 и 2.9.12 связность является нормальной. У пары 2.21.4 связность нормальна, если $p_{1,2} \neq 0, 1$.

Рассмотрим пару 1.1.5. Связность нормальна, если:

$$p_{1,3}q_{3,1} = p_{3,2}q_{2,3}, r_{2,2} = -r_{1,1}, r_{3,3} = 0, \text{ тогда алгебра голономии } \begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_{1,3}p_2 \\ 0 & -p_1 & q_{2,3}p_3 \\ q_{3,1}p_3 & p_{3,2}p_2 & 0 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} = 0, q_{3,1}p_{3,2}q_{2,3} \neq 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$ ($r_{3,3} = r_{2,2}, p_{3,2}q_{2,3} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{2,2}$), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 - p_1 & p_4 \\ p_5 & p_6 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} = q_{3,1} = 0, p_{3,2}q_{2,3} \neq 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$ ($r_{3,3} = r_{2,2}, p_{3,2}q_{2,3} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{2,2}$), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 - p_1 & p_3 \\ 0 & p_4 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} \neq 0, q_{3,1} = 0, p_{3,2}q_{2,3} \neq 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$ ($r_{3,3} = r_{2,2}, p_{3,2}q_{2,3} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{2,2}$), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_3 & p_4 \\ 0 & p_2 - p_1 & p_5 \\ 0 & p_6 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} \neq 0, q_{3,1} \neq 0, p_{3,2} = 0, q_{2,3} \neq 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$ ($r_{3,3} = r_{1,1}, p_{1,3}q_{3,1} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{1,1}$), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_3 \\ p_4 & p_2 - p_1 & p_5 \\ p_6 & 0 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} \neq 0, q_{3,1} \neq 0, p_{3,2} = q_{2,3} = 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$ ($r_{3,3} = r_{1,1}, p_{1,3}q_{3,1} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{1,1}$), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_3 \\ 0 & p_2 - p_1 & 0 \\ p_4 & 0 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} \neq 0, q_{3,1} \neq 0, p_{3,2} \neq 0, q_{2,3} = 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$ ($r_{3,3} = r_{1,1}, p_{1,3}q_{3,1} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{1,1}$), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_3 & p_4 \\ 0 & p_2 - p_1 & 0 \\ p_5 & p_6 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3}q_{3,1} \neq p_{3,2}q_{2,3} \neq 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$, то $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$.

Рассмотрим пару 1.1.7. Связность нормальна, если:

$p_{1,3}q_{3,1} = p_{3,2}q_{2,3}$ ($r_{2,2} = -r_{1,1} \neq 0$ или $r_{2,2} = r_{1,1} = 0, p_{3,2}q_{2,3} \neq 1$),

$r_{3,3} = 0$ ($r_{1,1} \neq -1$ или $p_{1,3}q_{3,1} \neq 0$), тогда алгебра голономии $\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_{1,3}p_2 \\ 0 & -p_1 & q_{2,3}p_3 \\ q_{3,1}p_3 & p_{3,2}p_2 & 0 \end{pmatrix};$

$p_{1,3}q_{3,1} = p_{3,2}q_{2,3} \neq 0, r_{2,2} \neq -r_{1,1}, r_{3,3} = (r_{2,2} + r_{1,1})/2$, то

$$\begin{pmatrix} p_1 + r_{1,1}p_4 & 0 & p_{1,3}p_2 \\ 0 & -p_1 + r_{2,2}p_4 & q_{2,3}p_3 \\ q_{3,1}p_3 & p_{3,2}p_2 & (r_{2,2} + r_{1,1})p_4/2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} = 0, q_{3,1}p_{3,2}q_{2,3} \neq 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$ ($r_{3,3} = r_{2,2} \neq 1/2, p_{3,2}q_{2,3} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{2,2}, r_{1,1} \neq -1$), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 - p_1 & p_4 \\ p_5 & p_6 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} = q_{3,1} = 0, p_{3,2}q_{2,3} \neq 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$ ($r_{3,3} = r_{2,2} \neq 1/2, p_{3,2}q_{2,3} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{2,2}, r_{1,1} \neq -1$), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 - p_1 & p_3 \\ 0 & p_4 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} \neq 0, q_{3,1} = 0, p_{3,2}q_{2,3} \neq 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$ ($r_{3,3} = r_{2,2} \neq 1/2, p_{3,2}q_{2,3} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{2,2}, r_{1,1} \neq -1$), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_3 & p_4 \\ 0 & p_2 - p_1 & p_5 \\ 0 & p_6 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} \neq 0, q_{3,1} \neq 0, p_{3,2} = 0, q_{2,3} \neq 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$ ($r_{3,3} = r_{1,1} \neq -1/2, p_{1,3}q_{3,1} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{1,1}, r_{2,2} \neq 1$), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_3 \\ p_4 & p_2 - p_1 & p_5 \\ p_6 & 0 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} \neq 0, q_{3,1} \neq 0, p_{3,2} = q_{2,3} = 0, r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$ ($r_{3,3} = r_{1,1} \neq -1/2, p_{1,3}q_{3,1} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{1,1}, r_{2,2} \neq 1$), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_3 \\ 0 & p_2 - p_1 & 0 \\ p_4 & 0 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3} \neq 0$, $q_{3,1} \neq 0$, $p_{3,2} \neq 0$, $q_{2,3} = 0$, $r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$ ($r_{3,3} = r_{1,1} \neq -1/2$, $p_{1,3}q_{3,1} \neq 1/2$ или $r_{3,3} \neq r_{1,1}$, $r_{2,2} \neq 1$), то

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_3 & p_4 \\ 0 & p_2 - p_1 & 0 \\ p_5 & p_6 & -p_2 \end{pmatrix};$$

$p_{1,3}q_{3,1} \neq p_{3,2}q_{2,3} \neq 0$, то при $r_{3,3} = -r_{2,2} - r_{1,1}$ алгебра голономии – $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$, а при $r_{3,3} \neq -r_{2,2} - r_{1,1}$ алгебра голономии – $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$.

Таким образом, найдены все трехмерные редуцированные однородные пространства с неразрешимой группой преобразований и разрешимым стабилизатором, допускающие нормальную связность инвариантные аффинные связности на таких однородных пространствах вместе с их тензорами кривизны и кручения, алгебрами голономии, выписаны канонические связности, а также естественные связности без кручения.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность своему учителю Борису Петровичу Комракову за постановку задачи и полезные замечания.

Acknowledgement. The author are grateful to his teacher Boris Petrovich Komrakov for posing the problem and for useful comments.

Список использованных источников

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981.
2. Онищик, А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А. Л. Онищик. – М.: Физматлит, 1995. – 384 с.
3. Можей, Н. П. Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них / Н. П. Можей. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. – 394 с.
4. Можей, Н. П. Нормальные связности на трехмерных однородных пространствах с неразрешимой группой преобразований. II. Разрешимый стабилизатор / Н. П. Можей // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. – 2014. – Т. 156. – С. 51–70.
5. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. J. Math. – 1954. – Vol. 76, N 1. – P. 33–65. doi.org/10.2307/2372398.

References

1. Kobayashi Sh., Nomizu K. *Foundations of differential geometry*. New York, Interscience Publishers, 1963.
2. Onishchik A. L. *Topology of transitive transformation groups*. Moscow, Fizmatlit Publ., 1995. 384 p. (in Russian)
3. Mozhey N. P. *Three-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces and connections on them*. Kazan, Publisher University of Kazan, 2015. 394 p. (in Russian)
4. Mozhey N. P. Normal Connections on Three-Dimensional Homogeneous Spaces with a Non-Solvable Transformation Group. II. A Solvable Stabilizer. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki* [Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series], 2014, vol. 156, pp. 51–70. (in Russian)
5. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *American Journal of Mathematics*, 1954, vol. 76, no. 1, pp. 33–65. doi.org/10.2307/2372398.

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна – канд. физ.-мат. наук, доцент, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, Минск, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru.

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru.

Для цитирования

Можей, Н. П. Трехмерные редуцированные однородные пространства неразрешимых групп Ли / Н. П. Можей // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 7–17.

For citation

Mozhey N. P. Three-dimensional reductive homogeneous spaces of unsolvable Lie groups. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 7–17. (in Russian)

П. П. Забрейко, А. В. Михайлов*Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь***КВАЛИФИЦИРОВАННЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ
ПРИБЛИЖЕНИЙ В ТЕОРИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ***(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)*

В сообщении описываются необходимые и достаточные условия на оператор B , $\rho(B) = 1$, при выполнении которых ряд Неймана сходится сильно и затем, на основе этих условий, приводятся некоторые оценки погрешностей для соответствующих последовательных приближений.

Ключевые слова: последовательные приближения, квазисходимость, ряд Неймана.

P. P. Zabreiko, A. V. Mikhailov*Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus***QUALIFIED ERROR ESTIMATES OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS IN THEORY
OF ILL-POSED LINEAR PROBLEMS***(Communicated by Corresponding Member V. V. Gorokhovich)*

This article deals with the necessary and sufficient conditions for the operator B , $\rho(B) = 1$, under which the Neumann series converges strongly and on the basis of these conditions, some of the error estimates for the corresponding successive approximations are presented.

Keywords: successive approximations, quasicongvergence, Neumann series.

Одним из основных методов приближенного решения линейного операторного уравнения

$$x = Bx + f \quad (1)$$

с непрерывным в банаховом пространстве X линейным оператором A является метод последовательных приближений, описываемых равенствами

$$x_{n+1} = Bx_n + f \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Анализ сходимости этого метода (см., напр., [1; 2]) обычно сводится к анализу сходимости ряда Неймана

$$N(B) = \sum_{n=0}^{\infty} B^n. \quad (3)$$

Сходимость же последнего полностью определяется спектральным радиусом $\rho(B)$ оператора B , который определяется равенством

$$\rho(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|B^n\|}.$$

Более точно, ряд Неймана (3) сходится (по норме линейных операторов в пространстве X) в том и только том случае, когда справедливо неравенство

$$\rho(B) < 1. \quad (4)$$

Однако это условие для сходимости последовательных приближений оказывается только достаточным [3; 4]. Действительно, последовательные приближения (2) для уравнения (1) будут сходиться к решению и в том случае, когда ряд Неймана (3) оказывается сходящимся сильно! Естественно, возникает вопрос об условиях сильной сходимости ряда Неймана (3). Почти очевидно, что необходимым условием такой сходимости является близкое (4) неравенство

$$\rho(B) \leq 1.$$

Но это условие не является достаточным (см. [3; 4]).

Нас будет интересовать случай, когда

$$\rho(B) = 1$$

(в случае $\rho(B) < 1$ ряд Неймана сходится по норме). Более точно, в этой работе описываются необходимые и достаточные условия на оператор B , при выполнении которых ряд Неймана (3) сходится сильно и затем, на основе этих условий, приводятся некоторые оценки погрешностей для соответствующих последовательных приближений.

Будем говорить, что действующий в банаховом пространстве X оператор B является *регулярным*, если последовательность итераций (B^n) оператора B является сильно сходящейся. Как нетрудно видеть, (сильный) предел этой последовательности, если он существует, является непрерывным оператором P в пространстве X ; более того, оператор P является коммутирующим с B оператором проектирования на множество $\text{Fix } B$ неподвижных точек оператора B ; дополнительный проектор $Q = I - P$ является оператором проектирования на инвариантное для B подпространство $X_0(B)$, на котором последовательность итераций (B^n) стремится к нулю. Регулярные операторы (под не очень удачным названием корректных) рассматривались по другому поводу в [5].

В работах [6–8] было показано, что для уравнений с регулярными операторами справедливы аналоги теоремы М. А. Красносельского, описывающей условия сходимости последовательных приближений для уравнений с самосопряженными операторами, и некоторых дополнений к ней, включая поведение приближенных последовательных приближений.

Для уравнений с регулярными операторами, как и для уравнений с самосопряженными, нормальными и обобщенно нормальными операторами, в общем случае не существует оценок погрешности последовательных приближений, равномерных относительно начальных условий x_0 и правых частей f . Оговорка «в общем случае» здесь существенна – для наиболее важного класса регулярных операторов – компактных регулярных операторов – такие оценки существуют. Связано это с тем, что для компактных корректных операторов сходимость последовательности итераций (B^n) является не только сильной сходимостью, но и сходимостью по норме.

Напомним, что спектр $\text{sp } B$ действующего в X непрерывного линейного оператора B является непустым ограниченным замкнутым множеством комплексной плоскости C , расположенным в круге $D(B) = \{\lambda : |\lambda| \leq \rho(B)\}$ с центром в нуле и радиусом, равным спектральному радиусу $\rho(B)$ этого оператора. Множество $\text{psp} = \text{sp } B \cap \{\lambda \in C : |\lambda| = \rho(B)\}$ принято называть периферическим спектром оператора B . Если остальной спектр $\text{rsp } B = \text{sp } B \setminus \text{psp } B$ лежит внутри круга $K(B)$, более того строго лежит внутри этого круга и расположен в круге с центром в нуле меньшего чем $\rho(B)$ радиуса $\theta(B)\rho(B)$ ($\theta(B) < 1$). Операторы B , для которых описанная ситуация имеет место, принято называть *операторами со спектральным зазором*, а число $\theta(B)$ – *спектральным зазором* оператора B . Компактные регулярные операторы, очевидно, относятся к операторам со спектральным зазором; более общим является класс операторов, периферический спектр которых фредгольмов. Отметим, что неравенство $\theta(B) < 1$ означает по существу, что оператор B является оператором со спектральным зазором.

Т е о р е м а 1. Пусть B – действующий в банаховом пространстве X непрерывный линейный оператор со спектральным зазором, причем $\rho(B) = 1$. Тогда он является регулярным, если его периферический спектр состоит только из одной точки $\{1\}$: $\text{psp } B = \{1\}$, которая является точкой и соответствующее инвариантное подпространство совпадает с множеством $\text{Fix } B$ неподвижных точек оператора B .

Регулярный оператор B допускает представление $B = P + (I - P)B$, откуда следует

$$B^n = P + (I - P)B^n = P + ((I - P)B)^n.$$

Как нетрудно видеть, спектральный радиус $\rho((I - P)B)$ оператора $(I - P)B$ совпадает со спектральным зазором $\theta(B)$, и тем самым оказывается меньшим, чем 1. Это означает, что $\|((I - P)B)^n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, откуда вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B^n - P\| = 0,$$

или, более точно (см., напр., [9]), справедливость неравенств

$$\|B^n - P\| \leq c(q)q^n \quad (n = 1, 2, \dots), \quad q \in (\theta(B), 1);$$

здесь $c(q)$ – некоторая постоянная, вообще говоря, стремящаяся к бесконечности при $q \rightarrow \theta(B)$. Более того, можно написать

$$\|B^n - P\| \leq c_n, \quad c_n = \min_{\theta(B) < q < 1} c(q)q^n \quad (n = 1, 2, \dots);$$

однако вычисление (и даже оценка) констант c_n ($n = 1, 2, \dots$) является достаточно сложной задачей (см., напр., [9]).

Сделаем еще одно замечание. Из регулярности данного оператора B регулярность сопряженного оператора B^* не вытекает. Однако в условиях теоремы 1 регулярность операторов B и B^* эквивалентна. Отметим также, что из регулярности обоих операторов B и B^* не вытекает, что последовательности их итераций сходятся по норме.

Пусть B – действующий в банаховом пространстве X непрерывный линейный оператор. Будем предполагать, что оператор B регулярный

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B^n x - Px\|_X = 0 \quad (x \in X)$$

и, более того, имеет единичный спектральный радиус $\rho(B) = 1$.

Банахово пространство X_0 , непрерывно вложенное в пространство X называется *униформизирующим оператор B изнутри*, если последовательность (B^n) итераций оператора B , как операторов из X_0 в X , сходится к оператору P по норме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B^n x - Px\|_{L(X_0, X)} = 0 \quad (x \in X).$$

Нетрудно видеть, что пространство X_0 униформизирует оператор B изнутри, если пространство X_0 компактно вложено в пространство X . Обратное неверно.

Банахово пространство X^0 , в которое непрерывно вложено пространство X , называется *униформизирующим оператор B снаружи*, если последовательность (B^n) итераций оператора B , как операторов из X в X^0 , сходится к

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B^n x - Px\|_{L(X, X^0)} = 0 \quad (x \in X).$$

Нетрудно видеть, что пространство X^0 униформизирует оператор B снаружи, если пространство X компактно вложено в пространство X^0 . Обратное неверно.

В качестве примера оператора, для которого можно просто строить униформизирующие изнутри и снаружи пространства, рассмотрим действующий в пространстве $X = L_p([0, 1])$ ($1 \leq p < \infty$) оператор $Bx(t) = tx(t)$; этот оператор, очевидно, регулярен ($\|B^n x\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $x \in X$) и для него $\rho(B) = 1$. Очевидно, $B^n x(t) = t^n x(t)$ ($n = 1, 2, \dots$), и поэтому $\|B^n\| = 1$ при всех $n = 1, 2, \dots$

Нетрудно видеть, что при $p < p^+ \leq \infty$ пространство L_{p^+} униформизирует оператор B изнутри, а при $p < p^- \leq \infty$ пространство L_{p^-} униформизирует оператор B снаружи.

Пусть теперь

$$X_0 = \left\{ x(t) \in X : \frac{x(t)}{1-t} \in X \right\}, \quad \|x\|_0 = \left(\int_0^1 \frac{|x(t)|^p}{|1-t|} dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (5)$$

Пространство X_0 непрерывно, но не компактно вложено в пространство X . Однако оно регуляризирует оператор B изнутри в пространстве X .

Действительно,

$$\|B^n x(t)\| = \|t^n x(t)\| = \left\| (1-t)t^n \frac{x(t)}{1-t} \right\| \leq \left(\max_{0 \leq t \leq 1} (1-t)t^n \right) \left\| \frac{x(t)}{1-t} \right\| = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \|x\|_0 \quad (x \in X_0),$$

откуда $\lim_{n \rightarrow \infty} \|B^n - P\|_{L(X_0, X)} = 0$.

Пусть, наконец,

$$X^0 = \{x(t) \in X : (1-t)|x(t)| \in X\}, \quad \|x\|^0 = \left(\int_0^1 |(1-t)x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (6)$$

Пространство X непрерывно, но не компактно вложено в пространство X^0 . Однако оно униформизирует оператор B снаружи в пространстве X .

Действительно,

$$\|B^n x(t)\|^0 = \|t^n x(t)\|^0 = \left\| (1-t)t^n x(t) \right\| \leq \left(\max_{0 \leq t \leq 1} (1-t)t^n \right) \|x(t)\| = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \|x\| \quad (x \in X),$$

откуда $\lim_{n \rightarrow \infty} \|B^n - P\|_{L(X, X^0)} = 0$.

Отметим, что в случае пространства $X = L_\infty([0,1])$ оператор $Bx(t) = tx(t)$ не является регулярным, так как уже последовательность $B^n 1(t) = t^n (1 \cdot)$ – функция, тождественно равная на $[0,1]$ единице) не является сходящейся (по норме). Однако и для этого случая последовательности норм $(\|B^n\|_{L(X_0, X)})$ в случае пространства X_0 , определенного равенством (5), и норм $(\|B^n\|_{L(X, X^0)})$ в случае пространства X^0 , определенного равенством (6), сходятся к нулю.

Приведенные определения приводят к следующему утверждению о сходимости последовательных приближений для линейного уравнения II рода в критическом случае.

Т е о р е м а 2. Пусть B – непрерывный регулярный линейный оператор в банаховом пространстве X , и $\rho(B) = 1$. Тогда для уравнения (1) в случае его разрешимости для последовательных приближений (2) справедливы оценки

$$\|x_n - x^*\| \leq \gamma_n \|x_0 - x^*\|_0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\|x_n - x^*\|^0 \leq \gamma^n \|x_0 - x^*\| \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где $X_0 \subset X$ – произвольное регуляризирующее изнутри оператор B , $X^0 \supset X$ – произвольное регуляризирующее изнутри оператор B , и

$$\gamma_n = \|B^n - P\|_{L(X_0, X)}, \quad \gamma^n = \|B^n - P\|_{L(X, X^0)}.$$

Следует сделать еще одно замечание. Теорема 2 очевидным образом распространяется на действующие в банаховом пространстве X операторы B , нормы итераций которых ограничены, и, кроме того, итерации $B^n x$ сходятся слабо (и для которых, конечно, $\rho(B) = 1$). Примером такого оператора может служить рассмотренный выше оператор $Bx(t) = tx(t)$ в пространстве $L_\infty([0,1])$ – для него, как отмечено выше пространства X_0 и X^0 , определенные равенствами (5) и (6), являются униформизирующими изнутри и снаружи.

Рассмотрим теперь вместо точных приближений (2) приближенные приближения

$$\tilde{x}_{n+1} = B\tilde{x}_n + f_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (7)$$

возникающие из-за того, что на каждом шаге делается ошибка $f_n - f$ и пусть (δ_n) – последовательность величин этих ошибок. Естественно считать, что последовательность (δ_n) ограничена, т. е. $(\delta_n) \in l_\infty$, но для некоторых приложений можно предполагать, что эта последовательность

принадлежит к подпространству λ пространства l_∞ , например, c_0 или l_p ($1 \leq p < \infty$). Из очевидных равенств

$$\tilde{x}_n = B^n x_0 + B^{n-1} f_1 + \dots + B f_n + f, \quad x_n = B^n x_0 + B^{n-1} f + \dots + B f + f$$

вытекает, что

$$\tilde{x}_n - x_n = B^{n-1}(f_1 - f) + \dots + B(f_{n-1} - f) + (f_1 - f),$$

далее,

$$\|\tilde{x}_n - x_n\| \leq \|B^{n-1}\| \delta_1 + \dots + \|B\| \delta_{n-1} + \delta_n,$$

и, наконец,

$$\|\tilde{x}_n - x_n\| \leq \mu(B)(\delta_1 + \dots + \delta_{n-1} + \delta_n),$$

где $\mu(B) = \sup_{1 \leq n < \infty} \|B^n\|$. Из последнего неравенства следует

$$\|\tilde{x}_n - x_n\| \leq \mu(B)\omega_n(\lambda)\|\delta_n\|_\lambda,$$

где $\omega_n(\lambda)$ ($n=1, 2, \dots$) – нормы функционалов на пространстве λ , определенных равенствами $l_n((\delta_n)) = \delta_1 + \dots + \delta_{n-1} + \delta_n$.

Если оператор B регулярный и уравнение (1) разрешимо, то последовательные приближения (2) сходятся к решению x^* уравнения (1), для которого $Px^* = Px_0$. Поэтому для приближенных последовательных приближений (7) справедливы неравенства

$$\|\tilde{x}_n - x_n\| \leq \|x_n - x^*\| + \mu(B)\omega_n(\lambda)\|\delta_n\|_\lambda \quad (n=1, 2, \dots). \tag{8}$$

Из этих неравенств сходимость приближенных последовательных приближений (7) к точному решению x^* уравнения (1) не вытекает! Действительно, правая часть этого неравенства при $n \rightarrow \infty$ стремится, вообще говоря, к бесконечности. Однако, так как

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \inf_{n \leq v < \infty} \|x_n - x^*\| + \mu(B)\omega_n(\lambda)\|\delta_n\|_\lambda \quad (n \in N),$$

то из (8) следует, что

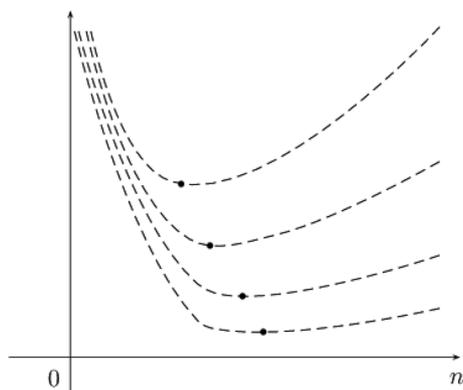
$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \inf_{n \leq v < \infty} \|\tilde{x}_v - x^*\| \quad (n \in N). \tag{9}$$

Равенство (9) означает, что приближенные последовательные приближения \tilde{x}_n подходят при больших, но не слишком больших, n достаточно близко (и даже, если брать сколь угодно малые δ , сколь угодно близко!) к точному решению x^* уравнения (1). Этот факт и называется обычно сходимостью итерационных методов в случае некорректных задач (рассматриваемая в этом разделе задача является примером такой некорректной задачи). Нам удобнее говорить, что в случае справедливости равенства (9) итерационный метод *квазисходится*. Верна

Т е о р е м а 3. Пусть B – непрерывный регулярный линейный оператор в банаховом пространстве B , $\rho(B) = 1$ и пусть уравнение (1) разрешимо. Тогда «приближенные» последовательные приближения (7) квазисходятся к точному решению x^* .

Рисунок ниже изображает графики функции $\frac{1}{n} + \mu_n$ при различных δ , иллюстрирующих поведения величин $\|\tilde{x}_n - x^*\|$ при увеличении n .

В заключение приведем формулы для $\omega_n(\lambda)$ для случая, когда пространство λ является пространством



$$l_{p,\theta} \left\{ (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) : \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n |\xi_n|^p < \infty \right\},$$

$$\|\xi\|_\lambda = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}};$$

здесь $1 \leq p \leq \infty$, а $\theta = (\theta_n)$ – последовательность положительных чисел (это пространство содержится в l_∞ , если и только если $\theta^{-1} = (\theta_1^{-1}, \theta_2^{-1}, \dots, \theta_n^{-1}, \dots) \in l_\infty$. Несложный подсчет показывает, что при всех $n = 1, 2, \dots$

$$\omega_n(\lambda) = \left(\sum_{k=1}^n \theta_k^{1-p} \right)^{1-\frac{1}{p}} \quad (1 < p \leq \infty), \quad \omega_n(\lambda) = \max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{\theta_k} \quad (p = 1).$$

Список использованных источников

1. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
2. Приближенные методы решения операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.]. – М.: Наука, 1969. – 456 с.
3. Koliha, J. J. Power convergence and pseudoinverses of operators in Banach spaces / J. J. Koliha // *J. of Mathematical Analysis and Applications*. – 1974. – Vol. 48, Issue 2. – P. 446–469. doi.org/10.1016/0022-247x(74)90170-x.
4. Забрейко, П. П. Об области сходимости метода последовательных приближений для линейных уравнений / П. П. Забрейко // Докл. АН БССР. – 1985. – № 3. – С. 201–204.
5. Generalized Solutions of Operator Equations and Extreme Elements / D. A. Klyushin [et al.]. – New York: Springer, 2012. – 202 p. doi.org/10.1007/978-1-4614-0619-8.
6. Забрейко, П. П. Об обобщении теоремы М. А. Красносельского на несамосопряжённые операторы / П. П. Забрейко, А. В. Михайлов // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 2. – С. 16–21.
7. Забрейко, П. П. Сходимость последовательных приближений для уравнений с нормальными операторами / П. П. Забрейко, А. В. Михайлов // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 4. – С. 5–10.
8. Забрейко, П. П. О корректности некоторых классов несамосопряженных операторов / П. П. Забрейко, А. В. Михайлов // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 3. – С. 35–42.
9. Zabrejko, P. P. Error estimates for successive approximations and spectral properties of linear operators / P. P. Zabrejko // *Numerical Functional Analysis and Applications*. – 1990. – N 7–8. – P. 823–838. doi.org/10.1080/01630569008816404.

References

1. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Functional analysis*. Moscow, Nauka Publ., 1984. 752 p. (in Russian)
2. Krasnoselski M. A., Vainikko G. M., Zabreiko P. P., Rutitskii Ya. B., Stecenko V. Ya. *Approximate methods for solution of operator equations*. Moscow, Nauka Publ., 1969. 456 p. (in Russian)
3. Koliha J. J. Power convergence and pseudoinverses of operators in Banach spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1974, vol. 48, no. 2, pp. 446–469. doi.org/10.1016/0022-247x(74)90170-x.
4. Zabreiko P. P. Convergence domain of the step-by-step approach for linear equations. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Doklady of the Academy of Sciences of the BSSR], 1985, no. 3, pp. 201–204. (in Russian)
5. Klyushin D. A., Lyashko S. I., Nomirovskii D. A., Petunin Yu. I., Semenov V. V. *Generalized Solutions of Operator Equations and Extreme Elements*. New York, Springer, 2012. 202 p. doi.org/10.1007/978-1-4614-0619-8.
6. Zabreiko P. P., Mikhailov A. V. M. A. Krasnoselsky's theorem generalization to non self-conjugate operators. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2014, vol. 58, no. 2, pp. 16–21. (in Russian)
7. Zabreiko P. P., Mikhailov A. V. Convergence of successive approximations for equations with normal operator. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2015, vol. 59, no. 4, pp. 5–10. (in Russian)
8. Zabreiko P. P., Mikhailov A. V. Correctness of some classes of non self-adjoint operators. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2016, vol. 60, no. 3, pp. 35–42. (in Russian)
9. Zabrejko P. P. Error estimates for successive approximations and spectral properties of linear operators. *Numerical Functional Analysis and Applications*, 1990, no. 7–8, pp. 823–838. doi.org/10.1080/01630569008816404.

Информация об авторах

Забрейко Петр Петрович – д-р физ.-мат. наук, профессор, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: zabreiko@mail.ru.

Михайлов Артём Викторович – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: artostby@mail.ru.

Для цитирования

Забрейко, П. П. Квалифицированные оценки погрешности последовательных приближений в теории некорректных линейных задач / П. П. Забрейко, А. В. Михайлов // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 18–23.

Information about the authors

Zabreiko Petr Petrovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: zabreiko@mail.ru.

Mikhailov Artem Viktorovich – Postgraduate student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: artostby@mail.ru.

For citation

Zabreiko P. P., Mikhailov A. V. Qualified error estimates of successive approximations in theory of ill-posed linear problems. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 18–23. (in Russian)

Е. А. Ровба, П. Г. Поцейко³

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Гродно, Республика Беларусь

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ ЧЕБЫШЕВА–МАРКОВА

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Рациональные дроби Чебышева–Маркова обладают рядом замечательных свойств и являются одним из основных и, безусловно, важных элементов в теории приближения функций. Дроби Чебышева–Маркова являются неотъемлемым аппаратом для построения интерполяционных рациональных функций и квадратурных формул. Однако в контексте ортогональных рядов Фурье они не использовались, поскольку в общем случае свойством ортогональности они не обладают.

В настоящей работе рассматривается система рациональных дробей Чебышева–Маркова при специальном выборе определяющих ее параметров. В первой части настоящего сообщения проводится построение элементов системы, указываются некоторые их представления и доказывается, что существует вес, при котором исследуемая система является ортогональной на отрезке $[-1, 1]$. Во второй части работы производится построение интеграла Дирихле. В третьей части найдены в явном виде коэффициенты в разложении в ряд Фурье функции $|x|$ по рассматриваемой системе. В четвертой исследуется оценка приближения функции $|x|$ посредством частичных сумм ее ряда Фурье. Доказана, в частности, ее точность. В заключительной части получена асимптотическая оценка приближения частичными суммами в целом на отрезке и в случае, когда приближение осуществляется вне особой точки. Найдены точные константы этих оценок.

Ключевые слова: рациональные дроби Чебышева–Маркова, ортогональность, ряды Фурье, интеграл Дирихле, оценка приближения частичными суммами, асимптотика и метод Лапласа, точные константы.

Y. A. Rovba, P. G. Potsejko

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Republic of Belarus

ABOUT ONE SYSTEM OF THE CHEBYSHEV–MARKOV RATIONAL FRACTIONS

(Communicated by Academician I. V. Gaishun)

The Chebyshev–Markov rational fractions have a number of remarkable properties and are one of the main and, certainly, important elements in the theory of approximation of functions. The Chebyshev–Markov fractions are the integrant apparatus for creation of interpolation rational functions and quadrature formulas. However in the context of the orthogonal Fourier series they are not used as generally they have no property of orthogonality.

The present article considers the system of the Chebyshev–Markov rational fractions with a special choice of the parameters for its definition. In the first part of the present article, the elements of the system are created, some of their representations are specified, and it is proved that there is a weight, at which the studied system is orthogonal on a piece $[-1, 1]$. In the second part of the work, the Dirichlet integral is created. In the third part of the present article, the coefficients of the Fourier series expansion of the function $|x|$ in the considered system are found in explicit form. In the fourth part, the estimate of the function $|x|$ by means of the partial sums of its Fourier series is investigated. In particular, its accuracy is proved. In the closing part, the asymptotic estimate of the approximation by the partial sums on a piece is obtained as a whole and when the approximation is carried out outside a singular point. Precise constants of these estimates are found.

Keywords: Chebyshev–Markov’s rational fractions, orthogonality, Fourier series, Dirichlet integral, evaluation of approximation by partial sums, asymptotic and Laplas method, exact constants.

Введение. В монографии [1] А. А. Марков решает экстремальную задачу о дробях с фиксированным знаменателем, наименее уклоняющихся от нуля на отрезке $[-1, 1]$, в случаях, когда этот знаменатель представляет собой многочлен или квадратный корень из многочлена, нули которого не принадлежат этому отрезку. Найденные им рациональные дроби, решающие поставленную задачу, в общем случае не являются ортогональными. Однако они обладают рядом других свойств, которыми обладают классические полиномы Чебышева. В этой работе А. А. Маркова помимо прочих результатов содержится принцип построения экстремальных рациональных дробей на основании выбора $2n$ параметров, которые являются в дальнейшем «инверсионными» полюсами.

В настоящей работе исследуется система рациональных дробей Чебышева–Маркова, полученная специальным подбором определяющих ее параметров. Как оказывается, возможно построение системы дробей Чебышева–Маркова, обладающих свойством ортогональности по весу, близкому к классическому чебышевскому. Вводятся ряды Фурье по рассматриваемой системе рациональных функций и исследуются их аппроксимационные свойства. Найден в явном виде такой ряд Фурье для функции $|x|$ на отрезке $[-1, 1]$ и получена асимптотическая оценка приближений этой функции частичными суммами ее ряда Фурье.

1. Ортогональная система рациональных дробей Чебышева–Маркова на отрезке. Пусть задано множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^{2n}$, где a_k либо являются действительными и $|a_k| < 1$, либо попарно комплексно сопряженными.

Следуя [1] определим углы

$$\cos \varphi_k = \frac{\sqrt{\frac{1+a_k}{2}} \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+a_k x}}, \quad \sin \varphi_k = \frac{\sqrt{\frac{1-a_k}{2}} \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+a_k x}}, \quad k = 1, \dots, 2n, \quad (1)$$

и рассмотрим сумму

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \varphi_k(x), \quad x \in [-1, 1].$$

Тогда функция $\cos \Phi_n(x)$ и является рациональной косинус-дробью Чебышева–Маркова, см. [1]. Будем рассматривать случай, когда параметры a_k , $k = 1, 2, \dots, 2n$, удовлетворяют следующим условиям:

$$a_k = ia, \quad k = 1, \dots, n; \quad a_k = -ia, \quad k = n+1, \dots, 2n. \quad (2)$$

Учитывая (1) и (2), путем несложных алгебраических преобразований нетрудно получить, что

$$\Phi_n(x) = n \arccos \left(x \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2 x^2}} \right), \quad n = 0, 1, \dots$$

Тогда алгебраическая косинус-дробь Чебышева–Маркова на отрезке $[-1, 1]$ с двумя комплексно-сопряженными полюсами имеет вид

$$M_n(x) = \cos \Phi_n(x) = \cos n \arccos \left(x \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2 x^2}} \right), \quad x \in [-1, 1], \quad n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Отметим, при $a = 0$ функции $M_n(x)$ представляют собой классические полиномы Чебышева первого рода.

Л е м м а 1. Для косинус-дробей Чебышева–Маркова $M_n(x)$ справедливо представление

$$M_n(x) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\sqrt{1+a^2} x + i\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+a^2 x^2}} \right)^n + \left(\frac{\sqrt{1+a^2} x - i\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+a^2 x^2}} \right)^n \right), \quad n = 0, 1, \dots$$

С помощью соответствующей замены переменной нетрудно получить еще одно представление для рассматриваемых функций

$$M_n(\cos u) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\sqrt{\xi^2 + \alpha^2}}{\sqrt{1 + \alpha^2 \xi^2}} \right)^n + \left(\frac{\sqrt{1 + \alpha^2 \xi^2}}{\sqrt{\xi^2 + \alpha^2}} \right)^n \right), \quad \xi = e^{iu}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{1+a^2}-1}{a}.$$

Как известно, система полиномов Чебышева первого рода является ортогональной на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1-x^2)^{-1/2}$. Схожим свойством обладают и рациональные дроби Чебышева–Маркова (3). А именно, имеет место

Т е о р е м а 1. Система рациональных дробей Чебышева–Маркова $M_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, является ортогональной на отрезке $[-1, 1]$ с весом

$$\rho(x, a) = \frac{\sqrt{1+a^2}}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1, \quad (4)$$

т. е.

$$\int_{-1}^1 M_n(x)M_m(x)\rho(x, a)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, & m, n = 0, 1, 2, \dots; \\ \pi/2, & m = n, & m, n = 1, 2, \dots; \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 1. Как нетрудно усмотреть, положив в выражении (4) $a = 0$, получим вес классической системы полиномов Чебышева первого рода.

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема с весом (4) на отрезке $[-1, 1]$, т. е. существует интеграл

$$\int_{-1}^1 |f(x)|\rho(x, a)dx.$$

Поставим ей в соответствие ряд Фурье по системе ортогональных с весом (4) рациональных функций Чебышева–Маркова (3)

$$f(x) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n M_n(x), \quad (5)$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \rho(x, a) f(x) M_k(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Естественно предположить, что такие ряды обладают свойствами, похожими на свойства полиномиальных рядов Фурье–Чебышева.

2. Частичная сумма ряда Фурье–Чебышева по системе рациональных дробей Чебышева–Маркова и ее интеграл Дирихле. Пусть

$$S_n(x, f) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n c_k M_k(x)$$

есть частичная сумма ряда Фурье (5).

Т е о р е м а 2. Для частичных сумм рядов Фурье по системе (3) справедливо представление

$$S_n(x, f) = \frac{1-\alpha^4}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda(u, v)}{\sin \frac{\lambda(u, v)}{2}} \frac{dv}{1+2\alpha^2 \cos 2v + \alpha^4}, \quad (6)$$

где

$$\lambda(u, v) = \int_u^v \frac{1-\alpha^4}{1+2\alpha^2 \cos 2y + \alpha^4} dy, \quad \alpha = \frac{\sqrt{1+a^2}-1}{a},$$

причем оператор $S_n : f \rightarrow \mathbb{R}_n$, где \mathbb{R}_n – множество рациональных функций вида $p_n(x)/(\sqrt{1+a^2x^2})^n$, $p_n(x) \in \mathbb{P}_n$, определяемый с помощью формулы (6) является точным на константах.

З а м е ч а н и е 2. Положив в (6) $\alpha = 0$, имеем что

$$S_n(x, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(v-u)}{\sin \frac{v-u}{2}} dv,$$

т. е. $S_n(x, f)$ представляет собой интеграл Дирихле классической тригонометрической системы для функции $f(\cos u)$.

Приведем еще один результат в этом направлении.

Т е о р е м а 3. Справедливо следующее представление для частичных сумм ряда Фурье (5) по системе рациональных дробей

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[f \left(\frac{\cos(\theta + 2\tau)}{\sqrt{1 + a^2 \sin^2(\theta + 2\tau)}} \right) + f \left(\frac{\cos(\theta - 2\tau)}{\sqrt{1 + a^2 \sin^2(\theta - 2\tau)}} \right) \right] \frac{\sin(2n+1)\tau}{\sin \tau} d\tau, \quad (7)$$

где

$$\theta = \arccos x \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2x^2}}. \quad (8)$$

Важным отличием формулы (7) от (6) является то, что ядро Дирихле уже не зависит от параметра a , т. е. частичная сумма ряда Фурье полностью зависит от поведения функции, которой ставится в соответствие ее ряд Фурье. Но подчеркнем, что этот параметр содержится в выражении новой сложной функции под знаком интеграла.

3. Разложение в ряд Фурье по системе рациональных дробей Чебышева–Маркова функции $|x|$.

Актуальным вопросом теории приближений является построение рядов Фурье по ортонормальным системам рациональных функций для элементарных функций. В настоящей работе мы решаем такую задачу для функции $|x|$, т. е. получим разложение в ряд Фурье по системе (3) для функции $f(x) = |x|$, $x \in [-1; 1]$.

Т е о р е м а 4. *Справедливо представление*

$$|x| = \frac{c_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} c_{2m} M_{2m}(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (9)$$

где

$$c_0 = \frac{4}{\pi a} \ln \left(a + \sqrt{1+a^2} \right), \quad (10)$$

$$c_{2m} = \frac{2}{\pi} \frac{1-\alpha^4}{\alpha^{2m}} \left(\frac{1+\alpha^2}{4\alpha} \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} - \frac{1-(-1)^m \alpha^{2m}}{2m(1+\alpha^2)} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(-1)^j C_{m-1}^j (1-\alpha^4)^j}{2j+1} \left(1 - (1-\alpha^2) \frac{2j+1}{2j+2} \right) \sum_{v=1}^j \frac{A_{vj}}{(1-\alpha^2)^{j+1-v}} + \right. \quad (11)$$

$$\left. + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(-1)^j C_{m-1}^j (1-\alpha^4)^j}{2j+1} \left(1 - (1-\alpha^2) \frac{2j+1}{2j+2} \right) \frac{(2j-1)!!}{2^{j+1} j!} \right),$$

$$A_{vj} = \frac{(2j+1)(2j-1)(2j-3)\dots(2j-2v+3)}{2^v j(j-1)\dots(j+1-v)}, \quad v = \overline{1, j}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Формула (10) получена непосредственным интегрированием, а формулы (11) – с помощью теории функций комплексного переменного и некоторых результатов из [2].

В результате получим ряд Фурье функции $|x|$ по системе рациональных дробей Чебышева–Маркова (3)

$$|x| \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} c_{2m} M_{2m}(x),$$

где c_{2m} , $m = 0, 1, \dots$, вычисляются по формулам (10) и (11). Для того чтобы в найденном выражении поставить знак равенства, т. е. получить именно формулу (9), выполним замену (8). Тогда будем иметь

$$\frac{|\cos \theta|}{\sqrt{1+a^2 \sin^2 \theta}} \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} c_{2m} \cos 2m\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Ряд, стоящий справа, является сходящимся как тригонометрический ряд Фурье кусочно дифференцируемой функции

$$f(\theta) = \frac{|\cos \theta|}{\sqrt{1+a^2 \sin^2 \theta}}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

т. е. справедливо равенство (9).

Если в соотношении (12) выполнить замену $\theta = \arccos x$, то получим ряд Фурье–Чебышева

$$\frac{|x|}{\sqrt{1+a^2-a^2x^2}} = \frac{c_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} c_{2m} T_{2m}(x), \quad x \in [-1, 1]. \quad (13)$$

Заменив в соотношении (12) $\theta \sim \pi/2 - \theta$, найдем

$$\frac{|\sin \theta|}{\sqrt{1+a^2 \cos^2 \theta}} = \frac{c_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m c_{2m} \cos 2m\theta,$$

и опять же, подставляя $\theta = \arccos x$, придем к равенству

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+a^2x^2}} = \frac{c_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m c_{2m} T_{2m}(x), \quad x \in [-1, 1]. \quad (14)$$

Ряды (13) и (14) представляют, на наш взгляд, самостоятельный интерес.

4. О приближении функции $|x|$ рядами Фурье по системе рациональных дробей Чебышева–Маркова.

Выше было получено разложение в ряд Фурье по системе рациональных дробей (3) на отрезке $[-1, 1]$ функции $|x|$. Естественным продолжением исследования в этом направлении является нахождение порядковой оценки приближения функции $|x|$ найденными частичными суммами.

Рассмотрим частичную сумму ряда (9) порядка $2n$, т. е. выражение вида

$$s_{2n}(x, |x|) = s_{2n}(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{2n} c_k M_k(x), \quad x \in [-1, 1].$$

Положим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2n}(x, \alpha) &= |x| - s_{2n}(x), \quad x \in [-1, 1], \\ \varepsilon_{2n}(\alpha) &= \left\| |x| - s_{2n}(x) \right\|_{C[-1, 1]}. \end{aligned}$$

Справедлива

Т е о р е м а 5. Для оценки приближений функции $|x|$ на отрезке $[-1, 1]$ частичными суммами ряда Фурье (9) по системе рациональных дробей (3) имеют место соотношения

$$|\varepsilon_{2n}(x, \alpha)| \leq \frac{2\sqrt{1+2\alpha^2 \cos 2\nu + \alpha^4}}{\pi} \int_0^1 \frac{(1-t^2) |\chi_{2n}^*(t)| dt}{\sqrt{1+2t^2 \cos 2\nu + t^4} (1-t^2\alpha^2)}, \quad x = \cos \nu, \quad x \in [-1, 1], \quad (15)$$

$$\varepsilon_{2n}(\alpha) = \frac{2(1-\alpha^2)}{\pi} \int_0^1 \frac{|\chi_{2n}^*(t)|}{1-t^2\alpha^2} dt, \quad n = 0, 1, \dots \quad (16)$$

где

$$\chi_{2n}^*(t) = \left(\frac{t^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2 t^2} \right)^n.$$

Неравенство (15) является точным. Равенство достигается при $x = 0$.

Заметим, что переходя к классическому полиномиальному случаю и положив $\alpha = 0$, из (15) и (16) соответственно будем иметь

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{2n}(x)| &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{1-t^2}{\sqrt{1+2t^2 \cos 2\nu + t^4}} t^{2n} dt, \quad x \in [-1, 1], \\ \varepsilon_{2n} &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{2}{\pi(2n+1)}, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Отметим, что подобный порядковый результат при исследовании приближения функции $|x|$ классическими полиномами Чебышева первого рода содержится в [3].

5. Об асимптотической оценке уклонения от функции $|x|$ частичной суммы ее ряда Фурье. В пункте 4 была доказана теорема, которая описывает уклонение от функций $|x|$, $-1 \leq x \leq 1$, ее частичных сумм ряда Фурье по системе рациональных дробей (3). Изучим асимптотические свойства уклонений (15) и (16) при $n \rightarrow \infty$.

Положим

$$\varepsilon_{2n} = \inf_{\alpha} \varepsilon_{2n}(\alpha),$$

где $\varepsilon_{2n}(\alpha)$ из (16).

Т е о р е м а 6. *Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} 1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\ln n} \varepsilon_{2n} &= \frac{1}{\pi}; \\ 2. \inf_{\alpha} |\varepsilon_{2n}(x, \alpha)| &\leq \frac{1}{\pi|x|} \frac{\ln n}{n^3}, \quad \forall x \in [-1, 0) \cup (0, 1], \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим, что из неравенства (15) следует

$$|\varepsilon_{2n}(x, \alpha)| \leq \frac{2(1+\alpha^2)}{\pi|\cos v|} \int_0^1 \frac{1-t^2}{1-t^2\alpha^2} |\chi_{2n}^*(t)| dt, \quad x = \cos v, \quad \forall x \in [-1, 0) \cup (0, 1].$$

Далее оба соотношения теоремы 6 получены с помощью асимптотических методов, аналогичных методам, применяемым в [4–7].

Интересно заметить, что приближения частичными суммами рядов Фурье вне особой точки $x = 0$, см. (17) оказывается на порядок лучше, чем в целом на отрезке $[-1, 1]$.

З а к л ю ч е н и е. Построена ортогональная на отрезке система алгебраических дробей Чебышева–Маркова. Показано, что ряды Фурье по этой системе обладают, с одной стороны, свойствами подобно полиномиальным рядам Фурье–Чебышева, а с другой стороны, отражают особенности рациональной аппроксимации.

Список использованных источников

1. Марков, А. А. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций наименее уклоняющихся от нуля / А. А. Марков. – М.; Л., 1948. – 411 с.
2. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М., 1963. – 1100 с.
3. Натансон, И. П. Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. – М.; Л., 1949. – 684 с.
4. Евграфов, М. А. Асимптотические оценки и целые функции / М. А. Евграфов. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
5. Федорюк, М. В. Асимптотика. Интегралы и ряды / М. В. Федорюк. – М.: Наука, 1987. – 544 с.
6. Зорич, В. А. Математический анализ / В. А. Зорич. – М.: Наука, 1984. – Ч. II. – 640 с.
7. Ровба, Е. А. Константы в приближении функции $|x|$ интерполяционными рациональными процессами / Е. А. Ровба, Е. Г. Микулич // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 6. – С. 11–15.

References

1. Markov A. A. *Selected works on the theory of continued fractions and the theory of functions least deviating from zero.* Moscow, Leningrad, 1948. 411 p.
2. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tables of integrals, sums, series and products.* Moscow, 1963. 1100 p. (in Russian)
3. Natanson I. P. *Constructive theory of functions.* Moscow, Leningrad, 1949. 684 p. (in Russian)
4. Evgrafov M. A. *Asymptotic estimates and entire functions.* Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p. (in Russian)
5. Fedorjuk M. V. *Asymptotics. Integrals and Series.* Moscow, Nauka Publ., 1987. 544 p. (in Russian)
6. Zorich V. A. *Mathematical analysis. Part II.* Moscow, Nauka Publ., 1984. 640 p. (in Russian)
7. Rovba E. A., Mikulich E. G. Constants in the approximation of $|x|$ using the rational interpolation processes. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2009, vol. 53, no. 6, pp. 11–15 (in Russian)

Информация об авторах

Ровба Евгений Алексеевич – д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой, Гродненский государственный университет имени Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, Гродно, Республика Беларусь). E-mail: rovba.ea@gmail.com.

Поцейко Павел Геннадьевич – соискатель, старший преподаватель, Гродненский государственный университет имени Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, Гродно, Республика Беларусь). E-mail: pahamatby@gmail.com.

Для цитирования

Ровба, Е. А. Об одной системе рациональных дробей Чебышева–Маркова / Е. А. Ровба, П. Г. Поцейко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 24–29.

Information about the authors

Rovba Evgenij Alekseevich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: rovba.ea@gmail.com.

Potsejko Pavel Gennadjevich – Postgraduate student, Senior lecturer, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: pahamatby@gmail.com.

For citation

Rovba Y. A., Potsejko P. G. About one system of the Chebyshev–Markov rational fractions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 24–29. (in Russian)

А. Б. Антоневиц, Али А. Шукур*Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь***ОЦЕНКИ НОРМ СТЕПЕНЕЙ ОПЕРАТОРА,
ПОРОЖДЕННОГО ИРРАЦИОНАЛЬНЫМ ПОВОРОТОМ***(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)*

В работе рассмотрены операторы взвешенного сдвига, порожденные иррациональными поворотами. Получено описание поведения норм степеней таких операторов в зависимости от свойств коэффициента и арифметических свойств иррационального числа, задающего угол поворота.

Ключевые слова: нормы степеней оператора, оператор взвешенного сдвига, порожденный поворотом окружности, гомологическое уравнение.

A. B. Antonevich, Ali A. Shukur*Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus***ESTIMATIONS OF THE NORM OF THE POWERS OF THE OPERATOR GENERATED
BY IRRATIONAL ROTATION***(Communicated by Corresponding Member V. V. Gorokhovich)*

In this article we consider weighted shift operators generated by irrational rotation. The description of the norm of the powers of those operators depending on the properties of the coefficients of the mentioned operators and on the arithmetical properties of the irrational number yielding an angle of rotation is given.

Keywords: norm of powers of operator, weighted shift operator generated by rotation, homological equation.

Введение. Пусть T – линейный ограниченный оператор. В работе рассматривается вопрос о поведении последовательности норм $\|T^n\|$. Это вопрос связан с исследованием поведения резольвенты оператора. Пусть $R(T)$ – спектральный радиус оператора T . При $|\lambda| > R(T)$ резольвента $R(T; \lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$ задается в виде суммы ряда по степеням $\frac{1}{\lambda}$:

$$(T - \lambda I)^{-1} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} T^n,$$

откуда следует оценка резольвенты сверху

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq \varphi_T \left(\frac{1}{|\lambda|} \right),$$

где

$$\varphi_T(z) = \sum_0^{\infty} \|T^{n-1}\| z^n$$

есть функция, аналитическая при $|z| < \frac{1}{R(T)}$.

Поэтому поведение резольвенты в значительной мере определяется последовательностью $\|T^n\|$. Согласно формуле Гельфанда

$$R(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}, \quad (1)$$

откуда следует, что

$$\ln \|T^n\| = n \ln R(T) + \gamma_n,$$

где $\frac{\gamma_n}{n} \rightarrow 0$.

Иначе говоря, главным членом асимптотики последовательности $\ln \|T^n\|$ является $n \ln R(T)$, а рассматриваемая задача о поведении последовательности $\|T^n\|$ заключается в получении оценок для второго члена асимптотики.

Известно, что для произвольных операторов последовательность γ_n/n может стремиться к нулю сколь угодно медленно. Поэтому для конкретных классов операторов представляет интерес получение информации о поведении такой последовательности.

Ниже мы рассматриваем один специальный класс операторов взвешенного сдвига. Напомним, что оператор T , действующий в банаховом пространстве $\mathcal{F}(X)$ функций на множестве X , называется оператором взвешенного сдвига (ОВС) или оператором композиции с весом, если он может быть представлен в виде

$$aT_\alpha u(x) = a(x)u(\alpha(x)), \quad x \in X,$$

где $\alpha: X \rightarrow X$ есть некоторое отображение и $a(x)$ есть заданная функция на X .

Заметим, что такие операторы, порожденные ими операторные алгебры и связанные с ними функциональные уравнения изучались многими авторами в различных функциональных пространствах как самостоятельный объект и в связи с различными приложениями (см. [1]).

Если X есть окружность $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, то отображение $\alpha(x) = x + h$ порождает поворот окружности на угол $2\pi h$. Пространство $C(\mathbb{S}^1)$ непрерывных функций на окружности естественно изоморфно пространству $C_1(\mathbb{R})$ непрерывных функций, периодических с периодом 1. Ниже мы рассматриваем в $C_1(\mathbb{R})$ операторы сдвига

$$(T_h u)(x) = u(x + h)$$

и операторы взвешенного сдвига

$$(aT_h u)(x) = a(x)u(x + h),$$

где $a \in C_1(\mathbb{R})$, причем $a(x) \neq 0$ для всех x . Это один из наиболее популярных классов операторов взвешенного сдвига, но и для него обсуждаемые ниже вопросы не были исследованы.

Спектральный радиус оператора, порожденного поворотом окружности. Пусть $\varphi(x) = \ln |a(x)|$, $\varphi_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(x + jh)$. При любом h известно, что

$$\ln \|[aT_h]^n\| = \max_x \varphi_n(x) := v_n, \quad (2)$$

и задача заключается в исследовании поведения этой последовательности.

Если рациональное число $h = m/N$ представлено в виде несократимой дроби, то

$$\ln R(aT_h) = \max_x \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi\left(x + \frac{jm}{N}\right).$$

В силу взаимной простоты чисел m и N выражение в правой части не зависит от m , обозначим его $l_N(\varphi)$. Поскольку при фиксированном x число

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi\left(x + j \frac{1}{N}\right)$$

есть интегральная сумма Римана для φ , при $N \rightarrow \infty$ получаем, что

$$l_N(\varphi) \rightarrow \int_0^1 \varphi(x) dx.$$

При $h = m/N$ поведение $\|[aT_{m/N}]^n\|$ описано в [2]. Из результатов [2] мы используем утверждение, что при фиксированной функции a для заданного N существует постоянная C_N , и что выполнено неравенство

$$n \ln l_N(\varphi) \leq \ln \| [aT_{m/N}]^n \| \leq n \ln l_N(\varphi) + C_N.$$

При иррациональных h формула спектрального радиуса получается из (1) и (2) на основе следующего утверждения.

Т е о р е м а Г. Вейля [3]. Если число h иррационально и φ – непрерывная функция с периодом 1, то последовательность средних равномерно сходится к постоянной:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(x + jh) = \int_0^1 \varphi(x) dx.$$

Это утверждение есть одна из эргодических теорем, заметим, что оно было получено Г. Вейлем задолго до доказательства общих эргодических теорем (см. [4]). Из этой теоремы следует, что если h иррационально, то

$$\ln R(aT_h) = \int_0^1 \varphi(x) dx.$$

Ниже без ограничения общности считаем, что

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \quad (3)$$

т. е. $R(aT_h) = 1$, $\ln R(aT_h) = 0$ и тогда $\ln \| [aT_h]^n \| := \gamma_n$ есть последовательность, такая, что $\gamma_n / n \rightarrow 0$. Эта последовательность описывает скорость сходимости в теореме Вейля.

Заметим, что вопросы о скорости сходимости в эргодических теоремах рассматривались, например, в [5–7].

Исследование поведения последовательности $\varphi_n(x)$ связано с гомологическим уравнением (см. [8–10])

$$u(x) - u(x + h) = \varphi(x) \quad (4)$$

и известной проблемой малых знаменателей.

Равенство (3) есть необходимое, но не достаточное условие разрешимости уравнения (4). Если последовательность $\varphi_n(x)$ сходится, то ее предел является решением гомологического уравнения. Однако это уравнение имеет сложную картину разрешимости. Еще Д. Гильберт приводил его в качестве примера, когда все данные в уравнении бесконечно дифференцируемы, а решение может быть разрывным [11, проблема № 5].

В дальнейшем было установлено, что такое уравнение может не иметь даже измеримых решений при бесконечно дифференцируемой функции φ . В частности, в [12, теорема 1] приведено следующее утверждение.

Т е о р е м а А. Г о р д о н а. Если функция φ не является тригонометрическим многочленом, то существует h , при котором гомологическое уравнение (4) не имеет измеримых решений.

Т е о р е м а 1.

а) Если выполнено (3) и функция $\varphi(x) = \ln |a(x)|$ является тригонометрическим многочленом, то при любом иррациональном h и рациональном h с достаточно большим знаменателем спектральный радиус оператора $R(aT_h) = 1$ и последовательность $\| [aT_h]^n \|$ ограничены.

б) Если функция $\varphi(x)$ не является тригонометрическим полиномом, то существует последовательность рациональных чисел h_k , знаменатели которых стремятся к бесконечности, для которых $R(aT_{h_k}) > 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

а) Рассмотрим ряд Фурье

$$\varphi(x) \sim \sum_{k \neq 0} C_k e^{i2\pi kx}.$$

Ряд Фурье функции $\varphi_n(x)$ имеет вид

$$\varphi_n(x) := \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(x + jh) \sim \sum_{k \neq 0} C_k \left[\sum_{j=0}^{n-1} e^{i2\pi khj} \right] e^{i2\pi kx}.$$

Обозначим

$$\eta_{nk} = \sum_{j=0}^{n-1} e^{i2\pi khj}.$$

При иррациональном h получаем

$$\eta_{nk} = \frac{1 - e^{i2\pi knh}}{1 - e^{i2\pi kh}}. \quad (5)$$

Если h иррационально, то величины $1 - e^{i2\pi kh}$ отличны от нуля, но при некоторых больших k они могут быть сколь угодно близкими к 0 (это так называемые малые знаменатели). Именно за счет этих малых знаменателей некоторые коэффициенты Фурье в разложении функции $\varphi_n(x)$ могут оказаться большими, что в общем случае может привести к быстрому росту величин $\ln \|[aT_h]^n\| = \max_x \varphi_n(x) := v_n$. Но если

$$\varphi(x) = \sum_{k \neq 0, |k| \leq m} C_k e^{i2\pi kx},$$

т. е. функция $\varphi(x)$ является тригонометрическим полиномом, то в ряд Фурье для $\varphi_n(x)$ также входит конечное число слагаемых и справедлива оценка

$$|\varphi_n(x)| \leq \sum_{k \neq 0, |k| \leq m} |C_k| |\eta_{nk}| \leq \sum_{k \neq 0, |k| \leq m} |C_k| \frac{2}{|1 - e^{i2\pi kh}|}. \quad (6)$$

Эта оценка не зависит от n , откуда следует, что для любого иррационального h последовательность $\|[aT_h]^n\|$ ограничена, т. е.

$$\sup_{n \geq 0} \|[aT_h]^n\| \leq C.$$

Если $h = \frac{p}{N}$ и $N > m$, то числа η_{nk} задаются выражением (5) и также справедлива оценка (6).

б) Предположим противное. Тогда существует M , такое, что $R(aT_h) = 1$ для всех $h = \frac{1}{N}$ при $N > M$. Оператор $[aT_h]^N$ есть оператор умножения на функцию $\varphi_N(x)$, для такого оператора норма совпадает со спектральным радиусом. Поэтому максимум вещественной функции $\varphi_N(x)$ есть 0 и среднее значение есть 0. Отсюда получаем, что $\varphi_N(x) \equiv 0$. Значит, $C_k \eta_{Nk}(h) = 0$ для всех k . При $k = lN, l \in \mathbb{Z}$, получаем $\eta_{Nk} = N$ и следовательно $C_k = 0$ при всех представимых в виде $k = lN, l \in \mathbb{Z}$, при $N > M$. В частности, $C_N = 0$ при $N > M$, т. е. функции $\varphi(x)$ являются тригонометрическим полиномом.

Т е о р е м а 2. Пусть задана произвольная последовательность ω_n такая, что $\omega_n / n \rightarrow 0$. Если выполнено (3) и функция $\varphi(x) = \ln |a(x)|$ не является тригонометрическим многочленом, то существует такое иррациональное число h , что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} e^{-\omega_n} \|[aT_h]^n\| \geq 1.$$

Заметим, что эта теорема не является следствием теоремы А. Гордона, несмотря на похожую формулировку. Искомое иррациональное число h строится с помощью последовательности рациональных чисел из утверждения б) теоремы 1.

Из теоремы 2 следует, что содержательные оценки сверху для $\|[aT_h]^n\|$ могут иметь место только при дополнительных условиях на h и a . Приведем один из результатов в этом направлении. Пусть

$$\xi_n(h) = \min \left\{ \left| h - \frac{m}{N} \right| : m \in \mathbb{Z}, N \leq n \right\}.$$

Так как h иррационально, минимум достигается только при одном значении m_n и $N_n \leq n$, т. е.

$$\xi_n(h) = \left| h - \frac{m_n}{N_n} \right|.$$

Как известно, для любого h

$$\xi_n(h) \leq \frac{1}{n^2}. \quad (7)$$

При этом существуют числа, для которых последовательность $\xi_n(h)$ убывает сколь угодно быстро. Число h называется числом Лиувилля, если $\xi_n(h)$ убывает быстрее любой степени $\frac{1}{n}$. Но типичным свойством является медленное убывание такой последовательности. Точный смысл этому утверждению придается следующим образом. Пусть $\sigma \geq 0$ и

$$\mathcal{A}_\sigma = \left\{ h \in [0, 1] : \exists C, \text{ что } \left| h - \frac{k}{n} \right| \geq \frac{C}{n^{2+\sigma}} \forall k, n \right\}.$$

Из неравенства (7) следует, что $\mathcal{A}_0 = \emptyset$. Однако при любом $\sigma > 0$ почти все числа принадлежат \mathcal{A}_σ – его дополнение имеет меру нуль [13; 14].

Т е о р е м а 3. *Если функция a дважды непрерывно дифференцируема и $h \in \mathcal{A}_\sigma$ при некотором $\sigma > 0$, то последовательность степеней оператора aT_h ограничена, т. е.*

$$\sup_{n \geq 0} \|[aT_h]^n\| \leq C.$$

Из полученных теорем следует, что при гладких a типичным случаем является ограниченность последовательности $\|[aT_h]^n\|$. Но для исключительных значений h последовательность $\|[aT_h]^n\|$ может расти сколь угодно быстро.

Можно также показать, что даже если h медленно приближается рациональными числами, т. е. $h \in \mathcal{A}_\sigma$, то существуют непрерывные функции a , при которых нормы $\|[aT_h]^n\|$ быстро растут.

Список использованных источников

1. Antonevich, A. B. Linear functional equation. Operator approach / A. B. Antonevich. – Berlin: Birkhauser, 1996. – 187 p. doi.org/10.1007/978-3-0348-8977-3.
2. Шукур, Али А. Поведение норм степеней оператора, порожденного рациональным поворотом / Али А. Шукур // Вестн. БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2016. – № 2. – С. 110–115.
3. Вейль, Г. Избранные труды. Математика. Теоретическая физика / Г. Вейль. – Москва: Наука, 1984. – 510 с.
4. Корнфельд, И. Эргодическая теория / И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.
5. Качуровский, А. Константы оценок скорости сходимости в эргодических теоремах Фон Неймана и Биркгофа / А. Качуровский, В. Седалищев // Матем. сб. – 2011. – Т. 202. – С. 21–40.
6. Tomilov, Y. A new way of constructing examples in operator ergodic theory / Y. Tomilov, Ja. Zemanek // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 2004. – Vol. 137. – P. 209–225. doi.org/10.1017/s0305004103007436.
7. Bermudez, T. Operators with an ergodic power / T. Bermudez, M. Gonzalez, M. Mbekhta // Studia Math. – 2000. – Vol. 141. – P. 201–208.
8. Гура, А. Гомологические уравнения и топологические свойства S^1 -расширений над эргодическим поворотом окружности / А. Гура // Матем. заметки. – 1978. – Т. 23, вып. 3. – С. 463–470.
9. Аносов, Д. Об аддитивном функциональном гомологическом уравнении, связанном с эргодическим поворотом окружности / Д. Аносов // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1973. – Т. 37, вып. 6. – С. 1259–1274.
10. Теубе С. Мбаинаисем. О приводимости операторов взвешенной композиции / Теубе С. Мбаинаисем, Серинь А. Ло, Мусса О. А. Салем // Проблемы физ., матем. и техн. – 2015. – № 2(23). – С. 75–82.
11. Гильберт, Д. Проблемы Гильберта: сб. / Д. Гильберт, под общ. ред. П. С. Александрова. – Москва: Наука, 1969. – 240 с.
12. Гордон, А. Достаточное условие неразрешимости аддитивного функционального гомологического уравнения, связанного с эргодическим поворотом окружности / А. Гордон // Функциональный анализ и его прил. – 1975. – Т. 9, вып. 4. – С. 71–72.
13. Гельфонд, А. О. Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. – Москва: Наука, 1967. – 375 с.
14. Шидловский, А. Трансцендентные числа / А. Шидловский. – Москва: Наука, 1987. – 448 с.

References

1. Antonevich A. B. *Linear functional equation. Operator approach*. Berlin, Birkhauser, 1996. 187 p. doi.org/10.1007/978-3-0348-8977-3.
2. Shukur Ali A. Behavior of the norms of the powers of the operator generated by rational rotation. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika*. [Bulletin of the Belarusian State University. Series 1. Physics. Mathematics. Informatics], 2016, no. 2, pp. 110–115. (in Russian)

3. Weyl G. *Selected Works. Mathematics. Theoretical physics*. Moscow, Nauka Publ., 1984. 510 p. (in Russian)
4. Kornfeld I., Sinai Ya. G., Fomin S. V. *Ergodic theory*. Moscow, Nauka Publ., 1980. 384 p. (in Russian)
5. Kachurovskii A., Sedalischev V. Constants in estimates for the rates of convergence in von Neumann's and Birkhoff's ergodic theorems. *Matematicheskii sbornik* [Sbornik: Mathematics], 2011, vol. 202, no. 8, pp. 1105–1125. doi.org/10.1070/sm2011v202n08abeh004180.
6. Tomilov Y., Zemanek Ja. A new way of constructing examples in operator ergodic theory. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 2004, vol. 137, pp. 209–225. doi.org/10.1017/s0305004103007436.
7. Bermudez T., Gonzalez M., Mbekhta M. Operators with an ergodic power. *Studia Mathematica*, 2000, vol. 141, pp. 201–208.
8. Gura A. A. Homological equations and topological properties of S^1 -extensions over an ergodic rotation of the circle. *Matematicheskie Zametki* [Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR], 1978, vol. 23, no. 3, pp. 251–255. doi.org/10.1007/BF01651441.
9. Anosov D. V. On an additive functional homology equation connected with an ergodic rotation of the circle. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR – Seriya Matematicheskaya* [Mathematics of the USSR – Izvestiya], 1973, vol. 7, no. 6, pp. 1257–1271. doi.org/10.1070/im1973v007n06abeh002086.
10. Teube Cyrille Mbainissem, Serine Alou Lo, Moussa Ould Ahmed Salem. On reducibility of the weighted composition operators. *Problemy fiziki, matematiki i tehniki* [Problems of Physics, Mathematics and Technology], 2015, vol. 23, no. 2, pp. 75–82. (in Russian)
11. Aleksandrov P. S. (ed.) *Hilbert's problems*. Moscow, Nauka Publ., 1969. 240 p. (in Russian)
12. Gordon A. Ya. Sufficient condition for unsolvability of the additive functional homological equation connected with the ergodic rotation of a circle. *Functional Analysis and Its Applications*, 1975, vol. 9, no. 4, pp. 334–336. doi.org/10.1007/BF01075885.
13. Gelfond A. O. *Calculus of finite differences*. Moscow, Nauka Publ., 1967. 375 p. (in Russian)
14. Shidlovskii A. *Transcendent numbers*. Moscow, Nauka Publ., 1987. 448 p. (in Russian)

Информация об авторах

Антоневич Анатолий Борисович – д-р физ.-мат. наук, профессор, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: antonevich@bsu.by.

Шукур Али А. – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: shukur.math@gmail.com.

Для цитирования

Антоневич, А. Б. Оценки норм степеней оператора, порожденного иррациональным поворотом / А. Б. Антоневич, Али А. Шукур // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 30–35.

Information about the authors

Antonevich Anatoly Borisovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: antonevich@bsu.by.

Shukur Ali A. – Postgraduate student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: shukur.math@gmail.com.

For citation

Antonevich A. B., Shukur Ali A. Estimations of the norm of the powers of the operator generated by irrational rotation. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 30–35. (in Russian)

ФИЗИКА
PHYSICS

УДК 524.6;531

Поступило в редакцию 30.12.2016

Received 30.12.2016

Член-корреспондент Л. М. Томильчик

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Республика Беларусь

**МОДЕЛЬ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО МАССИВНОГО ШАРА КАК ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ
УРАВНЕНИЙ САМОВЗАИМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ ДИНАМИКИ**

На основе гамильтонова формализма в комплексифицированном расширенном восьмимерном фазовом пространстве построена с учётом предела Гиббонса самовзаимная дважды релятивистская модель одночастичной классической динамики пространственно локализованной гравитирующей массы, численная величина которой, изменяющаяся в конечных пределах, является единственным свободным модельным параметром. Точное сферически симметричное решение модели воспроизводит картину пульсирующего массивного шара, амплитудные радиальные значения в x -, p -подпространствах расширенного пространства и частота пульсаций определяются численным значением массы, которое универсальным соотношением связано с соответствующим значением действия. Модель имеет корректный ньютонов предел, воспроизводит классический аналог шрёдингеровского дрожания (Zitterbewegung). Её каноническое квантование позволяет интерпретировать самовзаимный оператор Борна как квантовомеханический оператор, собственные значения которого кратны квадрату массы Планка, и приводит к модели осциллятора Дирака для фермиона с массой Планка.

Ключевые слова: взаимная симметрия, комплексная группа Лоренца, максимальная сила, расширенное фазовое пространство, осциллятор Дирака.

Corresponding Member L. M. Tomilchik

B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

**MODEL OF MASSIVE PULSATING SPHERE AS AN EXACT SOLUTION
OF THE HAMILTONIAN SELF RECIPROCAL DYNAMICS EQUATIONS**

We derive self-reciprocal twice-relativistic model of one-particle classical dynamics of spatially localized gravitating mass on the basis of Hamilton formalism in complexified extended 8-dimensional phase space taking into account Hibbons' limit. Mass of particle, being varied in a finite interval, is a unique free parameter of the model. Exact spherically-symmetric solution of the model represents a pulsating massive ball with magnitudes of oscillations in x - and p -space and their frequency defined by the mass, that is connected by a universal relation to a corresponding action. The model has correct Newtonian limit and demonstrates classic analog of Schrodinger's Zitterbewegung. Canonic quantization of the model allows interpretation of self-reciprocal Born operator as quantum operator with eigenvalues of multiples of Planck mass squared. It leads to a model of Dirac oscillator for a fermion with Planck mass.

Keywords: reciprocal symmetry, complex Lorentz group, maximal force, extended phase space, Dirac oscillator.

Введение. В настоящее время концепция взаимности М. Борна [1; 2] вновь привлекла внимание в качестве возможного фундаментального физического принципа. Здесь можно выделить два основных направления.

Первое из них представлено в наиболее развёрнутом виде в работах Лоу [3] (а также [4], где содержится подробное изложение содержания и список всех публикаций Лоу за период 2002–2009 гг.). Здесь предложен новый вариант расширения симметричной базы физики фундаментальных взаимодействий – полупрямое произведение псевдоунитарной группы $U(1, n)$ и группы Гайзенберга–Вейля (Quarplectic Group (QG) – по терминологии Лоу). В такую схему принцип вза-

имности Борна включается естественным образом, а сама QG позиционируется как базовая для «Теории всего» [4]. В формализме QG помимо мировой константы c фигурирует фундаментальный параметр размерности силы.

В работах второго направления взаимная симметрия привлекается к проблемам релятивистской космологии, в частности, на планковских масштабах. Здесь следует отметить работы [5; 6], где принцип взаимности сформулирован как требование инвариантности относительно обобщённых фурье-преобразований, а самовзаимное уравнение Борна интерпретируется как квантовополюсное. В обоих названных направлениях исследования используется подход Борна в его исходной квантовой версии.

Однако общепринятая физическая интерпретация взаимно-инвариантной $U(3,1)$ -симметричной квантовомеханической модели Борна (уравнение для релятивистского гармонического осциллятора) в настоящее время отсутствует, несмотря на непрекращающиеся попытки её применения в различных областях квантовой физики (см., напр., [7] и [8] и цитированную там литературу).

На наш взгляд, такие базовые положения оригинального подхода Борна, как факторизация действия (введение двух констант, «обезразмеривающих» пары канонически сопряжённых переменных), а также использование массы в качестве свободного размерного параметра, целесообразно сохранять в любом случае. К этому следует добавить принцип максимального натяжения Гиббонса (**Maximum Tension Principle – МТП**) [9] (см. также [13]), согласно которому обратная величина гравитационной постоянной Эйнштейна $G_E = 4G_N / c^4$ (c – скорость света, G_N – гравитационная постоянная Ньютона) определяет максимальную силу (**Maximum Force – MF**) $F_G = c^4 / 4G_N$ и соответственно $P_G = cF_G = c^5 / 4G_N$ – максимальная мощность (**Maximum Power – MP**).

Кроме того, в целях согласования квантовых и классических аспектов принципа взаимности, целесообразно рассматривать действие в качестве ненулевого размерного параметра, не предполагая изначально его дискретности.

В настоящей работе на основе гамильтонова формализма в расширенном восьмимерном фазовом пространстве построена одночастичная взаимно симметричная квазиньютонова механическая модель с единственным параметром, имеющим размерность массы и конечную область изменения. Модель имеет демонстрируемый ньютонов предел и допускает корректную процедуру канонического квантования.

Теоретическая часть. 1. Предварительные соображения. Как известно, фундаментальный взаимно-симметричный инвариант Борна представляет собой объединение пространственно-временного ($x^\mu x_\mu$) и импульсно-энергетического ($p^\mu p_\mu$) лоренцовых инвариантов [2].

Представим его в следующем виде:

$$S_B^2 = \frac{1}{q_e^2} x^\mu x_\mu + \frac{1}{p_e^2} p^\mu p_\mu, \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}. \quad (1.1)$$

Параметры q_e и p_e , имеющие соответственно размерность длины и импульса, связаны следующими двумя соотношениями:

$$p_e q_e = a_e, \quad (1.2)$$

$$p_e / q_e = \alpha_0, \quad (1.3)$$

где a – ненулевой ($a \geq a_e > 0$) параметр, имеющий размерность действия (не обязательно – дискретный), $\alpha_0 = \frac{c^3}{4G_N}$ – универсальная константа, имеющая размерность [масса]/[время], значок «e» у параметров – от слова *extremal*.

Из (1.2) и (1.3) параметры p_e и q_e выражаются через единственный свободный параметр a_e и универсальную константу α_0 следующим образом:

$$p_e = (a_e \alpha_0)^{\frac{1}{2}}, \quad q_e = (a_e \alpha_0^{-1})^{\frac{1}{2}}. \quad (1.4)$$

Если использовать параметризацию Борна [2] и выразить параметр размерности импульса p_e через параметр размерности массы m_e , т. е. использовать соотношение $p_e = m_e c$, то из (1.2)–(1.4) следует универсальная связь между параметрами m_e и a_e

$$m_e^2 = \frac{a_e}{c^2} \mathfrak{a}_0 = \frac{a_e c}{4G_N}, \quad (1.5)$$

а параметр q_e выразится через m_e следующим образом:

$$q_e = \frac{4m_e G_N}{c^2},$$

где $r_g = \frac{2m_e G_N}{c^2}$ – гравитационный радиус.

Заметим, что, положив в (1.5) $a_e = \frac{h}{\pi}$, получим $m_e = \sqrt{2} M_P$, где $M_P = \left(\frac{\hbar c}{G_N}\right)^{\frac{1}{2}}$ – масса Планка, параметры (1.4) выразятся в планковских величинах. В дальнейшем квантовую версию будем рассматривать как предельную классической.

Существование максимальной силы Гиббонса F_G означает наличие минимального расстояния r_0 , до которого могут сблизиться две точечные массы M и m , взаимодействующие по закону всемирного тяготения Ньютона. Проще всего убедиться в этом путём элементарной модификации ньютонова выражения для энергии $U_N(M, m, r)$ взаимодействия двух покоящихся масс:

$$U_N(M, m, r) = -G_N \frac{mM}{r}, \quad (r > 0) \rightarrow U_{gr}(M, m, r, r_0) = -F_G \frac{r_0^2}{r}, \quad r \geq r_0, \quad (1.6)$$

где параметр r_0 определён соотношением

$$r_0 = r_0(m, M) = \{r_g(m)R_g(M)\}^{\frac{1}{2}} = \frac{2G_N}{c^2} (mM)^{\frac{1}{2}}.$$

Выражение (1.6) имеет минимум, равный

$$U_{gr}^{(\min)}(m, M) = -F_G r_0 = -\frac{1}{2} (mM)^{\frac{1}{2}} c^2,$$

причём r_0 определяет глубину соответствующей «гравитационной ямы».

Наглядно-модельная картина в простейшем случае представляет собой два неподвижных соприкасающихся шара (или две капли) радиуса R_g и r_g соответственно (в состоянии невесомости!), причём параметр $r(M, m)$, определяющий расстояние между их центрами, равен

$$r(M, m) = R_g(M) + r_g(m) = \frac{2G_N}{c^2} (M + m).$$

Рассматривая ситуацию с позиций соблюдения энергетического баланса (что позволяет абстрагироваться от деталей динамики), выражение для полной энергии $E(M, m)$ такой «бинарной» системы можно представить в следующем виде:

$$E(M, m) = Mc^2 + mc^2 - \frac{1}{2} (mM)^{\frac{1}{2}} = (M + m)c^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{(mM)^{\frac{1}{2}}}{M + m} \right\} =$$

$$(M + m)c^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{M + m} \right)^{\frac{1}{2}} \right\},$$

где $\mu = \frac{mM}{M + m}$ – приведенная масса.

Такая картина соответствует выделению из суммарной энергии покоя $E_{\text{rest}} = (M, m)c^2$ энергии движения, равной

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \{(M, m)\mu\}^2 c^2 = \frac{1}{2} (Mm)^2 c^2$$

(приведенная масса в «поле» неподвижного центра инерции). Параметр λ_{k-r} , характеризующий отношение энергий, в общем случае определяется следующей формулой:

$$\lambda_{k-r} \stackrel{\text{def}}{=} E_{\text{kin}} / E_{\text{rest}} = \frac{1}{2} \frac{(Mm)^2}{M+m} = \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{1+\delta}, \quad (1.7)$$

где $\delta = \frac{m}{M}$.

Область изменения безразмерного параметра δ легко определить, используя известное соотношение, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое значения произвольной пары конечных положительных чисел, применительно к паре величин $R_g(M)$ и $r_g(m)$:

$$r_0 = \{R_g(M)r_g(m)\}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} \{R_g(M) + r_g(m)\} = r(M, m).$$

Отсюда с учётом (1.7) получаем

$$\lambda_{k-r} = r_0 / r(M, m) = \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{1+\delta},$$

где $0 < \delta_0 \leq \delta \leq 1$, так что $\delta_{\min} = \delta_0 = \frac{M_{\min}}{M_{\max}}$.

Видно, что в рамках предлагаемого подхода обязательным является наличие верхнего и нижнего предела массы покоя (и, соответственно, количества действия). Если выбрать в качестве M_{\max} значение массы Вселенной $M_u \sim 10^{55}$ г, то полагая $M_{\min} = M_p \sim 10^{-5}$ г (либо $M_{\min} = m_e \sim 10^{-27}$ г), получим $\delta_{\min} \sim 10^{-60}$ (либо $\delta_{\min} \sim 10^{-82}$).

С другой стороны, видно, что при $\lambda_{k-r} = \frac{1}{4}$ наибольшее возможное гравитационное «энерговыделение» (25 %) происходит при слиянии двух равновеликих масс. Следует при этом помнить, что соответствующая «яма» существует на фоне положительной энергии покоя, соответствующей сумме масс.

Как нетрудно видеть, в промежуточном варианте, когда $\delta \ll 1$, но M и m далеки от своих предельных значений, с хорошей точностью выполняется условие

$$\lambda_{k-r} \sim \frac{1}{2} \delta^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{M} \right)^4 c \ll c.$$

Однако при этом $\lambda_{k-r} \sim \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$.

Поэтому $\frac{v}{c} \approx \left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{4}}$, так что $v_{\text{lim}} \approx \left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{4}} c \ll c$, что находится в хорошем соответствии с законом Талли–Фишера, когда v – периферийная скорость вращения типичной спиральной галактики, $M = M_G$ – масса галактики, измеренная в массах солнца $m = M_{\odot}$.

2. *Группа Барута и симметрия комплексного расширенного фазового пространства.* Как известно (см., напр., [11]), **трактовка энергии и времени в качестве канонически сопряжённых переменных** характерна для формализма классической динамики в пространстве событий (QTP) и энергии (H) (расширенное фазовое пространство ($QTPH$), имеющее в общем случае $2 + 2N$ измерений, где N – любое конечное число, начиная с единицы).

Речь идёт о вещественном пространстве, где определены, во-первых, N -мерные векторы X_A и Y_B , и, во-вторых, для любой пары функций $f(X, Y)$, $\phi(X, Y)$ – классические скобки Пуассона $\{\phi, f\}_{X,Y}$. При этом

$$\{X_A, Y_B\}_{X,Y} = \eta_{AB}. \quad (2.1)$$

Функция Гамильтона в такой системе вводится следующим образом.
Задаётся некоторая $(2N + 1)$ -мерная *поверхность энергии*

$$\Omega(X, Y) \equiv \Omega(X_0, X_k; Y_0, Y_e) = 0, \quad (2.2)$$

после чего, разрешая (2.2) относительно координаты Y_0 получаем *уравнение энергии*

$$Y_0 = f(Y_k, P_e, X_0),$$

а функция Гамильтона определяется как

$$H(Y_k, P_e, X_0) \stackrel{\text{def}}{=} -Y_0 = -F(Y_k, P_e, X_0).$$

Если ограничиться построением на базе формализма (*QTPH*) механических моделей, не выходя за рамки трёх пространственных измерений, то переменные X и Y можно отождествить со следующими псевдоевклидовыми вещественными четырёхвекторами:

$$X: Q^\mu = \frac{1}{q_e} \{x_0 = ct, x_k\}, \quad Y: P^\mu = \frac{1}{p_e} \{P_0 = c^{-1}E, P_k\}; \quad (2.3)$$

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}.$$

Обратимся теперь к выражению (1.1) для S_B^2 и запишем его с учётом (2.3) в следующем виде:

$$S_B^2 = \frac{1}{p_e^2} \{p_0^2 - p_k^2\} + \frac{1}{q_e^2} \{x_0^2 - x_k^2\} = P_0^2 - (P^2 + Q^2 - Q_0^2).$$

Видно, что в рамках формализма (*QTPH*) нулевому значению борновского инварианта соответствует следующее уравнение поверхности энергий типа (2.2):

$$P_0^2 - (P^2 + Q^2 - Q_0^2) = 0,$$

откуда для функции Гамильтона получаем выражение

$$H = \pm (P^2 + Q^2 - T^2)^{\frac{1}{2}} \quad (T \equiv Q_0). \quad (2.4)$$

В классической версии следует ограничиться верхним знаком.

С другой стороны восьмимерное вещественное пространство (*QTPH*) естественным образом комплексифицируется путём введения четырёхмерных векторов

$$Z^\mu = X^\mu + iY^\mu$$

и группы преобразований Λ_B (в безындексной записи):

$$Z' = \Lambda Z,$$

где Λ – комплексные 4×4 матрицы, удовлетворяющие условию

$$\Lambda \eta \Lambda^\dagger = \eta, \quad (2.5)$$

символ \dagger означает эрмитово сопряжение, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$.

Это комплексная группа Лоренца с вещественной метрикой, описанная Барутом [10]. Для краткости будем называть её *группой Барута* и обозначать символом Λ_B . Метрический инвариант этой группы в координатах (2.3) имеет следующий вид:

$$Z^\mu Z_\mu^* = (X^\mu + iY^\mu)(X_\mu - iY_\mu) = X^\mu X_\mu + Y^\mu Y_\mu =$$

$$|Z_0|^2 - \sum_{k=1}^3 |Z_k|^2 = Q_0^2 + P_0^2 - \sum_{k=1}^3 (P_k^2 + Q_k^2).$$

Преобразованиям взаимности Борна $\left(\frac{x^\mu}{q_e} \rightarrow \frac{p^\mu}{p_e}, \frac{p^\mu}{p_e} \rightarrow -\frac{x^\mu}{q_e} \right)$ соответствует диагональная матрица $\Lambda_R = -iI = -i \text{diag}\{1, 1, 1, 1\}$, которая удовлетворяет условию (2.5) и следовательно, принадлежит группе Барута ($\Lambda_R \in \Lambda_B$). Существует ещё одна матрица такого же типа (т. е. $\bar{\Lambda}_R \in \Lambda_B$), а именно

$$\Lambda_R = -i\eta = -i \operatorname{diag}\{1, -1, -1, -1\},$$

чему соответствует вариант комплексификации пространства (условно обозначим его $(PT; QH)$), который связан с возможностью выбора определения для вещественной и мнимой составляющей комплексного вектора Z , альтернативного (2.3), а именно:

$$\bar{Z}^\mu = \bar{X}^\mu + i\bar{Y}^\mu,$$

где

$$\bar{X} : \bar{Q}^\mu = \left\{ -\frac{x_0}{q_e}, \frac{p_k}{p_e} \right\}; \quad \bar{Y} : \bar{P}^\mu = \left\{ \frac{p_0}{p_e}, \frac{x_k}{q_e} \right\}. \quad (2.6)$$

Очевидно, что

$$Z^\mu Z_\mu^* = Z'^\mu Z_\mu'^* = S_B^2.$$

Таким образом, взаимно-симметричный инвариант Борна (1.1) может быть интерпретирован как метрический инвариант группы Барута. В свою очередь, он представим в двух эквивалентных формах:

$$S_B^2 = P^\mu P_\mu + Q^\mu Q_\mu, \quad (2.7)$$

где $SO_V(3, 1)$ – векторы P^μ и Q^μ определены формулами (2.3);
либо

$$S_B^2 = \bar{P}^\mu \bar{P}_\mu + \bar{Q}^\mu \bar{Q}_\mu,$$

где $SO_f(3, 1)$ – векторы \bar{P}_μ и \bar{Q}_μ определены формулами (2.6)

Группы, обозначенные как $SO_V(3, 1)$ и $SO_f(3, 1)$, изоморфны, но не совпадают между собой. Необходимость различать эти две группы связана с подгрупповой структурой группы Барута [10] (см. также [12]).

В силу индефинитности метрического инварианта S_B^2 следует, как и в случае обычной группы Лоренца, рассматривать все три возможных его значения – нулевое, положительное и отрицательное.

Рассмотрим вначале случай $S_B^2 = 0$. При этом возможны два варианта.

(А) Одновременное обращение в 0 «координатной» и «импульсной» части S_B^2 , что можно считать следствием принципа взаимности (включающего преобразования Λ_R и $\bar{\Lambda}_R$)

$$Q^\mu Q_\mu = \frac{c^2}{q_e^2} (t^2 - c^{-2} r^2) = 0, \quad P^\mu P_\mu = \frac{1}{c^2 p_e^2} (E^2 - c^2 p^2) = 0.$$

Отсюда следует, что для любых конечных значений параметров q_e и p_e скорость

$$v_{\lim} = \left(\frac{dr}{dt} \right)_{\lim} = \left(\frac{\partial E}{\partial p} \right)_{\lim} = \pm c - \text{Maximum Speed},$$

$$\bar{Q}^\mu \bar{Q}_\mu = \frac{c^2}{q_e^2} \left(t^2 - \frac{q_e^2}{c^2 p_e^2} p^2 \right) = \frac{c^2}{q_e^2} \left(t - \frac{1}{F_G} p^2 \right) = 0,$$

$$P^\mu P_\mu = \frac{1}{c^2 p_e^2} \left(E^2 - \frac{c^2 p_e^2}{q_e^2} r^2 \right) = \frac{1}{c^2 p_e^2} (E^2 - F_G^2 r^2) = 0,$$

откуда

$$\left(\frac{dp}{dt} \right)_{\lim} = \left(\frac{\partial E}{\partial p} \right)_{\lim} = \pm F_G = \frac{c^4}{4G_N} - \text{Maximum Force}.$$

(В) Вариант $S_B^2 = 0$ реализуется при ненулевых, равных по величине и противоположных по знаку слагаемых в S_B^2 .

В дальнейшем ограничимся использованием координатизации (2.3) расширенного фазового пространства (X, Y) и будем рассматривать соотношение

$$S_B^2 = \bar{P}^\mu \bar{P}_\mu + \bar{Q}^\mu \bar{Q}_\mu = \frac{p^\mu p_\mu}{p_e^2} + \frac{x^\mu x_\mu}{q_e^2} = 0.$$

Оно выполняется при $x^\mu x_\mu = -q_e^2$, $p^\mu p_\mu = p_e^2$ (соответственно $P^\mu P_\mu = 1$, $Q^\mu Q_\mu = -1$) и соответствует гиперболическому движению, т. е. постоянному 4-ускорению $W_\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$, абсолютная величина которого равна $|W^\mu W_\mu|^2 = \frac{c^2}{q_e^2} = \frac{c}{m_e} \alpha_0 = \frac{1}{m_e} F_G$, и зависит от массы (Mass Dependent Maximal Acceleration – MDMA). При этом выполняется соотношение

$$W_{\max} m_{\min} = W_{\min} m_{\max} = F_G.$$

Видно, что постоянное MDMA-ускорение играет в рассматриваемой ситуации роль, аналогичную роли предельной скорости в группе Лоренца.

В рамках формализма (QTPH) именно нулевой интервал S_B^2 является поверхностью энергии, что приводит к функции Гамильтона вида (2.4):

$$H = (\underline{P}^2 + \underline{Q}^2 - T^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Как нетрудно показать, случай ненулевого положительного значения интервала ($S_B^2(\lambda_B) = \lambda_B > 0$) соответствует уравнению поверхности энергии, из которого получается функция Гамильтона следующего вида:

$$H' = (\underline{P}'^2 + \underline{Q}'^2 + \lambda_B - T')^{\frac{1}{2}},$$

где штрихованные переменные отличаются от переменных в (2.7) только следующим масштабным преобразованием модельного параметра:

$$m(\lambda_B) = \lambda m_e, \quad (2.8)$$

где $\lambda = (1 + \lambda_B)^{\frac{1}{2}}$, так что $p_e(\lambda) = \lambda p_e$, $q_e(\lambda) = \lambda q_e$, $p_e(\lambda)/q_e(\lambda) = p_e/q_e = \alpha_0$.

В дальнейшем будем исходить из модельного Гамильтониана

$$H = (\underline{P}^2 + \underline{Q}^2 + 1 - T^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.9)$$

где $P_k = \frac{p_k}{p_e}$, $Q_k = \frac{x_k}{q_e}$, $T = \frac{ct}{q_e}$ определяются соотношениями (2.8) при $\lambda_B = 1$.

Ниже будет показано, что выбор $\lambda_B = 1$ в качестве исходного оправдан соображениями как физического (принцип соответствия), так и чисто математического характера.

3. Гамильтонова динамика гравитирующей неточечной массы в (QT; PH). Скобки Пуассона (2.1) в данном случае заданы обычным образом

$$\{\varphi(Q, P, T), \Phi(Q, P, T)\}_{q,p} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^3 \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial Q_k} \frac{\partial \Phi}{\partial P_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial P_k} \frac{\partial \Phi}{\partial Q_k} \right\}.$$

Полная производная по времени определена как

$$\frac{df(P, Q, T)}{dT} = \frac{\partial f}{\partial T} + \{f, H\}_{q,p}.$$

Если исходить из функции Гамильтона (2.9) и полагать, как обычно, что временная зависимость канонических переменных определяется динамическими уравнениями, то соответствующие гамильтоновы уравнения будут иметь вид

$$\frac{dQ_k}{dT} = \frac{\partial H}{\partial P_k} = \frac{P_k}{(H_0^2 - T^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{dP_k}{dT} = -\frac{\partial H}{\partial Q_k} = -\frac{Q_k}{(H_0^2 - T^2)^{\frac{1}{2}}},$$

где

$$H_0 = (\underline{P}_k^2 + \underline{Q}_k^2 + 1)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1)$$

Тогда $\frac{dH_0}{dT} = 0$, т. е. H_0 , определяемый формулой (3.1), представляет собой первый интеграл движения (энергию).

Легко убедиться, что тензор

$$H_{kl} = H_0^{-1} \left\{ P_k P_l + Q_k Q_l + \frac{1}{3} \delta_{kl} \right\} \quad (3.2)$$

в сочетании с компонентами углового момента

$$L_k = \varepsilon_{klm} Q_l P_m$$

обеспечивают $U(3) = U(1) \otimes SU(3)$ симметрию задачи.

При этом очевидно, что гамильтониан (3.1) есть след тензора (3.2), причём наличие члена $\sim \delta_{kl}$ обеспечивает ненулевое значение детерминанта тензора H_{kl} .

В [12] в качестве исходного рассматривался гамильтониан, соответствующий случаю $\lambda_B = 0$. Поэтому выводы о предельном соответствии модели с гравитационной динамикой Ньютона, с одной стороны, и с квантовой механикой – с другой, носили лишь качественный, а не строгий характер.

Первоочередными вопросами остаётся также гамильтонова формулировка двухчастичной задачи и проблема согласования модели с общепринятой ОТО, что требует дальнейшего специального анализа. Здесь ограничимся ссылкой на феноменологическое рассмотрение задачи двух тел в разделе 1 с энергетических позиций ((1.6) для потенциальной гравитационной энергии двухчастичного взаимодействия). Несомненной выглядит и связь полученного «пульсирующего» решения для $m_e = M_{\max}$ с моделью осциллирующей Вселенной.

Теперь перейдём к рассмотрению *Ньютонова предела* в модели с гамильтонианом (2.9).

Рассмотрим выражение для энергии $H_0 = (P_k^2 + Q_k^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ в пределе $P/p_e \ll 1$, $Q/q_e \ll 1$.

Выразим это соотношение в размерных величинах

$$E = cp_e H_0 = cp_e \left(\frac{p^2}{p_e^2} + \frac{r^2}{q_e^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} = cp_e \left(1 + \frac{r^2}{q_e^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{p^2}{p_e^2} \left(1 + \frac{r^2}{q_e^2} \right)^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим полученное выражение в приближении $Q/q_e \ll 1$, $P/p_e \ll 1$, $P/Q \ll 1$ (т. е. $p/r \ll p_e/q_e = \alpha_0$).

Тогда получим

$$E \approx m_e c^2 + \frac{1}{2} m_e v^2 + \frac{1}{2} m_e \omega_0^2(m) r^2,$$

где

$$\omega_0(m) = m_e^{-1} \alpha_0$$

характерная «частота» (обратная величина тому отрезку времени T , который задаётся в модели в соответствии с определением

$$T = \frac{ct}{q_e} = v_e(m)t,$$

где $v_e(m) = c^{-1} q_e = \frac{p_e}{c} \alpha_0^{-1} = m_e \alpha_0^{-1}$).

Заметим, что добавка к постоянной $m_e c^2$ имеет характерную форму энергии (гамильтониана) нерелятивистского пространственного изотропного осциллятора.

Разделив на c^2 , получим ньютонов предел для массы $m = \frac{E}{c^2}$, т. е.

$$m = m_e + m_e \left\{ \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0^2 r^2}{c^2} \right) \right\}.$$

«Осциллирующая» добавка к массе m_e , во-первых, мала, а во-вторых, при тех значениях массы, когда «работает» гравитационная динамика Ньютона, частота $\omega_0(m_e)$ настолько велика, что усреднение по макроскопическим отрезкам времени её надёжно зануляет.

4. *Квантование гравитации.* Рассмотрим оригинальную квантовомеханическую версию Борна [2], представив оператор $\widehat{S}'_B(\lambda_B = 0)$ в соответствии с квадратичной формой (2.7) уравнения энергии в (QT, PH) в следующем виде:

$$\widehat{S}'^2(\lambda_B = 1) = \widehat{P}^\mu \widehat{P}_\mu + \widehat{Q}^\mu \widehat{Q}_\mu - 1, \quad (4.1)$$

причём

$$[\widehat{P}_\mu, \widehat{Q}_\nu] = i\eta_{\mu\nu}, \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}.$$

Заметим, что в размерных величинах ($p_e q_e = a_e$) оператор (4.1) допускает естественную трактовку в качестве оператора действия.

Оператор (4.1), записанный в разделяющихся псевдодекартовых переменных (либо $\xi_\mu = \frac{x_\mu}{q_e}$, либо $\eta_\mu = \frac{p_\mu}{p_e}$), имеет вид

$$\widehat{S}'^2(1) = 2 \left\{ \widehat{H}_0 - \sum_{k=1}^3 \widehat{H}_k \right\} - 1, \quad (4.2)$$

где \widehat{H}_K ($K = 0, 1, 2, 3$) по форме представляет собой оператор линейного гармонического осциллятора.

Если рассматривать каждый из них в представлении чисел заполнения, то

$$\widehat{H}_K |n_K\rangle = \left(n_K + \frac{1}{2} \right) |n_K\rangle,$$

где n_K – четверка натуральных чисел $\{n_0, n_1, n_2, n_3\}$, которые могут независимо принимать все значения, включая нулевое; $|n_K\rangle$ – соответствующие собственные состояния.

При этом в (4.2) следует различать укороченное (p, r) -действие и (E, t) -действие, определяемое соответственно операторами $\sum_{k=1}^3 \widehat{H}_k$ и \widehat{H}_0 , поскольку они входят в (4.2) с противоположными знаками, а также имеют разный статистический вес (степень вырождения состояний $N(n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, где $n = n_1 + n_2 + n_3$, и $N(n_0) = 1$ соответственно). Кроме того, разность $S^2(E, t) - S^2(p, r)$ ограничена снизу условием

$$S^2(E, t) - S^2(p, r) = 1,$$

Для собственных значений $S^2(n_0, n)$ оператора (4.2), равных

$$S^2(n_0, n) = 2(n_0 - n - 1),$$

видно, что вакуумное значение, которое достигается при $(n_0)_{\min} = 1$ бесконечно вырождено, но при этом $(n_0)_{\min} = 1$ (при $n = 0$).

Таким образом, взаимно-симметричный оператор Борна, рассмотренный в рамках простейшей процедуры канонического квантования в терминах расширенного фазового пространства $(QT; PH)$, фактически представляет собой квантовомеханический оператор действия с линейным дискретным спектром собственных значений в единицах \hbar .

Отсюда в качестве естественного следствия вытекает соответствующее квантование физических величин, которые пропорциональны постоянной Планка.

Это, во-первых, квадрат массы покоя (квант массы–масса Планка), и, во-вторых – величина $\hbar c$, имеющая размерность квадрата электрического (или магнитного) заряда. Напомним, что величина $g_0^2 = \hbar c$ представляет собой квант квадрата заряда магнитного монополя.

Теперь рассмотрим выражение для интеграла энергии

$$H_0 = (\underline{P}_k^2 + \underline{Q}_k^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

с позиций канонического квантования, т. е. теперь \widehat{P}_k и \widehat{Q}_k – квантовомеханические операторы $[\widehat{P}_k, \widehat{Q}_l] = -i\delta_{kl}$, все размерные параметры – планковские. С чисто математической стороны речь

идёт о дираковской линеаризации оператора в правой части выражения $\widehat{H}_0 = (\widehat{\mathbf{P}}_k^2 + \widehat{\mathbf{Q}}_k^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ (используя 3-векторные обозначения).

Это легко достигается путём использования известных (4×4) -матриц Дирака α_k, Σ_k ($k=1, 2, 3$) и $\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ и эрмитовых операторов $\widehat{\mathbf{P}} = (\alpha_k \widehat{\mathbf{P}}_k) = (\underline{\alpha} \widehat{\mathbf{P}})$, $\widehat{\mathbf{Q}} = (\alpha_k \widehat{\mathbf{Q}}_k) = (\underline{\alpha} \widehat{\mathbf{Q}})$, а также двух взаимно эрмитово-сопряженных операторов

$$\widehat{U}_{\pm}^{-} = I \pm i\beta \widehat{\mathbf{Q}} = I \pm i\beta(\underline{\alpha} \widehat{\mathbf{Q}}), \quad \widehat{U}_{\pm}^{\dagger} = \widehat{U}_{\mp}^{\dagger}.$$

Тогда операторы

$$\widehat{H}_0^{(\pm)} = (\underline{\alpha} \widehat{\mathbf{P}}) \pm \widehat{U}_{\pm} = \underline{\alpha}(\widehat{\mathbf{P}} \pm i\beta \widehat{\mathbf{Q}}) + \beta$$

совпадают с оператором энергии известной модели осциллятора Дирака и её суперсимметричным партнёром [14; 15]. В данном случае речь идёт об операторе энергии для электрически нейтральной частицы с массой Планка, т. е. о массивном электрически нейтральном фермионе.

Заключение. Рассмотренная самовзаимная одночастичная гамильтонова модель сама по себе не является реалистической (поскольку не включает никаких взаимодействий, помимо чисто гравитационных) и скорее относится к категории «игрушечных» (Toy-model). Однако, как и любая модель этого типа, если она связана с точным решением динамических уравнений, то содержит нетривиальные эвристические черты, стимулируя постановку новых задач.

То обстоятельство, что единственный параметр, имеющий размерность массы (и связанный с ним параметр размерности действия), позволяет ввести в классическую гамильтонову динамику эталонные единицы для всех координат расширенного фазового пространства (энергия–время, импульс–координата) свидетельствует о том, что возникающие при этом связи: масса покоя–действие, масса покоя–частота, пульсирующий характер пространственно-локализованного массивного объекта, могут носить модельно независимый характер.

Первоочередные задачи, требующие решения, это гамильтонова формулировка двухчастичной задачи, переход к лагранжевой форме динамики, «стыковка» с традиционной ОТО (модель пульсирующей Вселенной, внутреннее решение Шварцшильда), а также включение электромагнитного взаимодействия.

Квантовая версия используемого подхода содержит следующие результаты:

1. Трактовка самовзаимного оператора Борна в качестве квантовомеханического оператора, дающего эквидистантный спектр квадрата массы в планковских единицах.
2. Получение в рамках процедуры канонического квантования явного вида оператора энергии для фермиона с массой Планка, что соответствует известной модели осциллятора Дирака, не имеющей сегодня общепринятой физической интерпретации.

Благодарности. В заключение выражаю благодарность Е. А. Толкачеву, В. В. Кудряшову за помощь в работе, а также А. Э. Марголину, И. Д. Феранчуку и Ю. П. Выблему за полезные обсуждения.

Acknowledgement. In conclusion, I would like to thank E. A. Tolkachev and V. V. Kudryashov for help in work and A. E. Margolin, I. D. Feranchuk and Yu. P. Vybyly for useful discussions.

Список использованной литературы

1. Born, M. A suggestion for unifying quantum theory and relativity / M. Born // Proc. Roy. Lond. – 1938. – Vol. 165, issue 921. – P. 291–303. doi.org/10.1098/rspa.1938.0060.
2. Born, M. Reciprocity Theory of Elementary Particles / M. Born // Rev. Mod. Phys. – 1949. – Vol. 21, N 3. – P. 463–473. doi.org/10.1103/revmodphys.21.463.
3. Low, S. G. Reciprocal relativity of noninertial frames and the quaplectic group / S. G. Low // Found. Phys. – 2006. – Vol. 36, N 7. – P. 1036–1069. doi.org/10.1007/s10701-006-9051-2.
4. Morgan, S. A modern Approach to Born Reciprocity / Stuart Morgan. – University of Tasmania, 2010.
5. Bolognesi, S. A cosmology of trans-Planckian theory and dark energy / S. Bolognesi // Int. J. Mod. Phys. – 2014. – Vol. 23, N 5. – P. 1450046. doi.org/10.1142/s0218271814500461.
6. Bolognesi, S. Born Reciprocity and Cosmic Accelerations / S. Bolognesi // Advances in Dark Energy Research / ed. Miranda L. Ortiz. – NY: Nova Science Publishers Inc., 2015. – P. 56–74; Arxiv: 1506.02187 v.3, hep-th.
7. Bars, J. Harmonic Oscillator Revisited / J. Bars // Phys. Rev. – 2009. – Vol. 79, N 4. – P. 045009. doi.org/10.1103/physrevd.79.045009.

8. Kovalski, K. Relativistic massless Harmonic Oscillator / K. Kovalski, J. Rembieliński // *Phys. Rev. A*. – 2010. – Vol. 81, N 1; Arxiv: 1002.0474. doi.org/10.1103/physreva.81.012118.
9. Gibbons, G. W. The Maximum Tension Principle in General Relativity / G. W. Gibbons // *Found. Phys.* – 2002. – Vol. 32, N 12. – P. 1891–1901. doi.org/10.1023/a:1022370717626.
10. Barut, A. O. Complex Lorentz Group with a Real Metric: Group Structure / A. O. Barut // *J. Math. Phys.* – 1964. – Vol. 5, N 11. – P. 1652–1656. doi.org/10.1063/1.1931202.
11. Синг, Дж. Классическая динамика / Дж. Л. Синг. – Москва, 1963. – 531 с.
12. Томильчик, Л. М. Взаимная инвариантность, принцип максимального натяжения и комплексная группа Лоренца как симметрия гравитационного взаимодействия / Л. М. Томильчик // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 1. – С. 41–48.
13. Barrow, John D. Maximal Tension: with and without a cosmological constant / John D. Barrow, G. W. Gibbons // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2014. – Vol. 446, N 4. – P. 3874–3877. doi.org/ 10.1093/mnras/stu2378; Arxiv: 1408.1820 v3, gr – qc. Dec. 2014.
14. Moshinski, M. The Dirac Oscillator / M. Moshinski, A. Szczepaniak // *J. Phys. A*. – 1989. – Vol. 22, N 17. – P. L817–L819. doi.org/10.1088/0305-4470/22/17/002.
15. Quesne, C. Supersymmetry and the Dirac Oscillator / C. Quesne // *Int. J. Mod. Phys. A*. – 1991. – Vol. 6, N 9. – P. 1567–1589. doi.org/10.1142/s0217751x91000836.

References

1. Born M. A suggestion for unifying quantum theory and relativity. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1938, vol. 165, no. 921, pp. 291–303. doi.org/10.1098/rspa.1938.0060.
2. Born M. Reciprocity Theory of Elementary Particles. *Reviews of Modern Physics*, 1949, vol. 21, no. 3, pp. 463–473. doi.org/10.1103/revmodphys.21.463.
3. Low S. G. Reciprocal relativity of noninertial frames and the quaplectic group. *Foundations of Physics*, 2006, vol. 36, no. 7, pp. 1036–1069. doi.org/10.1007/s10701-006-9051-2.
4. Morgan S. *A modern Approach to Born Reciprocity*. University of Tasmania, 2010.
5. Bolognesi S. A cosmology of trans-Planckian theory and dark energy. *International Journal of Modern Physics D*, 2014, vol. 23, no. 5, pp. 1450046. doi.org/10.1142/s0218271814500461.
6. Bolognesi S. Born Reciprocity and Cosmic Accelerations. Ortiz Miranda L. (ed.) *Advances in Dark Energy Research*. NY, Nova Science Publishers Inc., 2015, pp. 56–74; Arxiv: 1506.02187 v.3, hep-th.
7. Bars J. Harmonic Oscillator Revisited. *Physical Review D*, 2009, vol. 79, no. 4, pp. 045009. doi.org/10.1103/physrevd.79.045009.
8. Kovalski K., Rembieliński J. Relativistic massless Harmonic Oscillator. *Physical Review A*, 2010, vol. 81, no. 1; Arxiv: 1002.0474. doi.org/10.1103/physreva.81.012118.
9. Gibbons G. W. The Maximum Tension Principle in General Relativity. *Foundations of Physics*, 2002, vol. 32, no. 12, pp. 1891–1901. doi.org/10.1023/a:1022370717626.
10. Barut A. O. Complex Lorentz Group with a Real Metric: Group Structure. *Journal of Mathematical Physics*, 1964, vol. 5, no. 11, pp. 1652–1656. doi.org/10.1063/1.1931202.
11. Synge J. L. *Classical Dynamics*. Moscow, 1963. 531 p. (in Russian)
12. Tomilchik L. M. Reciprocal invariant, maximum tension principle, and the Lorentz complex group as the symmetry of gravitational interaction. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2016, vol. 60, no. 1, pp. 41–48. (in Russian)
13. Barrow J. D., Gibbons G. W. Maximal Tension: with and without a cosmological constant. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2014, vol. 446, no. 4, pp. 3874–3877. doi.org/ 10.1093/mnras/stu2378; Arxiv: 1408.1820 v3, gr – qc. Dec. 2014.
14. Moshinski M., Szczepaniak A. The Dirac Oscillator. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1989, vol. 22, no. 17, pp. L817–L819. doi.org/10.1088/0305-4470/22/17/002.
15. Quesne C. Supersymmetry and the Dirac Oscillator. *International Journal of Modern Physics A*, 1991, vol. 6, no. 9, pp. 1567–1589. doi.org/10.1142/s0217751x91000836.

Информация об авторе

Томильчик Лев Митрофанович – член-корреспондент, д-р физ.-мат. наук, профессор, Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: lmt@dragon.bas-net.by.

Для цитирования

Томильчик, Л. М. Модель пульсирующего массивного шара как точное решение уравнений самовзаимной гамильтоновой динамики / Л. М. Томильчик // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 36–46.

Information about the author

Tomilchik Lev Mitrofanovich – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: lmt@dragon.bas-net.by.

For citation

Tomilchik L. M. Model of massive pulsating sphere as an exact solution of the Hamiltonian self reciprocal dynamics equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 36–46. (in Russian)

ХИМИЯ
CHEMISTRY

УДК 541.183, 544.576; 543.54

Поступило в редакцию 19.09.2016
Received 19.09.2016

О. Н. Опанасенко, академик Н. П. Крутько, О. Л. Жигалова, О. В. Лукша, Т. А. Козинец

Институт общей и неорганической химии НАН Беларуси, Минск, Республика Беларусь

**СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕФТЯНЫХ ДИСПЕРСИЙ КОМПОЗИЦИЯМИ
ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНЫХ ВЕЩЕСТВ**

Изучены коллоидно-химические свойства водных растворов композиций поверхностно-активных веществ (ПАВ) различной природы: катионные ПАВ (КПАВ), анионные ПАВ (АПАВ), неионогенные ПАВ (НПАВ). Обнаружены синергетические эффекты для композиций КПАВ/АПАВ и КПАВ/НПАВ при мицеллообразовании и адсорбции. Установлено, что максимальным синергизмом действия, проявляющимся в снижении поверхностного натяжения, обладает композиция КПАВ/АПАВ при соотношении компонентов 4 : 1. Этот факт обуславливает эффективность ее диспергирующего действия и способность к формированию на поверхности частиц дисперсной фазы нефтешлама структурированного слоя, обладающего максимальной упругостью и механической прочностью по сравнению с молекулами КПАВ/НПАВ. Водные дисперсии нефтешлама, полученные с использованием композиции КПАВ/АПАВ, являются агрегативными и кинетически устойчивыми дисперсиями прямого типа.

Ключевые слова: поверхностно-активные вещества, водные дисперсии нефтешлама, повышение нефтеотдачи.

O. N. Opanasenko, Academician N. P. Krut'ko, O. L. Zhigalova, O. V. Luksha, T. A. Kozinets

Institute of General and Inorganic Chemistry of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

STABILIZATION OF PETROLEUM DISPERSIONS BY THE COMPOSITIONS OF SURFACTANTS

Colloid-chemical properties of water solutions of compositions of surfactants of different nature are studied. The synergistic effects for the compositions of cationic/anionic surfactants and cationic/non-ionized surfactants at micellization and adsorption are found. It has been found that the maximal synergism of action, showing up in a decrease of surface tension, is offered by the composition of cationic/anionic surfactants in the component 4 : 1. This fact stipulates the efficiency of its dispersive action and its capacity of forming on the surface of particles the dispersible phase of oil slime of the structured layer, possessing maximum elasticity and mechanical strength, as compared to the molecules of cationic and non-ionized surfactants. Water dispersions of oil slime obtained with the use of the composition of cationic and anionic surfactants are the aggregative and kinetically stabilized dispersions of direct type.

Keywords: surfactants, water dispersions of oil slime, enhanced oil recovery.

В настоящее время актуальным направлением в нефтедобывающей промышленности является создание технологий, обеспечивающих высокоэффективное освоение трудноизвлекаемых запасов нефти, совершенствование существующих и разработка новых методов воздействия на пласты и увеличения нефтеотдачи [1]. Одним из способов повышения коэффициента извлечения нефти является химическое воздействие на пласт – закачивание в нагнетательные скважины потокоотклоняющих композиций, образующих в высокообводненном пропластке гидроизолирующий экран, препятствующий проникновению воды [2]. К таким композициям можно отнести водную дисперсию нефтешлама (ВДНШ), которая, разрушаясь при нагревании до пластовой температуры и смешении с минерализованной водой, образует в обводненных зонах вязкопластичный материал, состоящий из коагулированных частиц нефтешлама и выполняющий водоизоляционную функцию.

Основными критериями, предъявляемыми к ВДНШ, являются степень дисперсности, вязкость, соответствующая ее движению в пласте, агрегативная и кинетическая устойчивость. Физико-

химические свойства ВДНШ определяются, прежде всего, природой и коллоидно-химическими свойствами поверхностно-активных веществ (ПАВ), используемых в качестве диспергаторов нефтешлама. Актуальным на сегодняшний день является применение композиций ПАВ различной природы, совмещающих достоинства индивидуальных ПАВ [3; 4]. Особое внимание следует уделить композициям, содержащим в составе катионные ПАВ (КПАВ), сложный характер и особенности поведения которых определяются, в первую очередь, природой гидрофильных и липофильных групп. Это обуславливает их высокую поверхностную и адсорбционную активность, и, как следствие, эффективное диспергирующее и стабилизирующее действие [5; 6].

Цель работы – установление взаимосвязи химической природы и состава композиционных ПАВ и эффективности их диспергирующего действия при получении ВДНШ.

Материалы и методы исследования. КПАВ, представляющее собой смесь аминокислот рапсового масла, неионогенное ПАВ (НПАВ) – оксиэтилированное ПАВ на основе Сорбитан С и анионное ПАВ (АПАВ) – смесь ненасыщенных жирных карбоновых кислот. Растворы композиций КПАВ/НПАВ и КПАВ/АПАВ получали смешением растворов индивидуальных ПАВ равных концентраций при разных соотношениях 1 : 1, 1 : 4 и 4 : 1; водные дисперсии нефтешлама (Речицанефть), полученные на основе разработанных композиций ПАВ.

Поверхностное натяжение растворов ПАВ и их смесей на границе раствор/воздух определяли методом отрыва кольца (метод Дю Нуи) с использованием прибора «Процессор-тензиометр К100 МК2» (фирма Ktuss, Германия) в автоматическом режиме с точностью $\pm 0,3$ мН/м. В качестве инструмента измерения применяли стандартное платиновое кольцо. По изотермам поверхностного натяжения σ ($\ln C$) определены основные коллоидно-химические характеристики ПАВ: предельная адсорбция (Γ_m), критическая концентрация мицеллообразования (C_k), поверхностное натяжение в области критической концентрации мицеллообразования (σ_k).

Структурно-реологические характеристики водных растворов композиций ПАВ и ВДНШ определяли на ротационном вискозиметре «Реотест-2» с использованием цилиндрического измерительного устройства. Измерения проводили при 20 °С.

Результаты и их обсуждение. Изотермы поверхностного натяжения растворов индивидуальных ПАВ и их композиций при $T = 20$ °С представлены на рис. 1, 2. Коллоидно-химические характеристики растворов ПАВ и их композиций приведены в табл. 1, 2.

Сравнительный анализ коллоидно-химических характеристик индивидуальных ПАВ показал, что наиболее эффективно поверхностное натяжение на границе раздела раствор/воздух сни-

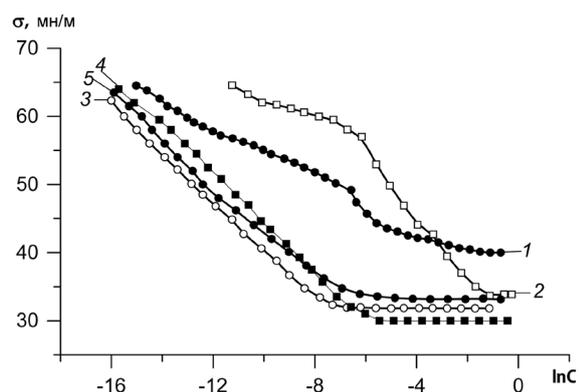


Рис. 1. Изотермы поверхностного натяжения водных растворов НПАВ (1), КПАВ (2) и их смесей при соотношении компонентов КПАВ/НПАВ (1 : 1) (3), КПАВ/НПАВ (4 : 1) (4), КПАВ/НПАВ (1 : 4) (5)

Fig. 1. Isotherms of surface tension of aqueous solutions of non-ionized surfactant (1), cationic surfactant (2) and their mixtures in the cationic surfactant/non-ionized surfactant component ratio (1 : 1) (3), in the cationic surfactant/non-ionized surfactant component ratio (4 : 1) (4), in the cationic surfactant/non-ionized surfactant ratio (1 : 4) (5)

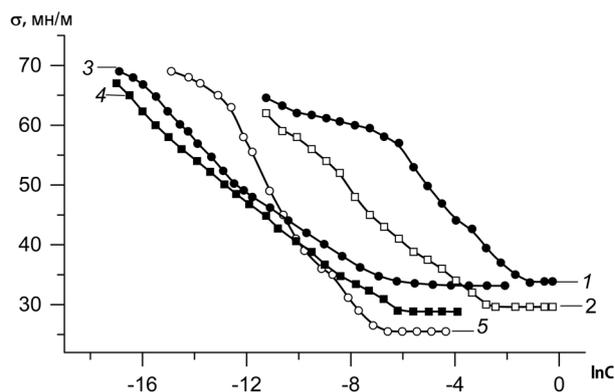


Рис. 2. Изотермы поверхностного натяжения водных растворов КПАВ (1), АПАВ (2) и их смесей при соотношении компонентов КПАВ/АПАВ (1 : 4) (3), КПАВ/АПАВ (1 : 1) (4), КПАВ/АПАВ (4 : 1) (5)

Fig. 2. Isotherms of surface tension of aqueous solutions of cationic surfactant (1), anionic surfactant (2) and their mixtures in the cationic surfactant/anionic surfactant component ratio (1 : 4) (3), in the cationic surfactant/anionic surfactant component ratio (1 : 1) (4), in the cationic surfactant/anionic surfactant component ratio (4 : 1) (5)

Т а б л и ц а 1. Коллоидно-химические характеристики растворов ПАВ на границе раздела раствор/воздух

T a b l e 1. Colloid-chemical characteristics of solutions of surfactants at the solution/air interface

Характеристика Characteristic	Вещество Surfactant		
	КПАВ cationic surfactant	НПАВ non-ionised surfactant	АПАВ anionic surfactant
Γ_m , моль/м ²	$2,0 \cdot 10^6$	$4,9 \cdot 10^6$	$2,1 \cdot 10^6$
C_{k^2} , г/л	$16 \cdot 10^2$	$1,8 \cdot 10^2$	$9,1 \cdot 10^2$
σ_k , мН/м	33,8	40,6	30,0

Т а б л и ц а 2. Коллоидно-химические характеристики растворов композиций ПАВ на границе раздела раствор/воздух

T a b l e 2. Colloid-chemical characteristics of solutions of surfactant compositions at the solution/air interface

Характеристика Characteristic	Соотношение ПАВ в композиции Surfactant ratio in the composition					
	КПАВ/НПАВ cationic surfactant/non-ionised surfactant			КПАВ/АПАВ cationic surfactant/anionic surfactant		
	1 : 1	1 : 4	4 : 1	1 : 1	1 : 4	4 : 1
Γ_m , моль/м ²	$1,5 \cdot 10^6$	$1,4 \cdot 10^6$	$1,6 \cdot 10^6$	$1,4 \cdot 10^6$	$1,3 \cdot 10^6$	$2,9 \cdot 10^6$
C_{k^2} , г/л	$6,3 \cdot 10^4$	$7,1 \cdot 10^4$	$0,2 \cdot 10^4$	$0,3 \cdot 10^4$	$8,3 \cdot 10^4$	$5,5 \cdot 10^4$
σ_k , мН/м	32,0	33,1	29,5	28,8	33,5	25,5

жает раствор АПАВ ($\sigma_k = 30$ мН/м). Адсорбционная способность АПАВ и КПАВ на границе раздела фаз практически одинакова, о чем свидетельствуют значения максимальной адсорбции Γ_m $2,1 \cdot 10^6$ и $2,0 \cdot 10^6$ моль/м². Следует отметить, что адсорбция НПАВ составляет $4,9 \cdot 10^6$ моль/м², что в $\sim 2,5$ раза выше по сравнению с адсорбционной способностью АПАВ и КПАВ. Кроме того, склонность к агрегации в растворах НПАВ наблюдается в области более низких концентраций, чем для КПАВ и АПАВ и, как следствие, НПАВ проявляет высокую поверхностную активность благодаря большей гидрофобности его молекулы, в то же время раствор НПАВ снижает поверхностное натяжение только до 40,6 мН/м.

Сопоставление изотерм поверхностного натяжения растворов композиций КПАВ/НПАВ и КПАВ/АПАВ показало, что максимальным синергизмом действия, проявляющимся в снижении поверхностного натяжения, обладают композиции, обогащенные КПАВ (4 : 1). Так, поверхностное натяжение растворов КПАВ/АПАВ при соотношении 4 : 1 снижается с 33,8 до 25,5 мН/м, а КПАВ/НПАВ – с 33,1 до 29,5 мН/м.

Для исследуемых композиций ПАВ наблюдается синергизм и при мицеллообразовании – значения критической концентрации мицеллообразования (ККМ) на несколько порядков ниже по сравнению со значениями ККМ индивидуальных ПАВ. Так, $KKM_{КПАВ}$ составляет $16 \cdot 10^{-2}$ г/л, $KKM_{АПАВ} = 9,1 \cdot 10^{-2}$ г/л, а значения ККМ композиций находятся в пределах $(0,21-8,3) \cdot 10^{-4}$ г/л. Учитывая тот факт, что исследуемые ПАВ являются промышленными образцами и их молекулярные массы не определены, рассчитать параметры взаимодействия и составы смешанных мицелл и адсорбционных слоев с использованием общепринятого подхода Рубина и Розена [7; 8] не представлялось возможным. Однако анализ полученных данных позволяет сделать вывод, что в растворах исследуемых композиций ПАВ образуются сложные смешанные мицеллы, что и обуславливает проявление синергетических эффектов.

Следует отметить, что синергетические эффекты в растворах композиций КПАВ/АПАВ проявляются ярче, чем в растворах композиций КПАВ/НПАВ при одинаковом соотношении компонентов. Максимальным синергизмом действия, проявляющимся в снижении поверхностного натяжения, обладает композиция КПАВ/АПАВ при соотношении компонентов 4 : 1, что будет обуславливать эффективность ее диспергирующего действия по отношению к нефтяным дисперсиям.

Образование сложных смешанных мицелл в растворах композиций ПАВ приводит к изменению размеров структурных единиц течения, что будет оказывать влияние на эффективную вязкость водных растворов ПАВ (гидродинамический фактор стабилизации) и стабильность ВДНШ, полученных на их основе.

Структурно-реологические параметры водных растворов композиций КПАВ/НПАВ и КПАВ/АПАВ при соотношении компонентов 4 : 1 в зависимости от концентрации приведены в табл. 3.

Таблица 3. Структурно-реологические характеристики водных растворов композиций КПАВ/АПАВ и КПАВ/НПАВ при соотношении КПАВ/НПАВ и КПАВ/АПАВ 4 : 1 при $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$

Table 3. Structure-rheological characteristics of aqueous solutions of compositions of cationic surfactant/anionic surfactant and cationic surfactant/non-ionized surfactant in the component ratio of cationic surfactant/non-ionized surfactant and cationic surfactant/anionic surfactant 4 : 1 at $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$

Характеристика Characteristic	Концентрация композиции Composition concentration					
	КПАВ/АПАВ cationic surfactant/anionic surfactant			КПАВ/НПАВ cationic surfactant/non-ionised surfactant		
	5 %	7 %	9 %	5 %	7 %	9 %
P_{k1} , Па	1,8	2,4	2,4	0,6	1,2	1,2
P_{k2} , Па	5,2	10,0	10,6	2,7	5,0	5,0
P_m , Па	12,9	17,6	22,3	10,5	27,0	28,2
η_0^* , Па · с	$1176 \cdot 10^3$	$1568 \cdot 10^3$	$1568 \cdot 10^3$	$392,11 \cdot 10^3$	$784,50 \cdot 10^3$	$784,50 \cdot 10^3$

Анализ полученных результатов исследования позволил выявить наличие как общих тенденций, так и оценить различие во влиянии химической природы ПАВ на изменение коллоидной структуры их водных растворов. Показано, что повышение концентрации водных растворов композиций ПАВ с 5 до 7 % приводит к увеличению прочности межмолекулярных связей (P_{k1}), упруго-пластичных свойств, характеризуемых показателем P_{k2} , и механической прочности, на что указывает рост значений P_m [9]. Дальнейшее увеличение концентрации композиций ПАВ до 9 % не оказывает существенного влияния на реологию их растворов. Установлено, что при одинаковых концентрациях в растворе композиции КПАВ/АПАВ формируется более прочная сетка зацеплений ассоциированными цилиндрическими молекулами, в результате чего раствор характеризуется более высокими (в ~2 раза) значениями структурно-реологических характеристик и эффективной вязкости, что позволит усилить гидродинамический эффект стабилизации нефтяных дисперсий, полученных с использованием композиции КПАВ/АПАВ. Образование прочной пространственной структуры в растворе КПАВ/АПАВ обусловлено различием в механизме взаимодействия между молекулами ПАВ. Основной вклад при образовании смешанных ассоциатов в объеме раствора КПАВ/АПАВ вносит электростатический фактор, в то время как смешение КПАВ и НПАВ происходит за счет более слабых гидрофобных взаимодействий [1; 2].

Проявление у молекул композиции КПАВ/АПАВ способности к образованию прочных пространственных структур в объеме раствора и на поверхности раздела фаз будет оказывать существенное влияние при получении стабильных нефтяных дисперсий. С целью подтверждения полученных результатов изучены структурно-реологические свойства ВДНШ, полученных с использованием композиций КПАВ/АПАВ и КПАВ/НПАВ при концентрации 7 % (табл. 4). Приготовление ВДНШ осуществляли путем механического перемешивания нефтешлама, воды и ПАВ при температуре 90 °С.

Сравнительный анализ результатов, представленных в табл. 4, позволил оценить существенное влияние природы ПАВ на процессы структурообразования, протекающие в дисперсной системе ВДНШ. Установлено, что использование АПАВ в композиции с КПАВ приводит к формированию структуры в ВДНШ, которая по своим реологическим характеристикам соответствует структуре жидкообразного тела ($P_{k1} \approx 0$), в то время как при сочетании КПАВ с НПАВ – структуре твердообразного тела ($P_{k1} > 0$). Жидкообразные и твердообразные тела отличаются не только отсутствием или наличием предела текучести P_{k1} , но и определенным поведением при развитии деформации. Если для структурированных жидкостей с ростом нагрузки характерен переход к ньютоновскому течению, отвечающему предельно разрушенной структуре, то для твердообразных тел увеличение нагрузки приводит к разрыву сплошности тела и его разрушению [9]. С использованием параметра χ [10], рассчитанного как отношение пределов прочности

Т а б л и ц а 4. Структурно-реологические параметры ВДНШ, приготовленных с использованием композиций КПАВ/АПАВ и КПАВ/НПАВ

Table 4. Structure-rheological parameters of water dispersions of oil slime prepared using the compositions of cationic surfactant/anionic surfactant and cationic surfactant/non-ionized surfactant

Характеристика Characteristic	Раствор Solution	
	КПАВ/АПАВ = 4 : 1 cationic surfactant/anionic surfactant = 4 : 1	КПАВ/НПАВ = 4 : 1 cationic surfactant/non-ionised surfactant = 4 : 1
P_{k1} , Па	0	$2178 \cdot 10^{-1}$
P_{k2} , Па	57	$14850 \cdot 10^{-1}$
P_m , Па	$160 \cdot 10^{-1}$	$21780 \cdot 10^{-1}$
η_0^* , Па · с	$268 \cdot 10^3$	$39150 \cdot 10^3$
η_m^* , Па · с	$110 \cdot 10^3$	$2420 \cdot 10^3$
$\chi = P_m / P_{k1}$	2,4	10

P_m / P_{k1} , установлено, что размер структурных единиц течения дисперсных систем для ВДНШ на основе КПАВ/АПАВ в 5 раз ниже значения χ для ВДНШ на основе КПАВ/НПАВ, что свидетельствует о более высоком диспергирующем действии композиции КПАВ/АПАВ. Важно отметить, что использование АПАВ в смеси с КПАВ способствует значительному снижению значений эффективной вязкости ВДНШ и, как следствие, повышению ее технологических характеристик. В неоднородных средах это будет способствовать тому, что часть пор меньше определенного размера не будет отключена из фильтрации при одних и тех же давлениях нагнетания, и, как следствие, повысится охват пласта заводнением.

Полученные данные коррелируют с результатами исследования коллоидно-химических и структурно-реологических свойств водных растворов композиций ПАВ, свидетельствующими о максимальном диспергирующем действии композиции КПАВ/АПАВ (4 : 1) по отношению к нефтяным дисперсиям и способности к формированию структурно-вязких адсорбционных слоев на частицах дисперсной фазы. Для развитого адсорбционного слоя КПАВ/АПАВ (4 : 1)

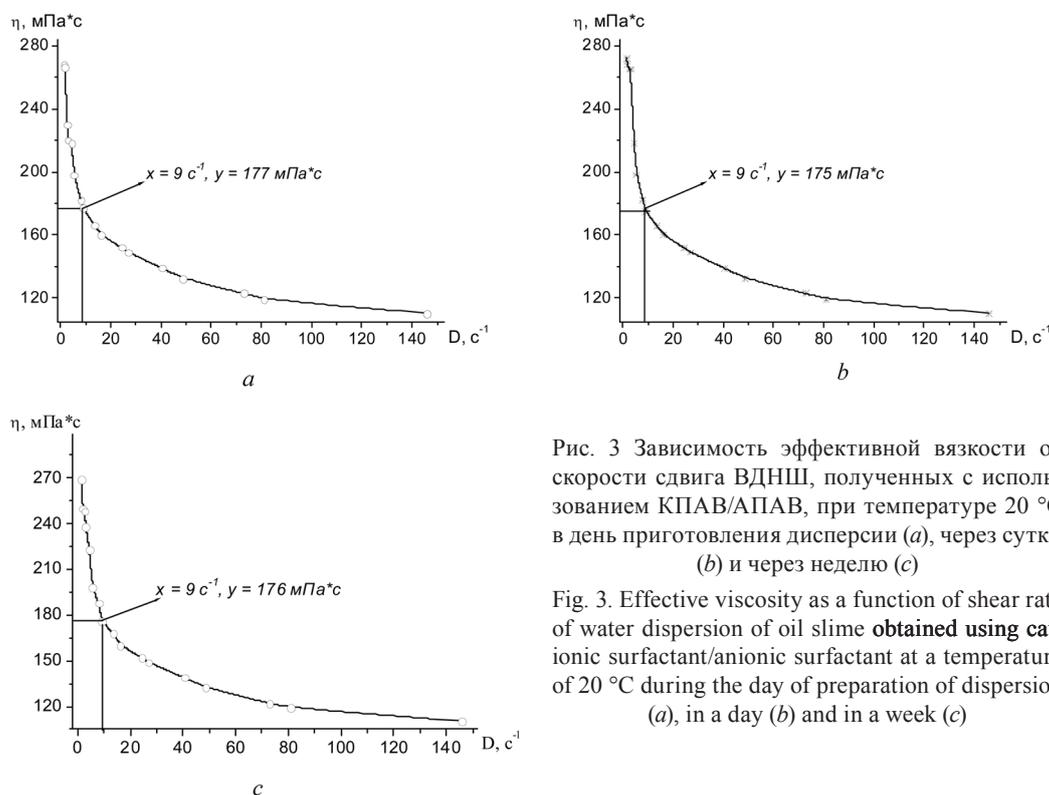


Рис. 3 Зависимость эффективной вязкости от скорости сдвига ВДНШ, полученных с использованием КПАВ/АПАВ, при температуре 20 °С в день приготовления дисперсии (а), через сутки (b) и через неделю (c)

Fig. 3. Effective viscosity as a function of shear rate of water dispersion of oil slime obtained using cationic surfactant/anionic surfactant at a temperature of 20 °C during the day of preparation of dispersion (a), in a day (b) and in a week (c)

характерна высокая лиофильность и сольватированность на границе с дисперсионной средой, что будет препятствовать сцеплению частиц дисперсной фазы, тем самым стабилизируя нефтяные дисперсии, подобные ВДНШ, во времени. На рис. 3 приведены зависимости эффективной вязкости от скорости сдвига ВДНШ, полученных с использованием КПАВ/АПАВ, при температуре 20 °С в день приготовления дисперсии (а), через сутки (b) и через неделю (с).

Как видно из полученных данных, вязкость ВДНШ в день приготовления при скорости сдвига 9 с^{-1} , отвечающей движению ВДНШ в пласте, составляет в среднем $177 \text{ мПа} \cdot \text{с}$, вязкость ВДНШ через одни сутки и через неделю – 175 и $176 \text{ мПа} \cdot \text{с}$ соответственно, что свидетельствует об агрегативной и кинетической устойчивости ВДНШ.

Заключение. На основании анализа результатов проведенного комплекса исследований установлено, что максимальным синергизмом действия, проявляющимся в снижении поверхностного натяжения, обладает композиция КПАВ/АПАВ при соотношении компонентов 4 : 1. Этот факт обуславливает эффективность ее диспергирующего действия и способность к формированию на поверхности частиц дисперсной фазы нефтешлама структурированного слоя, обладающего максимальной упругостью и механической прочностью по сравнению с молекулами КПАВ/НПАВ. ВДНШ, полученные с использованием КПАВ/АПАВ, являются агрегативными и кинетически устойчивыми дисперсиями прямого типа и могут быть использованы в качестве потокоотклоняющих композиций в нефтедобывающей промышленности.

Список использованных источников

1. Алтунина, Л. К. Перспективы применения комплексного физико-химического и микробиологического метода повышения нефтеотдачи на месторождении Белый Тигр (Вьетнам) / Л. К. Алтунина, В. С. Овсянникова, Л. И. Сваровская // Нефтехимия. – 2008. – Т. 48, № 6. – С. 474–478.
2. Композиции на основе полиакриламида, пентагидроксохлорида алюминия и карбамида в качестве реагентов для водоизоляции в нефтяном пласте / И. А. Новаков [и др.] // Журн. приклад. химии. – 2008. – Т. 81, вып. 8. – С. 1389–1393.
3. Харитоновна, Т. В. Межмолекулярные взаимодействия в бинарных смесях катионного и неионогенного ПАВ / Т. В. Харитоновна, Н. И. Иванова, Б. Д. Сумм // Коллоид. журн. – 2002. – Т. 64, № 5. – С. 685–696.
4. Смирнова, Н. А. Макроскопические свойства и формы самоорганизации смешанных растворов поверхностно-активных веществ / Н. А. Смирнова // Журн. физ. химии. – 2006. – Т. 80, № 10. – С. 1809–1818.
5. Термодинамические свойства нефтяных дисперсных систем, модифицированных катионными поверхностно-активными веществами / О. Н. Опанасенко [и др.] // Весці НАН Беларусі. Сер. хім. навук. – 2013. – № 1. – С. 46–49.
6. Влияние природы функциональных групп химических модификаторов на термическую стабильность нефтяного битума / О. Н. Опанасенко [и др.] // Весці НАН Беларусі. Сер. хім. навук. – 2015. – № 1. – С. 101–106.
7. Holland, P. M. Nonideal multicomponent mixed micelle model / P. M. Holland, D. N. Rubingh // J. Phys. Chem. – 1983. – Vol. 87. – P. 1984. doi.org/10.1021/j100234a030.
8. Phenomena in mixed surfactant systems / ed. J. F. Scamehorn. – Washington: Amer. Chem. Soc., 1986. – Vol. 31. – P. 144–149. doi.org/10.1021/bk-1986-0311.
9. Овчинников, П. Ф. Реология тиксотропных систем / П. Ф. Овчинников, Н. Н. Круглицкий, Н. В. Михайлов. – Киев: Наукова думка, 1972. – 120 с.
10. Лиштван, И. И. Физико-химическая механика гуминовых веществ / И. И. Лиштван, Н. Н. Круглицкий, В. Ю. Третинник. – Минск: Наука и техника, 1976. – 264 с.

References

1. Altunina L. K., Ovsyannikova V. S., Svarovskaya L. I. Prospects for the use of the combined physicochemical and microbiological enhanced oil recovery technique in the White Tiger oil field (Vietnam). *Petroleum Chemistry*, 2008, vol. 48, no. 6, pp. 479–483. doi.org/10.1134/S0965544108060133.
2. Novakov I. A., Radchenko S. S., Radchenko F. S., Ozerin A. S., Karaulov A. V. Polyacrylamide-aluminum pentahydroxochloride-urea formulations as waterproofing agents for oil pool. *Zhurnal prikladnoi khimii* [Russian Journal of Applied Chemistry], 2008, vol. 81, no. 8, pp. 1465–1468. doi.org/10.1134/S1070427208080272.
3. Kharitonova T. V., Ivanova N. I., Summ B. D. Intermolecular interactions in the binary mixtures of cationic and non-ionized surfactants. *Kolloidnyi zhurnal* [Colloid Journal], 2002, vol. 64, no. 5, pp. 620–630. doi.org/10.1023/A:1020674329184.
4. Smirnova N. A. Macroscopic properties and self-organization in mixed solutions of surfactants. *Russian Journal of Physical Chemistry A*, 2006, vol. 80, no. 10, pp. 1608–1616. doi.org/10.1134/S0036024406100104.
5. Opasencko O. M., Krutko N. P., Zhigalova O. L., Luksha O. V. Thermodynamic properties of the oil dispersed systems modified by cationic surfactants. *Izvestiia Natsional'noi akademii nauk Belarusi. Seriya khimicheskikh nauk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Series of Chemical Sciences], 2013, no. 1, pp. 46–49. (in Russian)

6. Opanasenko O. N., Luksha O. V., Zhigalova O. L., Krutko N. P., Chernetskaya V. M., Kozinets T. A. The effect of chemical modifiers' functional groups on the oil bitumen thermal stability. *Izvestiia Natsional'noi akademii nauk Belarusi. Seriya khimicheskikh nauk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Series of Chemical Sciences], 2015, no. 1, pp. 101–106. (in Russian)
7. Holland P. M., Rubingh D. N. Nonideal multicomponent mixed micelle model. *The Journal of Physical Chemistry*, 1983, vol. 87, pp. 1984. doi.org/10.1021/j100234a030.
8. Scamehorn J. F. (ed.). *Phenomena in mixed surfactant systems*. Washington, American Chemical Society, 1986, vol. 31, pp. 144–149. doi.org/10.1021/bk-1986-0311.
9. Ovchinnikov P. F., Kruglitskii N. N., Mikhailov N. V. *Rheology of thixotropic systems*. Kiev, Naukova dumka Publ., 1972. 120 p. (in Russian)
10. Lishtvan I. I., Kruglitskii N. N., Tretinnik V. Yu. *Physical-chemical mechanics of humic substances*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1976. 264 p. (in Russian)

Информация об авторах

Опанасенко Ольга Николаевна – канд. хим. наук, заведующая лабораторией, Институт общей и неорганической химии НАН Беларуси (ул. Сурганова, 9, корп. 1, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: ionch@igic.bas-net.by.

Крут'ко Николай Павлович – академик, д-р хим. наук, профессор, заведующий отделом, Институт общей и неорганической химии НАН Беларуси (ул. Сурганова, 9, корп. 1, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: krutko@igic.bas-net.by.

Жигалова Оксана Леонидовна – канд. хим. наук, ст. науч. сотрудник, Институт общей и неорганической химии НАН Беларуси (ул. Сурганова, 9, корп. 1, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: zhigalova.o@mail.ru.

Лукша Ольга Валерьевна – канд. хим. наук, ст. науч. сотрудник, Институт общей и неорганической химии НАН Беларуси (ул. Сурганова, 9, корп. 1, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: olga.l-75@mail.ru.

Козинец Татьяна Анатольевна – науч. сотрудник, Институт общей и неорганической химии НАН Беларуси (ул. Сурганова, 9, корп. 1, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: tta-85@mail.ru.

Для цитирования

Стабилизация нефтяных дисперсий композициями поверхностно-активных веществ / О. Н. Опанасенко [и др.] // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 47–53.

Information about the authors

Opanasenko Olga Nikolaevna – Ph. D. (Chemistry), Head of the Laboratory, Institute of General and Inorganic Chemistry of the National Academy of Sciences of Belarus (9, Bld. 1, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ionch@igic.bas-net.by.

Krut'ko Nikolai Pavlovich – Academician, D. Sc. (Chemistry), Professor, Head of the Department, Institute of General and Inorganic Chemistry of the National Academy of Sciences of Belarus (9, Bld. 1, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: krutko@igic.bas-net.by.

Zhigalova Oksana Leonidovna – Ph. D. (Chemistry), Senior researcher, Institute of General and Inorganic Chemistry of the National Academy of Sciences of Belarus (9, Bld. 1, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: zhigalova.o@mail.ru.

Luksha Olga Valerievna – Ph. D. (Chemistry), Senior researcher, Institute of General and Inorganic Chemistry of the National Academy of Sciences of Belarus (9, Bld. 1, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: olga.l-75@mail.ru.

Kozinets Tatiana Anatolievna – Researcher, Institute of General and Inorganic Chemistry of the National Academy of Sciences of Belarus (9, Bld. 1, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tta-85@mail.ru.

For citation

Opanasenko O. N., Krut'ko N. P., Zhigalova O. L., Luksha O. V., Kozinets T. A. Stabilization of petroleum dispersions by the compositions of surfactants. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 47–53. (in Russian)

ISSN 0002–354X (print)

УДК 541.64:66.081.6-278:544.77

Поступило в редакцию 19.10.2016

Received 19.10.2016

Т. В. Плиско¹, академик А. В. Бильдюкевич¹, Я. А. Исайчикова¹, В. В. Волков²*¹Институт физико-органической химии НАН Беларуси, Минск,
Республика Беларусь**²Институт нефтехимического синтеза им. А. В. Топчиева Российской академии наук, Москва,
Российская Федерация*

ПОЛУЧЕНИЕ МЕМБРАН НА ОСНОВЕ СМЕСЕЙ ПОЛИФЕНИЛЕНСУЛЬФОНА И ПОЛИСУЛЬФОНА

Установлена взаимосвязь структуры и фазового состояния растворов смесей полифениленсульфоне (ПФС) и полисульфоне (ПС) и транспортных свойств ультрафильтрационных мембран, полученных на их основе: удельная производительность мембран на основе смесей ПФС и ПС проходит через максимум в области наиболее гетерогенной структуры формовочной композиции при соотношении полимеров в смеси ПФС : ПС = (30–50) : (70–50), и достигает значений 80–87 л · м⁻² · ч⁻¹, что значительно превосходит характеристики мембран, опубликованные в литературе к настоящему времени.

Ключевые слова: мембраны, ультрафильтрация, полифениленсульфон, полисульфон, смеси полимеров.

T. V. Plisko¹, Academician A. V. Bilydukevich¹, Y. A. Isaichykava¹, V. V. Volkov²*¹Institute of Physical Organic Chemistry of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus**²Topchiev Institute of Petrochemical Synthesis, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

PREPARATION OF POLYPHENYLSULFONE/POLYSULFONE BLEND MEMBRANES

The correlation between the structure and phase state of the solutions of polyphenylsulfone (PPSU) and polysulfone (PSF) blends and the transport properties of ultrafiltration membranes, prepared from these solutions, is revealed: pure water flux of the PPSU/PSF blend membranes passes through the maximum at the most heterogeneous structure of polymer solutions at the PPSU : PSF blend ratio (30–50) : (70–50). In this study, the maximum pure water flux achieves 80–87 l · m⁻² · h⁻¹, which significantly exceeds the data reported in the literature up-to-date.

Keywords: membrane, ultrafiltration, polyphenylsulfone, polysulfone, polymer blends.

Введение. Одним из перспективных классов синтетических полимеров для получения пористых мембран являются полисульфоны, в частности полифениленсульфон. Полифениленсульфон (ПФС) характеризуется более высокой химической стойкостью, устойчивостью к гидролизу и действию органических растворителей (ароматических углеводов, простых эфиров, кетон) по сравнению с полисульфоном (ПС) и полиэфирсульфоном [1]. ПФС обладает высокой термической стабильностью в течение длительного срока эксплуатации, механической прочностью и устойчивостью к деформациям [2]. Известны работы по получению и исследованию мембран на основе ПФС для нанофильтрации органических растворителей [3; 4], первапорации для разделения уксусной кислоты и воды [5; 6], очистки воды от ионов тяжелых металлов [7], очистки поверхностных и сточных вод [8], газоразделения [9], получения мембран для топливных элементов [10]. Однако примеров использования мембран на основе ПФС в промышленности не выявлено, что связано с низкой удельной производительностью полученных материалов [7], гидрофобностью и, как следствие, подверженностью загрязнению (абсорбция растворенного вещества, образование гелеобразного слоя на поверхности мембраны) в процессе фильтрации [11].

Одним из методов улучшения эксплуатационных свойств мембран (удельной производительности, селективности, устойчивости к загрязнению) является введение различных добавок в формовочную композицию, например, добавок второго мембранообразующего полимера, т. е. получение мембран на основе смесей полимеров. Смешение мембранообразующих полимеров является простым, воспроизводимым и эффективным методом модификации мембран. Сообщается о получении мембран на основе ПФС и полиимида [3], ПФС и сульфированного ПФС [11], ПФС и ПС [7], ПФС и полиэфиримида [12], ПФС и ПФС/поли (бисфенол А-со-4-нитрофталевый ангидрид-со-1,3-фенилендиамин) (ПБНФА) [9].

Цель работы – исследование зависимости структуры и свойств растворов смесей ПФС и ПС в N-метил-2-пирролидоне (МП) и мембран, полученных на их основе, от соотношения полимеров в смеси.

Материалы и методы исследования. В качестве исходных реагентов для получения растворов ПФС и ПС использовали ПФС Ultrason P 3010 ($M_w = 48000 \text{ г} \cdot \text{моль}^{-1}$, BASF, Германия), ПС Ultrason S 6010 ($M_w = 45000\text{--}55000 \text{ г} \cdot \text{моль}^{-1}$, BASF, Германия). В качестве растворителя применяли МП. В качестве порообразователя использовали полиэтиленгликоль (ПЭГ-400, $M_n = 400 \text{ г} \cdot \text{моль}^{-1}$, BASF, Германия). Приготовление растворов для формования плоских мембран осуществляли на лабораторной установке, состоящей из механической верхнеприводной мешалки, круглодонной колбы и электроплитки с глицериновой баней.

Для получения плоских мембран на основе систем ПФС–МП, ПС–МП, ПФС–ПЭГ-400–МП, ПФС/ПС–МП, ПФС/ПС–ПЭГ-400–МП формовочный раствор наносили на стеклянную подложку с помощью фильеры, позволяющей получать полимерную пленку требуемой толщины. Подложку с нанесенным слоем формовочного раствора погружали в коагуляционную ванну (осадитель – дистиллированная вода). Полученные мембраны хранили в дистиллированной воде 24 ч для удаления остатков растворителя.

Для измерения вязкости растворов ПФС и ПС использовали ротационный вискозиметр Brookfield DV III-Ultra (США). Мутность растворов измеряли на турбидиметре 2100AN производства HACH (Германия) с вольфрамовой лампой накаливания в качестве источника света при $\lambda = 860 \text{ нм}$.

Для характеристики надмолекулярной структуры растворов полимеров, использовали метод спектра мутности [13], который позволяет определять средние размеры и концентрацию надмолекулярных частиц (НМЧ) в полимерном растворе, не подвергая систему какому-либо внешнему воздействию. Спектр оптической плотности $D(\lambda)$ растворов смеси полимеров определяли на спектрофотометре Metertech UV/VIS P 8001 в диапазоне длин волн 400–800 нм, длина оптического пути – 5 см. Показатель преломления растворов полимеров определяли на универсальном лабораторном рефрактометре RL-3 (Польша). Для смеси полимеров показатель преломления рассчитывали по аддитивной схеме (правило Гладстона–Дейла) по показателям преломления составляющих смесь полимеров с учетом их соотношения [14]:

$$n_{\text{общ}} = n_1\varphi_1 + n_2\varphi_2 + \dots + n_N\varphi_N,$$

где $n_{\text{общ}}$ – показатель преломления смеси; n_1, n_2, n_N – показатели преломления компонентов смеси; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_N$ – объемные доли компонентов в смеси.

Для исследования структуры растворов на основе ПФС и ПС, а также растворов смесей ПФС/ПС в МП использовали металлографический инвертированный микроскоп OLYMPUS GX41 (Япония), который предназначен для работы в светлом поле и при поляризации. Для приготовления образцов тонкую пленку полимерного раствора наносили на предметное стекло, накрывали покровным стеклом и выдерживали 20 ч.

Измерение удельной производительности (J) плоских мембран по воде проводили на специально сконструированной фильтрационной ячейке при комнатной температуре и трансмембранном давлении 1 атм. Удельную производительность мембран определяли как объем жидкости V , проходящей через единицу площади поверхности S за единицу времени t , ($\text{л} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{ч}^{-1}$)

$$J = \frac{V}{St},$$

где V – объем фильтрата, л; S – площадь мембраны, м^2 ; t – время фильтрации, ч.

В качестве модельного раствора для определения коэффициента задерживания мембран (R) использовали 0,05 %-ный раствор человеческого сывороточного альбумина (ЧСА, $M_n = 69000 \text{ г} \cdot \text{моль}^{-1}$, $pI = 4,6$) в 0,18 М фосфатном буфере ($\text{K}_2\text{HPO}_4 - \text{KH}_2\text{PO}_4$) с буферной емкостью $\beta = 0,1$ и $pH = 7,0$. Коэффициент задерживания мембран (R) определяли по формуле

$$R = \left(1 - \frac{C_{\text{ф}}}{C_{\text{исх}}} \right) 100 \%,$$

где $C_{\text{ф}}$, $C_{\text{исх}}$ – концентрация ЧСА в фильтрате и исходном модельном растворе соответственно. Концентрацию ЧСА в растворах определяли по значению оптической плотности на спектрофотометре Metertech SP8001 при $\lambda = 280 \text{ нм}$.

Морфологическую структуру мембран исследовали посредством сканирующего электронного микроскопа (СЭМ) LEO 1420 (Германия). Сколы образцов мембран готовили методом криогенного разлома в жидком азоте с последующим нанесением слоя золота путем катодного распыления в вакуумной установке ЕМІТЕСН 550Х.

Краевой угол смачивания плоских мембран определяется методом прикрепленного пузырька. Величины влагосодержания мембран (U) определялись по измерению массы образцов до и после сушки по следующему уравнению:

$$U = \left(\frac{m_{\text{влажн}} - m_{\text{сух}}}{m_{\text{влажн}}} \right) 100 \%,$$

где $m_{\text{влажн}}$, $m_{\text{сух}}$ – масса соответственно влажного и сухого образцов мембран, г.

Результаты и их обсуждение. Установлено, что 20 %-ные растворы индивидуальных полимеров и смесей ПФС и ПС в МП являются оптически прозрачными (значения мутности находятся в пределах 1,4–1,6 NTU), что связано с близкими значениями показателей преломления ПФС (1,67) и ПС (1,63). При введении в систему второго полимера ее мутность практически не изменяется.

Растворы смесей ПФС и ПС в МП устойчивы в течение длительного времени во всем диапазоне соотношений ПФС и ПС. Не выявлено изменения вязкостных свойств и характера кривых течения растворов смесей ПФС и ПС во всем диапазоне соотношений полимеров в смеси.

Методом спектра мутности произведена оценка среднего размера и концентрации НМЧ в растворах смесей ПФС и ПС. Установлено, что в растворах индивидуальных ПФС и ПС наблюдается наименьший размер частиц и наибольшая их концентрация по сравнению с растворами смесей полимеров (рис. 1). Установлено, что для 20 %-ного раствора ПФС в МП размер НМЧ несколько больше (76 нм), а их количество ($1,8 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$) в 1,3 раза меньше по сравнению с раствором ПС в МП (65 нм, $2,4 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$). Это может свидетельствовать о различном качестве растворителя для ПФС и ПС. По-видимому, в случае ПФС образуется больше контактов полимер–полимер, по сравнению с растворами ПС в МП.

При введении второго полимера в систему наблюдается существенное увеличение средних размеров НМЧ (170–354 нм) и уменьшение их количества на 2–3 порядка ($2,6 \cdot 10^7$ – $3,3 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}$) по сравнению с растворами индивидуальных полимеров в МП. Зависимость размеров НМЧ и их концентрации от соотношения ПФС : ПС в смеси носит экстремальный характер. Наибольший размер частиц и наименьшее их количество наблюдается в диапазоне соотношений ПФС : ПС в смеси (40–60 : 60–40).

Исследование тонких пленок растворов смесей ПФС и ПС методом оптической микроскопии показало, что растворы являются гомогенными во всем диапазоне соотношения ПФС и ПС, что коррелирует с результатами измерения их мутности. Однако при выдерживании пленок в тече-

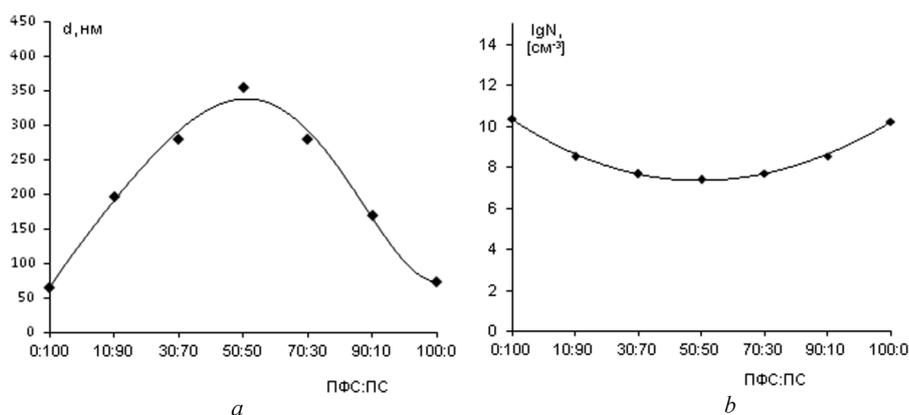


Рис. 1. Средний размер (a) и концентрация (b) НМЧ как функция соотношения ПФС : ПС в растворе состава 20 %-ных полимеров в МП

Fig. 1. Mean size (a) and concentration (b) of supramolecular particles as a function of the ratio of polyphenylsulfone and polysulfone in the 20 % solution of polymers in N-methyl-2-pyrrolidone

ние 20 ч под стеклом, т. е. при медленном осаждении полимера в результате абсорбции влаги воздуха, выявлены существенные различия в структуре растворов в зависимости от соотношения ПФС и ПС в смеси. В данном случае под действием влаги воздуха происходит «проявление» структуры раствора. Растворы смесей ПФС и ПС представляют собой двухфазные системы, что характерно для несовместимых полимеров. Если растворы индивидуальных полимеров характеризуются гомогенной структурой и разделение системы на фазы при абсорбции влаги воздуха в течение 20 ч не выявлено (рис. 2, *a, d*), то растворы смесей ПФС и ПС представляют собой эмульсии раствора одного полимера в фазе раствора другого полимера (рис. 2, *b, c*). Растворы смесей ПФС и ПС в МП при содержании ПС в смеси до 60 % характеризуются широким распределением капель эмульсии по размерам (рис. 2, *b*), при этом количество капель и их размер возрастают с увеличением содержания ПС. Раствор смеси ПФС и ПС в МП при соотношении 40 : 60 представляет собой множественную эмульсию, в которой наряду со сферическими каплями, состоящими только из одной фазы, содержатся капли с включениями мелких капелек другой фазы (рис. 2, *c*). В области соотношения ПФС : ПС = 30 : 70 система состоит из взаимопроникающих капель эмульсии, в которой невозможно выделить дисперсную фазу и дисперсионную среду. Наибольший размер капель и наибольшая полидисперсность эмульсии наблюдается при соотношении ПФС : ПС = (30–60) : (70–40). Растворы с содержанием второго полимера в смеси 10 % характеризуются самыми мелкими каплями с узким распределением капель по размерам.

Из исследуемых растворов были получены плоские мембраны для ультрафильтрации способом мокрого формования. Показано, что при введении 10 % ПФС в формовочную композицию на основе ПС и 30 % ПС в систему на основе ПФС наблюдается переход от непроницаемой структуры ($J = 0 \text{ л} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{ч}^{-1}$) к пористой структуре селективного слоя мембраны ($J = 61$ и $33 \text{ л} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{ч}^{-1}$ соответственно) (рис. 3). Удельная производительность мембран по воде, полученных на основе растворов смесей ПФС и ПС, проходит через максимум при соотношении полимеров в смеси ПФС : ПС = (30–50) : (70–50), и достигает значений 80–87 $\text{л} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{ч}^{-1}$. Следует отметить, что мембраны с самой высокой удельной производительностью были получены из формовочных композиций на основе смесей ПФС и ПС, которые при осаждении формируют эмульсии с наиболь-

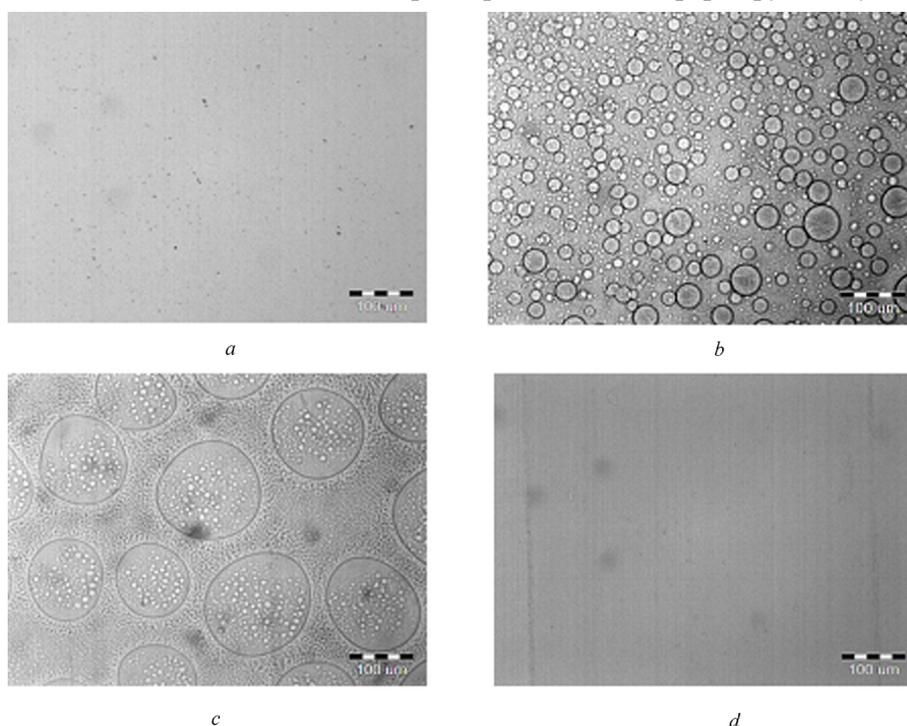


Рис. 2. Микрофотографии 20 %-ных растворов ПФС, ПС и их смесей, полученные методом оптической микроскопии; соотношение ПФС : ПС, %: *a* – 100 : 0; *b* – 60 : 40, *c* – 40 : 60, *d* – 0 : 100.

Fig. 2. Microphotographs of 20 %-solutions of polymers (polyphenylsulfone, polysulfone and their blends) by the optical microscopy method; the polyphenylsulfone: polysulfone ratio, %: *a* – 100 : 0; *b* – 60 : 40, *c* – 40 : 60, *d* – 0 : 100

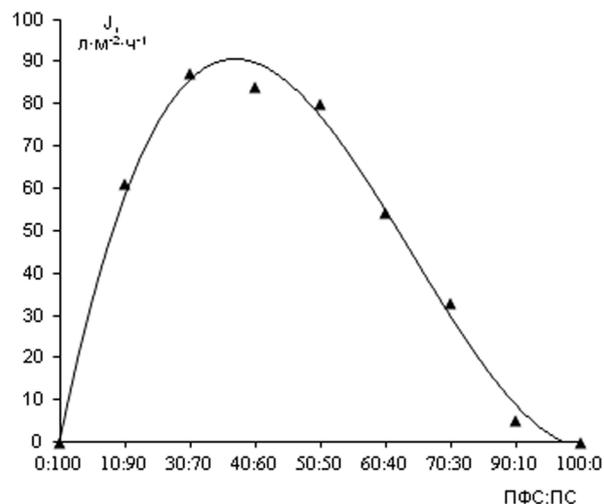


Рис. 3. Зависимость удельной производительности мембран по воде (J) от соотношения ПФС : ПС в смеси

Fig. 3. Dependence of pure water flux of blend membranes (J) on the polyphenylsulfone: polysulfone ratio in the polymer blend

шим размером капель (НМЧ) (рис. 1, 2). По-видимому, эти особенности структуры растворов смесей полимеров при получении мембран методом инверсии фаз приводят к тому, что на процесс фазового разделения жидкость–жидкость (фаза с высокой концентрацией полимера – фаза с низкой концентрацией полимера) накладывается процесс фазового разделения полимер–полимер (ПС–ПФС), что приводит к формированию более пористой структуры селективного слоя мембраны.

Методом СЭМ установлено, что мембраны на основе смесей ПФС и ПС характеризуются выраженной асимметричной структурой, типичной для мембран, полученных методом инверсии фаз [3]. В мембране присутствует тонкий скин-слой, строение которого определяет основные транспортные свойства мембран: производительность и задерживающую способность (рис. 4, *b*). У всех исследуемых мем-

бран за скин-слоем следует высокопористый дренажный слой, выполняющий роль поддерживающей подложки и отвечающий за механическую прочность. Структура дренажного слоя представляет собой пеновидную матрицу, пронизанную штифтообразными вакуолями.

Мембраны на основе смесей полимеров характеризуются наличием крупных вытянутых полостей в субструктуре матрицы мембраны, формирование которых связано с особенностями структуры растворов смесей полимеров (большой размер НМЧ/наличие двух фаз), что влияет на протекание процесса инверсии фаз при получении мембран.

Следует отметить, что достигнутые значения удельной производительности мембран на основе смесей ПФС и ПС ($80\text{--}87\text{ л} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{ч}^{-1}$) при трансмембранном давлении 1 атм значительно превосходят характеристики ультрафильтрационных мембран на основе смеси ПФС и ПС, опу-

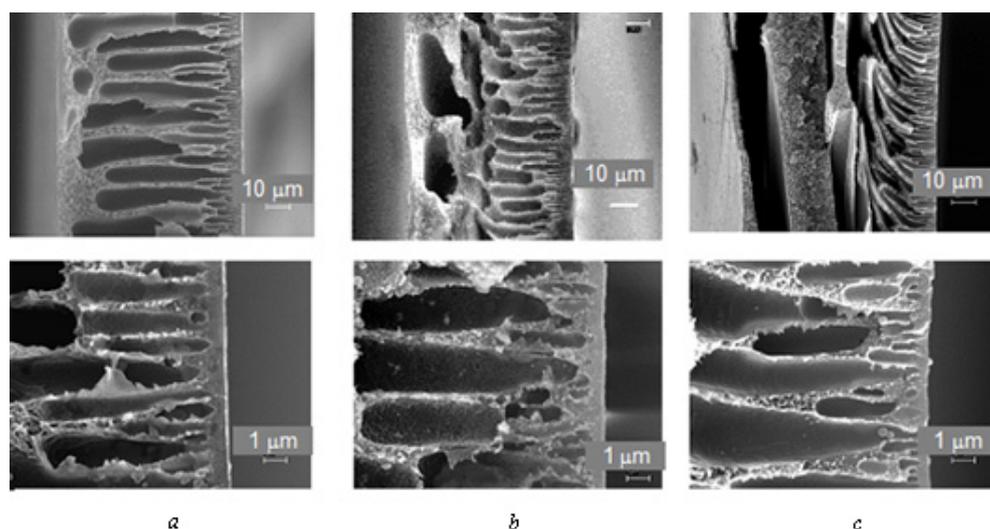


Рис. 4. СЭМ-микрофотографии скола поперечного сечения и селективного слоя мембран на основе формовочных композиций состава 20 %-ных полимеров (ПФС, ПС или их смеси); соотношение ПФС : ПС в смеси, %: *a* – 0 : 100; *b* – 50 : 50; *c* – 100 : 0

Fig. 4. Scanning electron microscopy photographs of the cross section and the skin layer of blend membranes from the casting solutions containing 20 % polymers (polyphenylsulfone, polysulfone or their blends); the polyphenylsulfone: polysulfone ratio in the blend, %: *a* – 0 : 100; *b* – 50 : 50; *c* – 100 : 0

бликованные к настоящему времени ($5 \text{ л} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{ч}^{-1} \cdot \text{атм}^{-1}$) [7], при сохранении высокого коэффициента задерживания по ЧСА ($R = 85 \%$).

Заключение. Проведено исследование зависимости структуры и свойств растворов смесей ПФС и ПС в МП и плоских ультрафильтрационных мембран, полученных на их основе, от соотношения полимеров в смеси. Показано, что при введении второго мембранообразующего полимера в растворы ПФС или ПС в МП средний размер и концентрация НМЧ изменяются экстремально (с максимумом и минимумом соответственно) в зависимости от соотношения ПФС и ПС в смеси. С использованием оптической микроскопии выявлено, что растворы на основе смесей ПФС и ПС представляют собой двухфазные системы с максимальным размером капель и наибольшей полидисперсностью эмульсии при соотношении ПФС : ПС = (30–60) : (70–40). Установлена взаимосвязь структуры и фазового состояния растворов смесей ПФС и ПС и транспортных свойств мембран, полученных на их основе: удельная производительность мембран на основе смесей ПФС и ПС проходит через максимум в области наиболее гетерогенной структуры формочной композиции, что связано с наложением на процесс инверсии фаз фазового разделения «полимер–полимер». В результате введения второго мембранообразующего полимера в формочную композицию удалось осуществить переход от мембран, не обладающих гидравлической проницаемостью, к структуре, обеспечивающей высокую удельную производительность по воде с высоким коэффициентом задерживания по ЧСА, что обусловлено формированием более пористого и тонкого скин-слоя мембраны. Достигнутые значения транспортных характеристик мембран на основе смесей ПФС и ПС значительно превосходят характеристики мембран, опубликованные в литературе.

Благодарности. Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-49-00101).

Acknowledgement. The study has been supported by the Grant of the Russian Research Foundation (Project no. 14-49-00101).

Список использованных источников

1. Dizman, C. Recent advances in the preparation of functionalized polysulfones / C. Dizman, M. A. Tasdelen, A. Yagci // *Polymer International*. – 2013. – Vol. 62, iss. 7. – P. 991–1007. doi.org/10.1002/pi.4525.
2. Novel polyphenylsulfone membrane for potential use in solvent nanofiltration / S. Darvishmanesh [et al.] // *J. of Membrane Science*. – 2011. – Vol. 379, iss. 1–2. – P. 60–68.
3. Influence of the blend composition on the properties and separation performance of novel solvent resistant polyphenylsulfone/polyimide nanofiltration membranes / J. C. Jansen [et al.] // *J. of Membrane Science*. – 2013. – Vol. 447. – P. 107–118. doi.org/10.1016/j.memsci.2013.07.009.
4. Preparation of solvent stable polyphenylsulfone hollow fiber nanofiltration membranes / S. Darvishmanesh [et al.] // *J. of Membrane Science*. – 2011. – Vol. 384, iss. 1–2. – P. 89–96. doi.org/10.1016/j.memsci.2011.09.003.
5. Sorption and diffusivity study of acetic acid and water in polymeric membranes / N. Jullok [et al.] // *Chemical Engineering Science*. – 2012. – Vol. 78. – P. 14–20. doi.org/10.1016/j.ces.2012.04.022.
6. The potential of pervaporation for separation of acetic acid and water mixtures using polyphenylsulfone membranes / N. Jullok [et al.] // *Chemical Engineering J.* – 2011. – Vol. 175. – P. 306–315. doi.org/10.1016/j.cej.2011.09.109.
7. Fabrication and characterization of new PSF/PPSU UF blend membrane for heavy metal rejection / I. K. Moideen [et al.] // *Desalination and Water Treatment*. – 2016. – Vol. 57, iss. 42. – P. 1–10. doi.org/10.1080/19443994.2015.1106985.
8. Design of novel ultrafiltration systems based on robust polyphenylsulfone hollow fiber membranes for treatment of contaminated surface water / K. Praneeth [et al.] // *Chemical Engineering J.* – 2014. – Vol. 248. – P. 297–306. doi.org/10.1016/j.cej.2014.02.087.
9. Tzu-Hsiang Weng. Preparation and characterization of PPSU/PBNPI blend membrane for hydrogen separation / Tzu-Hsiang Weng, Hui-Hsin Tseng, Ming-Yen Wey // *Intern. J. of Hydrogen Energy*. – 2008. – Vol. 33, iss. 15. – P. 4178–4182. doi.org/10.1016/j.ijhydene.2008.04.058.
10. Multilayer sulfonated polyhedral oligosilsesquioxane (S-POSS)–sulfonated polyphenylsulfone (S-PPSU) composite proton exchange membranes / B. Decker [et al.] // *Chemistry of Materials*. – 2010. – Vol. 22, iss. 3. – P. 942–948. doi.org/10.1021/cm901820s.
11. Synthesis of sulfonated polyphenylsulfone as candidates for antifouling ultrafiltration membrane / Yang Liu [et al.] // *Separation and Purification Technology*. – 2012. – Vol. 98. – P. 298–307. doi.org/10.1016/j.seppur.2012.06.031.
12. Li-Luen Hwang. Fabrication of polyphenylsulfone/polyetherimide blend membranes for ultrafiltration applications: The effects of blending ratio on membrane properties and humic acid removal performance / Li-Luen Hwang, Hui-Hsin Tseng, Jyh-Cherng Chen // *J. of Membrane Science*. – 2011. – Vol. 384, iss. 1–2. – P. 72–81. doi.org/10.1016/j.memsci.2011.09.005.
13. Кленин, В. И. Характеристические функции светорассеяния дисперсных систем / В. И. Кленин, С. Ю. Щеголев, В. И. Лаврушкин. – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1977. – 177 с.
14. Meek, K. M. Changes in the refractive index of the stroma and its extracollagenous matrix when the cornea swells / K. M. Meek, S. Dennis, S. Khan // *Biophys J.* – 2003. – Vol. 85, N 4. – P. 2205–2212. doi.org/10.1016/s0006-3495(03)74646-3.

References

1. Dizman C., Tasdelen M. A., Yagci A. Recent advances in the preparation of functionalized polysulfones. *Polymer International*, 2013, vol. 62, no. 7, pp. 991–1007. doi.org/10.1002/pi.4525.
2. Darvishmanesh S., Jansen J. C., Tasselli F., Tocci E., Luis P., Degrève J., Drioli E., Bruggen B. van der. Novel polyphenylsulfone membrane for potential use in solvent nanofiltration. *Journal of Membrane Science*, 2011, vol. 379, no. 1–2, pp. 60–68. doi.org/10.1016/j.memsci.2011.05.045.
3. Jansen J. C., Darvishmanesh S., Tasselli F., Bazzarelli F., Bernardo P., Tocci E., Friess K., Randova A., Drioli E., Bruggen B. van der. Influence of the blend composition on the properties and separation performance of novel solvent resistant polyphenylsulfone/polyimide nanofiltration membranes. *Journal of Membrane Science*, 2013, vol. 447, pp. 107–118. doi.org/10.1016/j.memsci.2013.07.009.
4. Darvishmanesh S., Tasselli F., Jansen J. C., Tocci E., Bazzarelli F., Bernardo P., Luis P., Degrève J., Drioli E., Bruggen B. van der. Preparation of solvent stable polyphenylsulfone hollow fiber nanofiltration membranes. *Journal of Membrane Science*, 2011, vol. 384, no. 1–2, pp. 89–96. doi.org/10.1016/j.memsci.2011.09.003.
5. Jullok N., Deforche T., Luis P., Bruggen B. van der. Sorption and diffusivity study of acetic acid and water in polymeric membranes. *Chemical Engineering Science*, 2012, vol. 78, pp. 14–20. doi.org/10.1016/j.ces.2012.04.022.
6. Jullok N., Darvishmanesh S., Luisa P., Bruggen B. van der. The potential of pervaporation for separation of acetic acid and water mixtures using polyphenylsulfone membranes. *Chemical Engineering Journal*, 2011, vol. 175, pp. 306–315. doi.org/10.1016/j.cej.2011.09.109.
7. Moideen I. K., Isloora A. M., Ismail A. F., Obaid A., Hoong-Kun Fun. Fabrication and characterization of new PSF/PPSU UF blend membrane for heavy metal rejection. *Desalination and Water Treatment*, 2015, no. 42, pp. 1–10. doi.org/10.1080/19443994.2015.1106985.
8. Praneeth K., Bhargava Suresh K., James T., Sridhar S. Design of novel ultrafiltration systems based on robust polyphenylsulfone hollow fiber membranes for treatment of contaminated surface water. *Chemical Engineering Journal*, 2014, vol. 248, pp. 297–306. doi.org/10.1016/j.cej.2014.02.087.
9. Tzu-Hsiang Weng, Hui-Hsin Tseng, Ming-Yen Wey. Preparation and characterization of PPSU/PBNPI blend membrane for hydrogen separation. *International Journal of Hydrogen Energy*, 2008, vol. 33, no. 15, pp. 4178–4182. doi.org/10.1016/j.ijhydene.2008.04.058.
10. Decker B., Hartmann-Thompson C., Carver P. I., Keinath S. E., Santurri P. R. Multilayer sulfonated polyhedral oligosilsesquioxane (S-POSS)–sulfonated polyphenylsulfone (S-PPSU) composite proton exchange membranes. *Chemistry of Materials*, 2010, vol. 22, no. 3, pp. 942–948. doi.org/10.1021/cm901820s.
11. Yang Liu, Xigui Yue, Shuling Zhang, Jiannan Ren, Lilong Yang, Qinhong Wang, Guibin Wang. Synthesis of sulfonated polyphenylsulfone as candidates for antifouling ultrafiltration membrane. *Separation and Purification Technology*, 2012, vol. 98, pp. 298–307. doi.org/10.1016/j.seppur.2012.06.031.
12. Li-Luen Hwang, Hui-Hsin Tseng, Jyh-Cherng Chen. Fabrication of polyphenylsulfone/polyetherimide blend membranes for ultrafiltration applications: The effects of blending ratio on membrane properties and humic acid removal performance. *Journal of Membrane Science*, 2011, vol. 384, no. 1–2, pp. 72–81. doi.org/10.1016/j.memsci.2011.09.005.
13. Klenin V. I., Schegolev S. Yu., Lavrushkin V. I. *Characteristic functions of light scattering of dispersed systems*. Saratov, Saratov University Publ., 1977. 177 p.
14. Meek K. M., Dennis S., Khan S. Changes in the refractive index of the stroma and its extracellular matrix when the cornea swells. *Biophysical Journal*, 2003, vol. 85, no. 4, pp. 2205–2212. doi.org/10.1016/s0006-3495(03)74646-3.

Информация об авторах

Плиско Татьяна Викторовна – ст. науч. сотрудник, Институт физико-органической химии НАН Беларуси (ул. Сурганова, 13, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: plisko.v.tatiana@gmail.com.

Бильдюкевич Александр Викторович – академик, д-р хим. наук, профессор, директор, Институт физико-органической химии НАН Беларуси (ул. Сурганова, 13, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: uf@ifoch.bas-net.by.

Исайчикова Яна Александровна – мл. науч. сотрудник, Институт физико-органической химии НАН Беларуси (ул. Сурганова, 13, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: radisyana@gmail.com.

Волков Владимир Васильевич – д-р хим. наук, профессор, заведующий лабораторией, Институт нефтехимического синтеза им. А. В. Топчиева Российской академии наук (Ленинский проспект, 29, 119991, Москва, Российская Федерация). E-mail: vvolkov@ips.ac.ru.

Для цитирования

Получение мембран на основе смесей полифениленсульфона и полисульфона / Т. В. Плиско [и др.] // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 54–60.

Information about the authors

Plisko Tatiana Victorovna – Senior researcher, Institute of Physical Organic Chemistry of the National Academy of Sciences of Belarus (13, Sarganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: plisko.v.tatiana@gmail.com.

Bildyukevich Aleksandr Viktorovich – Academician, D. Sc. (Chemistry), Professor, Director, Institute of Physical Organic Chemistry of the National Academy of Sciences of Belarus (13, Sarganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: uf@ifoch.bas-net.by.

Isaichykava Yana Aleksandrovna – Junior researcher, Institute of Physical Organic Chemistry of the National Academy of Sciences of Belarus (13, Sarganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: radisyana@gmail.com.

Volkov Vladimir Vasilevich – D. Sc. (Chemistry), Professor, Head of the Laboratory, Topchiev Institute of Petrochemical Synthesis of the Russian Academy of Sciences (29, Leningradskaya Ave., 119991, Moscow, Russian Federation). E-mail: vvolkov@ips.ac.ru.

For citation

Plisko T. V., Bildyukevich A. V., Isaichykava Y. A., Volkov V. V. Preparation of polyphenylsulfone/polysulfone blend membranes. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 54–60. (in Russian)

ISSN 0002–354X (print)

УДК 54.057, 577.113.3

Поступило в редакцию 06.10.2016

Received 06.10.2016

Т. С. Божок, член-корреспондент Е. Н. Калиниченко*Институт биоорганической химии НАН Беларуси, Минск, Республика Беларусь***СИНТЕЗ 2'-ДЕЗОКСИ-2'-ФТОР-D-АРАБИНОНУКЛЕОЗИДОВ
6-ЗАМЕЩЕННОГО ТИМИНА**

Исследования в области химии фторнуклеозидов являются актуальным направлением современной биоорганической и медицинской химии компонентов нуклеиновых кислот. Настоящая работа посвящена синтезу 2'-дезоксид-2'-фтор-D-арабинофуранозил нуклеозидов 6-замещенного тимина с целью изучения их биологической активности. Конвергентный синтез пиримидиновых C(2')- α/β -фторзамещенных нуклеозидов осуществлен путем конденсации 2,4-бис-О-триметилсилильного производного 6-фтортимина с 3,5-ди-О-бензоил-2-дезоксид-2'-фтор- α -D-арабинофуранозил бромидом. Конденсация 1- α -бромсахара и персиллильного производного 6-фтортимина при кипячении в хлороформе приводила к образованию смеси блокированных N(1)- α/β -D-нуклеозидов 6-фтортимина, которые выделены колоночной хроматографией на силикагеле с выходом 29 и 5 % соответственно. Стандартная процедура деблокирования индивидуальных бензоилированных α/β -нуклеозидов 6-фтортимина аммиаком в метаноле приводила к замещению атома фтора в 6-положении гетероцикла с образованием 2'-дезоксид-2'-фтор- β/α -D-арабинозидов 6-амино- и 6-метокситимина. Показано, что дебензоилирование промежуточного C(2')- β -арабинозида 6-фтортимина под действием моногидрата гидроксида лития в смеси ацетонитрил–вода приводило к целевому нуклеозиду с высоким выходом (82 %). Разработан подход к синтезу 2'-фтор-6,3'-O- α -D-ангидронуклеозидов путем реакции внутримолекулярной циклизации в результате удаления защитных групп бензоильного производного 2'-фтор- α -D-арабинофуранозил-6-фтортимина в основных условиях. Структура синтезированных нуклеозидов установлена на основании данных УФ-, ЯМР-, КД- и масс-спектропии.

Ключевые слова: пиримидиновые нуклеозиды, синтез, 6-фтортимин, арабинонуклеозиды, 2'-фтордезоксиданалог, ангидронуклеозиды.

T. S. Bozhok, Corresponding Member E. N. Kalinichenko*Institute of Bioorganic Chemistry of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus***SYNTHESIS OF 6-SUBSTITUTED THYMINE 2'-DEOXY-2'-FLUORO-D-ARABINOFURANOSYL
NUCLEOSIDES**

New 6-fluorothymine 2'-deoxy-2'-fluoro-D-arabinofuranosyl nucleosides were prepared by the silyl method starting from persilylated 6-fluorothymine and 3,5-di-O-benzoyl-2-deoxy-2'-fluoro- α -D-arabinofuranosyl bromide. A mixture of benzoylated N(1)- β - and α -anomeric 6-fluorothymine 2'-fluorodeoxy arabinonucleosides was obtained by refluxing in CHCl_3 with a 34 % yield. 6-Substituted (OMe, NH_2) thymine 2'-deoxy-2'-fluoro-D-arabinonucleosides were prepared by the treatment of individually protected N(1)- α/β -D-arabinosides with methanolic ammonia. It is shown that mild deprotection of the benzoyl groups of intermediate 6-fluorothymine β -nucleoside using LiOH monohydrate in a mixture of acetonitrile-water resulted in the target nucleoside in good yields (82 %). An approach to the synthesis of 2'-fluoro-6,3'-O- α -D-anhydronucleosides was developed as a result of the intramolecular substitution reaction of the fluorine atom at the C(6)-position of the heterocycle by the C(3')-hydroxyl group of an intermediate deprotected nucleoside during the removal of the protective groups of 6-fluorothymine N(1)- α -arabinonucleoside under the basic reaction conditions. The structures of all synthesized nucleosides were proved by UV-, NMR-, CD- and mass-spectroscopy.

Keywords: pyrimidine nucleosides, 6-fluorothymine, arabinonucleosides, 2'-fluorodeoxy analogues, anhydronucleosides, synthesis.

Введение. Актуальным направлением в структурных модификациях природных нуклеозидов является введение атома фтора в углеводный фрагмент и (или) гетероциклическое основание молекулы [1; 2]. Интерес к созданию новых терапевтически значимых фторсодержащих нуклеозидных аналогов обусловлен их уникальными физико-химическими и биологическими свойствами [3]. Установлено, что фторсодержащие нуклеозиды отличаются хорошей растворимостью, высокой химической стабильностью, имеют улучшенные фармакокинетические свойства, менее токсичны. Большое количество публикаций посвящено синтезу 2'(3')-фтордезоксинуклеозидных аналогов, среди которых обнаружены соединения с высокой противовирусной активностью.

стью в отношении вирусов иммунодефицита человека (ВИЧ), простого герпеса, гепатита В и С, а также соединения, эффективные для лечения рака крови [4]. Модифицированные в гетероциклическом основании нуклеозиды также являются важным объектом исследований для разработки потенциальных антивирусных и противоопухолевых агентов [5]. В отличие от 5-фторпиримидинов синтез и биологическая активность 6-фтортимина и его нуклеозидов мало изучены, и только несколько работ опубликовано по синтезу и антивирусной активности гликозидов этого труднодоступного пиримидина и их аналогов, полученных замещением атома фтора в 6-м положении гетероцикла различными нуклеофильными агентами [6; 7]. Следует отметить, что получение 2'-фтордезоксинуклеозидов 6-фтортимина остается неизученной областью химии нуклеозидов.

Ранее нами получены новые D-рибонуклеозиды 6-фтортимина и их 3'-фторсодержащие аналоги [8]. Показано, что регио- и стереоселективность N-гликозилирования 2,4-бис(триметилсилил)-6-фтортимина с перацильными производными D-рибозы в CH_3CN в присутствии триметилсилил трифторметансульфоната (TMSOTf) зависит от температуры и приводит к образованию N(1)- β - и N(1)- α -рибонуклеозидов или исключительно к N(3)- β -изомеру. Выход (42–60 %) целевых блокированных N(1)- β -рибонуклеозидов 6-фтортимина и стереоселективность реакции конденсации ($\beta : \alpha - 2,2/4,5 : 1$) при низких температурах зависят от способа силилирования гетероциклического основания и структуры гликозилирующего агента.

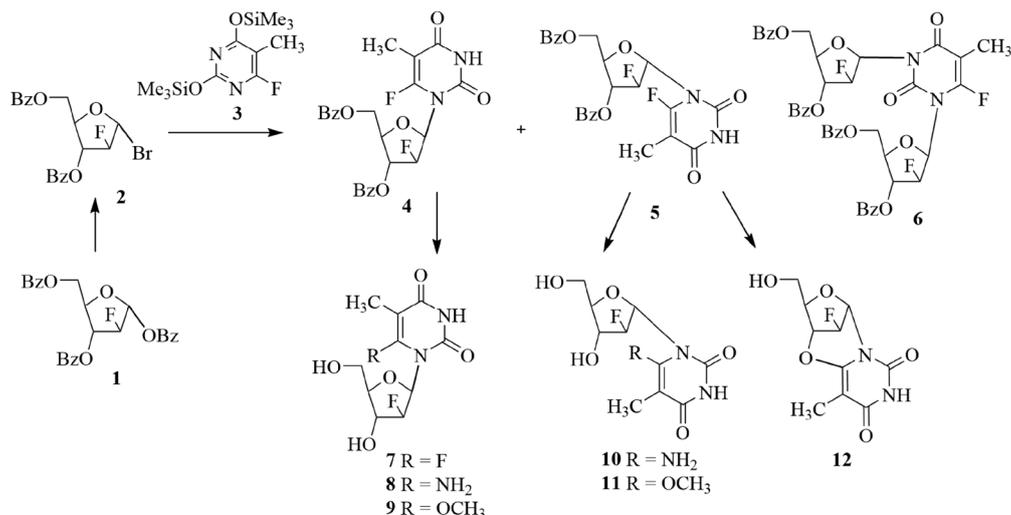
С целью поиска новых биологически значимых 2'-фтор- β -D-арабинонуклеозидов в настоящей работе осуществлен синтез ранее неизвестных 2'-фторсодержащих аналогов 6-замещенного тимина.

Результаты и их обсуждение. Наиболее изученным и эффективным методом синтеза пиримидиновых 2'-дезоксидеокси-2'-фтор- β -D-арабинонуклеозидов является реакция конденсации блокированного 2-дезоксидеокси-2-фтор- α -D-арабинофуранозил бромидом с силилированными производными гетерооснований и последующим удалением защитных групп промежуточных нуклеозидов под действием нуклеофильного агента [9]. Реакция образования β -нуклеозида протекает по $\text{S}_{\text{N}}2$ -механизму в присутствии таких растворителей, как ацетонитрил, 1,2-дихлорэтан, хлороформ, тетрагидрофуран и др. При этом наряду с основным продуктом реакции конденсации наблюдается образование α -аномера. Исследования показали, что в случае 2'-фтордезоксинуклеозидов урацила и тимина лучшая стереоселективность достигается при использовании менее полярных растворителей [9; 10].

Конденсация 1- α -бромсахара **2**, полученного обработкой перацильного производного 2-дезоксидеокси-2-фтор-D-арабинофуранозы **1** HBr/AcOH в хлористом метиле [11], с 1,5 избытком перацильного производного 6-фтортимина **3** при кипячении в хлороформе в течение 30 ч давала смесь блокированных N(1)- β/α -изомеров **4** и **5** в соотношении 6 : 1 с невысоким выходом (34 %), которые были разделены колоночной хроматографией на силикагеле. Проведение реакции в 1,2-дихлорэтано существенно снижало выход β -нуклеозида (13 %). Наряду с классическими продуктами реакции в незначительном количестве (3 %) выделено дипроизводное **6**. Использование N,O-бис(триметилсилил)-трифторацетамида (BSTFA) вместо гексаметилдисилазана (HMDS) / триметилхлорсилана (TMSCl) при силилировании 6-фтортимина не влияло на выход блокированных N(1)- β/α -нуклеозидов. Следует отметить, что выход $\text{S}_{\text{N}}2$ -реакции гликозилирования пиримидинового основания 2-дезоксидеокси-2-фтор- α -D-арабинофуранозил бромидом существенно зависит от природы гетероцикла и уменьшается в ряду: урацил, тимин, 6-фтортимин.

Стандартная процедура деблокирования индивидуальных бензоилированных нуклеозидов **4** и **5** аммиаком в метаноле приводила к замещению атома фтора в 6-положении гетероцикла с образованием 2'-дезоксидеокси-2'-фтор- β/α -D-арабинозидов 6-амино- и 6-метокситимина **8–11**, которые были выделены в индивидуальном состоянии колоночной хроматографией на силикагеле.

Нами найдено, что обработка C(2')- β -арабинозида 6-фтортимина **4** под действием моногидрата гидроксида лития в смеси ацетонитрил–вода (3 : 1,3, v/v) [8] приводила к целевому нуклеозиду **7** с высоким выходом (82 %). Аналогичная щелочная обработка индивидуального блокированного α -нуклеозида **5** неожиданно давала 2'-фтор-6,3'- α -D-ангидронуклеозид **12** с вы-



ходом 89 %, образование которого в процессе удаления защитных групп протекало в результате внутримолекулярной реакции замещения атома фтора при C(6) гетероцикла гидроксигруппой при C(3')-атоме промежуточного деблокированного нуклеозида **5**. Ранее нами обнаружен новый подход к синтезу 6,2'-O- α -D-ангидронуклеозидов из N(1)- α -D-рибонуклеозидов 6-фтортимина [8]. Необычным является тот факт, что атом фтора при C(2')- или C(3')-позиции углеводного фрагмента нуклеозида сохраняется, что приводит к образованию 6,3'-O- α -D- либо 6,2'-O- α -D-ангидронуклеозидов соответственно. Следует отметить, что только в одном случае [12] в ходе исследования внутримолекулярной реакции Форбрюггена сообщалось об образовании 6,3'-O- α -D-ангидро-2'-дезоксинуридина путем 3',5'-циклизации с последующей перегруппировкой.

Структура синтезированных соединений доказана на основании данных УФ-, ЯМР-, КД- и масс-спектрометрии.

Спектры УФ-поглощения β -нуклеозидов **7–9** в нейтральных, кислых и щелочных водных растворах подтверждают образование гликозидной связи по N(1)-положению гетероцикла. Так, в кислой среде максимум поглощения соединения **7** идентичен максимуму, полученному в нейтральной водной среде, и составляет 254 нм, а в щелочных условиях происходит незначительный батохромный сдвиг максимума до 258 нм, что характерно для N(1)-нуклеозидов 6-фтортимина и показано в работах [6; 8]. Следует отметить, что в отличие от N(1)-нуклеозидов 6-фтортимина их N(3)-изомеры показывают значительный батохромный сдвиг (281 нм) не только при pH 12, но и при нейтральных значениях pH.

Конфигурация аномерных центров арабинонуклеозидов 6-фтортимина **4** и **5** подтверждена данными ЯМР спектроскопии. В ¹³C ЯМР спектрах β/α -аномерных N(1)-нуклеозидов **4** и **5** наблюдаются близкие величины химических сдвигов всех резонансных сигналов атомов углерода гетероциклического основания и констант спин-спинового взаимодействия (KCCB) C(2), C(4), C(5), C(6) атомов и атомом фтора при C(6). Наиболее характерной особенностью перехода от β -аномерной конфигурации нуклеозида при C(1') к α -аномерной при рассмотрении пары блокированных фтордезоксинуклеозидов **4** и **5** является смещение резонансного сигнала H(4') в слабое поле (0,63 м. д.) в спектре ПМР (см. эксперимент). Интересно отметить наличие в ¹³C ЯМР спектре β -нуклеозида **4** дальнейшей KCCB через пять связей между C(3') углеродом углеводной части и атомом фтора гетероцикла ($^3J_{C3',F6}$ 3,9 Гц), а для α -изомера **5** KCCB через три связи между C(1') и F(6) ($^3J_{C1',F6}$ 8,1 Гц), что также свидетельствует о присоединении 2-деокси-2-фтор-D-арабинофуранозы к N(1)-атому 6-фтортимина в обоих продуктах конденсации и подтверждает их аномерную конфигурацию. Спин-спиновое взаимодействие через пять связей в случае β -изомера **4** представляет собой прямое магнитное взаимодействие ядер через пространство и отражает конформационные особенности молекулы [13].

Большие величины геминальных KCCB $^2J_{H2',F2'}$ (50–57 Гц) наблюдаются в спектрах ПМР синтезированных фторпроизводных **4–12**, что является характеристичным для определения положения атома фтора. Наличие резонансных сигналов атомов фтора при C(6) в области –94,01...

–98,95 м. д. в ^{19}F ЯМР спектрах нуклеозидов **4**, **5** и **7**, являющейся характерной для 6-фтортимина (–96,69 м. д.), также подтверждает структуру полученных производных 6-фтортимина. Выявлены дальние КССВ (25–29 Гц) в спектрах ^{19}F ЯМР β -фтордезоксинуклеозидов 6-фтортимина **4** и **7** между С(6)-атомом фтора гетерооснования и С(2')-атомом фтора углеводной части.

В ^1H ЯМР спектре производного **6** отсутствует резонансный сигнал N(3)-протона в составе 6-фтортиминового фрагмента, характерный для соединений **4** и **5**, а сравнение количества, положения и интегральной интенсивности сигналов нуклеозидных протонов дает основание предполагать наличие в молекуле дипроизводного **6** двух остатков бензоилированной фтордезоксарабинозы, присоединенных по N(1)- и N(3)-положениям гетероцикла. Данные масс-спектрометрии также подтверждают димерную структуру соединения **6** (m/z 829 $[\text{M}+\text{H}]^+$).

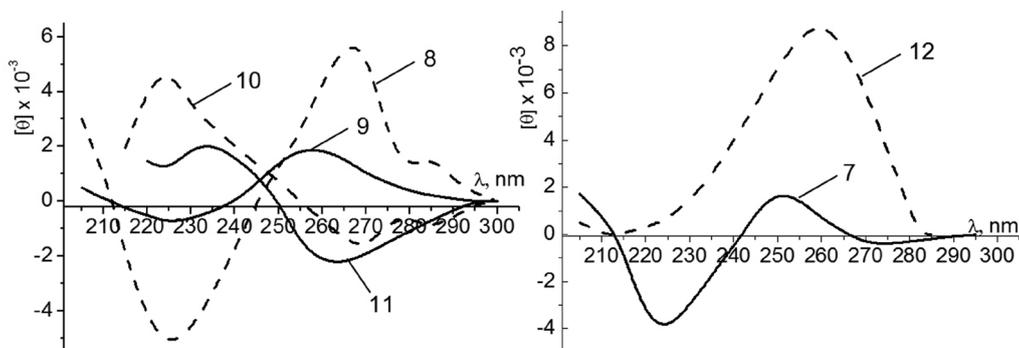
В ПМР спектрах 6-замещенных нуклеозидов **8** и **10** наблюдаются сигналы NH_2 -группы в виде синглета при 6,63 и 6,43 м. д., а для соединений **9** и **11** – метокси группы при 3,88 и 3,90 м. д. соответственно.

Структура 6,3'-O- α -D-ангидронуклеозида **12** подтверждается данными ПМР и масс-спектрометрии. Наиболее информативным доказательством 6,3'-циклизации является сдвиг сигнала H(3')-протона в слабое поле на 1,09 м. д. по сравнению с деблокированным β -арабинозидом 6-фтортимина **7**, а также отсутствие сигнала 3'-ОН группы при наличии соответствующих сигналов 3'-ОН и 5'-ОН групп для соединения **7**. Кроме того, в масс-спектре α -циклонуклеозида **12** имеется интенсивный пик молекулярного иона – m/z 259 $[\text{M}+\text{H}]^+$.

Дальнейшим подтверждением аномерной конфигурации 2'-деокси-2'-фтор-D-арабинонуклеозидов 6-замещенного тимина **7–11** и структуры α -циклонуклеозида **12** являются данные КД-спектроскопии (рисунок). В КД-спектре α -аномеров **10** и **11** наблюдается отрицательный эффект Коттона при 265–268 нм, тогда как в спектрах β -аномеров **8** и **9** присутствует характерный в таких случаях положительный максимум при 260–268 нм. Ярко выраженный положительный эффект Коттона при 260 нм (полоса $\text{B}_{2\text{u}}$) с аномально большим значением амплитуды в КД-спектре 6,3'- α -циклонуклеозида **12** обусловлен жесткой конформацией полученного нуклеозида и изменением электронной структуры модифицированного пиримидинового основания в сравнении с β -арабинонуклеозидом 6-фтортимина **7**.

Изучена цитотоксическая активность 2'-фторсодержащих производных **7** и **8** *in vitro* на клеточных линиях карциномы лёгких (A-549) и шейки матки (HeLa), аденокарциномы молочной железы (MCF-7), хронического миелолейкоза (K-562), Т-лимфобластной лейкемии (MOLT-3) в сравнении с D-рибонуклеозидом 6-фтортимина. Предварительные данные показали, что соединение **7** подавляло рост клеток MOLT-3 в концентрации 1–10 мкМ в отличие от контроля. Клетки K-562, MOLT-3 и A-549 оказались абсолютно резистентны к новому нуклеозидному аналогу **8**.

Экспериментальная часть. УФ-спектры регистрировали на спектрофотометре Cary 100 (Varian) в 0,1 н HCl (pH 1), в воде инъекционной и 0,1 н NaOH (pH 13) в диапазоне от 200 до 300 нм. Спектры ЯМР снимали на спектрометре Avance-500 (Bruker) с рабочей частотой 500 МГц для ^1H ЯМР, 125 МГц для ^{13}C ЯМР и 470 МГц для ^{19}F ЯМР. Химические сдвиги сигналов протонов измерены относительно ТМС. Масс-спектры получены на хромато-масс-спектрометре в составе системы ВЭЖХ Agilent 1290 с масс-селективным детектором Agilent QTOF 6550 в условиях



КД-спектры соединений **7–12** в воде
CD-spectra of compounds **7–12** in water

ионизации электрораспылением. Температуры плавления определены на микронагревательном столике Voethius и не исправлены. КД-спектры получены на спектрополяриметре Jasco J-20. Тонкослойная хроматография (ТСХ) проводилась на пластинках Kieselgel 60F₂₅₄ (Merck) в следующих системах растворителей: гексан–EtOAc, 3 : 2 (А), CHCl₃–MeOH, 7 : 1 (Б). Колоночную хроматографию проводили на силикагеле Kieselgel 60 (40–63 мкм, Fluka).

1-(3,5-Ди-О-бензоил-2-дезоксид-2-фтор-β-D-арабинофуранозил)-6-фтортимин (4). Выход 29 %, белый порошок, т. пл. 187–189 °С (Et₂O/гексан), *R_f* (А) 0,38. Спектр ¹H ЯМР (CDCl₃): δ 8,47 с (1H, NH), 8,06–7,39 м (10H, Bz), 6,76 дд (1H, H1', *J* 6,5, *J* 12,2), 5,95 дм (1H, H3', *J* 20,8), 5,49 ддд (1H, H2', *J* 4,3, *J* 52,9), 4,84 дд (1H, H5', *J* 3,5, *J* 12,2), 4,55 дд (1H, H5'', *J* 4,0), 4,32 м (1H, H4'), 1,78 д (3H, CH₃, *J* 2,2). Спектр ¹³C ЯМР (CDCl₃): δ 166,1 и 165,2 (2°С₆H₅C=O), 163,2 д (C4, *J* 17,8), 158,3 д (C6, *J* 274,5), 148,0 д (C2, *J* 4,4), 133,9–128,4 (12°С_{аром}), 93,7 д (C2', *J* 202,2), 92,9 д (C5, *J* 16,4), 81,4 д (C1', *J* 17,0), 77,1 (C4'), 75,8 дд (C3', *J* 3,9, *J* 25,7), 62,7 (C5'), 6,2 (CH₃). Спектр ¹⁹F ЯМР (CDCl₃): δ –94,01 д (FC6, *J* 29,5), –196,38 м (FC2'). Масс-спектр (HRMS), найдено: *m/z* 509,1125 (M+Na)⁺; вычислено: 509,1136.

1-(3,5-Ди-О-бензоил-2-дезоксид-2-фтор-α-D-арабинофуранозил)-6-фтортимин (5). Выход 5 %, белый порошок, т. пл. 110–112 °С (Et₂O/гексан), *R_f* (А) 0,52. Спектр ¹H ЯМР (CDCl₃): δ 8,41 с (1H, NH), 8,09–7,41 м (10H, Bz), 6,28 дт (1H, H1', *J* 20,1), 6,05 дт (1H, H2', *J* 54,3), 5,88 ддд (1H, H3', *J* 3,7, *J* 7,0, *J* 23,5), 4,95 м (1H, H4'), 4,69 дд (1H, H5', *J* 2,7, *J* 12,2), 4,53 дд (1H, H5'', *J* 4,4), 1,92 д (3H, CH₃, *J* 2,3). Спектр ¹³C ЯМР (CDCl₃): δ 166,1 и 165,6 (2°С₆H₅C=O), 163,6 д (C4, *J* 18,1), 157,3 д (C6, *J* 271,3), 148,3 д (C2, *J* 2,9), 133,8–128,4 (12°С_{аром}), 97,9 д (C2', *J* 188,3), 92,6 д (C5, *J* 17,2), 87,8 дд (C1', *J* 8,1, *J* 41,6), 82,4 д (C4', *J* 5,5), 77,6 д (C3', *J* 27,6), 63,7 (C5'), 6,49 (CH₃). Спектр ¹⁹F ЯМР (CDCl₃): δ –98,95 с (FC6), –184,58 м (FC2'). Масс-спектр (HRMS), найдено: *m/z* 509,1127 (M+Na)⁺; вычислено: 509,1136.

1,3-Бис-(3,5-ди-О-бензоил-2-дезоксид-2-фтор-D-арабинофуранозил)-6-фтортимин (6). Выход 4 %, бесцветное масло, *R_f* (А) 0,70. Спектр ¹H ЯМР (CDCl₃): δ 8,09–7,41 м (20H, Bz), 6,75 д (1H, H1' для N1, *J* 4,3), 6,62 д (1H, H1' для N3, *J* 4,5), 5,98 дт (1H, H3' для N1 или N3, *J* 16,2), 5,86 дт (1H, H3' для N1 или N3, *J* 16,4), 5,51–5,38 м (2H, H2' для N1 и N3, *J* 51,3), 4,78–4,47 (6H, H5', H5'', H4' для N1 и N3), 1,78 д (3H, CH₃). Спектр ¹³C ЯМР (CDCl₃): δ 169,5 д (C6, *J* 247,7), 169,5 д (C2, *J* 10,2), 166,0–165,6 (4×С₆H₅C=O), 159,7 д (C4, *J* 22,1), 133,9–128,3 (24×С_{аром}), 96,3–95,9 м (3C, C5, C1' для N1 и N3), 92,6 д (C2' для N1 или N3, *J* 203,4), 92,3 д (C2' для N1 или N3, *J* 204,3), 80,0 д (C4' для N1 или N3, *J* 6,9), 79,8 д (C4' для N1 или N3, *J* 7,4), 76,0 д (C3' для N1 или N3, *J* 25,0), 75,6 д (C3' для N1 или N3, *J* 24,1), 64,7–64,6 д (2C, C5' для N1 и N3), 6,5 (CH₃). Спектр ¹⁹F ЯМР (CDCl₃): δ –62,93 с (FC6), –193,02 м (FC2' для N1 или N3), –194,05 м (FC2' для N1 или N3). Масс-спектр (HRMS), найдено: *m/z* 829,2231 (M+H)⁺; вычислено: 829,2220.

1-(2-Дезокси-2-фтор-β-D-арабинофуранозил)-6-фтортимин (7). Выход 82 %, бесцветное масло, *R_f* (Б) 0,50. Спектр УФ λ, нм (lg ε): pH 1, λ_{max} 254 (3,95), λ_{min} 229 (3,60); pH 7, λ_{max} 254 (3,95), λ_{min} 229 (3,60); pH 13, λ_{max} 258 (3,84), λ_{min} 241 (3,68). Спектр ¹H ЯМР (DMSO-d₆): δ 11,78 уш. с (1H, NH), 6,54 дд (1H, H1', *J* 6,8, *J* 11,2), 5,87 д (1H, 3'OH, *J* 5,6), 5,24 ддд (1H, H2', *J* 5,2, *J* 54,9), 4,88 т (1H, 5'OH, *J* 5,3), 4,18 дм (1H, H3', *J* 23,8), 3,68–3,48 м (3H, H4', H5', H5''), 1,73 д (3H, CH₃, *J* 2,2). Спектр ¹³C ЯМР (DMSO-d₆): δ 163,0 д (C4, *J* 17,6), 157,9 д (C6, *J* 273,3), 148,0 д (C2, *J* 4,5), 96,4 д (C2', *J* 195,5), 90,8 д (C5, *J* 15,5), 80,6 д (C4', *J* 8,5), 79,7 д (C1', *J* 16,3), 72,8 дд (C3', *J* 3,7, *J* 21,5), 60,3 (C5'), 6,0 (CH₃). Спектр ¹⁹F ЯМР (DMSO-d₆): δ –94,52 д (FC6, *J* 24,7), –197,63 м (FC2'). Масс-спектр (HRMS), найдено: *m/z* 288,0525 (M+Na)⁺; вычислено: 288,0534.

1-(2-Дезокси-2-фтор-β-D-арабинофуранозил)-6-аминотимин (8). Выход 68 %, белый порошок, т. пл. 258–260 °С, *R_f* (Б) 0,23. Спектр УФ λ, нм (lg ε): pH 1, λ_{max} 279 (4,23); pH 7, λ_{max} 279 (4,23); pH 13, λ_{max} 279 (4,10). Спектр ¹H ЯМР (DMSO-d₆): δ 10,68 с (1H, NH), 6,64 дд (1H, H1', *J* 6,1, *J* 16,5), 6,63 с (2H, NH₂), 5,88 д (1H, 3'OH, *J* 5,4), 5,49 т (1H, 5'OH, *J* 5,3), 5,07 ддд (1H, H2', *J* 3,7, *J* 5,9, *J* 54,9), 4,43 дм (1H, H3', *J* 26,3), 3,75–3,62 м (3H, H4', H5', H5''), 1,64 с (3H, CH₃). Спектр ¹³C ЯМР (CD₃OD): δ 164,9 (C4), 156,5 (C6), 151,5 (C2), 98,5 д (C2', *J* 195,2), 85,7 д (C1', *J* 17,8), 83,4 (C5), 83,1 д (C4', *J* 6,5), 74,9 д (C3', *J* 24,7), 59,4 (C5'), 8,1 (CH₃). Спектр ¹⁹F ЯМР (DMSO-d₆): δ –195,11 м (FC2'). Масс-спектр (HRMS), найдено: *m/z* 298,0827 (M+Na)⁺; вычислено: 298,0815.

1-(2-Дезокси-2-фтор-β-D-арабинофуранозил)-6-метокситимин (9). Выход 13 %, бесцветное масло, *R_f* (Б) 0,47. Спектр УФ λ, нм (lg ε): pH 1, λ_{max} 265 (3,95); pH 7, λ_{max} 265 (3,95); pH 13, λ_{max} 266

(3,87). Спектр ^1H ЯМР (DMSO-d_6): δ 11,41 с (1H, NH), 6,35 т (1H, H1'), 5,73 д (1H, 3'OH, J 5,4), 5,78 т (1H, 5'OH, J 5,3), 5,18 дт (1H, H2', J 55,6), 4,31 дм (1H, H3', J 23,3), 3,86 с (3H, OCH_3), 3,68–3,54 м (3H, H4', H5', H5''), 1,77 с (3H, CH_3). Спектр ^{13}C ЯМР (DMSO-d_6): δ 164,2 (C4), 159,5 (C6), 149,4 (C2), 96,8 д (C2', J 197,2), 95,3 (C5), 80,5 д (C4', J 9,8), 79,1 д (C1', J 16,2), 73,3 д (C3', J 20,8), 62,3 (OCH_3), 60,9 (C5'), 7,9 (CH_3). Спектр ^{19}F ЯМР (DMSO-d_6): δ –199,87 м (FC2'). Масс-спектр (HRMS), найдено: m/z 291,0984 ($\text{M}+\text{Na}$)⁺; вычислено: 291,0992.

1-(2-Дезокси-2-фтор- α -D-арабинофуранозил)-6-аминотимин (10). Выход 61 %, белый порошок, R_f (Б) 0,27. Спектр УФ λ , нм ($\lg \epsilon$): pH 1, λ_{max} 279 (4,23); pH 7, λ_{max} 279 (4,23); pH 13, λ_{max} 279 (4,10). Спектр ^1H ЯМР (DMSO-d_6): δ 10,71 с (1H, NH), 6,43 с (2H, NH_2), 6,17 дд (1H, H1', J 4,7, J 20,1), 5,93 д (1H, 3'OH, J 5,2), 5,67 дт (1H, H2', J 57,0), 4,91 т (1H, 5'OH, J 5,5), 4,27 дм (1H, H3', J 23,1), 4,19 м (1H, H4'), 3,58 уш. д (1H, H5'), 3,46 дм (1H, H5'', J 5,0, J 12,1), 1,67 с (3H, CH_3). Спектр ^{13}C ЯМР (DMSO-d_6): δ 162,4 (C4), 151,3 (C6), 150,2 (C2), 98,8 д (C2', J 181,5), 86,1 д (C1', J 38,4), 84,6 (C5), 82,1 с (C4'), 74,1 д (C3', J 22,4), 60,3 (C5'), 8,6 (CH_3). Спектр ^{19}F ЯМР (DMSO-d_6): δ –188,47 м (FC2'). Масс-спектр (HRMS), найдено: m/z 298,0813 ($\text{M}+\text{Na}$)⁺; вычислено: 298,0815.

1-(2-Дезокси-2-фтор- α -D-арабинофуранозил)-6-метокситимин (11). Выход 17 %, бесцветное масло, R_f (Б) 0,51. Спектр УФ λ , нм ($\lg \epsilon$): pH 1, λ_{max} 265 (3,95); pH 7, λ_{max} 265 (3,95); pH 13, λ_{max} 266 (3,87). Спектр ^1H ЯМР (DMSO-d_6): δ 11,44 с (1H, NH), 6,05 дд (1H, H1', J 4,9, J 19,7), 5,85 д (1H, 3'OH, J 5,5), 5,61 дт (1H, H2', J 57,8), 4,85 т (1H, 5'OH, J 6,1), 4,28 дм (1H, H3', J 24,9), 3,90 с (3H, OCH_3), 4,13 м (1H, H4'), 3,59 уш. д (1H, H5'), 3,43 м (1H, H5'', J 4,6, J 12,2), 1,78 с (3H, CH_3). Спектр ^{13}C ЯМР (DMSO-d_6): δ 164,2 (C4), 158,3 (C6), 149,5 (C2), 99,2 д (C2', J 181,9), 96,4 (C5), 85,1 д (C1', J 38,9), 84,2 д (C4', J 8,2), 73,3 д (C3', J 21,8), 62,3 (OCH_3), 60,1 (C5'), 7,9 (CH_3). Спектр ^{19}F ЯМР (DMSO-d_6): δ –190,44 м (FC2'). Масс-спектр (HRMS), найдено: m/z 291,0982 ($\text{M}+\text{Na}$)⁺; вычислено: 291,0992.

6,3'-Ангидро-1-(2-дезоксидеокси-2-фтор- α -D-арабинофуранозил)-6-гидрокситимин (12). Выход 89 %, белый порошок, т. пл. 228–230 °С (Et_2O), R_f (Б) 0,66. Спектр УФ λ , нм ($\lg \epsilon$): pH 1, λ_{max} 267 (4,11); pH 7, λ_{max} 267 (4,14); pH 13, λ_{max} 268 (4,03). Спектр ^1H ЯМР (DMSO-d_6): δ 11,33 с (1H, NH), 6,34 д (1H, H1', J 6,6), 5,59 дд (1H, H2', J 49,9), 5,27 уш. д (1H, H3', J 4,0), 5,18 уш. с (1H, 5'OH), 4,33 т (1H, H4'), 3,51–3,41 м (2H, H5', H5''), 1,65 с (3H, CH_3). Спектр ^{13}C ЯМР (DMSO-d_6): δ 163,5 (C4), 151,7 (C6), 147,7 (C2), 86,9 (C5), 86,8 д (C2', J 193,6), 85,3 (C4'), 80,4 д (C1', J 26,5), 76,5 д (C3', J 22,3), 59,8 (C5'), 6,9 (CH_3). Спектр ^{19}F ЯМР (DMSO-d_6): δ –199,51 д (FC2'). Масс-спектр (HRMS), найдено: m/z 259,0721 ($\text{M}+\text{H}$)⁺; вычислено: 259,0730.

Закключение. Осуществлен синтез 2'-дезоксидеокси-2'-фтор-D-арабинофуранозил нуклеозидов 6-замещенного тимина и разработан метод синтеза 2'-дезоксидеокси-2'-фтор- β -D-арабинонуклеозида 6-фтортимина с целью изучения их биологической активности. Разработан подход к синтезу 6,3'-O- α -D-ангидронуклеозидов путем реакции внутримолекулярной циклизации при деблокировании бензильного производного 2'-фтор- α -D-арабинофуранозил-6-фтортимина в основных условиях.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Национальной академии наук Беларуси в рамках задания № 4.19 подпрограммы «Химфармсинтез».

Acknowledgement. This work was supported within the research project number 4.19 of ChemPharmSynthesis Program, National Academy of Sciences of Belarus.

Список использованных источников

1. Applications of Fluorine in Medicinal Chemistry / E. P. Gillis [et al.] // J. Med. Chem. – 2015. – Vol. 58, iss. 21. – P. 8315–8359. doi.org/10.1021/acs.jmedchem.5b00258.
2. Wójtowicz-Rajchel, H. Synthesis and applications of fluorinated nucleoside analogues / H. Wójtowicz-Rajchel // J. Fluorine Chem. – 2012. – Vol. 143. – P. 11–48. doi.org/10.1016/j.jfluchem.2012.06.026.
3. Begue, J.-P. Bioorganic and Medicinal Chemistry of Fluorine / J.-P. Begue, D. Bonnet-Delpon. – Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2008. – 366 p.
4. Liu, P. Fluorinated Nucleosides: Synthesis and Biological Implication / P. Liu, A. Sharon, C. K. Chu // J. Fluorine Chem. – 2008. – Vol. 129, iss. 9. – P. 743–766. doi.org/10.1016/j.jfluchem.2008.06.007.
5. Advances in the development of nucleoside and nucleotide analogues for cancer and viral diseases / L. P. Jordheim [et al.] // Nat. Rev. Drug Discov. – 2013. – Vol. 12, iss. 6. – P. 447–464. doi.org/10.1038/nrd4010.
6. Bärwolff, D. Glucosidierung des 6-Fluorhymins / D. Bärwolff, G. Kowollik, P. Langen // Collect. Czech. Chem. Commun. – 1974. – Vol. 39, iss. 6. – P. 1494–1499. doi.org/10.1135/cccc19741494.
7. Von Janta-Lipinski, M. Synthesis of 6-substituted thymine nucleosides / M. von Janta-Lipinski, P. Langen // Nucleic Acids Symposium Series. – 1981. – Vol. 9. – P. 41–44.

8. Synthesis of novel 6-substituted thymine ribonucleosides and their 3'-fluorinated analogues / T. S. Bozhok [et al.] // *Tetrahedron*. – 2016. – Vol. 72, iss. 41. – P. 6518–6527. doi.org/10.1016/j.tet.2016.08.065.
9. A stereospecific, total synthesis of 2'-fluoro-2'-deoxy-beta-D-arabinofuranosyl nucleosides / H. G. Howell [et al.] // *J. Org. Chem.* – 1988. – Vol. 53, iss. 1. – P. 85–88. doi.org/10.1021/jo00236a017.
10. Wilds, C. J. 2'-Deoxy-2'-fluoro-beta-D-arabinonucleosides and oligonucleotides (2'F-ANA): synthesis and physico-chemical studies / C. J. Wilds, M. J. Damha // *Nucl. Acids Research*. – 2000. – Vol. 28, iss. 18. – P. 3625–3635. doi.org/10.1093/nar/28.18.3625.
11. Fluorocarbohydrates in synthesis. An efficient synthesis of 1-(2-deoxy-2-fluoro-beta-D-arabinofuranosyl)-5-iodouracil (beta.-FIAU) and 1-(2-deoxy-2-fluoro-beta.-D-arabinofuranosyl)thymine (beta.-FMAU) / C. H. Tann [et al.] // *J. Org. Chem.* – 1985. – Vol. 50, iss. 19. – P. 3644–3647. doi.org/10.1021/jo00219a048.
12. Mieczkowski, A. Preparation of cyclonucleosides / A. Mieczkowski, V. Roy, L. A. Agrofoglio // *Chem. Rev.* – 2010. – Vol. 110, iss. 4. – P. 1828–1856. doi.org/10.1021/cr900329y.
13. Hsee, R. K. Through-space ^{13}C - ^{19}F couplings in highly-crowded systems: Radial dependence and electronic effects / R. K. Hsee, D. J. Sardella // *Magn. Reson. Chem.* – 1990. – Vol. 28, iss. 8. – P. 688–692. doi.org/10.1002/mrc.1260280806.

References

1. Gillis E. P., Eastman K. J., Hill M. D., Donnelly D. J., Meanwell N. A. Applications of Fluorine in Medicinal Chemistry. *Journal of Medicinal Chemistry*, 2015, vol. 58, no. 21, pp. 8315–8359. doi.org/10.1021/acs.jmedchem.5b00258.
2. Wójtowicz-Rajchel H. Synthesis and applications of fluorinated nucleoside analogues. *Journal of Fluorine Chemistry*, 2012, vol. 143, pp. 11–48. doi.org/10.1016/j.jfluchem.2012.06.026.
3. Begue J.-P., Bonnet-Delpon D. *Bioorganic and Medicinal Chemistry of Fluorine*. Hoboken, New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., 2008. 366 p.
4. Liu P., Sharon A., Chu C. K. Fluorinated Nucleosides: Synthesis and Biological Implication. *Journal of Fluorine Chemistry*, 2008, vol. 129, no. 9, pp. 743–766. doi.org/10.1016/j.jfluchem.2008.06.007.
5. Jordheim L. P., Durantel D., Zoulim F., Dumontet C. Advances in the development of nucleoside and nucleotide analogues for cancer and viral diseases. *Nature Reviews Drug Discovery*, 2013, vol. 12, no. 6, pp. 447–464. doi.org/10.1038/nrd4010.
6. Bärwolff D., Kowolik G., Langen P. Glucosidierung des 6-Fluor-thymins. *Collection of Czechoslovak Chemical Communications*, 1974, vol. 39, no. 6, pp. 1494–1499. doi.org/10.1135/cccc19741494.
7. Von Janta-Lipinski M., Langen P. Synthesis of 6-substituted thymine nucleosides. *Nucleic Acids Symposium Series*, 1981, vol. 9, pp. 41–44.
8. Bozhok T. S., Sivets G. G., Baranovsky A. V., Kalinichenko E. N. Synthesis of novel 6-substituted thymine ribonucleosides and their 3'-fluorinated analogues. *Tetrahedron*, 2016, vol. 72, no. 41, pp. 6518–6527. doi.org/10.1016/j.tet.2016.08.065.
9. Howell H. G., Brodfuehrer P. R., Brundidge S. P., Benigni D. A., Sapino C. Antiviral nucleosides. A stereospecific, total synthesis of 2'-fluoro-2'-deoxy-beta.-D-arabinofuranosyl nucleosides. *The Journal of Organic Chemistry*, 1988, vol. 53, no. 1, pp. 85–88. doi.org/10.1021/jo00236a017.
10. Wilds C. J., Damha M. J. 2'-Deoxy-2'-fluoro-beta-D-arabinonucleosides and oligonucleotides (2'F-ANA): synthesis and physicochemical studies. *Nucleic Acids Research*, 2000, vol. 28, no. 18, pp. 3625–3635. doi.org/10.1093/nar/28.18.3625.
11. Tann C. H., Brodfuehrer P. R., Brundidge S. P., Sapino C., Howell H. G. Fluorocarbohydrates in synthesis. An efficient synthesis of 1-(2-deoxy-2-fluoro-beta.-D-arabinofuranosyl)-5-iodouracil (beta.-FIAU) and 1-(2-deoxy-2-fluoro-beta.-D-arabinofuranosyl)thymine (beta.-FMAU). *The Journal of Organic Chemistry*, 1985, vol. 50, no. 19, pp. 3644–3647. doi.org/10.1021/jo00219a048.
12. Mieczkowski A., Roy V., Agrofoglio L. A. Preparation of cyclonucleosides. *Chemical Reviews*, 2010, vol. 110, no. 4, pp. 1828–1856. doi.org/10.1021/cr900329y.
13. Hsee R. K., Sardella D. J. Through-space ^{13}C - ^{19}F couplings in highly-crowded systems: Radial dependence and electronic effects. *Magnetic Resonance in Chemistry*, 1990, vol. 28, no. 8, pp. 688–692. doi.org/10.1002/mrc.1260280806.

Информация об авторах

Божок Татьяна Станиславовна – науч. сотрудник, Институт биоорганической химии НАН Беларуси (ул. Купревича, 5/2, 220141, Минск, Республика Беларусь). E-mail: tboshok@tut.by.

Калиниченко Елена Николаевна – член-корреспондент, д-р хим. наук, заместитель директора, Институт биоорганической химии НАН Беларуси (ул. Купревича, 5/2, 220141, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kalinichenko@iboch.bas-net.by.

Для цитирования

Божок, Т. С. Синтез 2'-дезоксиде-2'-фтор-D-арабинонуклеозидов 6-замещенного тимина / Т. С. Божок, Е. Н. Калиниченко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 61–67.

Information about the authors

Bozhok Tatiana Stanislavovna – Researcher, Institute of Bioorganic Chemistry of the National Academy of Sciences of Belarus (5/2, Kuprevich Str., 220141, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tboshok@tut.by.

Kalinichenko Elena Nikolaevna – Corresponding Member, D. Sc. (Chemistry), Deputy Director, Institute of Bioorganic Chemistry of the National Academy of Sciences of Belarus (5/2, Kuprevich Str., 220141, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kalinichenko@iboch.bas-net.by.

For citation

Bozhok T. S., Kalinichenko E. N. Synthesis of 6-substituted thymine 2'-deoxy-2'-fluoro-D-arabinofuranosyl nucleosides. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 61–67. (in Russian)

БИОЛОГИЯ**BIOLOGY**

УДК 574.2+595.3

Поступило в редакцию 28.09.2016

Received 28.09.2016

Член-корреспондент В. П. Семенченко*Научно-практический центр НАН Беларуси по биоресурсам, Минск, Республика Беларусь***СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ВЫЖИВАЕМОСТЬЮ И ПЛОДОВИТОСТЬЮ
В КОГОРТАХ *DAPHNIA LONGISPINA* (CLADOCERA)
ПРИ РАЗНЫХ ТРОФИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ**

Выживаемость и плодовитость когорт *Daphnia longispina* была изучена в экспериментах методом построения таблиц жизни при различных концентрациях *Chlorella* sp. (0,08, 0,18 и 0,36 мг/л). Средневзвешенная, относительно выживаемости, плодовитость животных уменьшалась при низкой концентрации пищи, но были отмечены два и более максимума при более высоких концентрациях. Протестирована гипотеза «репродуктивной цены» и было показано, что она подтверждается только для низкой концентрации пищи.

Ключевые слова: таблицы жизни, *Daphnia longispina*, гипотеза «репродуктивной цены».

Corresponding Member V. P. Semenchenko*Scientific and Practical Center for Bioresources of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus***RATIO BETWEEN THE SURVIVAL AND FECUNDITY IN THE COHORTS
OF *DAPHNIA LONGISPINA* (CLADOCERA) UNDER DIFFERENT TROPHIC CONDITIONS**

The survival and fecundity of *Daphnia longispina* were studied in life-table experiments under different *Chlorella* sp. concentrations (0.08, 0.18 and 0.36 mg/L). The survivorship-weighted fecundity decreased at low concentration of food, but two or more maxima were found at higher concentrations. The “reproductive cost” hypothesis was tested using the data of life-table experiments. It was shown that this hypothesis is confirmed only for low food concentration.

Keywords: life-table, *Daphnia longispina*, “reproductive cost” hypothesis.

Введение. При анализе возрастной динамики выживаемости и воспроизводства когорт значительный интерес представляет изменение в соотношении этих показателей по мере увеличения возраста животных. В частности, такие показатели, как когортные значения выживаемости и плодовитости самок, вклад плодовитости самок определенного возраста в пополнение популяции, соотношение между текущим и будущим вкладом особей в пополнение являются основой для анализа демографии когорты.

Так было показано, что по мере возрастания плодовитости когорты снижается вероятность выживания размножающихся особей [1]. Наличие этой взаимосвязи привело к созданию гипотезы «репродуктивной цены», исходя из которой, за увеличение своей плодовитости особи должны «платить» снижением длительности жизни. Фактически это означает, что существуют компенсационные процессы в жизненном цикле животных, которые представляют собой компромиссное расходование ресурсов, в основе которых лежит преимущество одного процесса, приобретенное ценой другого.

Гипотеза «репродуктивной цены», с одной стороны, подвергалась критике [2], с другой – подтверждалась исследователями [3]. Тем не менее, любой организм сталкивается с проблемой компромисса при воздействии различных факторов как биотического, так и абиотического воздействия, так как нет организма, который бы соответствовал так называемому демону Дарвина [4].

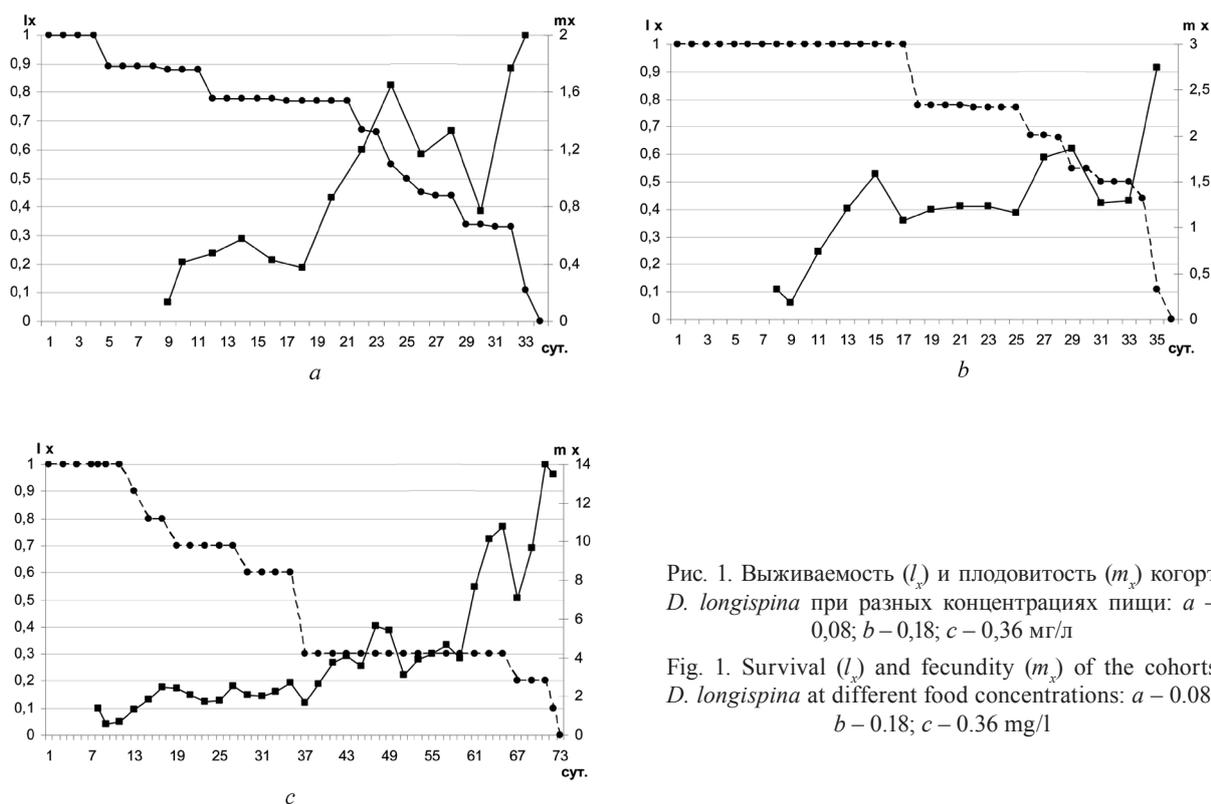


Рис. 1. Выживаемость (l_x) и плодовитость (m_x) когорты *D. longispina* при разных концентрациях пищи: а – 0,08; б – 0,18; с – 0,36 мг/л

Fig. 1. Survival (l_x) and fecundity (m_x) of the cohorts *D. longispina* at different food concentrations: а – 0.08; б – 0.18; с – 0.36 mg/l

Цель работы – определение соотношения между выживаемостью и плодовитостью особей *Daphnia longispina* (O. F. Müller, 1776) в когортах в течение жизненного цикла при изменении трофических условий, а также протестировать гипотезу «репродуктивной цены».

Материалы и методы исследования. Опыты проведены на основе построения таблиц жизни *D. longispina*, которую выращивали методом индивидуального культивирования в стаканах объемом 150 мл при низкой (0,08), средней (0,18) и высокой (0,36 мг сухого вещества в литре) концентрациях *Chlorella* sp. и температуре 20 ± 1 °C. Количество параллельных – 15 стаканов для каждой из исследованных концентраций пищи. Контроль за состоянием животных и смену среды в опытных стаканах проводили ежедневно. Для каждой концентрации определяли когортные значения выживаемости (l_x) и плодовитости (m_x).

Кривые l_x и m_x являются основными показателями для определения демографических величин. Фактически, они представляют тот фундамент, на котором строятся дальнейшие расчеты и прогнозы жизни как отдельной когорты, так и популяции в целом.

На рис. 1 приведены кривые l_x и m_x при разных концентрациях пищи. Для удобства, абсолютные значения выравнены методом скользящей средней с периодом в два дня.

Результаты и их обсуждение. Исходя из данных по изменению l_x видно, что при низкой концентрации пищи выживаемость животных снижается практически линейно на начальных этапах роста когорты. При средней концентрации пищи смертность животных в когорте отсутствует практически до середины эксперимента, но затем резко возрастает, а при высокой – происходит ее плавное снижение.

Величины m_x при низкой и средней концентрациях пищи различаются незначительно, но при максимальной концентрации они значительно выше.

Изменение величины m_x еще не говорит о вкладе плодовитости самок определенного возраста в пополнение популяции. Таким показателем является произведение плодовитости самок на их выживаемость ($l_x m_x$), которое представляет средневзвешенную, относительно выживаемости, плодовитость животных определенного возраста (survivorship-weighted fecundity). Мы провели анализ динамики произведения $l_x m_x$ в течение жизни в связи с концентрацией пищи. На рис. 2

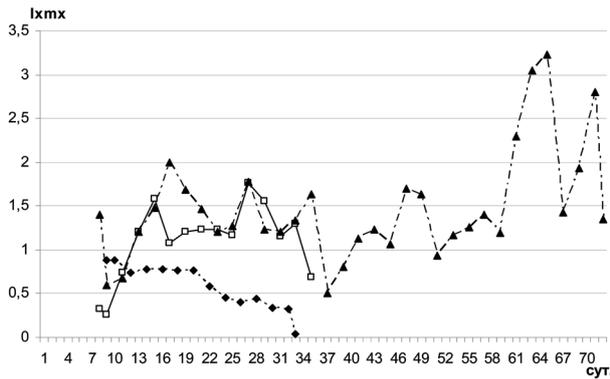


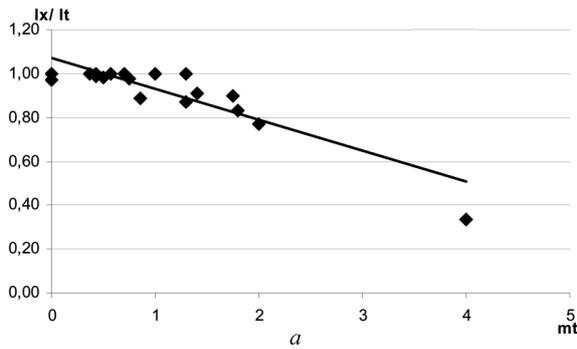
Рис. 2. Средневзвешенная, относительно выживаемости, плодовитость *D. longispina* при разных концентрациях пищи: \blacklozenge – 0,08; \square – 0,18; \blacktriangle – 0,36 мг/л

Fig. 2. Survivorship-weighted fecundity of the cohorts *D. longispina* at different food concentrations: \blacklozenge – 0,08; \square – 0,18; \blacktriangle – 0,36 mg/l

рой и последующий максимумы произведения $l_x m_x$ связаны главным образом с небольшим числом самок, которые имеют высокую продолжительность жизни и высокую плодовитость. В результате этого, даже при низких значениях l_x , происходит значительное возрастание $l_x m_x$.

Применительно к естественным условиям, второй и последующие максимумы $l_x m_x$, видимо, не играют значительной роли в пополнении популяции, так как вероятность дожить до предельного возраста в условиях водоема гораздо ниже, чем в лабораторных опытах.

Вероятность выживания особей возраста x до возраста t может быть представлена как l_t / l_x , а плодовитость животных в возрасте t как m_t . Если гипотеза «репродуктивной цены» справедлива, то должна наблюдаться отрицательная корреляция между l_t / l_x и m_t . При низкой концентрации корма у *D. longispina* наблюдается четкое уменьшение вероятности выживания самок по мере увеличения плодовитости когорты (рис. 3, а).



представлены данные по изменению этого показателя при изученных концентрациях корма.

Видно, что величина $l_x m_x$ при низкой концентрации пищи закономерно снижается, при более высокой концентрации наблюдается два максимума, приходящихся на начало и вторую половину жизни когорты, а при максимальной концентрации – несколько максимумов.

Согласно данным [5], динамика $l_x m_x$ в течение жизни когорты имеет «треугольный» характер, а максимум этого произведения приходится, как правило, на первую половину жизни когорты. В дальнейшем, рядом исследователей на различных видах клодоцер в основном был подтвержден такой характер изменения $l_x m_x$ [6; 7]. С другой стороны, в работах некоторых авторов было показано бимодальное изменение $l_x m_x$ в течение жизни когорты [8; 9].

Как показывает анализ наших данных, второй и последующий максимумы произведения $l_x m_x$ связаны главным образом с небольшим числом самок, которые имеют высокую продолжительность жизни и высокую плодовитость. В результате этого, даже при низких значениях l_x , происходит значительное возрастание $l_x m_x$.

Применительно к естественным условиям, второй и последующие максимумы $l_x m_x$, видимо, не играют значительной роли в пополнении популяции, так как вероятность дожить до предельного возраста в условиях водоема гораздо ниже, чем в лабораторных опытах.

Вероятность выживания особей возраста x до возраста t может быть представлена как l_t / l_x , а плодовитость животных в возрасте t как m_t . Если гипотеза «репродуктивной цены» справедлива, то должна наблюдаться отрицательная корреляция между l_t / l_x и m_t . При низкой концентрации корма у *D. longispina* наблюдается четкое уменьшение вероятности выживания самок по мере увеличения плодовитости когорты (рис. 3, а).

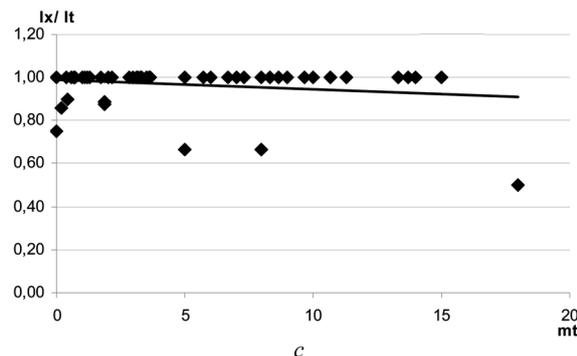
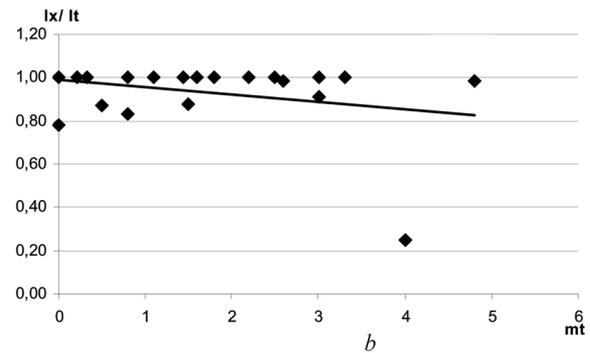


Рис. 3. Вероятность выживания особей *D. longispina* возраста x до возраста t в зависимости от плодовитости животных в возрасте t при разных концентрациях пищи: а – 0,08; б – 0,18; с – 0,36 мг/л

Fig. 3. Survival probability of the cohorts *D. longispina* at the age x to the age t depending on the fecundity of animals at the age t at different food concentrations: а – 0,08; б – 0,18; с – 0,36 mg/l

При более высокой концентрации пищи эта взаимосвязь не столь ярко выражена (рис. 3, *b*) и практически отсутствует при благоприятных трофических условиях (рис. 3, *c*). Отметим, что угол наклона линейной регрессии уменьшается при увеличении концентрации корма. Это свидетельствует о том, что при улучшении трофических условий скорость изменения l_x / l_t с ростом плодовитости m_t снижается.

Таким образом, гипотеза «репродуктивной цены» подтверждается в тех случаях, когда животные испытывают недостаток пищи. При оптимальных трофических условиях, когда количество энергии, получаемой с пищей, не лимитировано, нет необходимости в компенсационной связи между вероятностью выживания и плодовитостью рачков. К сходным выводам пришел Browne [3], анализируя закономерности размножения *Artemia* при низких и высоких концентрациях корма. По данным автора, при недостатке пищи наблюдается отрицательная корреляция между длительностью жизни и продолжительностью репродуктивного периода, что согласуется с теорией «репродуктивной цены». В то же время при благоприятных трофических условиях такая корреляция отсутствовала.

Заключение. Популяционные показатели, которые получены исходя из таблиц жизни, представляют собой максимальные значения, так как они относятся к некоторым оптимальным условиям жизни когорты. В частности, смертность особей когорты является внутренним процессом, не зависящим от хищников или конкурентов. Эффекты плотности полностью отсутствуют, а размножение особи в когорте ограничено только теми условиями, которые задает экспериментатор. Следует отметить, что в естественных условиях зоопланктон на протяжении вегетационного сезона испытывает периоды недостатка пищи. Поэтому гипотеза «репродуктивной цены» должна подтверждаться для естественных популяций *D. longispina*.

Список использованных источников

1. Snell, T. W. Lifespan and Fecundity Patterns in Rotifers: The Cost of Reproduction / T. W. Snell, C. E. King // *Evolution*. – 1977. – Vol. 31, N 4. – P. 882–890. doi.org/10.2307/2407451.
2. Bell, G. Measuring the cost of reproduction / G. Bell // *Oecologia*. – 1983. – Vol. 60, N 3. – P. 378–383. doi.org/10.1007/bf00376855.
3. Browne, R. A. The Costs of Reproduction in Brine Shrimp / R. A. Browne // *Ecology*. – 1982. – Vol. 63, N 1. – P. 43–47. doi.org/10.2307/1937029.
4. Law, R. Optimal Life Histories Under Age-Specific Predation / R. Law // *The American Naturalist*. – 1979. – Vol. 114, N 3. – P. 399–417. doi.org/10.1086/283488.
5. Lewontin, R. C. Selection for colonizing ability / R. C. Lewontin // *The genetics of colonizing species* / ed.: H. G. Baker, G. L. Stebbins. – New York: Academic Press, 1965. – P. 77–91.
6. Jana, B. B. Some life history parameters and production of *Daphnia carinata* (king) grown in different culturing media / B. B. Jana, G. P. Pal // *Water Res.* – 1983. – Vol. 17, N 7. – P. 735–741. doi.org/10.1016/0043-1354(83)90067-2.
7. De Bernardi, R. Effects of temperature and food on developmental times and growth in *Daphnia obtusa* (Kurz) and *Simocephalus vetulus* (O. F. Müller) (*Crustacea, Cladocera*) / R. De Bernardi, P. Lacqua, E. Soldavini // *Memorie dell'Istituto Italiano di Idrobiologia, Dr. Marco de Marchi Verbania Pallanza*. – 1978. – Vol. 36. – P. 171–191.
8. Corigliano M. D. C. Vital statistics and food availability in *Daphnia obtusa* Kurz and *Simocephalus vetulus* (O. F. Müller) // *Memorie dell'Istituto Italiano di Idrobiologia, Dr. Marco de Marchi Verbania Pallanza*. – 1978. – Vol. 36. – P. 287–296.
9. Porter, K. G. Functional Response and Fitness in a Generalist Filter Feeder, *Daphnia Magna* (Cladocera: Crustacea) / K. G. Porter, J. D. Orcutt, J. Gerritsen // *Ecology*. – 1983. – Vol. 64, N 4. – P. 735–742. doi.org/10.2307/1937196.

References

1. Snell T. W., King C. E. Lifespan and Fecundity Patterns in Rotifers: The Cost of Reproduction. *Evolution*, 1977, vol. 31, no. 4, pp. 882–890. doi.org/10.2307/2407451.
2. Bell G. Measuring the cost of reproduction. *Oecologia*, 1983, vol. 60, no. 3, pp. 378–383. doi.org/10.1007/bf00376855.
3. Browne R. A. The Costs of Reproduction in Brine Shrimp. *Ecology*, 1982, vol. 63, no. 1, pp. 43–47. doi.org/10.2307/1937029.
4. Law R. Optimal Life Histories Under Age-Specific Predation. *The American Naturalist*, 1979, vol. 114, no. 3, pp. 399–417. doi.org/10.1086/283488.
5. Lewontin R. C. Selection for colonizing ability. Baker H. G., Stebbins G. L. (eds). *The genetics of colonizing species*, New York, Academic Press, 1965, pp. 77–91.
6. Jana B. B., Pal G. P. Some life history parameters and production of *Daphnia carinata* (king) grown in different culturing media. *Water Research*, 1983, vol. 17, no. 7, pp. 735–741. doi.org/10.1016/0043-1354(83)90067-2.

7. De Bernardi R., Lacqua P., Soldavini E. Effects of temperature and food on developmental times and growth in *Daphnia obtusa* (Kurz) and *Simocephalus vetulus* (O. F. Müller) (Crustacea, Cladocera). *Memorie dell'Istituto Italiano di Idrobiologia, Dr. Marco de Marchi Verbania Pallanza*, 1978, vol. 36, pp. 171–191.

8. Corigliano M. D. C. Vital statistics and food availability in *Daphnia obtusa* Kurz and *Simocephalus vetulus* (O. F. Müller) *Memorie dell'Istituto Italiano di Idrobiologia, Dr. Marco de Marchi Verbania Pallanza*, 1978, vol. 36, pp. 287–296.

9. Porter K. G., Orcutt J. D., Gerritsen J. Functional Response and Fitness in a Generalist Filter Feeder, *Daphnia Magna* (Cladocera: Crustacea). *Ecology*, 1983, vol. 64, no. 4, pp. 735–742. doi.org/10.2307/1937196.

Информация об авторе

Семенченко Виталий Павлович – член-корреспондент, д-р биол. наук, заместитель директора, НПЦ НАН Беларуси по биоресурсам (ул. Академическая, 27, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: semenchenko57@mail.ru.

Information about the author

Semenchenko Vitali Pavlovich – Corresponding Member, D. Sc. (Biology), Deputy Director, Scientific and Practical Center for Bioresources of the National Academy of Sciences of Belarus (27, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: semenchenko57@mail.ru.

Для цитирования

Семенченко, В. П. Соотношение между выживаемостью и плодовитостью в когортах *Daphnia longispina* (Cladocera) при разных трофических условиях / В. П. Семенченко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 68–72.

For citation

Semenchenko V. P. Ratio between the survival and fecundity in the cohorts of *Daphnia longispina* (Cladocera) under different trophic conditions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 68–72. (in Russian)

ISSN 0002–354X (print)

УДК 595.341.1:591.543.1

Поступило в редакцию 26.09.2016

Received 26.09.2016

В. В. Вежновец*Научно-практический центр НАН Беларуси по биоресурсам, Минск, Республика Беларусь***ВЛИЯНИЕ ПОВЫШЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НА СОСТОЯНИЕ ПОПУЛЯЦИИ РЕЛИКТОВОГО РАЧКА *LIMNOCALANUS MACRURUS* SARS В МЕЗОТРОФНОМ ОЗЕРЕ***(Представлено членом-корреспондентом В. П. Семенченко)*

Впервые приведены данные о влиянии высокой летней температуры на состояние популяции редкого и охраняемого вида – реликтовой каланоидной копеподы *Limnocalanus macrurus*. Показано, что повышение поверхностной температуры ведет к падению концентрации кислорода в гипolimнионе в средне-глубоких озерах Беларуси и катастрофически снижает численность реликта, что может привести к его полному вымиранию.

Ключевые слова: температура, реликт, озеро, концентрация кислорода, плотность.

V. V. Vezhnavecs*Scientific and Practical Center for Bioresources of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus***INFLUENCE OF A TEMPERATURE INCREASE ON THE CONDITION OF THE RELIC CRUSTACEAN *LIMNOCALANUS MACRURUS* SARS POPULATION IN A MESOTROPHIC LAKE***(Communicated by Corresponding Member V. P. Semenchenko)*

The data on the influence of a high summer temperature on the condition of the population of a rare and protected species – a relic calanoid copepod *Limnocalanus macrurus* are presented for the first time. It is shown that an increase in surface temperature leads to a decrease in oxygen concentration in the hypolimnion in medium-deep lakes of Belarus and catastrophically reduces the density of the relict, which can lead to its complete extinction.

Keywords: temperature, relict, lake, oxygen concentration, density.

Введение. Лимнокалянус длиннохвостый (*Limnocalanus macrurus*) – один из реликтовых видов копепод, сохранившихся в озерах Беларуси со времен последнего оледенения [1; 2]. Вид подвержен риску вымирания за счет высокой требовательности к качеству воды. Так из 10 озер, где он ранее отмечался, сейчас сохранился только в пяти, занесен в Красную Книгу Беларуси и соседних Прибалтийских стран. Стабильные популяции до сих пор сохранились только в четырех озерах (Ричи, Долгое, Южный Волос и Сита), расположенных в Витебской области [3].

Вид стенотермный, холодолюбивый, основная часть популяции располагается в глубоких слоях воды при низкой температуре и достаточно высоком содержании растворенного кислорода. В связи с естественными процессами эвтрофирования и загрязнения в населенных им озерах наблюдается снижение качества воды, падение концентрации кислорода, что приводит к исчезновению его из ряда водоемов. К названным выше традиционным угрозам популяциям этого реликта добавляется аномально высокая температура, наблюдающаяся сейчас в отдельные годы, влияние которой приводит к перестройкам в пространственной структуре и функционировании экосистем [4; 5]. Влияние теплового загрязнения техногенного происхождения на популяцию лимнокалянуса ранее нами прослежено на водоеме-охладителе АЭС [6], естественное повышение температуры на популяцию этого вида не изучено.

Цель работы – установить влияние повышения температуры на многолетние количественные показатели популяции.

Материалы и методы исследования. Исследования были проведены с разной периодичностью с 1988 по 2015 г. в последней декаде июля на озере Сита (Браславский р-н, Витебская обл.). Сита – средне-глубокий водоем. Его площадь составляет 1,88 км²; максимальная глубина – 28,5 м;

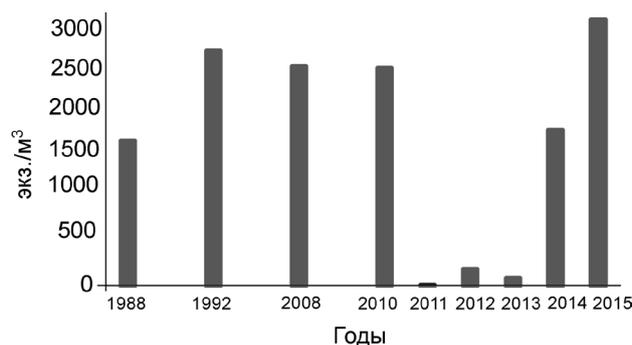


Рис. 1. Многолетние изменения плотности лимнокалянуса в оз. Сита

Fig. 1. Long-term changes of *Limnocalanus* density in the lake Sita

средняя – 7,6 м при объеме воды – 14,37 млн м³. Озеро по генетическому типу относят к водоемам мезотрофного типа с чертами олиготрофии [7].

Пробы зоопланктона отобраны в пелагиали на станции с максимальной глубиной количественной планктонной сетью с диаметром ячеей фильтрующего конуса 100 мкм, от поверхности до дна через 5 м глубины. Лабораторная обработка проб проводилась в счетной камере Богорова под бинокулярным микроскопом МБС-10 при увеличении 4 × 8, учитывались все возрастные стадии рачка.

Результаты и их обсуждение.

В процессе многолетних наблюдений в оз. Сита установлено катастрофическое снижение численности *L. macrurus* после аномально теплого лета 2010 года (рис. 1).

Численность лимнокалянуса в этом озере оставалась стабильной в течение продолжительного периода наблюдений (с 1988 г.) и ее значения составляли около 2 тыс. экз./м³. После «теплой европейской волны» 2010 г. плотность резко снизилась до предельных величин и составила в 2011 г. только единицы в кубометре. Восстановление популяции продолжалось три последующих года и только в последние два года численность достигла величин, наблюдавшихся ранее, а в 2015 г. даже превзошла прежние.

Ранее нами была показана реакция этого вида на дефицит кислорода зимой в оз. Волос, которая выражалась в замедлении развития и нарушении жизненного цикла и, соответственно, в изменении возрастного состава [3]. При этом в середине лета в составе популяции еще были младшие стадии развития, а к осени, к началу размножения, животные успевали стать половозрелыми. Падение плотности на следующий год после зимнего недостатка кислорода было постепенным и не критическим. Механизм снижения численности в этом водоеме объяснялся разбалансировкой между пиками развития лимнокалянуса и кормовых водорослей.

В отличие от оз. Волос, в оз. Сита в этот же период лета животные были представлены, как и ранее, взрослыми особями шестой копепоидитной стадии с незначительным количеством пятого копепоидита, т. е. возрастной состав при снижении численности не изменился. При этом падение плотности было резким – с 2,5 тыс. экз./м³ до единиц в кубометре воды. Такое явление для этого вида отмечено впервые и требует дальнейшего изучения.

Для оз. Сита характерна температурная стратификация и разделение водной толщи на прогреваемый эпилимнион до 5–6 м, переходную зону металимнион и низкотемпературный гипolimнион, где температура в летнее время фактически не изменяется, оставаясь в узких пределах от 4,1 до 6,4 °С. Лимнокалянус как стенотермно холодолюбивый вид населяет в этом водоеме гипolimнион, при вертикальных миграциях регистрируется в металимнионе, но не встречается в эпилимниальной зоне [3; 8]. По литературным данным, оптимальная температура обитания этого вида в озерах Беларуси 1–8 °С, максимальная – может достигать 17–18, но обычно во время суточных миграций животные не пересекают изотерму 13 °С [3].

Температурные условия для поверхностных и придонных слоев воды в этом водоеме за все годы наблюдений представлены в таблице. В зоне обитания рачка она остается в пределах оптимальной зоны. Поверхностная температура закономерно изменялась от 19,9 до 26,2 °С, но за все годы исследований только в 2010 г. была выше 25 °С.

Содержание кислорода в разные годы изменялось значительно в гипolimнионе и достигало критических значений для этого вида четырежды из 6 последних лет наблюдений, начиная с 2010 года. Корреляции между поверхностной температурой и содержанием кислорода в гипolimнионе не обнаружено (коэффициент корреляции –0,18), что связано, вероятно, с разными условиями формирования температурного расслоения водной толщи (ход весенней температуры, ветровое воздействие и т. п.) и последующим весенним развитием водорослей.

Изменение температуры и содержания кислорода в оз. Сита по многолетним данным

Changes of temperature and oxygen concentration in lake Sita on long-term data

Показатель Index		Год Year							
		1988	2008	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Температура, °С Temperature, °C	поверхность surface	23,7	21,6	26,2	24,2	22	19,9	24,4	21,2
	дно bottom	4,7	6,0	5,8	4,6	4,1	4,2	5,8	6,4
Содержание O ₂ , г/л Content O ₂ , g/l	поверхность surface	9,9	10,5	9,5	7,3	8,9	8,7	8,7	9,4
	дно bottom	2,7	2,4	0,0	0,0	1,2	0,0	2,0	0,0

Влияние неблагоприятных условий обитания, наблюдавшихся в 2010 г., повлияло на численность популяции не сразу, минимальные значения плотности последовали на следующий год (лаг-эффект). Это связано с моноцикличностью вида и приуроченностью размножения к холодному времени года (декабрь–март), т. е. в создавшихся неблагоприятных условиях вероятно произошло резкое увеличение смертности и к периоду размножения половозрелые животные сохранились в незначительном количестве. Угнетенное состояние популяции сохранялось в течение трех последующих лет наблюдений. При этом за эти годы благоприятные кислородные условия были в 2014 г., когда популяция возродилась. В последний год наблюдений содержание кислорода опять снизилось до критических значений, что позволяет прогнозировать следующий спад численности в 2016 г.

Расположение животных в вертикальном столбе воды в годы с разным содержанием кислорода отличалось значительно (рис. 2). При достаточном для жизнедеятельности уровне насыщения кислородом гипolimниона, популяция держится в придонных слоях воды (1988 г.), а при недостатке кислорода лимнокалянус перемещается в более высокие горизонты (2010 г.), но не встречается в зоне эпилимниона с высокой температурой.

Расчитанная глубина расположения «ядра» популяции (средневзвешенное значение в столбе воды) в течение периода наблюдений изменялась от 14 до 25 м (рис. 3). Предельной величиной для этого вида была принята концентрация кислорода менее 2 мг/л. Это значение считается нижней границей оптимума для данного вида, при которой начинается смертность животных уже при температуре 4 °С [1; 3]. В годы с достаточным количеством кислорода основная часть популяции лимнокалянуса оставалась на обычных для него глубинах, ниже 20 м, а в годы с недостатком кислорода в дневное время перемещалась в более высокие слои воды, т. е. активно избегала зоны с низким содержанием кислорода. Вертикальное дневное расположение животных в столбе воды четко следовало за глубиной начала недостатка кислорода для этого вида, коэффициент корреляции при этом составил 0,93.

Проведены расчеты зоны выживания лимнокалянуса (пространственной ниши по Гриннеллу), в которой температура была ниже 13 °С и содержание кислорода более 2 мг/л в вертикальном столбе воды для этого вида в разные годы наблюдений (рис. 4). Область выживания

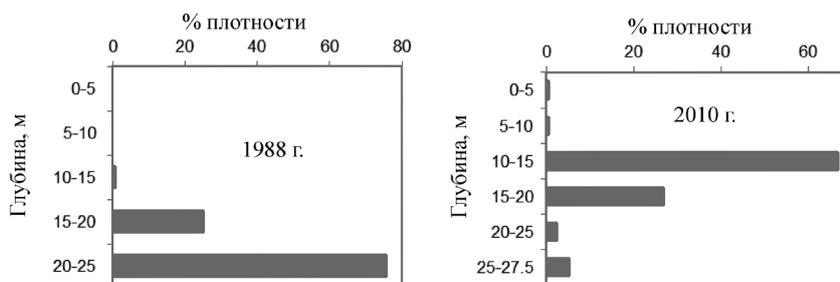


Рис. 2. Дневное вертикальное расположение лимнокалянуса при разном содержании кислорода в гипolimнионе

Fig. 2. Daytime vertical location of *Limnocalanus* at different oxygen concentrations in the hypolimnion



Рис. 3. Изменение дневного вертикального расположения ядра популяции при разной концентрации кислорода в гипolimнионе

Fig. 3. Vertical daytime location change of «population nucleus» at different oxygen concentrations in the hypolimnion

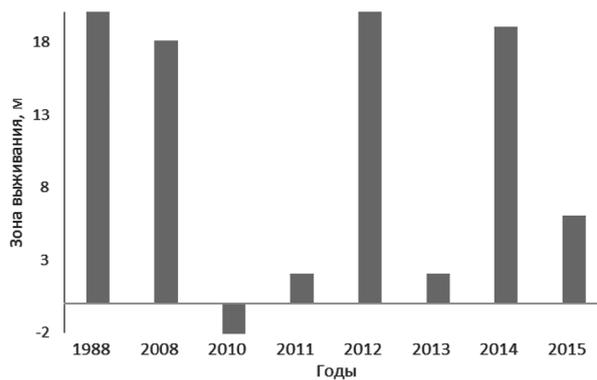


Рис. 4. Изменение размера зоны нормальной жизнедеятельности (выживания) лимнокалянуса в разные годы наблюдений

Fig. 4. Changes of the size of normal life (survival) zone *Limnocalanus* in different years of observations

значительно изменялась по годам – от 20 до –2 м. Вертикальное пространство, занимаемое популяцией, расширялось в годы, богатые кислородом, и было крайне узким в годы с дефицитом. При этом отрицательные значения наблюдались только в 2010 г., что свидетельствует об отсутствии зоны благоприятных условий для жизнедеятельности популяции в этот год, что не регистрировалось в другие годы наблюдений. По данным последних лет, несмотря на невысокие значения температуры, наблюдался дефицит кислорода, но зона приемлемых условий (низкая температура и достаточное количество кислорода) остается еще достаточной для выживания популяции или переживания неблагоприятных условий до осеннего полного перемешивания водных масс, когда происходит обогащение воды кислородом и последующее размножение животных. Корреляционный анализ численности вида с шириной пространственной ниши (зоны выживания) со смещением в один год показал слабую зависимость (0,56) этих показателей, вероятно, из-за малого числа наблюдений.

Процесс снижения содержания кислорода в столбе воды глубже эпилимниона рассмотрен нами ранее, при этом было предположено [4], что резкое повышение температуры в эуфотном слое вызывает бурное развитие водорослей, которые не успевают потребить консументы. Эти водоросли отмирают, опускаются в нижележащие слои воды, где идут процессы их разложения и интенсивное потребление кислорода.

Резкое падение численности лимнокалянуса происходит за счет отмирания особей в условиях отсутствия кислорода. Не исключается и выедание этого вида планктоядными рыбами во время подъема и концентрации рачка в более высоких слоях воды в дневное время, где доступность его как корма возрастает.

Заключение. Впервые получены данные о влиянии повышения температуры на состояние популяции реликтовой каланоидной копеподы *Limnocalanus macrurus*. Показано, что повышение поверхностной температуры ведет к падению концентрации кислорода в гипolimнионе в средне-глубоких озерах Беларуси и катастрофически снижает численность реликта, что может привести к его полному вымиранию.

Благодарности. Работа выполнена при частичной поддержке БРФФИ (договор № Б16МС-016).

Acknowledgement. The work is partially supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (Agreement no. Б16МС-016).

Список использованных источников

1. Сушеня, Л. М. Биология и продукция ледниковых реликтовых ракообразных / Л. М. Сушеня, В. П. Семенченко, В. В. Вежновец. – Минск: Наука и техника, 1986. – 160 с.
2. Вежновец, В. В. Ракообразные (Cladocera, Soropoda) в водных экосистемах Беларуси. Каталог. Определительные таблицы / В. В. Вежновец. – Минск: Бел. наука, 2005. – 150 с.
3. Вежновец, В. В. Биология реликтового рачка *Limnocalanus grimaldii* var. *macrurus* и его продукционно-энергетическая характеристика: автореф. дисс. ... канд. биол. наук / В. В. Вежновец. – Минск, 1984. – 24 с.

4. Вежновец, В. В. Влияние повышения температуры на вертикальное распределение зоопланктона в мезотрофном стратифицированном озере / В. В. Вежновец, В. П. Семенченко // Докл. НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 5. – С. 72–75.
5. Vezhnavecs, V. V. Zooplankton community / V. V. Vezhnavecs, D. V. Malatkou, K. Arbačiauskas // Zoology and Ecology. – 2017. – Vol. 24, iss. 2. – P. 108–127. doi.org/10.1080/21658005.2014.925241.
6. Vezhnavecs, V. The vertical distribution of zooplankton in the mesotrophic stratified lakes Rica and Sita in relation to temperature / V. Vezhnavecs, A. Skute, D. Molotkov // 6th International conference “Research and Conservation of biological Diversity in Baltic Region”, Daugavpils, 28–29 April, 2011. – Daugavpils, 2011. – P. 139.
7. Якушко, О. Ф. Белорусское Поозерье. История развития и современное состояние озер Северной Белоруссии / О. Ф. Якушко. – Минск: Вышэйш. шк., 1971. – 336 с.
8. Вежновец, В. В. Пространственное распределение *Limnocalanus grimaldii* var. *macrurus* Sars. в оз. Ю. Волос / В. В. Вежновец // Итоги и перспективы гидробиологических исследований в Белоруссии. – Минск, 1983. – С. 83–88.

References

1. Sushchenya L. M., Semenchenko V. P., Vezhnovets V. V. *Biology and products of glacial relic crustaceans*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1986. 160 p. (in Russian)
2. Vezhnovets V. V. *Crustacean (Cladocera, Copepoda) in the aquatic ecosystems of Belarus. Catalog. Identification tables*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2005. 150 p. (in Russian)
3. Vezhnovets V. V. *Biology of the relic small crustacean Limnocalanus grimaldii var. macrurus and its production-energy characteristic*. Minsk, 1984. 24 p. (in Russian)
4. Vezhnovets V. V., Semenchenko V. P. Impact of warming on a vertical distribution of zooplankton in a mesotrophic stratified lake. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2011, vol. 55, no. 5, pp. 72–75. (in Russian)
5. Vezhnavecs V. V., Malatkou D. V., Arbačiauskas K. Zooplankton community. *Zoology and Ecology*, 2014, vol. 24, no. 2, pp. 108–127. doi.org/10.1080/21658005.2014.925241.
6. Vezhnavecs V., Skute A., Molotkov D. The vertical distribution of zooplankton in the mesotrophic stratified lakes Rica and Sita in relation to temperature. *6th International conference “Research and Conservation of biological Diversity in Baltic Region”*, Daugavpils, 28–29 April, 2011. Daugavpils, 2011, p. 139.
7. Yakushko O. F. *Belarusian Lake District. The history of development and the modern state of the lakes of the Northern Belarus*. Minsk, Vysheishaja shkola Publ., 1971. 336 p. (in Russian)
8. Vezhnovets V. V. Space distribution of *Limnocalanus grimaldii* var. *macrurus* Sars. in Lake South Volos. *Outcomes and perspectives of hydrobiological investigations in Belarus*. Minsk, 1983, pp. 83–88. (in Russian)

Сведения об авторе

Вежновец Василий Васильевич – канд. биол. наук, доцент, вед. науч. сотрудник, НПЦ НАН Беларуси по биоресурсам (ул. Академическая, 27, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vvv@biobel.bas-net.by.

Information about the author

Vezhnavecs Vasili Vasilievich – Ph. D. (Biology), Assistant Professor, Leading researcher, Scientific and Practical Center for Bioresources of the National Academy of Sciences of Belarus (27, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vvv@biobel.bas-net.by.

Для цитирования

Вежновец, В. В. Влияние повышения температуры на состояние популяции реликтового рачка *Limnocalanus macrurus* Sars в мезотрофном озере / В. В. Вежновец // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 73–77.

For citation

Vezhnavecs V. V. Influence of a temperature increase on the condition of the relic crustacean *Limnocalanus macrurus* Sars population in a mesotrophic lake. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 73–77. (in Russian)

Т. А. Пилипчук, Л. Н. Валентович, М. А. Титок, член-корреспондент Э. И. Коломиец

Институт микробиологии НАН Беларуси, Минск, Республика Беларусь

ОСОБЕННОСТИ МОЛЕКУЛЯРНО-ГЕНЕТИЧЕСКОЙ ОРГАНИЗАЦИИ ФАГА PF-10

В результате анализа полной нуклеотидной последовательности бактериофага Pf-10, входящего в состав биопестицида «Мультифаг», установлено, что его геном является уникальным и состоит из фрагмента ДНК фага широкого круга хозяев Phi-S1, в пределах которого локализованы детерминанты, определяющие синтез ранних белков, и фрагмента ДНК фага узкого круга хозяев phiIBB-PF7A, содержащего гены, детерминирующие синтез поздних белков. Низкая гомология отдельных генетических детерминант и кодируемых ими аминокислотных последовательностей (в частности, генов, определяющих синтез белков отростка) с таковыми фагов Phi-S1 или phiIBB-PF7A свидетельствует о мутационных изменениях, возникших в процессе становления фагового генома Pf-10 и способных повлиять на его жизненно важные функции.

Ключевые слова: открытая рамка считывания, геном, бактериофаг, *Pseudomonas*.

T. A. Pilipchuk, L. N. Valentovich, M. A. Titok, Corresponding Member E. I. Kolomiets

Institute of Microbiology of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

PECULIARITIES OF MOLECULAR-GENETIC STRUCTURE OF PHAGE PF-10

The analysis of a full nucleotide sequence of bacteriophage Pf-10 as a key constituent of biopesticide “Multiphage” has revealed that its unique genome is composed of a DNA fragment of broad range host phage Phi-S1, where the determinants governing the synthesis of early proteins are localized, and of the DNA fragment of narrow range host phage phiIBB-PF7A containing the genes responsible for the synthesis of late proteins. Low homology of individual genetic determinants and encoded amino acid sequences (namely, the genes determining the synthesis of tail proteins) with those of phages Phi-S1 or phiIBB-PF7A evidences the mutations that emerge in the course of the phage Pf-10 genome formation and are capable to affect its vital important functions.

Keywords: open reading frame, genome, bacteriophage, *Pseudomonas*.

Введение. Повсеместно циркулирующие в природной среде обитания бактериофаги характеризуются большим разнообразием, что позволяет им быстро приспосабливаться к изменяющимся условиям внешней среды. В результате мутаций и рекомбинаций генетического материала они способны эффективно противостоять иммунной системе бактерий-хозяев. В частности, адсорбироваться на поверхностных структурах бактериальных клеток, избегать бактериальных систем рестрикции-модификации и CRISPR-Cas [1]. Тем самым они обеспечивают себе возможность размножаться и поддерживать определенную численность в естественных условиях существования. Единственное ограничение, которым наделены бактериофаги в природе, это специализированный круг бактериальных хозяев, в клетках которых они могут размножаться, вызывая их гибель.

Современные технологии позволяют быстро и практически в автоматическом режиме накапливать данные об особенностях генетической организации бактериофагов, сравнивать между собой их гены и кодируемые ими белки. Такая информация является абсолютно необходимой, поскольку ее систематизация, в конечном итоге, позволит понять механизмы, определяющие регуляцию численности бактерий в природной среде обитания, а также обеспечит целенаправленное использование бактериофагов при создании генетически паспортизированных биопрепаратов для борьбы с патогенными микроорганизмами.

Цель работы – анализ нуклеотидной последовательности генома бактериофага Pf-10, способного лизировать бактерии рода *Pseudomonas* (*P. putida*, *P. fluorescens* и *P. syringae*) и входящего в состав биопестицида «Мультифаг».

Материалы и методы исследования. Выделение фаговой ДНК. Фаголизат фильтровали (пропускали через фильтр с порами диаметром 0,22 мкм) и центрифугировали при 35000g.

Полученный осадок растворяли в ТЕ-буфере и обрабатывали препаратами ДНКазы I и РНКазы А в течение 30 мин при 37 °С (ферменты инактивировали путем добавления 0,5 М ЭДТА и температурной обработки при 65 °С в течение 10 мин). Из осажденных полиэтиленгликолем (M_n = 6000) и NaCl фаговых частиц выделяли ДНК с использованием набора реактивов DNeasy Blood & Tissue Kit (Qiagen, Германия), согласно рекомендациям фирмы-изготовителя.

Определение нуклеотидной последовательности генома фага Pf-10. Библиотеку ДНК для секвенирования готовили при помощи набора Nextera XT (Illumina). **Определение нуклеотидных последовательностей** проводили на приборе MiSeq (Illumina), используя комплект реактивов MiSeq Reagent Kit v3 (Illumina). Сиквенсы низкого качества удаляли с помощью программы Trimmomatic-0.32 [2]. Фрагменты ДНК размером от 50 до 300 нуклеотидов, содержащие менее 1 ошибки на 1000 нуклеотидов, собирали в единую нуклеотидную последовательность с помощью программы SPAdes-3.1.0 [3]. 5'-концевую последовательность фаговой ДНК определяли с помощью ДНК-анализатора LiCor4300 (США) при секвенировании по Сенгеру, для секвенирования 3'-терминального участка ДНК фага использовали праймер Pf-10-t (TGAGAATCATGTGCTATCTG).

Аннотирование нуклеотидной последовательности. Аннотация генетической последовательности проводилась с помощью программ PHIRE [4], BPROM [5], ARNold [6], SQ [7]. Графическое изображение генетической карты фага получали с помощью программы SnapGene Viewer 3.2.1, последовательности фаговых промоторов устанавливали с помощью программы WebLogo [8]. Нуклеотидная последовательность генома фага Pf-10 депонирована в ГенБанк NCBI (регистрационный номер KP025626).

Результаты и их обсуждение. Бактериофаг Pf-10, изолированный из листьев пораженного растения фасоли, способен лизировать широкий круг бактерий рода *Pseudomonas*. Данное свойство послужило основанием его использования в составе биопрепарата «Мультифаг» для борьбы с патогенными микроорганизмами, вызывающими заболевания сельскохозяйственных растений [9]. Для детальной характеристики бактериофага Pf-10 была определена нуклеотидная последовательность его генома. В результате сиквенс-анализа было установлено, что он относится к порядку *Caudovirales* семейству *Podoviridae*, подсемейству *Autographivirinae*, роду T7-подобных вирусов. В открытом доступе Международного банка данных NCBI на настоящий момент содержится информация о полных нуклеотидных последовательностях 41 вируса данной таксономической группы, способных лизировать клетки бактерий семейства *Enterobacteriaceae* (29 фагов), *Vibrionaceae* (3 фага), *Xanthomonadaceae* (2 фага) и *Pseudomonadaceae* (7 фагов).

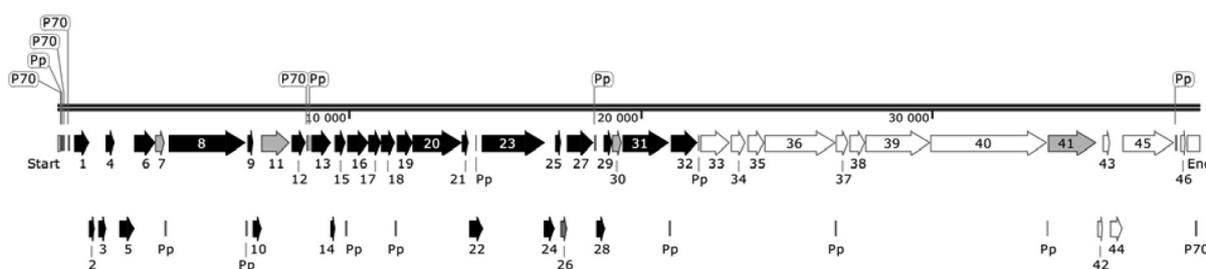
Прототипом этой многочисленной и разнообразной группы вирусов является фаг T7, секвенированный в 1982 г. и широко использующийся в генетической инженерии. Практически во всех известных экспрессионных векторах *Escherichia coli* применяются регуляторные последовательности, структурные гены и их фрагменты фага T7. В частности, промоторы и терминаторы, а также ген, кодирующий синтез РНК-полимеразы, и фрагмент гена 10, детерминирующий полипептид, содержащий гистидиновый тракт, эпитоп, часть из которого расщепляется энтерокиназой [10].

В последнее время вирулентные бактериофаги, способные эффективно регулировать численность патогенных микроорганизмов, в том числе антибиотикорезистентных, все чаще рассматриваются в качестве альтернативы антибиотикам в борьбе с инфекционными заболеваниями животных и растений. В этом плане особый интерес представляют представители группы T7-подобных вирусов, способные лизировать патогены животных (в частности, представителей родов *Salmonella*, *Klebsiella*, *Yersinia*, *Vibrio* и др.) и растений (в частности, представителей родов *Erwinia*, *Xanthomonas* и др.). Выявлены бактериофаги, лизирующие *Pseudomonas syringae* (патоген растений), а также *Pseudomonas plecoglossicida* и *Pseudomonas aeruginosa* (патогены животных) [11]. Особое положение занимают вирусы широкого круга хозяев. В настоящее время охарактеризован только один фаг Phi-S1 этой таксономической группы, способный лизировать разные виды бактерий рода *Pseudomonas* (*P. fluorescens*, *P. putida*, *P. stutzeri*, *P. aeruginosa*, *P. fragii*, *P. taetrolens*, *P. convexa*, *P. mucidolens*, *P. ovalis*, *P. synxantha*) [12]. Исследованный в данной работе фаг Pf-10 также может быть причислен к вирусу широкого круга хозяев, поскольку способен размножаться в клетках бактерий разных таксономических групп (*P. putida*, *P. fluorescens*

и *P. syringae*). Наличие полной нуклеотидной последовательности фага Pf-10 позволило осуществить анализ его генома и сравнить молекулярно-генетическую организацию данного фага с другими представителями рода T7-подобных вирусов.

Геном фага Pf-10 представлен линейной двухцепочечной ДНК размером 39167 п. н. (среднее содержание ГЦ-пар составляло 56 %), в составе которого идентифицировано 46 открытых рамок считывания, в том числе 26, определяющих синтез известных белков, 19 – гипотетических полипептидов, выявляемых в геномах близкородственных фагов и одна открытая рамка считывания (Pf_p26), детерминирующая небольшой уникальный полипептид размером 7,2 кДа, 67 аминокислотных остатков которого не имели сходства ни с одной известной аминокислотной последовательностью из базы данных NCBI (рисунок).

Выявленные детерминанты, входили в состав 10 оперонов и двух цистронов, транскрипция которых обеспечивалась регуляторными последовательностями, сходными с таковыми специфических фаговых промоторов, характерных для представителей T7-подобных вирусов (всего выявлено 13 специфических фаговых промоторов). Помимо фаговых промоторов выявлены регуляторные последовательности, характерные для бактериальных генов, узнавание которых обеспечивается базовой РНК-полимеразой, содержащей сигма 70 субъединицу. Следует отметить, что такого типа промоторные последовательности (3 промотора) присутствовали наряду с фаговыми промоторами (1 промотор) перед опероном, включающим 7 открытых рамок считывания, определяющих синтез белков с неизвестной функцией, 6 из которых (Pf_p1- Pf_p6) проявляли выраженную гомологию (содержали 94–99 % идентичных аминокислотных остатков) с таковыми фага Phi-S1. Только одна детерминанта, входящая последней в состав этого оперона (Pf_p7), значительно отличалась нуклеотидным составом (количество ГЦ-пар составило 61 %) и определяла синтез белка размером 13 кДа, аминокислотная последовательность которого имела только 77 и 59 % сходства с подобными полипептидами фагов phiIBB-PF7A и Phi-S1 соответственно. Предполагаемые белки, встречающиеся у близкородственных фагов этой таксономической группы, представляются весьма важными, поскольку начальные этапы клеточного цикла вируса в клетке бактерий до момента образования в достаточном количестве собственной РНК-полимеразы должны обеспечиваться продуктами генов, транскрипция которых осуществляется РНК-полимеразой клетки хозяина. Два промотора (один сигма 70 и один фаговый промотор) обеспечивали транскрипцию еще одного оперона (включал Pf_p13–Pf_p15), в составе которого обнаружен ген (Pf_p14), определяющий синтез белка ингибитора клеточной РНК-полимеразы (таблица). Безусловно, данный белок является ключевым при переключении синтетического аппарата клетки хозяина на транскрипцию фаговых белков. Данный маленький по размеру поли-



Генетическая карта фага Pf-10. Обозначения: Pp – специфический фаговый промотор; P70 – промотор, узнаваемый бактериальной РНК-полимеразой, содержащей фактор сигма 70; цифрами обозначены открытые рамки считывания; черным цветом выделены открытые рамки считывания, детерминирующие белки, сходные с таковыми фага Phi-S1; белым цветом выделены открытые рамки считывания, детерминирующие белки, сходные с таковыми фага phiIBB-PF7A; серым цветом выделены открытые рамки считывания, детерминирующие белки, имеющие гомологию с таковыми Phi-S1 или phiIBB-PF7A 90 % и менее. Открытая рамка считывания 26 детерминирует белок, не имеющий гомологии с известными

Map of genes of phage Pf-10. Nomenclature: Pp – specific phase promoter; P70 – promoter determined by bacteriophage DNA-polymerase containing the factor of sigma 70; the figures denote the open reading frames; black color show the open reading frames determining proteins similar to those of phase Phi-S1; white color shows the open reading frames determining proteins similar to those of phiIBB-PF7A; grey color shows the open reading frames having homology similar to that of Phi-S1 or phiIBB-PF7A 90 % and less. Open reading frame 26 determines protein having no homology with the known ones

пептид размером 4,9 кДа состоял из 44 аминокислотных остатков и был абсолютно идентичен таковому фага Phi-S1 (имел 100 % гомологии). Однако нуклеотидная последовательность гена, определяющего синтез данного полипептида, в значительной степени отличалась от гомологичной детерминанты фага Phi-S1 (идентичность составила 88 %). В связи с этим весьма примечательным является обнаруженный факт уменьшения числа сайтов рестрикции в пределах данной детерминанты (в частности, данный ген не содержал ни одного сайта рестрикции для известных рестриктаз бактерий *P. putida* и *P. fluorescens* и только один сайт разрезания мелкощепящей рестриктазой *PspN4I* бактерий *Pseudomonas sp.*). В целом из 654 известных рестриктаз 548 не обладали способностью разрезать данный ген, что, безусловно, делает его практически неуязвимым при попадании в определенные виды бактериальных клеток. В то же время близкородственный ген фага Phi-S1 (Pf_p16) имел 2 сайта узнавания для рестриктазы *PpuMI* бактерий *P. putida* и 2 сайта узнавания для рестриктазы *PspN4I* бактерий *Pseudomonas sp.* (в целом из 654 известных рестриктаз 528 не разрезали данный ген). На примере данной детерминанты хорошо прослеживается используемая фагами в природной среде обитания стратегия, приводящая к значительному изменению нуклеотидной последовательности без изменения аминокислотного состава кодируемого ею белка. В данном случае происходящие синонимические замены не являются нейтральными, а обеспечивают большое эволюционное преимущество, позволяющее избегать летального воздействия бактериальных систем рестрикции-модификации. Остальные детерминанты, входящие в состав этого оперона (Pf_p13 и Pf_p15) и определяемые ими полипептиды с неизвестной функцией, проявляли сходство с гомологичными нуклеотидными и аминокислотными

Генетические детерминанты фага Pf-10, определяющие синтез белков с известной функцией
Genetic determinants of phage Pf-10 determining the synthesis of proteins with the known function

Ген Gene	Сходство с известными фагами Similarity with known phages	Сходство гена, в % Gene similarity, %	Сходство белка Protein similarity		Предполагаемая функция белка Proposed protein function
			%	№ регистрации в ГенБанке NCBI Registration number in the Gene Bank of NCBI	
Pf_p08	Phi-S1	95	98	YP_007869887.1	ДНК-зависимая РНК-полимераза
Pf_p11	phiIBB-PF7A	90	90	YP_004306325.1	ДНК-лигаза
Pf_p14	Phi-S1	88	100	YP_007869893.1	Ингибитор бактериальной РНК-полимеразы
Pf_p16	Phi-S1	98	99	YP_007869895.1	Белок SSB
Pf_p17	Phi-S1	99	100	YP_007869896.1	Эндонуклеаза
Pf_p18	Phi-S1	96	100	YP_007869897.1	Лизозим/амидаза
Pf_p19	Phi-S1	98	99	YP_007869898.1	Нуклеотидил трансфераза
Pf_p20	Phi-S1	97	99	YP_007869899.1	Праймаза/хеликаза
Pf_p23	Phi-S1	97	99	YP_007869902.1	ДНК-полимераза
Pf_p27	Phi-S1	96	98	YP_007869905.1	Экзонуклеаза
Pf_p30	Phi-S1	86	89	YP_007869908.1	Белок отростка
Pf_p31	Phi-S1	95	99	YP_007869909.1	Белок, соединяющий головку с отростком
Pf_p32	Phi-S1	87	90	YP_007869910.1	Белки капсида
Pf_p33	phiIBB-PF7A	97	99	YP_004306346.1	Основной белок капсида 10A
Pf_p34	phiIBB-PF7A	97	98	YP_004306346.1	Минорный белок капсида 10B
Pf_p35	phiIBB-PF7A	96	100	YP_004306348.1	Тубулярный белок А отростка
Pf_p36	phiIBB-PF7A	92	94	YP_004306349.1	Тубулярный белок В отростка
Pf_p37	phiIBB-PF7A	99	100	YP_004306350.1	Внутренний белок А вириона
Pf_p38	phiIBB-PF7A	96	98	YP_004306351.1	Внутренний белок В вириона
Pf_p39	phiIBB-PF7A	90	94	YP_004306352.1	Внутренний белок С вириона
Pf_p40	phiIBB-PF7A	93	95	YP_004306353.1	Внутренний белок D вириона
Pf_p41	phiIBB-PF7A	92	86	YP_004306354.1	Фибриллярный белок отростка
Pf_p42	phiIBB-PF7A	100	100	YP_004306355.1	Лизирующий клетку белок
Pf_p43	phiIBB-PF7A	99	100	YP_004306356.1	Пакующий белок
Pf_p44	phiIBB-PF7A	98	98	YP_004306357.1	Эндопептидаза
Pf_p45	phiIBB-PF7A	97	99	YP_004306358.1	Пакующий ДНК белок В

кислотными последовательностями фага Phi-S1 (идентичность ДНК составила 96 и 94 %, белков – 96 и 99 % для Pf_p13 и Pf_p15 соответственно).

Известно, что жизненный цикл вирулентных бактериофагов делится на два ключевых этапа. Во-первых, синтезируются ранние белки, определяющие копирование вирусного генетического материала. Во-вторых, после определенного временного промежутка начинают синтезироваться поздние белки, определяющие составные белки капсида и отростка, а также белки, обеспечивающие лизис клетки-хозяина. Анализ детерминант и синтезируемых ими белков, определяющих репликацию фага Pf-10 (в частности, ДНК-полимераза, праймаза/хеликаза, экзонуклеаза, SSB-белок, эндонуклеаза), позволили выявить их сходство с таковыми фага Phi-S1 (96–98 % идентичность с нуклеотидными и 98–100 % – аминокислотными последовательностями фага Phi-S1). В то же время детерминанты, определяющие синтез поздних белков, имели сходство с таковыми фага phiIBB-PF7A. По сути, геном исследуемого фага Pf-10 состоял из двух последовательностей ДНК, одна из которых проявляла сходство с фагом широкого круга хозяев Phi-S1, а другая – фагом phiIBB-PF7A, лизирующим только бактерии *P. fluorescens* (рисунок, таблица) [13; 14].

Такой гибрид мог возникнуть в результате рекомбинации между данными фагами в бактериях *P. fluorescens*, поскольку оба они могут размножаться в клетках микроорганизмов данной таксономической группы. Однако после рекомбинационных событий, объединивших два фаговых генома, отдельные гены фага Pf-10 претерпели ряд существенных изменений. Среди детерминант, определяющих синтез белков с известной функцией, можно выделить несколько полипептидов, сходство которых с таковыми фагов Phi-S1 и phiIBB-PF7A не превышало 90 %. Это две нуклеотидные последовательности (Pf_p30 и Pf_p41), определяющие синтез белков отростка. Экспериментально доказано, что фибриллярные белки отростка (у фага Pf-10 определяется Pf_p41) играют ключевую роль в способности вирусов прикрепляться к поверхности бактериальной клетки и, следовательно, влияют на круг их бактериальных хозяев [15]. Можно предположить, что изменения в аминокислотной последовательности данного белка могут быть связаны с определенными типами бактерий хозяев, на поверхности которых фаг Pf-10 может прикрепляться перед проникновением в клетку.

Закключение. Таким образом, в ходе проведенного исследования определена полная нуклеотидная последовательность фага Pf-10, способного размножаться в клетках бактерий *P. putida*, *P. fluorescens* и *P. syringae*. Установлено, что геном фага является гибридным и состоит из фрагмента фага широкого круга хозяев Phi-S1, в пределах которого локализованы детерминанты, определяющие синтез ранних белков, и фрагмента фага узкого круга хозяев phiIBB-PF7A, содержащего гены, детерминирующие синтез поздних белков. Низкая гомология отдельных детерминант и кодируемых ими аминокислотных последовательностей с таковыми фагов Phi-S1 или phiIBB-PF7A (например, Pf_p30 и Pf_p41) свидетельствует о мутационных изменениях, возникших в процессе становления фагового генома Pf-10 и способных повлиять на его жизненно важные функции (например, способности адсорбироваться на поверхностных структурах бактерий определенных таксономических групп).

Список использованных источников

1. Labrie, S. J. Bacteriophage resistance mechanisms / S. J. Labrie, J. E. Samson, S. Moineau // Nat. Rev. Microbiol. – 2010. – Vol. 8, N 5. – P. 317–327. doi.org/10.1038/nrmicro2315.
2. Bolger, A. M. Trimmomatic: a flexible trimmer for Illumina sequence data / A. M. Bolger, M. Lohse, B. Usadel // Bioinformatics. – 2014. – Vol. 30, N 15 – P. 2114–2120. doi.org/10.1093/bioinformatics/btu170.
3. SPAdes: A New Genome Assembly Algorithm and Its Applications to Single-Cell Sequencing / A. Bankevich [et al.] // J. Comput. Biol. – 2012. – Vol. 19, N 5. – P. 455–477. doi.org/10.1089/cmb.2012.0021.
4. Lavigne, R. PHIRE, a deterministic approach to reveal regulatory elements in bacteriophage genomes / R. Lavigne, W. D. Sun, G. Volckaert // Bioinformatics. – 2004. – Vol. 20, N 5. – P. 629–635. doi.org/10.1093/bioinformatics/btg456.
5. Solovyev, V. Automatic Annotation of Microbial Genomes and Metagenomic Sequences / V. Solovyev, A. Salamov // Metagenomics and its Applications in Agriculture, Biomedicine and Environmental Studies / ed. R. W. Li. – NY: Nova Science Publishers, 2011. – P. 61–78.
6. ARNold, finding terminators at IGM – Web Server [Electronic resource]. – Mode of access: <http://rna.igmors.u-psud.fr/toolbox/arnold/>. – Date of access: 09.11.2016.

7. Николайчик, Е. А. SQ-компьютерная программа для редактирования и анализа биологических последовательностей / Е. А. Николайчик, Л. Н. Валентович // Тр. Белорус. гос. ун-та. Физиол., биохим. и молекулярные основы функционирования биосистем. – 2010. – Т. 5, № 1. – С. 154–162.
8. WebLogo: a sequence logo generator / G. E. Crooks [et al.] // *Genome Res.* – 2004. – Vol. 14, N 6. – P. 1188–1190. doi.org/10.1101/gr.849004.
9. Биопестицид «Мультифаг» на основе фагов фитопатогенных бактерий *Pseudomonas syringae* и *Pseudomonas fluorescens* для использования в сельском хозяйстве в качестве средства борьбы с болезнями растений / Т. А. Пилипчук [и др.] // *Микробные биотехнологии: фундаментальные и прикладные аспекты.* – 2015. – Т. 7. – С. 197–219.
10. Bacteriophages and their implications on future biotechnology: a review / I. U. Haq [et al.] // *Virol. J.* – 2012. – Vol. 9, iss. 1. – P. 9. doi.org/10.1186/1743-422x-9-9.
11. Complete genome sequence analysis of two *Pseudomonas plecoglossicida* phages, potential therapeutic agents / Y. Kawato [et al.] // *Appl. Environ. Microbiol.* – 2015. – Vol. 81, N 3. – P. 874–881. doi.org/10.1128/aem.03038-14.
12. Kelln, R. A. Isolation and properties of a bacteriophage lytic for a wide range of pseudomonads / R. A. Kelln, R. A. J. Warren // *Can. J. Microbiol.* – 1971. – Vol. 17, N 5 – P. 677–682. doi.org/10.1139/m71-109.
13. Complete genome sequence of the lytic *Pseudomonas fluorescens* phage ϕ BB-PF7A / S. Sillankorva [et al.] // *Virol. J.* – 2011. – Vol. 8, iss. 1. – P. 142. doi.org/10.1186/1743-422x-8-142.
14. Sillankorva, S. Genome Sequence of the Broad-Host-Range *Pseudomonas* Phage Φ -S1 / S. Sillankorva, A. M. Kropinski, J. Azeredo // *J. Virol.* – 2012. – Vol. 86, N 18. – P. 10239. doi.org/10.1128/jvi.01605-12.
15. Casjens, S. R. Short Noncontractile Tail Machines: Adsorption and DNA Delivery by Podoviruses / S. R. Casjens, I. J. Molineux // *Advances in Experimental Medicine and Biology.* – 2011. – Vol. 726. – P. 143–179. doi.org/10.1007/978-1-4614-0980-9_7.

References

1. Labrie S. J., Samson J. E., Moineau S. Bacteriophage resistance mechanisms. *Nature Reviews Microbiology*, 2010, vol. 8, no. 5, pp. 317–327. doi.org/10.1038/nrmicro2315.
2. Bolger A. M., Lohse M., Usadel B. Trimmomatic: a flexible trimmer for Illumina sequence data. *Bioinformatics*, 2014, vol. 30, no. 15, pp. 2114–2120. doi.org/10.1093/bioinformatics/btu170.
3. Bankevich A., Nurk S., Antipov D., Gurevich A. A., Dvorkin M., Kulikov A. S., Lesin V. M., Nikolenko S. I., Pham S., Pribelski A. D., Pyshkin A. V., Sirotkin A. V., Vyahhi N., Tesler G., Alekseyev M. A., Pavel A., Pevzner P. A. SPAdes: A New Genome Assembly Algorithm and Its Applications to Single-Cell Sequencing. *Journal of Computational Biology*, 2012, vol. 19, no. 5, pp. 455–477. doi.org/10.1089/cmb.2012.0021.
4. Lavigne R., Sun W. D., Volckaert G. PHIRE, a deterministic approach to reveal regulatory elements in bacteriophage genomes. *Bioinformatics*, 2004, vol. 20, no. 5, pp. 629–635. doi.org/10.1093/bioinformatics/btg456.
5. Solovyev V., Salamov A. Automatic Annotation of Microbial Genomes and Metagenomic Sequences. Li R. W. (ed.). *Metagenomics and its Applications in Agriculture, Biomedicine and Environmental Studies*, NY: Nova Science Publ., 2011, pp. 61–78.
6. ARNold, finding terminators at IGM – Web Server. Available at: <http://rna.igmors.u-psud.fr/toolbox/arnold/> (accessed 9 November 2016).
7. Nikolaychik E. A., Valentovich L. N. SQ – the computer program for editing and the analysis of the biological sequences. *Trudy Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Fiziologicheskie, biokhicheskie i molekuliarnye osnovy funkcionirovaniya biosistem* [Works of the Belarusian State University. Physiological, biochemical and molecular bases of functioning of biosystems], 2010, vol. 5, no. 1, pp. 154–162. (in Russian)
8. Crooks G. E., Hon G., Chandonia J. M., Brenner S. E. *WebLogo: a sequence logo generator.* *Genome Research*, 2004, vol. 14, no. 6, pp. 1188–1190. doi.org/10.1101/gr.849004.
9. Pilipchuk T. A., Gerasimovich A. D., Ananyeva I. N., Kolomiets E. I., Popov F. A., Novik G. I. Biopesticide ‘Multiphage’ based on phages of phytopathogenic bacteria *Pseudomonas syringae* and *Pseudomonas fluorescens* used in agriculture to control plant diseases. *Mikrobnye biotekhnologii: fundamental'nye i prikladnye aspekty* [Microbiological biotechnologies: fundamental and applied aspects], 2015, vol. 7, pp. 197–219. (in Russian)
10. Haq I. U., Chaudhry W. N., Akhtar M. N., Andleeb S., Qadri I. Bacteriophages and their implications on future biotechnology: a review. *Virology Journal*, 2012, vol. 9, no. 1, pp. 9. doi.org/10.1186/1743-422x-9-9.
11. Kawato Y., Yasuie M., Nakamura Y., Shigenobu Y., Fujiwara A., Sano M., Nakai T. Complete genome sequence analysis of two *Pseudomonas plecoglossicida* phages, potential therapeutic agents. *Applied and Environmental Microbiology*, 2015, vol. 81, no. 3, pp. 874–881. doi.org/10.1128/aem.03038-14.
12. Kelln R. A., Warren R. A. J. Isolation and properties of a bacteriophage lytic for a wide range of pseudomonads. *Canadian Journal of Microbiology*, 1971, vol. 17, no. 5, pp. 677–682. doi.org/10.1139/m71-109.
13. Sillankorva S., Kluskens L. D., Lingohr E. J., Kropinski A. M., Neubauer P., Azeredo J. Complete genome sequence of the lytic *Pseudomonas fluorescens* phage ϕ BB-PF7A. *Virology Journal*, 2011, vol. 8, issue 1, p. 142. doi.org/10.1186/1743-422x-8-142.
14. Sillankorva S., Kropinski A. M., Azeredo J., Genome Sequence of the Broad-Host-Range *Pseudomonas* Phage Φ -S1. *Journal of Virology*, 2012, vol. 86, no. 18, p. 10239. <https://doi.org/10.1128/jvi.01605-12>.
15. Casjens S. R., Molineux I. J. Short Noncontractile Tail Machines: Adsorption and DNA Delivery by Podoviruses. *Advances in Experimental Medicine and Biology*, 2011, vol. 726, pp. 143–179. doi.org/10.1007/978-1-4614-0980-9_7.

Информация об авторах

Пилипчук Татьяна Андреевна – научный сотрудник, Институт микробиологии НАН Беларуси (ул. Купревича, 2, 220141, Минск, Республика Беларусь). E-mail: tanya.pilipchuk@tut.by.

Валентович Леонид Николаевич – канд. биол. наук, ст. науч. сотрудник, Институт микробиологии НАН Беларуси (ул. Купревича, 2, 220141, Минск, Республика Беларусь). E-mail: valentovich@mbio.bas-net.by.

Титок Марина Алексеевна – д-р биол. наук, гл. науч. сотрудник, Институт микробиологии НАН Беларуси (ул. Купревича, 2, 220141, Минск, Республика Беларусь). E-mail: m_titok@yahoo.com.

Коломиец Эмилия Ивановна – член-корреспондент, д-р биол. наук, директор, Институт микробиологии НАН Беларуси (ул. Купревича, 2, 220141, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kolomiets@mbio.bas-net.by.

Для цитирования

Особенности молекулярно-генетической организации фага Pf-10 / Т. А. Пилипчук [и др.] // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 78–84.

Information about the authors

Pilipchuk Tatsiana Andreevna – Researcher, Institute of Microbiology of the National Academy of Sciences of Belarus (2, Kuprevich Str., 220141, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tanya.pilipchuk@tut.by.

Valentovich Leonid Nikolaevich – Ph. D. (Biology), Senior researcher, Institute of Microbiology of the National Academy of Sciences of Belarus (2, Kuprevich Str., 220141, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: valentovich@mbio.bas-net.by.

Titok Marina Alekseevna – D. Sc. (Biology), Chief researcher, Institute of Microbiology of the National Academy of Sciences of Belarus (2, Kuprevich Str., 220141, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: m_titok@yahoo.com.

Kolomiets Emiliya Ivanovna – Corresponding Member, D. Sc. (Biology), Director, Institute of Microbiology of the National Academy of Sciences of Belarus (2, Kuprevich Str., 220141, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kolomiets@mbio.bas-net.by.

For citation

Pilipchuk T. A., Valentovich L. N., Titok M. A., Kolomiets E. I. Peculiarities of molecular-genetic structure of phage Pf-10. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 78–84. (in Russian)

ISSN 0002–354X (print)

МЕДИЦИНА
MEDICINE

УДК 616-006.6:616-079

Поступило в редакцию 25.10.2016

Received 25.10.2016

Л. Н. Николаевич, член-корреспондент И. В. Залуцкий, И. В. Руденкова

Институт физиологии НАН Беларуси, Минск, Республика Беларусь

**НОВЫЕ ПОДХОДЫ В ДИАГНОСТИКЕ ОПУХОЛЕЙ ТОЛСТОЙ КИШКИ
ПО КРИТЕРИЮ ДНК-ПЛОИДНОСТИ**

Методом проточной цитометрии изучена ДНК-ploидность и молекулярно-биологические характеристики аденокарцином сигмовидной кишки. У 71 % пациентов выявлены диплоидные, а у 29 % – анеуплоидные опухоли. В диплоидном варианте опухоли при распределении клеток по стадиям клеточного цикла выявлены достоверные различия в содержании клеток в G_0/G_1 и S фазах клеточного цикла по сравнению с анеуплоидным вариантом опухоли. Наблюдается повышенная ДНК – синтетическая и пролиферативная активность опухолевых клеток по сравнению с пациентами при анеуплоидном профиле опухоли. У пациентов с диплоидным профилем опухоли количество клеток в S фазе в 5 раз больше, нежели у больных с анеуплоидным вариантом опухоли. Можно предположить, что у больных анеуплоидным раком сигмовидной кишки частота рецидивов будет выше, а выживаемость ниже, чем при диплоидном профиле опухоли.

Ключевые слова: проточная цитометрия, опухоли толстой кишки, ploидность клеток.

L. N. Nikolaevich, Corresponding Member I. V. Zalutsky, I. V. Rudenkova

Institute of Physiology of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

**NEW APPROACHES TO THE DIAGNOSIS OF SIGMOID COLON CANCER OF PATIENTS WITH
COLORECTAL CANCER BY THE DNA-PLOIDY CRITERION**

The DNA ploidy and molecular biological characteristics of adenocarcinoma of sigmoid colon by flow cytometry were studied. In 71 % of the patients, diploid was detected and in 29 % of the patients – aneuploid tumors. In the diploid tumor profile in the distribution of cell cycle phases, significant differences are revealed in the content of cells in G_0/G_1 and S phases of the cell cycle, as compared to the aneuploid tumor profile. There is the increased DNA – the synthetic and proliferative activity of tumor cells compared to patients with the aneuploid tumor profile. Patients with the diploid tumor profile have a number of cells in the S phase 5 times more than in patients with the aneuploid tumor profile. It may be assumed that in patients with aneuploid sigmoid cancer, the recurrence rate is higher and the survival rate is lower than in those with the diploid tumor profile.

Keywords: flow cytometry, colon tumor, cell ploidy.

Введение. По частоте встречаемости колоректальный рак занимает третье место в мире среди злокачественных опухолей, уступая только раку легких, предстательной железы (у мужчин) и молочной железы (у женщин). Колоректальный рак представляет собой огромную опасность для здоровья с ожидаемым увеличением на 60 % по отношению к 2030 г. [1]. Многими авторами показано, что примерно 70 % карцином толстого кишечника развиваются из аденомы [2]. Вероятность развития рака возрастает с увеличением количества аденом в толстой кишке. Степень эпителиальной дисплазии, размер и тип аденомы связаны с ДНК-анеуплоидией в аденомах. Установлено, что аденомы размером меньше 1 см не имеют признаков анеуплоидии, аденомы большего размера, наоборот, имеют значительное увеличение анеуплоидии в ДНК, а тубуловорсинчатые аденомы имеют самую высокую частоту изменений в ДНК.

Методом проточной цитометрии по критерию ДНК-плоидности клеток в злокачественных новообразованиях показано, что популяции клеток в опухоли характеризуются высокой степенью гетерогенности [3]. Большинство злокачественных опухолей состоит из гетероплоидных популяций клеток, которые характеризуются изменениями структуры и количества хромосом (анеуплоидия и полиплоидия) и соответственно изменением содержания ДНК в ядрах клеток [4]. Полиплоидные опухоли чаще всего более злокачественные, чем диплоидные, они более инвазивны, быстрее растут и метастазируют [5]. Клетки полиплоидных опухолей обладают большей жизнеспособностью и приспособительной реакцией к разнообразным условиям микроокружения [6].

Цель исследования – изучить плоидность опухолей толстой кишки.

Материалы и методы исследования. Методом проточной цитометрии у 11 больных раком сигмовидной кишки изучена плоидность опухолей. Опухолевую ткань получали после их хирургического удаления. ДНК-цитометрический анализ популяции опухолевых клеток проводили на проточном цитофлюориметре FACS Canto II (BD, США), используя программное обеспечение DIVA. Суспензию опухолевых клеток выделяли из материала больных раком сигмовидной кишки, ранее не получавших противоопухолевого лечения. Были определены следующие параметры – плоидность опухоли, индекс пролиферации (ИП), содержание клеток опухоли в $G_{0/1}$, S, (G_2 +M) фазах клеточного цикла. Индекс пролиферации (ИП) определяли как сумму клеток, находящихся в синтетической (S), постсинтетической (G_2) фазах интерфазы клеточного цикла и в митозе (M).

На основании гистограмм определяли плоидность клеток опухоли. Популяцию с одним модальным пиком, находящимся в области диплоидного стандарта, считали диплоидной. Клеточную популяцию с двумя главными пиками рассматривали как анеуплоидную. В случае анеуплоидии оценивали долю (%) опухолевых клеток.

Для оценки количественных результатов исследования определяли значение среднего (M) и ошибку среднего (m) – $M \pm m$. Для статистической обработки данных применяли непараметрический критерий U (Вилкоксона–Манна–Уитни) для сравнения средних. Достоверность данных оценивали по критерию Стьюдента.

Результаты и их обсуждение. Многими авторами показано, что доля клеток в фазе S клеточного цикла, а также сочетание этого параметра с плоидностью или индексом ДНК являются значимыми прогностическими факторами, характеризующими агрессивное поведение злокачественной опухоли. Анеуплоидные опухоли с высоким содержанием клеток в S фазе клеточного цикла характеризуются быстрой прогрессией, ранним метастазированием, большей частотой возвратов заболевания [2]. Сочетание анеуплоидности с высоким содержанием клеток в S фазе указывало на неблагоприятный прогноз, чем исследование только плоидности. Выживаемость больных анеуплоидными опухолями с высокой долей клеток в фазе S клеточного цикла (более 20 %) была в 3,7 раз ниже, чем при анеуплоидных опухолях с низкой пролиферативной активностью.

В современной литературе изменены подходы в анализе ДНК-плоидности с учетом типа и локализации опухолей при колоректальном раке [2]. Прогностическим благоприятным профилем признано сочетание диплоидной опухоли и низкой доли клеток в S фазе клеточного цикла, а неблагоприятным – сочетание диплоидной опухоли с высоким содержанием клеток в S фазе и все анеуплоидные опухоли, что позволило авторам выделить группы больных с низким и высоким риском рецидива заболевания [2].

Нами изучена плоидность ДНК опухолей, локализованных в области сигмовидной кишки, у пациентов первичными колоректальными аденокарциномами (таблица).

В зависимости от плоидности ДНК у 71 % больных выявлены диплоидные, а у 29 % – анеуплоидные опухоли. При распределении клеток по стадиям клеточного цикла в диплоидном варианте опухоли достоверной является разница в содержании клеток в фазах G_0 / G_1 и S клеточного цикла по сравнению с анеуплоидным вариантом опухоли.

Наблюдается повышенная ДНК-синтетическая и пролиферативная активность опухолевых клеток по сравнению с пациентами при анеуплоидном профиле опухоли. Общее количество

ДНК-ploidy и распределение клеток по стадиям клеточного цикла опухолей сигмовидной кишки
DNA-ploidy and the tumor cell distribution of sigmoid colon

Группа Group	Тип опухоли Cancer type	G ₀₁ , %	S, %	G ₂ + M, %	S + G ₂ + M, %
1	Диплоидные Diploids	40,66 ± 5,49*	6,28 ± 1,5*	10,42 ± 3,9*	16,48 ± 5,38*
2	Анеуплоидные Aneuploids	15,6 ± 1,33	1,25 ± 0,84	3,2 ± 0,2	4,45 ± 0,2

Пр и м е ч а н и е. * – достоверные отличия между группами, $p < 0,05$.

N o t e s. * – the reliable differences between the groups, $p < 0.05$.

опухолевых клеток в S фазе у пациентов с диплоидным профилем опухоли ($6,28 \pm 1,5 \%$) в 5 раз больше, нежели у больных с анеуплоидным вариантом опухоли ($1,25 \pm 0,84 \%$). Следовательно, пациентов с диплоидным профилем опухоли и высоким содержанием клеток в S фазе, как и пациентов с анеуплоидным профилем опухоли можно отнести к группе риска, характеризующейся высокой степенью рецидива [2].

Заклучение. Как показывают многочисленные исследования, анеуплоидность является довольно частым и важным явлением в клетках злокачественных образований. Дальнейшее изучение ее роли в развитии опухолевого процесса представляется актуальным для клинической онкологии. Практическое использование ДНК-ploidy в оценке профиля опухолей колоректального рака с учетом места локализации является прогностическим критерием выделения групп риска для прогноза развития рецидива при данной патологии.

Благодарности. Работа выполнена в рамках задания 01.01 ГПНИ «Фундаментальные и прикладные науки – медицине».

Acknowledgement. The work of the assignment 01.01 SPR “Fundamental and applied sciences – medicine”.

Список использованных источников

1. Assessment of clinically related outcomes and biomarker analysis for translational integration in colorectal cancer (ACROBATICC): study protocol for a population-based, consecutive cohort of surgically treated colorectal cancer and resected colorectal liver metastasis / S. Kjetil [et al.] // *J. of Translational Medicine*. – 2016. – Vol. 14. – P. 192–200. doi.org/10.1186/s12967-016-0951-4.
2. DNA ploidy and morphology of colon tumors in the adenoma-carcinoma sequence / J. Staarmann [et al.] // *Folia histochemica et cytobiologica*. – 2015. – Vol. 53, N 1. – P. 11–18. doi.org/10.5603/fhc.a2015.0001.
3. Method for cancer diagnosis using DNA ploidy analysis with combination of fast Fourier transform and domain method / N. Hinata [et al.] // *Transactions of Japanese Society for Medical and Biological Engineering*. – 2014. – Vol. 52, N 3. – P. 136–144.
4. Aneuploidy in health, disease, and aging / R. M. Ricke [et al.] // *J. Cell Biol.* – 2013. – Vol. 201, N 1. – P. 11–21. doi.org/10.1083/jcb.201301061.
5. A study on the method for cancer diagnosis using FFT on DNA ploidy analysis / N. Hinata [et al.] // *Transactions of Japanese Society for Medical and Biological Engineering*. – 2013. – Vol. 51, N 2. – P. 103–111.
6. The consequences of chromosomal aneuploidy on the transcriptome of cancer cells / T. Ried [et al.] // *Biochim. Biophys. Acta*. – 2012. – Vol. 1819, N 7. – P. 784–793. doi.org/10.1016/j.bbagr.2012.02.020.

References

1. Kjetil S., Watson M. M., Lea D., Nordgerd O., Arne S. J., Hagland R. H. Assessment of clinically related outcomes and biomarker analysis for translational integration in colorectal cancer (ACROBATICC): study protocol for a population-based, consecutive cohort of surgically treated colorectal cancer and resected colorectal liver metastasis. *Journal of Translational Medicine*, 2016, vol. 14, pp. 192–200. doi.org/10.1186/s12967-016-0951-4.
2. Staarmann J., Kotb W. F. A., Petersen I. DNA ploidy and morphology of colon tumors in the adenoma-carcinoma sequence. *Folia histochemica et cytobiologica*, 2015, vol. 53, no. 1, pp. 11–18. doi.org/10.5603/fhc.a2015.0001.
3. Takeda S., Hinata N., Kanda H., Shioyama T., Suzuki A., Ishikawa Y., Yamaguchi T., Kato Y. Method for cancer diagnosis using DNA ploidy analysis with combination of fast Fourier transform and domain method. *Transactions of Japanese Society for Medical and Biological Engineering*, 2014, vol. 52, no. 3, pp. 136–144.
4. Ricke R. M., van Deursen J. M. Aneuploidy in health, disease, and aging. *The Journal of Cell Biology*, 2013, vol. 201, no. 1, pp. 11–21. doi.org/10.1083/jcb.201301061.

5. Hinata N., Kanda H., Shioyama T., Suzuki A., Takeda S., Ishikawa Y., Yamaguchi T., Kato Y. A study on the method for cancer diagnosis using FFT on DNA ploidy analysis. *Transactions of Japanese Society for Medical and Biological Engineering*, 2013, vol. 51, no. 2, pp. 103–111.

6. Ried T., Hu Y., Dfilippantonio M. J., Ghadimi B. M., Grade M., Camps J. The consequences of chromosomal aneuploidy on the transcriptome of cancer cells. *Biochimica et Biophysica Acta (BBA) - Gene Regulatory Mechanisms*, 2012, vol. 1819, no. 7, pp. 784–793. doi.org/10.1016/j.bbagr.2012.02.020.

Информация об авторах

Николаевич Лариса Николаевна – канд. биол. наук, доцент, заведующая лабораторией, Институт физиологии НАН Беларуси (ул. Академическая, 28, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: nikolarisa@tut.by.

Залуцкий Иосиф Викторович – член-корреспондент, д-р мед. наук, профессор, директор, Институт физиологии НАН Беларуси (ул. Академическая, 28, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: biblio@fizio.bas-net.by.

Руденкова Ирина Владимировна – мл. науч. сотрудник, Институт физиологии НАН Беларуси (ул. Академическая, 28, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kiran4@gmail.com.

Для цитирования

Николаевич, Л. Н. Новые подходы в диагностике опухолей толстой кишки по критерию ДНК-плоидности / Л. Н. Николаевич, И. В. Залуцкий, И. В. Руденкова // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 85–88.

Information about the authors

Nikolaevich Larisa Nikolaevna – Ph. D. (Biology), Assistant Professor, Head of the Laboratory, Institute of Physiology of the National Academy of Sciences of Belarus (28, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: nikolarisa@tut.by.

Zalutsky Iosiph Victorovich – Corresponding Member, D. Sc. (Medicine), Professor, Director, Institute of Physiology of the National Academy of Sciences of Belarus (28, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: biblio@fizio.bas-net.by.

Rudenkova Irina Vladimirovna – Junior researcher, Institute of Physiology of the National Academy of Sciences of Belarus (28, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kiran4@gmail.com.

For citation

Nikolaevich L. N., Zalutsky I. V., Rudenkova I. V. New approaches to the diagnosis of sigmoid colon cancer of patients with colorectal cancer by the DNA-ploidy criterion. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 85–88. (in Russian)

ISSN 0002–354X (print)

НАУКИ О ЗЕМЛЕ
EARTH SCIENCES

УДК 577.342:546.296:539.16.04

Поступило в редакцию 20.10.2016
Received 20.10.2016

И. А. Чешик¹, Л. А. Чунихин¹, Д. Н. Дроздов², Н. Г. Власова³, академик А. К. Карабанов⁴

¹*Институт радиобиологии НАН Беларуси, Гомель, Республика Беларусь*

²*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Республика Беларусь*

³*Республиканский научно-практический центр радиационной медицины и экологии человека, Гомель, Республика Беларусь*

⁴*Институт природопользования НАН Беларуси, Минск, Республика Беларусь*

**ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ РАДОНА НА РАДИАЦИОННУЮ ОБСТАНОВКУ
В РЕСПУБЛИКЕ БЕЛАРУСЬ**

Приводится анализ радиационной обстановки в Республике Беларусь, обусловленной чернобыльскими выпадениями и радоном. Показано, что при рассмотрении эффектов воздействия ионизирующего излучения на население следует учитывать не только чернобыльские выпадения, но и другие источники, в первую очередь, радон. Показана неравномерность распределения доз от радона по территории Беларуси, а также определяющее влияние радона на радиационную обстановку в большинстве административных районов страны, особенно за пределами территории сильного загрязнения чернобыльскими радионуклидами. Сделан вывод о необходимости обязательного учета радона при исследовании медико-биологических последствий облучения от техногенных и природных источников.

Ключевые слова: радон, объемная активность радона, радоновый риск, авария на ЧАЭС, цезий-137, доза облучения человека, каталог доз облучения.

I. A. Cheshik¹, L. A. Chunikhin¹, D. N. Drozdov², N. G. Vlasova³, Academician A. K. Karabanov⁴

¹*Institute of Radiobiology of the National Academy of Sciences of Belarus, Gomel, Republic of Belarus*

²*Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Republic of Belarus*

³*Republican Scientific Center for Radiation Medicine and Human Ecology, Gomel, Republic of Belarus*

⁴*Institute for Nature Management of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*

**ASSESSMENT OF THE RADON INFLUENCE ON THE RADIATION SITUATION
IN THE REPUBLIC OF BELARUS**

The change in the radiation situation in the territory of Belarus has been assessed. It was shown that the radiation dose values connected with the Chernobyl accident were decreased and the relative value of the radon factor was increased. It was shown that these radiation factors have different trends in the territory of the Republic. There is a large irregular radon distribution in the territory of Belarus. The difference of the radon dose values in many regions of Belarus was more than in the absolute value of the Chernobyl caesium-137 dose. It is necessary that the radon influence on people must be taken into account in the studies of biological and medical effects of radiation.

Keywords: radon, radon risk, radon volume activity, Chernobyl accident, caesium-137, dose irradiation.

Введение. Спустя 30 лет после аварии на ЧАЭС радиационная обстановка на территории Беларуси относительно стабилизировалась. Основные тенденции динамики радиоактивного загрязнения по всем административным областям Беларуси с 1986 по 2009 г. и прогноз изменения степени радиоактивного загрязнения территории Беларуси и России цезием-137, стронцием-90, плутонием 238, 239, 240 на 2016 и до 2046 г. отражены в серии карт Атласа современных и прогнозных аспектов последствий аварии на Чернобыльской АЭС на пострадавших территориях России и Беларуси [1].

Сравнивая средние значения доз облучения по Каталогам-2009 и 2015 [2; 3], можно отметить, что наблюдается заметное их снижение с 0,46 до 0,34. Еще более явно выражено снижение числа

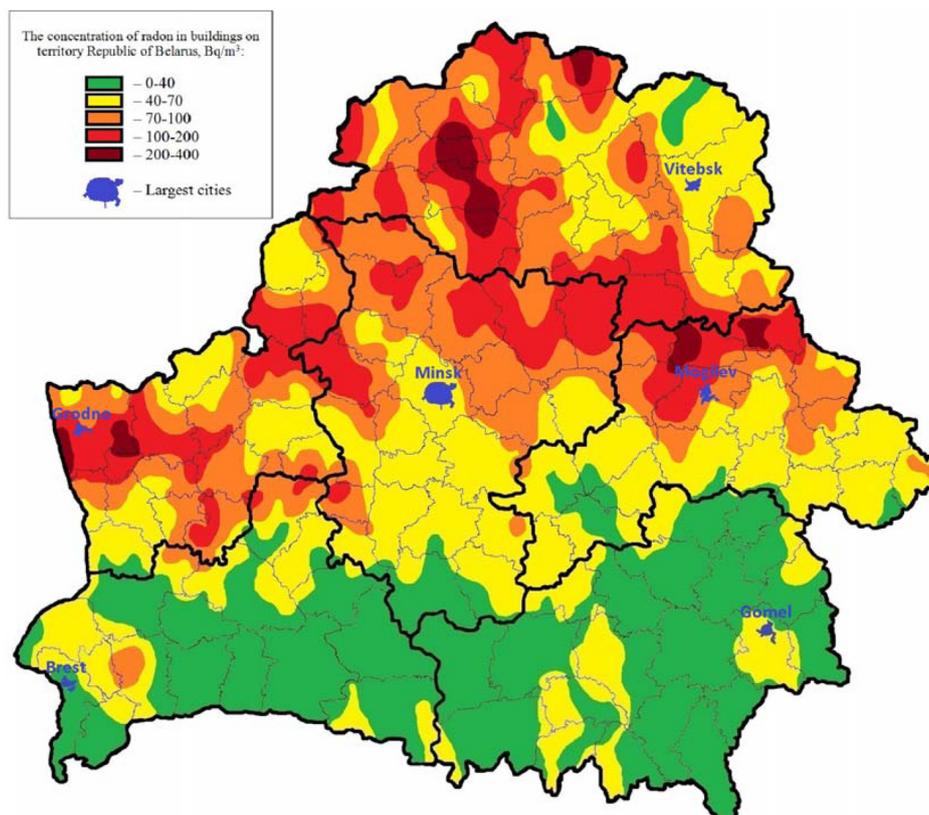
населенных пунктов (НП) с превышением референтной дозы в 1 мЗв: с 193 из 2613 до 72 из 2396. За послеаварийный период территория загрязнения Беларуси цезием-137 снизилась с 46,45 тыс. кв. км до 27,9 тыс. кв. км.

На фоне снижения уровня облучения от техногенных источников все большее влияние будут оказывать природные источники, в частности, радон. Радон на территории Республики Беларусь неравномерно поступает в помещения зданий, что обусловлено, в основном, различием содержания урана и тория в почвах и породах и их проницаемостью для радона. Различные аспекты, связанные с содержанием природного радона в грунтах и в воздухе зданий в последние годы стали объектом исследований зарубежных и белорусских ученых [4–6].

Цель работы – оценка и сравнение радиационной обстановки на территории Республики Беларусь, обусловленной чернобыльскими выпадениями и радоном.

Материалы и методы исследования. Для настоящего анализа были использованы опубликованные данные: карты современного состояния и прогноза динамики загрязнения цезием-137 [1], каталог доз жителей НП, проживающих на территории, подвергшейся загрязнению в результате аварии на ЧАЭС – Каталог-2015 [3], карта радонового риска [7]. На момент разработки Каталога-2015 в Республике Беларусь НП с уровнем загрязнения цезием-137 выше 37 кБк/м² находились на территориях 4 районов из 15 в Брестской, 1 из 21 – в Витебской, 20 из 21 – в Гомельской, 3 из 17 – в Гродненской, 10 из 22 – в Минской и 13 из 21 – в Могилевской области.

Сравнительная оценка проведена по эффективной дозе облучения от чернобыльских радионуклидов и радона. В Каталоге-2015 [3] все дозы приводятся для репрезентативного человека, что соответствует 95 %-ному квантилю распределения доз облучения. Для оценки дозы от радона и его ДПР было использовано рекомендованное в Публикации № 65 МКРЗ [8] понятие условного дозового перехода. Оценка дозы облучения способом условного дозового перехода дает несколько завышенные значения дозы для ДПР радона по сравнению с расчетами с использованием легочной модели.



Карта радонового риска Республики Беларусь
Radon Risk Map of the Republic of Belarus

Базовой территориальной структурой в данном исследовании являлись административные образования: область и район. Отбирали районы в каждой области с максимальными (около 0,5 мЗв/год и выше) и минимальными средними значениями эффективных доз (от 0 до 0,2 мЗв/год), т. е. для сравнения брали районы, НП которых не входили в Каталог. По картограмме, приведенной на рисунке, определяли средневзвешенную по 95 %-ному квантилю распределения объемную активность (ОА) радона в помещениях НП выбранных районов при помощи следующего соотношения:

$$OA = \frac{\sum_{i=1}^n S_i A_{95i}}{\sum_{i=1}^n S_i}, \quad (1)$$

где S_i – площадь i -го диапазона концентраций, км²; A_{95i} – 95 %-ный квантиль ОА i -го диапазона.

Также была сделана сравнительная оценка доз облучения в целом для областей. Используя вышеприведенное выражение (1), были рассчитаны взвешенные значения ОА радона по обла-

Значения эффективных доз облучения для репрезентативного человека от чернобыльского цезия и природного радона в отдельных районах Республики Беларусь

Values of the effective radiation dose for a representative man with Chernobyl cesium and natural radon in some regions of the Republic of Belarus

Район с большими значениями доз от чернобыльских выпадений Region with large doses of Chernobyl fallouts	Доза облучения, мЗв/год Radiation dose, mEv/year		Район с малыми значениями доз от чернобыльских выпадений Region with small doses of Chernobyl fallouts	Доза облучения, мЗв/год Radiation dose, mEv/year	
	ЧАЭС Chenobyl Power Plant	Радон Radon		ЧАЭС Chenobyl Power Plant	Радон Radon
<i>Брестская область</i> <i>Brest region</i>					
Столинский (2*)	0,49	0,77	Дрогичинский	0,16	0,65
<i>Витебская область</i> <i>Vitebsk region</i>					
Толочинский	–	–	Глубокский	–	–
			Шарковщинский	0,11	3,2
			Россонский	–	3,1
<i>Гомельская область</i> <i>Gomel region</i>					
Ветковский	0,59	0,68	Октябрьский	–	0,95
Ельский	0,76	0,94	Петриковский	0,15	0,65
Наровлянский	1,4	0,68	Житковичский	0,18	0,65
Чечерский	0,58	0,80	Речицкий	0,17	0,66
Хойникский	0,5	0,65			
<i>Гродненская область</i> <i>Grodno region</i>					
			Дятловский	0,18	1,6
			Ивьевский	0,19	2,6
<i>Минская область</i> <i>Minsk region</i>					
Солигорский	0,43	0,77	Крупский	0,12	3,1
			Воложинский	0,16	2,9
			Логойский	0,14	2,4
			Борисовский	0,15	2,4
<i>Могилевская область</i> <i>Mogilev region</i>					
Славгородский	0,51	1,1	Горецкий	–	4,4
Костюковичский	0,47	1,1	Шкловский	–	4,1
			Круглянский	–	3,1

Примечание. * – в скобках отмечено число НП в районе со значением дозы облучения 1 мЗв/год и выше.

Notes. * – the number of populated localities in the region with a radiation does of 1 mZV/year and more (in brackets).

стям, используя соотношение, приведенное в работе [8], определили эффективные дозы от радона и ДПР – 1 Бк/м³ формирует дозу от радона и ДПР в 0,017 мЗв/год.

Результаты и их обсуждение. Результаты сравнительной оценки эффективных доз облучения для репрезентативного человека от чернобыльского цезия и природного радона для характерных районов всех областей Беларуси с максимальными и минимальными значениями приведены в таблице.

Сравнительный анализ количественно подтверждает сложившуюся на территории Беларуси радиационную обстановку, обусловленную чернобыльским цезием и природным радонам, приведенную на рисунке. В наиболее загрязненных районах Гомельской, Могилевской, Минской и Брестской областей суммарная эффективная доза от чернобыльского цезия и природного радона находится в пределах 1,2–2,1 мЗв/год (среднее – 1,5, медиана – 1,3 мЗв/год). В «чистых» и малозагрязненных районах аналогичное значение дозы находится в пределах 0,8–5,0 мЗв/год (среднее – 2,5, медиана – 2,8 мЗв/год). Дозы облучения от радона в «неблагополучных» районах в среднем в 4 раза выше, чем в «благополучных», и величина дозы от чернобыльского цезия в наиболее загрязненных районах в среднем в 4 раза ниже величины дозы от радона. В регионе с максимальным загрязнением (Наровлянский район) доза от чернобыльского цезия в 3 раза ниже, чем разница в дозах от радона в Шарковщинском и Наровлянском районах. Весь постчернобыльский период медико-биологические последствия облучения от чернобыльских радионуклидов исследовались без учета доз от природного радона, что, возможно, было оправдано только в ранний период после аварии при оценке воздействия радиойода на щитовидную железу. В отдаленный период после аварии учет доз от радона становится некорректным, особенно, если принять во внимание потенциальную и реальную, временную или постоянную миграцию населения.

Расчет средних в целом по областям Республики Беларусь эффективных доз облучения от чернобыльского цезия и природного радона, выполненный по картограмме распределения объемной активности радона по помещениям зданий в областях (рисунок) и данным Каталога-2015 показал, что абсолютные значения суммарных эффективных доз облучения и соотношение между дозами от чернобыльского цезия и природного радона выше в Витебской, Гродненской и Минской областях. Минимальные значения суммарных абсолютных величин доз и соотношения между ними характерны для чистых и малозагрязненных районов Гомельской и Брестской областей, радиационная обстановка в Могилевской области является близкой к первой группе областей и занимает промежуточное значение по соотношению доз. Аналогичные результаты по объемной активности радона и ее распределению в помещениях зданий по областям представлены в работах [4; 5].

Заключение. Как показало проведенное исследование, в отдаленный период аварии на ЧАЭС на значительной части территории Беларуси произошло существенное изменение радиационной обстановки. В настоящее время в большинстве административных районов Беларуси за пределами сильнозагрязненной чернобыльскими радионуклидами зоны основной вклад в дозу облучения населения вносит природный радон. Разница в дозах по различным регионам Беларуси нередко в разы превышает дозу от чернобыльских радионуклидов.

На территории разных районов дозы облучения от радона могут также в разы различаться. Наиболее благоприятная радиационная обстановка по суммарной эффективной дозе сложилась в настоящее время в Октябрьском, Петриковском, Житковичском и Речицком районах Гомельской области, Дрогичинском районе Брестской области, наименее благоприятная в Глубокском, Шарковщинском, Толочинском и Россонском районах Витебской области, Горечком, Шкловском, Круглянском районах Могилевской области, Гродненском районе Гродненской области, Крупском и Воложинском районах Минской области.

Основным выводом настоящего исследования является обоснование необходимости учета влияния природного радона при изучении медико-биологических последствий ионизирующего излучения на здоровье населения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Атлас современных и прогнозных аспектов последствий аварии на Чернобыльской АЭС на пострадавших территориях России и Беларуси (АСПА Россия–Беларусь) / под ред. Ю. А. Израэля, И. М. Богдевича. – Минск, 2009. – 140 с.
2. Каталог средних годовых эффективных доз облучения жителей населенных пунктов Республики Беларусь / Н. Г. Власова [и др.]. – Гомель, 2010. – 86 с.
3. Каталог средних годовых эффективных доз облучения жителей населенных пунктов Республики Беларусь / Н. Г. Власова [и др.]. – Гомель, 2015. – 32 с.
4. Радон в воздухе зданий и радоновая составляющая дозы радиоактивного облучения населения в различных областях Беларуси / О. И. Ярошевич [и др.] // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 6. – С. 92–97.
5. Мониторинг радона в воздухе зданий населенных пунктов на территории Брестской области и эффективные дозы облучения населения, обусловленные радоном-222 и дочерними продуктами его распада / А. К. Карабанов [и др.] // Весті Нац. акад. навук Беларусі. Сер. хім. навук. – 2016. – № 2. – С. 91–97.
6. Матвеев, А. В. Районирование территории Беларуси по степени радоновой опасности грунтов / А. В. Матвеев // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 5. – С. 108–113.
7. Карта радонового риска Республики Беларусь / А. К. Карабанов [и др.] // Природные ресурсы. – 2015. – № 2. – С. 73–78.
8. Protection Against Radon-222 at Home and at Work. ICRP Publication 65. – Oxford: Pergamon Press, 1993. – 76 p.

References

1. Israel J. A., Bogdevich I. M. (eds.) *Atlas of the Modern and Projected Aspects of the Chernobyl Power Plant Accident in the Territories of Russia and Belarus (Russia–Belarus)*. Minsk, 2009. 140 p. (in Russian)
2. Vlasova N. G., Lescheva S. V., Visenberg Yu. V., Drozdov D. N. *Republic Belarus People dose Irradiation Catalogue*. Gomel, 2009. 86 p. (in Russian)
3. Vlasova N. G., Visenberg Yu. V., Drozd Ye. A., Mataras A. N., Eventova L. N., Tolstoi V. V. *Republic Belarus People dose Irradiation Catalogue*. Gomel, 2014. 32 p. (in Russian)
4. Jaroshevich O. I., Zhuk I. V., Karabanov A. K., Matveev A. V., Konopelko M. V., Vasilevsky L. L., Lukashevich Z. A. Indoor radon and radon component of radiation doses of the population in different areas of Belarus. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2012, vol. 56, no. 6, pp. 92–97. (in Russian)
5. Karabanov A. K., Matveyev A. V., Gindyuk N. T., Gindyuk V. V., Mitsura V. I., Zhuk I. V., Vasilevsky L. L., Leonti T. G., Lukashevich J. A. Radon in air inside buildings in settlements of Brest region and effective doses of population irradiation caused by radon-222 and products of its decay. *Vestsi Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seryia khimichnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Series of Chemical Sciences], 2016, no. 2, pp. 91–97. (in Russian)
6. Matveev A. V. Division of the territory of Belarus into the regions with different radon contamination hazard levels of soils. stepeny radonovoj opasnosti. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2016, vol. 60, no. 5, pp. 108–113. (in Russian)
7. Karabanov A. K., Chunikhin L. A., Drozdov D. N., Chekhovskiy A. L., Zhuk I. V., Yaroshevich O. I., Konopelko V. I. Republic Belarus Population Radon Risk Map. *Prirodnye resursy* [Natural resources], 2015, no. 2, pp. 73–78. (in Russian)
8. *Protection Against Radon-222 at Home and at Work*. ICRP Publication 65. Oxford, Pergamon Press, 1993. 76 p.

Информация об авторах

Чешик Игорь Анатольевич – канд. мед. наук, доцент, директор, Институт радиобиологии НАН Беларуси (ул. Федюнинского, 4, 246007, Гомель, Республика Беларусь). E-mail: irb@mail.gomel.by.

Чунихин Леонид Александрович – канд. биол. наук, доцент, ст. науч. сотрудник, Институт радиобиологии НАН Беларуси (ул. Федюнинского, 4, 246007, Гомель, Республика Беларусь). E-mail: leochun_rcrm@mail.ru.

Дроздов Денис Николаевич – канд. биол. наук, доцент, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины (ул. Советская, 104, 246019, Гомель, Республика Беларусь). E-mail: dndrozdov@mail.ru.

Власова Наталья Генриховна – д-р биол. наук, доцент, заведующая лабораторией, Республиканский научно-практический центр радиационной медицины и экологии человека (ул. Ильича, 290, 246040, Гомель, Республика Беларусь). E-mail: natalie_vlasova@mail.ru.

Information about the authors

Cheshik Igor Anatolievich – Ph. D. (Medicine), Assistant Professor, Director, Institute of Radiobiology of the National Academy of Sciences of Belarus (4, Fedyuninski Str., 246007, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: irb@mail.gomel.by.

Chunikhin Leonid Aleksandrovich – Ph. D. (Biology), Assistant Professor, Senior researcher, Institute of Radiobiology of the National Academy of Sciences of Belarus (4, Fedyuninski Str., 246007, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: leochun_rcrm@mail.ru.

Drozdov Denis Nikolaevich – Ph. D. (Biology), Assistant Professor, Francisk Skorina Gomel State University (104, Sovetskaya Str., 246019, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: dndrozdov@mail.ru.

Vlasova Natalia Genrihovna – D. Sc. (Biology), Assistant Professor, Head of the Laboratory, Republican Scientific Center for Radiation Medicine and Human Ecology (290, Ilich Str., 246040, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: natalie_vlasova@mail.ru.

Карбанов Александр Кириллович – академик, д-р геолого-минералог. наук, директор, Институт природопользования НАН Беларуси (ул. Ф. Скорины, 10, 220114, Минск, Республика Беларусь). E-mail: nature@ecology.basnet.by.

Для цитирования

Оценка влияния радона на радиационную обстановку в Республике Беларусь / И. А. Чешик [и др.] // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 89–94.

Karabanov Aleksandr Kirillovich – Academician, D. Sc. (Geology), Director, Institute for Nature Management of the National Academy of Sciences of Belarus (10, F. Skoryna Str., 220114, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: nature@ecology.basnet.by.

For citation

Cheshik I. A., Chunikhin L. A., Drozdov D. N., Vlasova N. G., Karabanov A. K. Assessment of the radon influence on the radiation situation in the Republic of Belarus. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 89–94. (in Russian)

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ
TECHNICAL SCIENCES

UDC 532.516

Received 19.10.2016
Поступило в редакцию 19.10.2016

V. I. Baikov, A. D. Chorny

*A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus,
Minsk, Republic of Belarus*

CAPTURING A VISCOPLASTIC LIQUID BY A MOVING VERTICAL PLATE

(Communicated by Academician O. G. Penyazkov)

The liquid capture by a moving surface is the most widespread process in chemical engineering along with calendaring, extrusion moulding, pouring, and pressure moulding. The theoretical analysis of the medium capture by a moving surface, which allows revealing the fundamental physical principles and mechanisms of the process over the entire withdrawal speed range realized in practice, was performed for Newtonian, non-Newtonian, and viscoplastic liquids. However, such an analysis of the withdrawal of viscoplastic liquids with a finite yield was not made because of the features of these liquids. Shear flow of viscoplastic liquid is possible only after the stress exceeds its yield. This fact causes serious mathematical difficulties in stating and solving the problem. In the proposed work, such a theory is being developed for viscoplastic liquids.

Keywords: viscoplastic liquid, liquid withdrawal velocity, liquid layer width, static and dynamic menisci.

В. И. Байков, А. Д. Чорный

Институт тепло- и массообмена им. А. И. Лыкова НАН Беларуси, Минск, Республика Беларусь

УВЛЕЧЕНИЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ ДВИЖУЩЕЙСЯ ВЕРТИКАЛЬНО ПЛАСТИНОЙ

(Представлено академиком О. Г. Пенязковым)

Захват жидкости движущейся поверхностью является наиболее распространённым процессом в химической технологии наряду с каландрованием, экструзионным формованием, заливкой, формованием под давлением. Теоретический анализ увлечения среды движущейся поверхностью, позволяющий вскрыть основные физические принципы и механизмы процесса во всем диапазоне скоростей извлечения, реализуемом на практике, был проведен для ньютоновских, нелинейновязких, вязкопластичных жидкостей. Однако такой анализ по увлечению вязкопластичных жидкостей, обладающих конечным пределом текучести, проведен не был в силу специфических особенностей этих жидкостей. Для вязкопластичной жидкости сдвиговое течение возможно лишь после того как напряжение превысит предел текучести. Данное обстоятельство вносит серьезные математические трудности при постановке и решении задачи. В предлагаемой работе такая теория развивается для вязкопластичных жидкостей.

Ключевые слова: вязкопластические жидкости, скорость извлечения жидкости, ширина слоя жидкости, статические и динамические мениски.

Introduction. As one of the continuous established technologies of moulding and processing materials the process of capturing liquid by a moving surface is the most widespread process in chemical engineering along with calendaring, extrusion moulding, pouring, and pressure moulding. Determination of the thickness of the film deposited on the surface of paper, polymer, metal, and fabric withdrawn from a solution is of substantial significance for such technological processes as:

- a) application of different coatings – protective, decorative, special (light- and magnet-sensitive, electrically insulated, clay, release, abrasion, anti-friction, etc.);
- b) drying in contact roller machines (rotating heated drum capture of a medium film with its subsequent drying);

c) crystallization in knife-discharge drum crystallizers (a solidified layer thickness is determined through the capture of a melt film by the drum surface);

d) dispersion by submerged mechanical sprayers (the rotating discs partially submerged into liquid withdrawn in the form of a film, followed by its dispersion);

e) filtration in drum and disc vacuum-filters, etc.

The works [1–3] were concerned with the theoretical analysis of capture of a medium by a moving surface. It allowed one to uncover the basic physical principles and the mechanisms of the capture process over the entire range of the withdrawal speed realized in practice and at a different rheological state of liquid (Newtonian, non-Newtonian, viscoelastic).

However, such an analysis of the capture of viscoplastic liquids with a finite yield was not made because of the features of these liquids that are different from those of Newtonian and non-plastic non-Newtonian media. Shear flow of the viscoplastic liquid is possible only after the film stress exceeds its yield. This fact causes serious mathematical difficulties in stating and solving the problem.

Problem statement. To describe the rheological behavior of a viscoplastic medium, Shvedov–Bingham’s linear model for viscous shear stress has found widest use [4]

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 \operatorname{sign} \frac{du}{dy} + \mu_p \frac{du}{dy}, & |\tau| > \tau_0, \\ \frac{du}{dy} &= 0, & |\tau| \leq \tau_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Here u is the liquid velocity, τ_0 is the ultimate shear stress (yield), and μ_p is the plastic viscosity. Writing (1) stands for the demand of the same signs of τ and du/dy that follows from the essence of the phenomenon considered.

Consider the liquid being into the bath, from which an infinite plate is withdrawn vertically upwards with a constant speed U (Fig. 1). The thickness of the layer captured by the plate wall decreases with increasing distance from the horizontal liquid surface and asymptotically tends to a constant value of h_0 . Because of the gravity, this plate captures only some amount of the liquid put in motion by it. Therefore, the stagnation line h_s is seen in the direction to the free surface where the layer velocity is equal to zero. As a result, the speed of moving the free surface of the film captured by the plate increases from zero in the stagnation line to its maximum value in the region of the constant film thickness h_0 . The stagnation line separates the near-wall zone of the liquid captured by the plate from the bath zone. For these zones the equations responsible for the shape of the free surface can be obtained and the solutions can then be joined. This will allow the thickness of the entrained film to be determined.

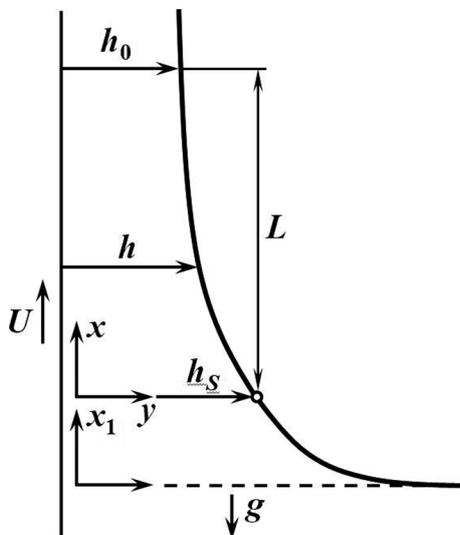


Fig. 1. Viscoplastic liquid flow scheme

Let the stagnation line be the coordinate origin, the x axis be in the direction of movement of the plate and the y axis be perpendicular to it. Define the region of dynamic meniscus of liquid as the flow area bounded from below by the plane perpendicular to the wall and passing through the stagnation line and from above moving into the region of the constant thickness h_0 . In this region the film thickness h is determined by the ratio of internal friction forces, surface tension, gravity, and inertia. From the physical considerations it is clear that the characteristic dynamic meniscus length L much exceeds the film thickness h_0 . Then the small parameter $\varepsilon = h_0 / L \ll 1$ arises quite naturally. This means that the change in the flow characteristics along the x axis is weaker than in the transverse y direction, i. e., the derivatives with respect to the y axis will be much larger than those with respect to the x axis.

As a result of the dynamic meniscus of the non-Newtonian liquid, correct to the terms of the order of ε^2 , we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial y} - \rho g + \sigma \ddot{h} &= 0, \quad p - p_0 = -\sigma \ddot{h} \quad (y = h), \\ u = U \quad (y = 0), \quad \tau &= 0 \quad (y = h). \end{aligned} \quad (2)$$

Hereinafter, the following notations are taken: $\dot{h} = dh/dx$, $\ddot{h} = d^2h/dx^2$, $\dddot{h} = d^3h/dx^3$. Due to a high consistency of non-Newtonian media, the inertia terms can be ignored. Present the equation of continuity in integral form

$$Q = \int_0^h u dy = \text{const}. \quad (3)$$

Integrating equation of motion (2) with the boundary condition satisfied yields

$$\tau(y) = -(\rho g - \sigma \ddot{h})(h - y).$$

Choose the rheological equation for the viscoplastic liquid in the form of Shvedov–Bingham's classical model (1). Considering that $du/dy < 0$ for the shear flow region we have

$$-\tau_0 + \mu_P \frac{\partial u}{\partial y} = -(\rho g - \sigma \ddot{h})(h - y). \quad (4)$$

As equation (4) shows, across the film the shear stress changes continuously and linearly, starting with a maximum value at the plate wall to a zero value at the free surface. At some value of the ordinate $y = \delta$, the magnitude $\tau = \tau_0$ can be attained. Bearing in mind the second condition of rheological equation of state (1) and equation (4) we obtain

$$\tau_0 = (\rho g - \sigma \ddot{h})(h - \delta).$$

Hence, for the viscoplastic liquid flow zone $\tau > \tau_0$ ($0 \leq y < \delta$)

$$\delta = h - \tau_0 / (\rho g - \sigma \ddot{h}) \quad (5)$$

and for the liquid flow quasi-solid zone $\tau \leq \tau_0$ ($\delta \leq y \leq h$)

$$\Delta = h - \delta = \tau_0 / (\rho g - \sigma \ddot{h}). \quad (6)$$

Integrating equation (4) with respect to y yields the velocity distribution across the film in the viscoplastic liquid flow zone

$$u = U + \frac{\tau_0}{\mu_P} y - \frac{1}{\mu_P} (\rho g - \sigma \ddot{h}) \left(hy - \frac{y^2}{2} \right). \quad (7)$$

In turn, for the velocity of the liquid flow quasi-solid zone the substitution of equation (7) at $y = \delta$ into expression (5) arrives at:

$$u_0 = U + \frac{\tau_0}{\mu_P} h - \frac{h^2}{2\mu_P} (\rho g - \sigma \ddot{h}) - \frac{\tau_0}{2\mu_P} / (\rho g - \sigma \ddot{h}). \quad (8)$$

Define the liquid flow velocity in the film using formula (3):

$$Q = Uh + \frac{\tau_0 h^2}{2\mu_P} - \frac{h^3}{3\mu_P} (\rho g - \sigma \ddot{h}) - \frac{\tau_0^3}{6\mu_P} / (\rho g - \sigma \ddot{h})^2. \quad (9)$$

The last equation is valid over the range of the film thickness $h(x)$ from h_0 to h_s .

Find the position of the stagnation line h_s , assuming that $u_0 = 0$ and $h = h_s$ in expressions (8) and (9). Then

$$h_s = 3 \frac{Q}{U} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{Q}{U} \frac{\tau_0}{\mu_P U} \right). \quad (10)$$

Equation (9) assigns the film thickness $h(x)$ through the predetermined quantities U , ρ , g , σ , μ_p , τ_0 . Since the general solution to this nonlinear differential equation cannot be obtained, consider some particular cases. To do this, equation (9) with regard to formulas (5) and (6) is written in equivalent form:

$$Q = Uh - \frac{\tau_0 \delta^2}{2\mu_p} \left(\frac{1 - \delta/3h}{1 - \delta/h} \right); \quad Q = Uh - \frac{\tau_0 h^3}{3\mu_p \Delta} \left(1 - \frac{3\Delta}{2h} + \frac{\Delta^3}{2h^3} \right). \quad (11)$$

The thickness of the quasi-solid movement zone is much larger than that of the viscoplastic movement zone. Let the condition $\delta/h \ll 1$ be satisfied in the first equation of (11), i. e., the quasi-solid movement zone thickness Δ is much larger than the shear viscoplastic liquid zone thickness δ . Then the main role in this equation will be played by the plastic factor τ_0 . As limiting cases, the rheological equation of state of viscoplastic liquid (1) indeed contains the equations of state of perfectly viscous liquid $\tau_0 = 0$ and perfectly plastic substance $\mu_p \frac{du}{dy} = 0$. It is natural that depending on the relation between τ_0 and $\mu_p \frac{du}{dy} = 0$, the properties of viscoplastic liquid will approach those either of viscous liquid or of perfectly plastic substance.

Below there is the condition, under which the requirement $\delta/h \ll 1$ is satisfied, and while in the first equation of (11) the term δ/h will be neglected in comparison to unity. Then

$$\delta = \sqrt{\frac{2\mu_p}{\tau_0} Uh \left(1 - \frac{Q}{Uh} \right)}.$$

Substituting this formula into equation (5) gives

$$\frac{\sigma}{\rho g} \ddot{h} = 1 - \frac{\tau_0}{\rho g h} \left[1 - \sqrt{\frac{2\mu_p U}{\tau_0 h} \left(1 - \frac{Q}{Uh} \right)} \right]^{-1}. \quad (12)$$

For the region of the constant film thickness, when $h = h_0$, all derivatives with respect to the x coordinate are equal to zero. As a result,

$$\frac{Q}{Uh} = 1 - \frac{\tau_0 h_0}{2\mu_p U} \left(1 - \frac{\tau_0}{\rho g h_0} \right)^2, \quad (13)$$

and upon reduction to dimensionless variables

$$\xi = \frac{x}{h_0}, \quad H = \frac{h}{h_0}, \quad Ca = \frac{U\mu_p}{\sigma}, \quad D = h_0 \sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}}, \quad B = \frac{\tau_0}{\sqrt{\rho g \sigma}} \quad (14)$$

equation (12) assumes the form

$$\frac{d^3 H}{d\xi^3} = D^2 - BD \left[H - \sqrt{\frac{2Ca}{BD} (H-1) + (1-B/D)^2} \right]^{-1}. \quad (15)$$

The ultimate value of the film thickness h_0 is attained asymptotically at a sufficiently large value of the x coordinate. To sufficient accuracy, it can be assumed that $H \rightarrow 1$, $\frac{dH}{d\xi} \rightarrow 0$, $\frac{d^2 H}{d\xi^2} \rightarrow 0$ as $\xi \rightarrow \infty$.

Equation (15) contains one more unknown magnitude D (or h_0 in dimensionless form) related to the liquid flow velocity by expression (13). To calculate it, it is necessary to find the shape of the liquid surface below the stagnation line and then to fit it to the shape of the dynamic meniscus in the stagnation line. The condition to fit the shapes will be that missing condition that will allow h_0 to be calculated.

Now consider the liquid surface extending to the right of the stagnation line. By assumption, this surface obeys the equations of capillary statics, in particular the Laplace equation:

$$p - p_0 = -\sigma \frac{d^2 h}{dx_1^2} \left[1 + \left(\frac{dh}{dx_1} \right)^2 \right]^{-3/2}. \quad (16)$$

Here the x_1 axis coincides with the x axis, but taken from the horizontal surface of the liquid poured into the bath (Fig. 1). Call the zone below the stagnation line the region of the static meniscus of the liquid.

It is obvious that in the stagnation line, the liquid pressure determined on the side of both the dynamic and static regions must be the same. Then, following from equations (2) and (16) the condition to join the solutions for the dynamic and static regions can be found:

$$\ddot{h} = \frac{d^2h}{dx^2} = \frac{d^2h}{dx_1^2} \left[1 + \left(\frac{dh}{dx_1} \right)^2 \right]^{-3/2} \quad \text{at } h = h_s. \quad (17)$$

The position of the stagnation line h_s is calculated by substituting expression (13) into formula (10).

The calculation results (Fig. 2) demonstrate that there exists some dimensionless withdrawal speed, Ca^* , of the plate, at which the dimensionless film thickness D becomes equal to the plastic factor B and the entrained film thickness $h_0 = \frac{\tau_0}{\rho g}$ does not depend on surface tension.

The case of no viscoplastic movement zone. Consider the case when the dimensionless withdrawal speed Ca is smaller than Ca^* . Then the viscoplastic flow region is absent, i. e., $\delta = 0$, and the equation for the dynamic meniscus of the liquid will be of the form

$$\frac{\sigma}{\rho g} \ddot{h} = 1 - \frac{\tau_0}{\rho g h}. \quad (18)$$

In this case, the dynamic meniscus (Fig. 3) can be divided into two zones – upper A with no plastic deformation and – lower C with plastic deformation. When liquid deformation is absent in zone A , the liquid layer moves in it as a single whole with the plate moving upwards with the latter. In view of this, from the condition of the constant liquid flow rate $Q = \text{const}$ and the constant liquid velocity $u = \text{const} = U$ we have that the thickness of the liquid layer at any point of zone A is the same and equal to $h_0 = Q/U = \text{const}$. Thus, in zone A the film thickness is constant, whereas in the previous considered case it has tended asymptotically to a constant value.

It is obvious that at boundary F of zones A and C , the conditions $h_A = h_C = h_0$, $\dot{h}_A = \dot{h}_C = 0$, and $\ddot{h}_A = \ddot{h}_C = 0$ are valid. The last condition follows from the requirement of pressure continuity in the layer.

As for the definition of the liquid surface shape in zone C and the condition to join this shape and the static meniscus shape, the following should be emphasized. The film thickness h in equation (18) obviously changes from a minimum value of h_0 at point F of zone C to a maximum value equal to $h_{\text{max}} = h_s = \frac{\tau_0}{\rho g}$. Here $h_0 < \frac{\tau_0}{\rho g}$, since in the opposite case

the value of the derivative of \ddot{h} at point F will be positive. A maximum value of the film thickness h_{max} separates the zone of the dynamic meniscus from the static one, i. e., in fact, it is the stagnation line. The above method of joining the two menisci then remains valid.

In dimensionless variables (14), the equation of the dynamic meniscus and the position of the stagnation line are of the form

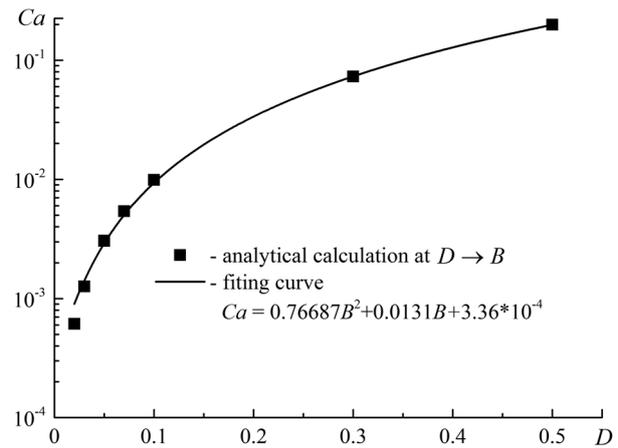


Fig. 2. Withdrawal velocity Ca vs. film width D at $D \rightarrow B$

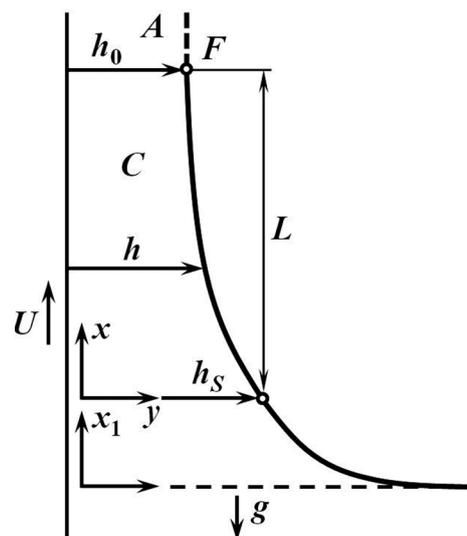


Fig. 3. Flow scheme for the case of no viscoplastic flow zone

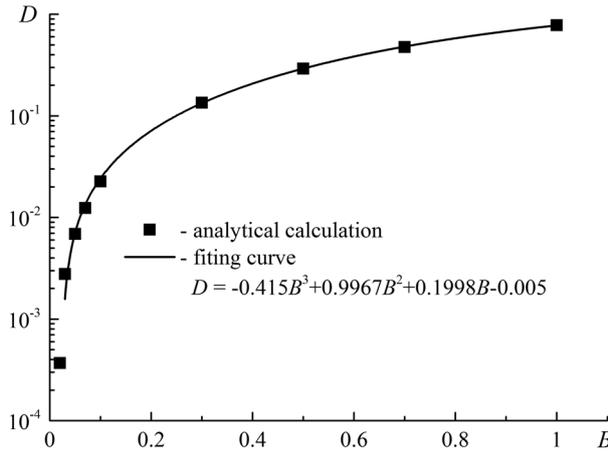


Fig. 4. Film width D vs. plastic factor B for the case of no viscoplastic flow zone

$$\frac{d^3 H}{d\xi^3} = D^2 - \frac{BD}{H}, \quad H_S = B / D.$$

Hence it follows that the entrained liquid film thickness h_0 does not depend on the withdrawal speed, Ca , of the plate. The calculation results in Fig. 4 confirm this fact.

The thickness of the quasi-solid flow zone is commensurable with the viscoplastic flow zone thickness. Assume that in the second equation of

(11) the condition $1 - \frac{3\Delta}{2h} \gg \frac{\Delta^3}{2h^3}$ is satisfied, then neglecting the term $\frac{\Delta^3}{2h^3}$, for the liquid flow rate in the film we have:

$$Q = Uh - \frac{\tau_0 h^3}{3\mu_P \Delta} \left(1 - \frac{3\Delta}{2h} \right). \quad (19)$$

To find the condition for feasibility of equation (19), it is assumed that $1 - \frac{3\Delta}{2h} \geq 10 \frac{\Delta^3}{2h^3}$. This means that $\frac{\Delta}{h} < \frac{1}{2}$. Thus, equation (19) is valid for quite a common case when the thickness of the quasi-solid flow zone is of the same order as the thickness of the viscoplastic flow zone. Having used formula (6), reduce equation (19) to the form

$$Q = Uh + \frac{\tau_0}{2\mu_P} h^2 - \frac{\rho g}{3\mu_P} h^3 + \frac{\sigma}{3\mu_P} h^3 \ddot{h}. \quad (20)$$

The withdrawn layer thickness h enough tends asymptotically to a constant value of h_0 at a sufficiently large distance from the liquid surface in the bath (as $x \rightarrow \infty$) (Fig. 1). At a time, all derivatives of h with respect x tend to zero. Substitution of the appropriate quantities into equation (20) yields

$$Q = Uh_0 + \frac{\tau_0}{2\mu_P} h_0^2 - \frac{\rho g}{3\mu_P} h_0^3. \quad (21)$$

Combining equalities (20) and (21), and also using the dimensionless variables (14), for the dynamic meniscus we have

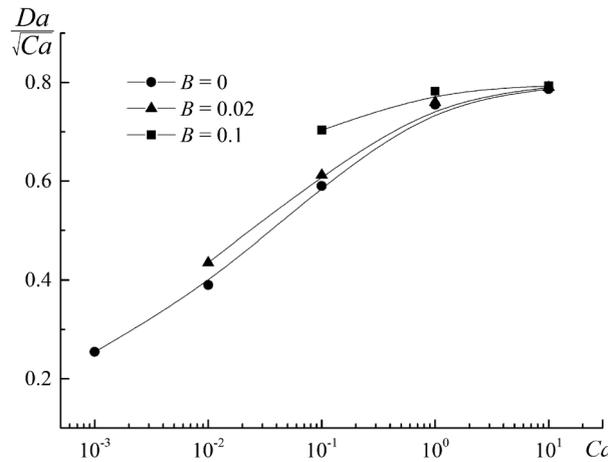


Fig. 5. Reaching the asymptotic value of D / \sqrt{Ca} at increase in the withdrawal speed Ca and at different values of the plastic factor B

$$\frac{H^3}{3Ca} \frac{d^3 H}{d\xi^3} = (1-H) \left[1 + \frac{BD}{2Ca} (1+H) - \frac{D^2}{3Ca} (1+H+H^2) \right]. \quad (22)$$

As previously, to solve the problem stated – to determine the layer thickness h_0 – it is necessary to use condition (17) of joining the solutions for the dynamic and static menisci in the stagnation line h_s . The position of the latter is found by substituting expression (21) into formula (10).

The calculation results are shown in Fig. 5. It should be noted that in deriving equation (22) it

was assumed that $\frac{\Delta}{h} < \frac{1}{2}$. For sufficiently large

distances from the static meniscus this condition is re-written as $\frac{\Delta_0}{h_0} < \frac{1}{2}$ where $\Delta_0 = \frac{\tau_0}{\rho g}$ according to formula (6). The reduction of the obtained condition to the dimensionless form through D and B is indicative of the fact that equation (22) can be used for the case when $2B < D$. From Fig. 5 it is seen that at sufficiently large withdrawal speed, Ca , of the plate, the film thickness becomes independent of surface tension and is assigned only by friction and gravity forces.

Acknowledgements. The authors are grateful to Elvira Zharkova for help in the preparation and translation of the manuscript.

References

1. Baikov V. I., Shulman Z. P. Liquid capture by a moving surface. *Fluid Dynamics*, 1985, vol. 20, no. 4, pp. 508–512. doi: 10.1007/BF01049881.
2. Baikov V. I., Shulman Z. P., Engelgardt K. Coating of a non-Newtonian fluid onto a moving surface. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1985, vol. 26, no. 4, pp. 496–502. doi: 10.1007/BF01101631.
3. Shulman Z. P., Baikov V. I., Engelgardt K. Holding of a liquid film by a vertical surface. *Theoretical Fundamentals of Chemical Engineering*, 1985, vol. 19, no. 2, pp. 157–163.
4. Polyinin A. D., Kutepov A. M., Kazenin D. A., Vyazmin A. V. Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering. London, CRC Press, 2001. 408 p. doi: 10.1201/9781420024517.

Информация об авторах

Байков Валентин Иванович – д-р физ.-мат. наук, Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: baikov@hmti.ac.by.

Чорный Андрей Дмитриевич – канд. физ.-мат. наук, заведующий лабораторией, Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: anchor@hmti.ac.by.

Для цитирования

Байков, В. И. Увлечение вязкопластической жидкости движущейся вертикально пластиной / В. И. Байков, А. Д. Чорный // Докл. НАН Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 95–101.

Information about the authors

Baikov Valentin Ivanovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: baikov@hmti.ac.by.

Chorny Andrei Dmitrievich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Head of the Laboratory, A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: anchor@hmti.ac.by.

For citation

Baikov V. I., Chorny A. D. Capturing a viscoplastic liquid by a moving vertical plate. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 95–101.

Член-корреспондент В. М. Артемьев, А. О. Наумов, Л. Л. Кохан

Институт прикладной физики НАН Беларуси, Минск, Республика Беларусь

РЕКУРРЕНТНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ С РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ РЕШЕНИЯ

При высокой размерности задачи фильтр Калмана становится трудно реализуемым в реальном масштабе времени из-за больших вычислительных затрат. В качестве альтернативы рассмотрена методика синтеза фильтра на основе рекуррентного метода наименьших квадратов с регуляризацией решения. Методика дает возможность сократить вычислительные затраты, однако при этом возрастает дисперсия ошибок фильтрации. На примере показана степень этого увеличения и даны рекомендации по выбору величины коэффициента регуляризации.

Ключевые слова: фильтрация, метод наименьших квадратов, регуляризация.

Corresponding Member V. M. Artemiev, A. O. Naumov, L. L. Kokhan

Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

RECURSIVE LINEAR FILTERING OF RANDOM SEQUENCES USING THE LEAST SQUARES METHOD WITH SOLUTION REGULARIZATION

When the dimension of the problem is high, the Kalman filter becomes difficult to realize in real time due to computational costs. Alternatively, the technique of synthesis of the filter on the basis of the recursive least squares method with solution regularization is considered. The technique allows reducing the computational costs, but it increases the variance of the filtering error. By the example, the extent of this increase is shown and the recommendations for selection of the regularization coefficient are given.

Keywords: filtering, least squares method, regularization.

Введение. Для решения задач линейной фильтрации случайных последовательностей, наблюдаемых на фоне аддитивных помех, используют статистический подход на основе фильтра Калмана (ФК), обеспечивающий минимальную дисперсию ошибок фильтрации [1]. Однако при высокой размерности задачи ФК становится трудно реализуемым в реальном масштабе времени из-за больших вычислительных затрат. Альтернативой статистическому служит детерминистский подход, когда фильтрация осуществляется на основе результатов лишь текущих измерений [2] с привлечением эмпирических данных. При этом снижение вычислительных затрат происходит за счет того, что не требуется проведения операций статистического усреднения. Для реализации такого подхода основным является метод наименьших квадратов (МНК), где в качестве критерия оптимальности используется квадратичная форма невязки решения [3; 4]. Получаемые при этом алгоритмы фильтрации требуют использования всей последовательности измерений, начиная с момента начала работы фильтра. Очевидно, что при большом числе периодов измерений фильтры такого рода становятся мало пригодными. Задачу фильтрации целесообразно решать рекуррентно, как это имеет место у ФК, используя лишь оценки на предыдущем шаге фильтрации и текущие измерения. В такой постановке для синтеза алгоритмов фильтрации можно использовать рекуррентный метод наименьших квадратов (РМНК) [5], однако это обычно приводит к необходимости решения некорректных (плохо обусловленных) задач [6].

В настоящей работе предлагается методика синтеза рекуррентных линейных фильтров случайных последовательностей на основе РМНК (ФНК) с регуляризацией решения, что позволяет решать широкий круг задач с меньшими вычислительными затратами, чем у ФК.

Формулировка задачи. Полезный сигнал \mathbf{x}_k является случайной последовательностью в виде m -мерного вектора $\mathbf{x}_k = [x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk}]^T$, где $k = 0, 1, 2, \dots$ есть дискретное время, а символ « T » обозначает операцию транспонирования. Модель сигнала задается линейным конечно-разностным уравнением вида

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k, \quad (1)$$

где \mathbf{A}_k – матрица размерности $m \times m$, а случайный m -мерный вектор $\mathbf{w}_k = [w_{1k}, w_{2k}, \dots, w_{mk}]^T$ есть формирующее воздействие модели полезного сигнала в виде центрированного белого шума с ковариационной матрицей \mathbf{Q}_k .

Модель n -мерного вектора измерений $\mathbf{z}_k = [z_{1k}, z_{2k}, \dots, z_{nk}]^T$ определяется линейным уравнением

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad (2)$$

где матрица измерений \mathbf{H}_k имеет размерность $m \times n$, а случайный вектор $\mathbf{v}_k = [v_{1k}, v_{2k}, \dots, v_{nk}]^T$ есть центрированный белый шум с ковариационной матрицей \mathbf{R}_k , который моделирует ошибки измерений и является шумовым воздействием для канала измерений.

Задача состоит в нахождении уравнений оценки вектора полезного сигнала $\hat{\mathbf{x}}_k = [\hat{x}_{1k}, \hat{x}_{2k}, \dots, \hat{x}_{mk}]^T$ на основе выбранного критерия оптимальности и текущих измерений \mathbf{z}_k методом РМНК. Использование принципа регуляризации позволяет получить единую методику синтеза алгоритмов фильтрации для различных типов задач. Так, если $m < n$, задача будет переопределенной и решения в обычном смысле может не существовать. Такая ситуация характерна для задач фильтрации с комплексированием измерений от нескольких источников. Случай $m > n$ приводит к недоопределенной задаче, что возникает при ограниченных возможностях измерений. Даже если $m = n$, решение может быть неединственным за счет шумов измерений. Регуляризация позволяет обойти эти трудности.

Уравнения фильтра. В основе методики синтеза лежит выбор критерия оптимальности $J_k(\hat{x}_k)$. Для метода наименьших квадратов в основе критерия используется квадратичная форма невязки (КФН) $(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k)$, где символ « -1 » обозначает операцию обращения матрицы. При синтезе по такому критерию задача может оказаться некорректной и для регуляризации решения в состав критерия следует дополнительно включить сглаживающий квадратичный функционал, выбор которого производится исходя из сущности решаемой задачи. Для сформулированных выше исходных данных подходящим вариантом является квадратичная форма $(\mathbf{x}_k - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1})$, вытекающая из модели полезного сигнала (1). В результате критерий $J_k(x_k)$ синтеза ФНК выглядит следующим образом:

$$J_k(\hat{x}_k) = (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k) + \alpha (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}), \quad (3)$$

где α является положительным коэффициентом регуляризации, величина которого выбирается из эмпирических соображений или по результатам моделирования и позволяет компенсировать отсутствие знаний априорной статистики. Этот критерий определяет текущие потери фильтрации в детерминистской постановке и его можно трактовать следующим образом: первое слагаемое учитывает влияние измерений \mathbf{z}_k на качество решения $\hat{\mathbf{x}}_k$; второе позволяет согласовать его с решением $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ на предыдущем шаге фильтрации с учетом модели (1), а коэффициент α определяет вес этого слагаемого.

Оптимальные оценки $\hat{\mathbf{x}}_k$ находятся из условия минимума критерия (3). Необходимое условие минимума представляется в виде уравнения

$$\frac{\partial J_k(\hat{x}_k)}{\partial \hat{x}_k} = -2\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k) + 2\alpha \mathbf{Q}_k^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) = 0.$$

Его решение приводит к уравнению оптимального ФНК, который имеет вид

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{K}_{1k} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}_{2k} \mathbf{z}_k. \quad (4)$$

Здесь матричный коэффициент \mathbf{K}_{1k} размерности $m \times m$ имеет форму

$$\mathbf{K}_{1k} = \alpha(\alpha \mathbf{Q}_k^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A}_k \quad (5)$$

и задает экстраполяцию оценки $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ на следующий шаг. Матричный коэффициент усиления \mathbf{K}_{2k} размерности $m \times n$ определяется равенством

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{K}_{1k}^* \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}_{2k}^* (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{K}_{1k}^* \hat{\mathbf{x}}_{k-1}), \quad (6)$$

и позволяет уточнить экстраполированное значение за счет наблюдения \mathbf{z}_k на текущем шаге фильтрации. Структура уравнения (4) говорит о рекуррентном характере фильтрации. Путем эквивалентных преобразований оно сводится к структуре фильтра с обратной связью

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{K}_{1k}^* \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}_{2k}^* (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{K}_{1k}^* \hat{\mathbf{x}}_{k-1}), \quad (7)$$

где

$$\mathbf{K}_{1k}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{2k} \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{K}_{1k} = \mathbf{A}_k, \quad \mathbf{K}_{2k}^* = \mathbf{K}_{2k}. \quad (8)$$

В этом случае структура ФНК и первое слагаемое в формуле (7) совпадают с ФК.

Коэффициенты усиления ФНК находятся по формулам (5), (6) или (8), в то время как у ФК это требует решения ковариационного уравнения совместно с уравнением для оптимального коэффициента усиления, что более трудоемко. Однако уменьшение вычислительных затрат достигается за счет снижения точности фильтрации. Объем вычислений коэффициентов усиления ФНК в основном связан с обращением матрицы $(\alpha \mathbf{Q}_k^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k)$. Для вычислений можно воспользоваться формулой матричного тождества $(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{C}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C})^{-1} = \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{C}^T (\mathbf{D} + \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{B}$ [7], что приводит к выражению

$$(\alpha \mathbf{Q}_k^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k)^{-1} = \alpha^{-1} \mathbf{L}_k \mathbf{Q}_k,$$

где

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{I} - \alpha^{-1} \mathbf{Q}_k \mathbf{H}_k^T (\mathbf{R}_k + \alpha^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{H}_k^T)^{-1} \mathbf{H}_k.$$

Точность фильтрации. Качество работы ФНК оценивается величиной потерь (3) и для детерминистского подхода синтезированный фильтр оптимален. В то же время при статистическом подходе качество определяется путем оценки величин дисперсий ошибок фильтрации. В линейном случае оптимальным является ФК, обеспечивающий минимально возможные значения этих дисперсий. Очевидно, что в тех же условиях фильтрации дисперсии ошибок ФНК будут выше, поэтому результаты ФК могут служить оценкой нижних границ величин этих ошибок. Представляет интерес сравнение дисперсий ошибок обоих фильтров при одинаковых условиях работы, что дает возможность оценки снижения точности фильтрации при переходе от статистического к детерминистскому подходу.

Вектор ошибок фильтрации равен $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$. После подстановки выражений (1), (2), (4), (5) и (6) приходим к следующему уравнению ошибок ФНК:

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k - \mathbf{K}_{1k} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \mathbf{K}_{2k} \mathbf{z}_k = \mathbf{K}_{1k} \mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{L}_k \mathbf{w}_k - \mathbf{K}_{2k} \mathbf{v}_k. \quad (9)$$

Вектор математических ожиданий ошибок обозначается через $\mathbf{m}_{ek} = \langle \mathbf{e}_k \rangle$, где угловыми скобками обозначена операция нахождения математического ожидания. Усредняя обе части (9) получаем уравнение для вектора математических ожиданий ошибок

$$\mathbf{m}_{ek} = \mathbf{K}_{1k} \mathbf{m}_{ek-1} + \mathbf{L}_k \mathbf{m}_{wk} - \mathbf{K}_{2k} \mathbf{m}_{vk}, \quad (10)$$

где $\mathbf{m}_{wk} = \langle \mathbf{w}_k \rangle$ и $\mathbf{m}_{vk} = \langle \mathbf{v}_k \rangle$ есть математические ожидания воздействий. В нашем случае мы полагаем их равными нулю, что сводит (10) к однородному уравнению $\mathbf{m}_{ek} = \mathbf{K}_{1k} \mathbf{m}_{ek-1}$. Его

решение с течением времени стремится к нулю и это говорит о том, что уравнение ФНК (4) обеспечивает несмещенность оценок.

При статистически независимых дискретных белых шумах \mathbf{w}_k и \mathbf{v}_k , а также учитывая независимость значений ошибок \mathbf{e}_{k-1} в момент времени $k - 1$ от воздействий \mathbf{w}_k и \mathbf{v}_k в последующий момент времени k , можно получить уравнение для ковариационной матрицы ошибок $\mathbf{P}_k = \langle (\mathbf{e}_k - \mathbf{m}_{ek})(\mathbf{e}_k - \mathbf{m}_{ek})^T \rangle$ в следующем виде:

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{K}_{1k} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{K}_{1k}^T + \mathbf{L}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{L}_k^T + \mathbf{K}_{2k} \mathbf{R}_k \mathbf{K}_{2k}^T \quad (11)$$

с начальным условием \mathbf{P}_0 . Диагональные элементы этой матрицы являются дисперсиями ошибок фильтрации каждой из составляющих вектора \mathbf{x}_k .

Выбор величины коэффициента α можно осуществлять следующим образом. Первоначально задаются значением $\alpha = 1$, что соответствует критерию максимального правдоподобия, если воздействия \mathbf{w}_k и \mathbf{v}_k имеют гауссово распределение [4]. Полученные из уравнения (11) значения дисперсий ошибок будут больше, чем у ФК. Затем путем моделирования находят значения α , соответствующие устойчивому решению (11) и наименьшим значениям дисперсий ошибок. В итоге ФНК обеспечивает величину дисперсий, хотя и большую чем у ФК, но меньшую чем у метода максимального правдоподобия.

Пример сравнения дисперсий ошибок ФНК и ФК. Рассмотрим задачу оптимальной фильтрации текущих координат дальности до маневрирующего воздушного объекта по данным радиолокатора сопровождения (РЛС). Статистическая модель изменения координат приведена в [8] и имеет вид системы стохастических конечно-разностных уравнений

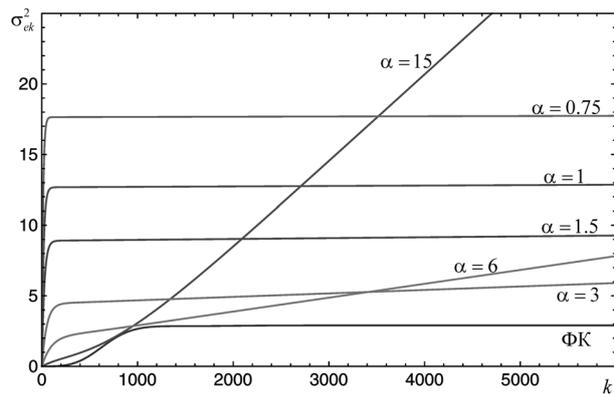
$$\begin{aligned} x_{1k} &= x_{1k-1} + T_0 x_{2k-1} + 0,5T_0^2 x_{3k-1}; \\ x_{2k} &= x_{2k-1} + T_0 x_{3k-1}; \\ x_{3k} &= a_3 x_{3k-1} + w_{3k}; \quad 0 < a_3 < 1. \end{aligned} \quad (12)$$

В этих уравнениях посредством x_{1k} обозначена дальность до объекта (в метрах) в моменты времени $k = 0, 1, 2, \dots$; x_{2k} – скорость изменения дальности (мс^{-1}); x_{3k} – ускорение (мс^{-2}), которое формируется воздействием w_{3k} в виде центрированного дискретного белого шума с постоянной дисперсией $\sigma_{w_3}^2$. Параметр T_0 (с) задает величину периода поступления измерений дальности от РЛС. В векторной форме уравнения (12) могут быть представлены в виде (1) со следующими значениями векторов и матриц:

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & T_0 & 0,5T_0^2 \\ 0 & 1 & T_0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_{3k} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Q}_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{w_3}^2 \end{pmatrix}.$$

Полагаем, что дальность x_{1k} измеряется с аддитивной ошибкой v_{1k} в виде центрированного белого шума с постоянной дисперсией $\sigma_{v_1}^2$, статистически независимого от w_{3k} . Линейная модель измерений задается уравнением (2), где имеют место значения

$$\mathbf{H} = (1 \quad 0 \quad 0); \quad \mathbf{z}_k = z_{1k}; \quad \mathbf{v}_k = v_{1k}; \quad \mathbf{R}_k = \sigma_{v_1}^2.$$



Дисперсии ошибок измерения дальности σ_{ek}^2 у ФК и ФНК при различных значениях коэффициента регуляризации α
 Variance of filtering errors of measurement of the range σ_{ek}^2 of the Kalman filter and the least squares filter at different values of the regularization coefficient α

При расчетах использованы следующие исходные данные: период поступления измерений $T_0 = 10^{-3}$ с; дисперсия ошибки измерения дальности $\sigma_{v_1}^2 = 900 \text{ м}^2$; дисперсия изменения ускорения в установившемся режиме $\sigma_3^2 = 400 \text{ м}^2/\text{с}^{-4}$; величина коэффициента $a_3 = 0,968$, соответствующая длительности корреляции ускорения в установившемся режиме 30 с; дисперсия формирующего воздействия ускорения для этих данных $\sigma_{w_3}^2 = 25,2 \text{ м}^2/\text{с}^{-4}$.

Используя выражение (11) для ковариационной матрицы ошибок ФНК и ковариационного уравнения ФК [1; 2] при заданных параметрах модели входного воздействия и ряда значений коэффициентов α получены графики изменения дисперсий ошибок оценок дальности σ_{ek}^2 у ФК и ФНК, приведенные на рисунке.

Графики показывают, что наименьшими значениями дисперсий ошибок обладает ФК. Для метода максимального правдоподобия ($\alpha = 1$) эта дисперсия возрастает примерно в 4 раза. Увеличивая значение коэффициента регуляризации α , дисперсия ошибки вначале уменьшается (примерно до $\alpha = 4$), а затем решение становится неустойчивым ($\alpha = 6; 15$). Наименьшее значение устойчивой величины дисперсии имеет место при $\alpha = 3$, когда дисперсия ошибок ФНК примерно в 2 раза больше, чем у ФК.

Заключение. Использование фильтра на основе рекуррентного метода наименьших квадратов с регуляризацией решения позволяет сократить затраты на вычисление коэффициентов усиления по сравнению с фильтром Калмана, однако это достигается за счет увеличения дисперсий ошибок фильтрации. Снижение их величин осуществляется путем эмпирического выбора величины коэффициента регуляризации, что делает возможным получение дисперсий ошибок ФНК, хотя и больших, чем у ФК, но меньших, чем при использовании метода максимального правдоподобия.

Список использованных источников

1. Jazwinski, A. H. *Stochastic Process and Filtering Theory* / A. H. Jazwinski. – NY: Academic Press, 1970. – 362 p.
2. Степанов, О. А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации / А. О. Степанов. – СПб., 2009. – Ч. 1: Введение в теорию оценивания. – 496 с.
3. Линник, Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений / Ю. В. Линник. – Изд. 2-е, доп. и испр. – М.: Физматгиз, 1962. – 349 с.
4. Эльясберг, П. Е. Определение движения по результатам измерений / П. Е. Эльясберг. – М.: Наука, 1976. – 267 с.
5. Альберт, А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание / А. Альберт. – М.: Наука, 1977. – 215 с.
6. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 232 с.
7. Себер, Д. Линейный регрессионный анализ / Д. Себер. – М.: Мир, 1980. – 322 с.
8. Фарина, А. Цифровая обработка радиолокационной информации. Сопровождение целей / А. Фарина, Ф. Студер. – М., 1993. – 319 с.

References

1. Jazwinski A. H. *Stochastic Process and Filtering Theory*. New York, Academic Press, 1970. 362 p.
2. Stepanov O. A. *Fundamentals of theory of estimation as applied to the tasks of navigation information processing. Part I: An introduction to Theory of Estimation*. Saint-Petersburg, 2009. 496 p. (in Russian)
3. Linnik Yu. V. *Least squares method and the fundamentals of the mathematical-statistical theory of observation processing*, 2nd ed. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962. 349 p.
4. Elyasberg P. E. *Motion determination in terms of the measurement results*. Moscow, Nauka Publ., 1976. 267 p.
5. Albert A. *Regression, pseudoinversion and recursive estimation*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 215 p.
6. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *The methods of solution of ill-posed tasks*. Moscow, Nauka Publ., 1979. 232 p.
7. Seber D., Lee A. J. *Linear regression analysis*. 2nd ed. Wiley, 2003. 582 p. doi.org/10.1002/9780471722199.
8. Farina A., Studer F. *Digital processing of radar information. Target support*. Moscow, 1993. 319 p.

Информация об авторах

Артемьев Валентин Михайлович – член-корреспондент, д-р техн. наук, профессор, гл. науч. сотрудник, Институт прикладной физики НАН Беларуси (ул. Академическая, 16, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: artemiev@iaph.bas-net.by.

Наумов Александр Олегович – заведующий лабораторией, Институт прикладной физики НАН Беларуси (ул. Академическая, 16, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: naumov@iaph.bas-net.by.

Information about the authors

Artemiev Valentin Michailovich – Corresponding Member, D. Sc. (Engineering), Professor, Chief researcher, Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (16, Akademicheskaya Str., Minsk, Republic of Belarus). E-mail: artemiev@iaph.bas-net.by.

Naumov Alexander Olegovich – Head of the Laboratory, Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (16, Akademicheskaya Str., Minsk, Republic of Belarus). E-mail: naumov@iaph.bas-net.by.

Кохан Леонид Леонидович – ст. науч. сотрудник, Институт прикладной физики НАН Беларуси (ул. Академическая, 16, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kokhanll@iaph.bas-net.by.

Для цитирования

Артемьев, В. М. Рекуррентная линейная фильтрация случайных последовательностей методом наименьших квадратов с регуляризацией решения / В. М. Артемьев, А. О. Наумов, Л. Л. Кохан // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 102–107.

Kokhan Leonid Leonidovich – Senior researcher, Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (16, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kokhanll@iaph.bas-net.by.

For citation

Artemiev V. M., Naumov A. O., Kokhan L. L. Recursive linear filtering of random sequences using the least squares method with solution regularization. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 102–107. (in Russian)

В. А. Кот*Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси, Минск, Республика Беларусь***ПРЯМОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
ДЛЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО ПРОСТРАНСТВА***(Представлено академиком О. Г. Пенязковым)*

Впервые на основе прямого интегрирования обобщенного уравнения переноса в полуограниченные пространства получены последовательности из интегральных тождественных равенств, которые учитывают особенности дифференциального уравнения и граничные условия. Это позволило на основе степенных полиномов с экспоненциальным сомножителем построить с высокой сходимостью приближенные решения. Погрешность для широкой области параметров составляет сотые-тысячные доли процента.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, интегральные преобразования, тождественные равенства, приближенное решение.

V. A. Kot*A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus***DIRECT INTEGRATION OF THE HEAT CONDUCTION EQUATION FOR A SEMI-BOUNDED SPACE***(Communicated by O. G. Penyazkov)*

On the basis of direct integration of the generalized equation of heat transfer in a semi-bounded space, the sequences of identical integral equalities defining the features of a differential equation and boundary conditions were obtained for the first time. On the basis of power polynomials with an exponential factor, this made it possible to construct approximate solutions with high convergence. The error in determining parameters over a wide range is hundredths and thousandths of a percent.

Keywords: heat-conduction equation, integral transformation, identical equalities, approximate solution, convergence.

Введение. Построение аналитических решений для нестационарного уравнения теплопроводности в полуограниченной области является одним из важнейших вопросов теории теплопроводности [1–7]. Применяемые для данных задач интегральные преобразования в полубесконечных пределах описываются общим выражением $\bar{T}(\xi) = \int_a^\infty T(y)K(y, \xi)dy$, ($a \geq 0$), где $\bar{T}(\xi)$ – изображение функции; $K(y, \xi)$ – ядро интегрального преобразования. В качестве ядер используются разные функции: степенная, тригонометрическая, функции Бесселя, полиномы Лежандра, функции Вебера и Макдональда и др. [8–10]. В результате преобразования исключается из дифференциального уравнения в частных производных одна из независимых переменных. В итоге проблема сводится к задаче обратного преобразования, т. е. к решению интегрального уравнения относительно оригинала $T(y, t)$. В большинстве практически важных случаев это обращение может быть представлено интегралом симметричного вида $T(\xi) = \int_a^\infty \bar{T}(y, \xi)R(y, \xi)d\xi$, где $R(y, \xi)$ – надлежаще выбранная функция (ядро обратного преобразования), определенная в области $a \leq y < \infty$, $a \leq \xi < \infty$.

В работе [7] построены интегральные преобразования для нахождения аналитических решений краевых задач нестационарной теплопроводности для обобщенного уравнения переноса в бесконечной области, ограниченной изнутри плоской, цилиндрической или сферической поверхностями. В данном случае речь идет об уравнении

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + \frac{m}{y} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{1}{\bar{y}^m} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{y}^m \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) \quad (1)$$

в области $G = \{\bar{y} > y_0\}$, $\bar{t} > 0$, на границе которой задано одно из граничных условий: температурный нагрев

$$\bar{T}(\bar{y}, \bar{t}) \Big|_{\bar{y}=y_0} = \bar{\gamma}_1(\bar{t}), \quad \bar{t} > 0, \quad (2)$$

тепловой нагрев

$$-\frac{\partial \bar{T}(\bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=y_0} = \frac{1}{\lambda} \bar{\gamma}_2(\bar{t}), \quad \bar{t} > 0, \quad (3)$$

нагрев средой

$$-\lambda \frac{\partial \bar{T}(\bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=y_0} = h \left[\bar{\gamma}_3(\bar{t}) - T(\bar{y}, \bar{t}) \Big|_{\bar{y}=y_0} \right], \quad \bar{t} > 0, \quad (4)$$

а также условия на бесконечности

$$\bar{T}(\bar{y}, \bar{t}) \Big|_{\bar{y} \rightarrow \infty} = T_0; \quad \frac{\partial T(\bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y} \rightarrow \infty} = 0, \quad \bar{t} \geq 0. \quad (5)$$

В виде начального условия примем

$$\bar{T}(\bar{y}, 0) = T_0, \quad \bar{y} \geq y_0. \quad (6)$$

При $m = 1$ область ограничена изнутри цилиндрической поверхностью, при $m = 2$ – сферической, при $m = 0$ – плоской. Как отмечается в [7], развиваемый подход допускает справа в (1) наличие функции источника тепла $\bar{Q}(\bar{y}, \bar{t})/(c\rho)$, неоднородного начального условия $\bar{T}(\bar{y}, 0) = \bar{\Phi}(\bar{y})$ ($\bar{y} \geq y_0$), а также зависимостей коэффициентов температуро- и теплопроводности от времени $a = a(\bar{t})$, $\lambda = \lambda(\bar{t})$, где $a(\bar{t})$, $\lambda(\bar{t})$ – неотрицательные непрерывные функции в области $\bar{t} \in [0, \infty)$. Полученные решения записываются (в случае цилиндрической симметрии) в виде несобственных интегралов (см. ниже), что крайне затрудняет их практическое использование.

Постановка задачи и ее решение. В настоящем сообщении осуществлено прямое интегрирование уравнения теплопроводности в полубесконечной области $y \in [y_0, \infty)$, что свело задачу к последовательности из интегральных тождественных равенств. Решения, удовлетворяющие данным тождествам, сходятся, по всей видимости, в предельном смысле к точному решению. По крайней мере, проведенный численный анализ сходимости приближенных решений показал весьма обнадеживающий результат. Строгое доказательство сходимости решения выходит за рамки представленной работы и может явиться ее дальнейшим развитием.

Придадим задаче безразмерный вид с помощью относительных величин

$$y = \frac{\bar{y}}{L}, \quad R = \frac{y_0}{L}, \quad t = \frac{\bar{t}}{\tau}, \quad \tau = \frac{L^2}{a}, \quad T = \frac{\bar{T} - T_0}{\Delta T}.$$

Условия (2)–(4) объединим обобщенным граничным условием. Тогда вместо (1)–(6), положив $y_0 = L$, получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{y^m} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^m \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad y > 1, \quad t > 0, \quad (7)$$

$$\alpha \frac{\partial T(y, t)}{\partial y} \Big|_{y=1} + \beta T(y, t) \Big|_{y=1} = \gamma(t), \quad t > 0, \quad (8)$$

$$T(y, 0) = 0, \quad y \geq 0,$$

$$T(y, t) \Big|_{y \rightarrow \infty} = 0; \quad \frac{\partial T(y, t)}{\partial y} \Big|_{y \rightarrow \infty} = 0, \quad t \geq 0,$$

при этом $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, а для функции $\gamma(t)$ имеем: $\gamma(t) = (\bar{\gamma}_1(t) - T_0)/\Delta T$, $\gamma(t) = \bar{\gamma}_2(t)L/(\lambda\Delta T)$, $\gamma(t) = (\bar{\gamma}_3(t) - T_0)/\Delta T$ для граничных условий (2)–(4) соответственно.

Введем в рассмотрение интегральный оператор

$$\mathcal{L}^y \equiv \int_{\infty}^y \frac{dy}{y^m} \int_{\infty}^y y^m (\cdot) dy$$

и применим его к уравнению (7). Для левой части имеем

$$\mathcal{L}^y \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \frac{d}{dt} (\mathcal{L}^y (T)).$$

Правая часть (7) преобразуется следующим образом:

$$\mathcal{L}^y \left(\frac{1}{y^m} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^m \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) = \int_{\infty}^y \frac{dy}{y^m} \int_{\infty}^y y^m \left(\frac{1}{y^m} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^m \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) dy = \int_{\infty}^y \frac{1}{y^m} \left(y^m \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy = T.$$

Отсюда получаем уравнение (7), но уже записанное в полной интегральной форме:

$$D_t (\mathcal{L}^y (T)) = T, \quad (9)$$

где $D_t \equiv \frac{d}{dt}$ – дифференциальный оператор. Уравнение (9) определяет температуру в любой точке рассматриваемой области в виде производной по времени от двойного интеграла $\frac{d}{dt} \int_{\infty}^y \frac{dy}{y^m} \int_{\infty}^y y^m T dy$. Потребовав абсолютной интегрируемости функции $T(y, t)$ на числовой прямой $\int_1^{\infty} |T(y, t)| dy < \infty$, введем оператор $\mathcal{L}_1 \equiv \int_{\infty}^1 \frac{dy}{y^m} \int_{\infty}^y y^m (\cdot) dy$ и применим его к уравнению (1). Тогда

$$D_t (\mathcal{L}_1 (T)) = T|_{y=1}. \quad (10)$$

Проинтегрируем (10) по t . С учетом нулевого начального условия имеем

$$\mathcal{L}_1 (T) = \int_0^t T(1, t) dt. \quad (11)$$

Применив оператор $\mathcal{L}^* \equiv \int_{\infty}^y y^m (\cdot) dy$ к уравнению (7), запишем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) &= \int_{\infty}^y \frac{\partial T}{\partial t} y^m dy = \frac{d}{dt} \int_{\infty}^y T y^m dy = \mathcal{L}^* \left(\frac{1}{y^m} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^m \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) = \\ &= \int_{\infty}^y \frac{y^m}{y^m} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^m \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy = \left(y^m \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{\infty}^y = y^m \frac{\partial T}{\partial y}, \end{aligned}$$

или в операторной форме

$$D_t (\mathcal{L}^* (T)) = y^m \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (12)$$

где $\mathcal{L}^* \equiv \int_{\infty}^y y^m (\cdot) dy$ – интегральный оператор. При $y \rightarrow 1$ уравнение (12) принимает вид

$$D_t (\mathcal{L}_1^* (T)) = \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=1}, \quad (13)$$

где $\mathcal{L}_1^* \equiv \int_{\infty}^1 (\cdot) dy$. Интегрирование (13) по t дает интегральное тождество

$$\mathcal{L}_1^* (T) \equiv \int_0^t \frac{\partial T(1, t)}{\partial y} dt. \quad (14)$$

Заменим в граничном условии (8) $T(1, t)$ и $\frac{\partial T(1, t)}{\partial y}$ левыми частями уравнений (10) и (13) соответственно

$$\alpha D_t (\mathcal{L}^* (T)) + \beta D_t (\mathcal{L}_1 (T)) = D_t (\alpha \mathcal{L}^* (T) + \beta \mathcal{L}_1 (T)) = \gamma(t), \quad t > 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) можно рассматривать как модифицированное граничное условие на поверхности $y = 0$, записанное в интегральной форме. Оно учитывает не только заданное условие на поверх-

ности (8), но и дифференциальное уравнение (7). Проинтегрировав (15) по t , приходим к равенству

$$\alpha \mathcal{L}^*(T) + \beta \mathcal{L}_1(T) \equiv \int_0^t \gamma(t) dt = Y_1(t). \tag{16}$$

Теперь построим интегральные тождества, подобные (16), и содержащие в правой части n -кратный интеграл $Y_n(t) = \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{n} \gamma(t) dt^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Введем в рассмотрение интегральные операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n &\equiv \underbrace{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}^y \dots \mathcal{L}^y}_n = \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{y^m} \int_0^y y^m}_{\mathcal{L}_1} \underbrace{\int_0^y \frac{1}{y^m} \int_0^y y^m}_{\mathcal{L}^y} \dots \underbrace{\int_0^y \frac{1}{y^m} \int_0^y y^m}_{\mathcal{L}^y} (\cdot) dy^{(2n)}, \\ \mathcal{L}_n^* &\equiv \underbrace{\mathcal{L}_1^* \mathcal{L}^y \dots \mathcal{L}^y}_n = \int_0^1 \underbrace{y^m \int_0^y \frac{1}{y^m} \int_0^y y^m}_{\mathcal{L}_1^*} \underbrace{\int_0^y \frac{1}{y^m} \int_0^y y^m}_{\mathcal{L}^y} \dots \underbrace{\int_0^y \frac{1}{y^m} \int_0^y y^m}_{\mathcal{L}^y} (\cdot) dy^{(2n-1)}. \end{aligned}$$

Применим операторы \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_1^* к уравнению (9):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(D_t(\mathcal{L}^y(T))) &= D_t(\mathcal{L}_1 \mathcal{L}^y(T)) = D_t(\mathcal{L}_2(T)) = \mathcal{L}_1(T), \\ \mathcal{L}_1^*(D_t(\mathcal{L}^y(T))) &= D_t(\mathcal{L}_1^* \mathcal{L}^y(T)) = D_t(\mathcal{L}_2^*(T)) = \mathcal{L}_1^*(T). \end{aligned} \tag{17}$$

Исключив в (17) правые части с помощью соотношений (11) и (14), приходим к уравнениям

$$D_t(\mathcal{L}_2(T)) = \int_0^t T(1,t) dt, \quad D_t(\mathcal{L}_2^*(T)) = \int_0^t \frac{\partial T(1,t)}{\partial y} dt. \tag{18}$$

Проинтегрируем по t граничное условие (8) и подставим в него левые части уравнений (18):

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^t \frac{\partial T(1,t)}{\partial y} dt + \beta \int_0^t T(1,t) dt &= \int_0^t \gamma(t) dt, \quad t > 0, \\ \alpha D_t(\mathcal{L}_2^*(T)) + \beta D_t(\mathcal{L}_2(T)) &= D_t(\alpha \mathcal{L}_2^*(T) + \beta \mathcal{L}_2(T)) = \int_0^t \gamma(t) dt = Y_1(t), \quad t > 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Проинтегрировав уравнение (19) по t , приходим к тождественному равенству

$$\alpha \mathcal{L}_2^*(T) + \beta \mathcal{L}_2(T) \equiv Y_2(t).$$

Далее применяя к уравнению (9) операторы \mathcal{L}_2 и \mathcal{L}_2^* , получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(D_t(\mathcal{L}^y(T))) &= D_t(\mathcal{L}_2 \mathcal{L}^y(T)) = D_t(\mathcal{L}_1 \mathcal{L}^y \mathcal{L}^y(T)) = D_t(\mathcal{L}_3(T)) = \mathcal{L}_2(T), \\ \mathcal{L}_2^*(D_t(\mathcal{L}^y(T))) &= D_t(\mathcal{L}_2^* \mathcal{L}^y(T)) = D_t(\mathcal{L}_1^* \mathcal{L}^y \mathcal{L}^y(T)) = D_t(\mathcal{L}_3^*(T)) = \mathcal{L}_2^*(T). \end{aligned} \tag{20}$$

Проинтегрировав оба уравнения (20), приходим к двум интегральным тождествам:

$$\mathcal{L}_2(T) \equiv \int_0^t \int_0^t T(0,t) dt^{(2)}, \quad \mathcal{L}_2^*(T) \equiv \int_0^t \int_0^t \frac{\partial T(0,t)}{\partial y} dt^{(2)}. \tag{21}$$

Теперь дважды проинтегрируем по t граничное условие (8) и подставим в него левые части уравнений (21):

$$\alpha \int_0^t \int_0^t \frac{\partial T(1,t)}{\partial y} dt^{(2)} + \beta \int_0^t \int_0^t T(1,t) dt^{(2)} = \int_0^t \int_0^t \gamma(t) dt^{(2)}, \quad t > 0,$$

$$\alpha \mathcal{L}_2^*(T) + \beta \mathcal{L}_2(T) \equiv Y_2(t).$$

С помощью операторов \mathcal{L}_3 и \mathcal{L}_3^* аналогично получаем тождественные равенства

$$\mathcal{L}_3(T) \equiv \int_0^t \int_0^t \int_0^t T(1, t) dt^{(3)}, \quad \mathcal{L}_3^*(T) \equiv \int_0^t \int_0^t \int_0^t \frac{\partial T(1, t)}{\partial y} dt^{(3)},$$

$$\alpha \mathcal{L}_3^*(T) + \beta \mathcal{L}_3(T) \equiv Y_3(t).$$

В итоге имеем три последовательности:

$$\mathcal{L}_n(T) \equiv \int_{\underbrace{0 \dots 0}_n}^t \dots \int_0^t T(1, t) dt^{(n)}, \quad \mathcal{L}_n^*(T) \equiv \int_{\underbrace{0 \dots 0}_n}^t \dots \int_0^t \frac{\partial T(1, t)}{\partial y} dt^{(n)}, \tag{22}$$

$$\{\alpha \mathcal{L}_n^*(T) + \beta \mathcal{L}_n(T) \equiv Y_n(t)\}_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, \tag{23}$$

последняя из которых является (при $n \rightarrow \infty$) альтернативным интегральным представлением уравнения (7) в третьей краевой задаче. На основании (22) получим следующие интегральные представления уравнения теплопроводности (7) для первой и второй краевых задач соответственно:

$$\mathcal{L}_n(T) \equiv \int_{\underbrace{0 \dots 0}_n}^t \dots \int_0^t \gamma_1(t) dt^{(n)}, \quad \mathcal{L}_n^*(T) \equiv - \int_{\underbrace{0 \dots 0}_n}^t \dots \int_0^t \gamma_2(t) dt^{(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+. \tag{24}$$

Поскольку последовательности (22)–(24) эквивалентны уравнению (7) с соответствующими граничными условиями, то можно предположить, что использование входящих в них интегральных тождественных равенств совместно с граничными условиями явится решением краевой задачи.

Придадим интегральному оператору \mathcal{L}_1 альтернативный вид, произведя его многократное интегрирование по частям. Так, для оператора \mathcal{L}_1 имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \equiv \int_{\infty}^1 \frac{dy}{y^m} \int_{\infty}^y y^m (\cdot) dy &= \left(\int_{\infty}^1 \frac{dy}{y^m} \right) \int_{\infty}^1 y^m (\cdot) dy - \int_{\infty}^1 \left(\int_{\infty}^y \frac{dy}{y^m} \right) y^m (\cdot) dy = \\ &= \int_{\infty}^1 \left(\int_{\infty}^1 \frac{dy}{y^m} \right) y^m (\cdot) - \left(\int_{\infty}^y \frac{dy}{y^m} \right) y^m (\cdot) dy = \int_1^{\infty} y^m \left(\int_1^y \frac{dy}{y^m} \right) (\cdot) dy. \end{aligned} \tag{25}$$

В итоге приходим к последовательности из операторов для первой краевой задачи:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^{(1)} &\equiv \int_1^{\infty} y^m \int_1^y \frac{1}{y^m} (\cdot) dy^{(2)}, \\ \mathcal{L}_2^{(1)} &\equiv \int_1^{\infty} \underbrace{y^m \int_1^y \frac{1}{y^m}}_2 \underbrace{\int_1^y \frac{1}{y^m} (\cdot) dy}_1^{(4)}, \\ &\dots \\ \mathcal{L}_n^{(1)} &\equiv \int_1^{\infty} \underbrace{y^m \int_1^y \frac{1}{y^m}}_n \dots \underbrace{\int_1^y \frac{1}{y^m}}_2 \underbrace{\int_1^y \frac{1}{y^m} (\cdot) dy}_1 \end{aligned} \tag{26}$$

или в общем виде

$$\mathcal{L}_n^{(1)} \equiv \bar{\mathcal{L}}_1 \underbrace{\bar{\mathcal{L}}_1^y \dots \bar{\mathcal{L}}_1^y}_{n-1}, \tag{27}$$

где $\bar{\mathcal{L}}_1^y \equiv \int_1^y y^m \int_1^y \frac{1}{y^m} (\cdot) dy$, $\bar{\mathcal{L}}_1 \equiv \int_1^{\infty} y^m \int_1^y \frac{1}{y^m} (\cdot) dy$. В частности, для второй краевой задачи в отношении пространства со сферической внутренней поверхностью из (23), (25), (26) приходим к последовательности

$$\int_0^\infty \frac{(y-1)^{2n-1}}{(2n-1)!} y T(y, t) dy \equiv \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{n} \gamma_1(t) dt^{(n)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{28}$$

Действуя аналогичным образом и произведя многократное интегрирование по частям правой части второй последовательности (22), получим следующие операторы для второй краевой задачи:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^{(II)} &\equiv \int_1^\infty y^2(\cdot) dy, \\ \mathcal{L}_2^{(II)} &\equiv \underbrace{\int_1^\infty y^2 \int_1^y \frac{1}{y^2}}_2 \underbrace{\int_1^y y^2(\cdot) dy}_{1} dy^{(2)}, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathcal{L}_n^{(II)} &\equiv \underbrace{\int_1^\infty y^2 \int_1^y \frac{1}{y^2}}_n \dots \underbrace{\int_1^y y^2 \int_1^y \frac{1}{y^2}}_2 \underbrace{\int_1^y y^2(\cdot) dy}_{1} dy^{(2n-2)} \end{aligned} \tag{29}$$

или в общем виде

$$\mathcal{L}_n^{(II)} \equiv \bar{\mathcal{L}}_{n-1}^{(I)} \bar{\mathcal{L}}^*, \tag{30}$$

где $\bar{\mathcal{L}}^* \equiv \int_1^y y^2(\cdot) dy$. Отсюда, основываясь на (24), (29), (30), для рассмотренного выше случая пространства, ограниченного изнутри сферической поверхностью, располагаем такой последовательностью из тождественных равенств:

$$\int_1^\infty \frac{(y-1)^{2n-2}}{(2n-1)!} (2n-2+y) y T(y, t) dy \equiv \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{n} \gamma_2(t) dt^{(n)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Аналогично на основании (8), (27), (30) приходим к последовательности из интегральных тождественных равенств в отношении третьей краевой задачи

$$\bar{\mathcal{L}}_n^{(III)}(T) \equiv \Upsilon_n(t),$$

где $\bar{\mathcal{L}}_n^{(III)} \equiv \bar{\mathcal{L}}_{n-1}^{(I)} \bar{\mathcal{L}}_1^{(III)}$, $\bar{\mathcal{L}}_1^{(III)} \equiv \int_1^y y^m \left(\alpha + \beta \int_1^y \frac{1}{y^m}(\cdot) dy \right) dy$. В частности, для пространства со сферической полостью можно записать

$$\int_1^\infty \left(\beta + (\alpha + \beta) \frac{y-1}{2n-1} \right) \frac{(y-1)^{2n-2}}{(2n-2)!} y(\cdot) dy \equiv \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{n} \gamma_3(t) dt^{(n)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Рассмотрим иллюстративный пример. Точное решение задачи для второй краевой задачи при $\partial T(1, t) / \partial r = -1 (y = r)$ для пространства, ограниченного изнутри сферической поверхностью, имеет вид [2]

$$T^*(r, t) = \frac{1}{r} \left(\operatorname{erfc} \frac{1-r}{2\sqrt{t}} - \exp(1-y+t) \operatorname{erfc} \left(\frac{1-r}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right) \right). \tag{31}$$

Представим искомый приближенный температурный профиль следующим образом:

$$T(y, t) = \exp \left(-\frac{(r-1)^2}{kt} \right) \frac{1}{r} \sum_{j=0}^N a_j(t) (r-1)^j, \quad (k > 1). \tag{32}$$

Тогда задача сводится к определению коэффициентов $a_j(t)$, $j = \overline{1, N}$, (примем $k = 3$) на основе решения системы из $N + 1$ линейных алгебраических уравнений из последовательности (28) и граничного условия $-\partial T(1, t) / \partial r = 1$:

$$\left\{ \sum_{j=0}^N a_j(t) \int_1^{\infty} (r-1)^{2n-2+j} (2n-2+r) \exp\left(-\frac{(r-1)^2}{3t}\right) dr = \frac{(2n-1)!}{n!} t^n, \quad n = \overline{1, N}; \quad a_0 - a_1 = 1 \right\}.$$

На рис. 1, *a* представлены температурные профили, полученные на основе точного решения (31) и приближенного (32) при $N = 6$ и $k = 3$. Как видим, рассчитанные кривые полностью сливаются. Рис. 1, *b* отражает отклонение приближенного решения от точного в момент времени $t = 0,1$ при разных N . Каждые добавляемые две степени полинома дают существенное (почти на порядок) повышение точности аппроксимационного решения, что свидетельствует об очень хорошей сходимости. **Дополнительным подтверждением отмеченной высокой сходимости решения являются** рассчитанные данные среднеквадратичного отклонения $\varepsilon_i = \sqrt{\int_1^{\infty} (T_i - T^*)^2}$ и соответствующих параметров p_{i+1} (i – порядок приближения) (табл. 1). Следует отметить, что **хорошую сходимость** приближенных решений в численных и численно-аналитических методах характеризует $p_{i+1} \sim 2$. В нашем случае, судя по гораздо более высоким значениям p_{i+1} , можно говорить о сходимости с очень высокой скоростью.

Представляет также интерес определение температуры поверхности $T(1, t)$. В табл. 2 приведены данные для $T(1, t = 0,1)$, а также отклонения $E_i = T_i(1, t) - T^*(1, t)$ и относительная ошибка $\bar{E}_i = E_i / T^*(1, t) 100\%$ в зависимости от степени полинома N . Сходимость решения сохраняется на

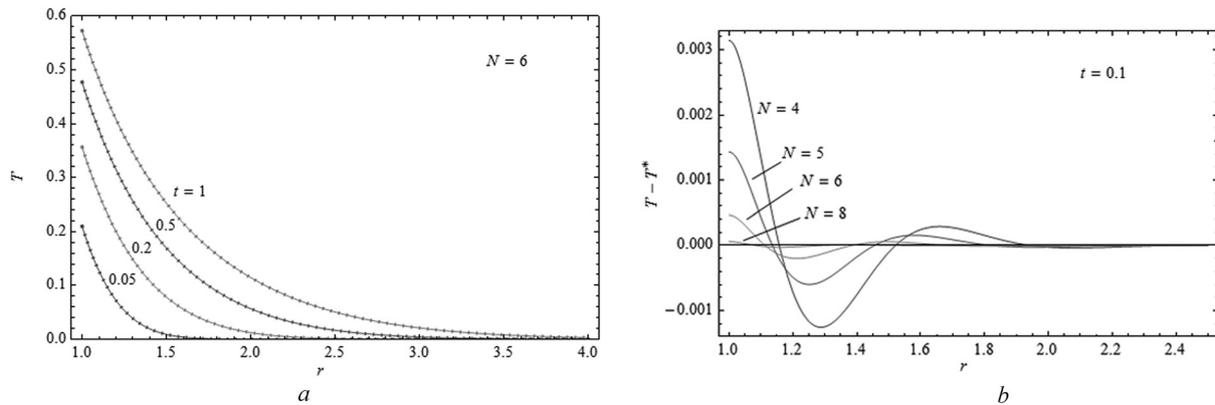


Рис. 1. Температурные профили в пространстве со сферической полостью при действии на поверхности единичного теплового потока, полученные на основе точного решения (сплошные кривые) и приближенного при $N = 6$ (пунктирные кривые) (*a*); отклонения температурных профилей от точного решения для разных степеней полинома в момент времени $t = 0,1$ (*b*)

Fig. 1. Temperature profiles in the space with a spherical cavity at a constant (unique) surface temperature obtained on the basis of the exact solution (solid curves) and the approximate solution at $N = 6$ (dotted curves) (*a*); temperature profile deviations from the exact solution at different polynomial powers at the time moment $t = 0.1$ (*b*)

Т а б л и ц а 1. Сходимость приближенного решения ($t = 0,1$) в зависимости от степени N

T a b l e 1. Convergence of the exact solution ($t = 0.1$) depending on the power N

Параметр Parameter	Степень полинома, N Polynomial power, N			
	4	6	8	10
$\varepsilon_i = \sqrt{\int_1^{\infty} (T_i - T^*)^2}$	$9,70 \cdot 10^{-4}$	$1,26 \cdot 10^{-4}$	$1,42 \cdot 10^{-5}$	$1,74 \cdot 10^{-6}$
$p_{i+1} = \ln(\varepsilon_i / \varepsilon_{i+1}) / \ln(N_{i+1} / N_i)$		5,03	7,60	9,39
$p_{i+1} = \ln(\varepsilon_4 / \varepsilon_{i+1}) / \ln(N_{i+1} / 4)$		5,03	6,09	6,90

Т а б л и ц а 2. Сходимость приближенного решения для температуры поверхности ($t = 0,1$)T a b l e 2. Convergence of the approximate solution for the surface temperature ($t = 0.1$)

Параметр Parameter	Степень полинома, N Polynomial power, N			
	4	6	8	10
$T^*(1, t = 0,1) = 1 - \exp(t) \operatorname{erfc}(\sqrt{t}) \Big _{t=0,1}$	0,276421			
$T(1, t = 0,1)$	0,279565	0,276885	0,276580	0,276426
E_i	$3,14 \cdot 10^{-3}$	$4,64 \cdot 10^{-4}$	$5,85 \cdot 10^{-5}$	$4,66 \cdot 10^{-6}$
$\bar{E}_i, \%$	1,137	0,168	0,021	0,0017

высоком уровне. При $N = 10$ относительная ошибка составляет тысячные доли процента, что позволяет считать данное решение условно точным.

Рассмотрим пример пространства с цилиндрической полостью ($m = 1$). Точные решения при единичном тепловом потоке либо фиксированной единичной температуре имеют вид [4; 6]

$$T = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Y_0(sr)J_0(s) - J_0(sr)Y_0(s)}{J_0^2(s) + Y_0^2(s)} \frac{\exp(-s^2 t)}{s} ds, \quad (33)$$

$$T = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Y_0(sr)J_1(s) - J_0(sr)Y_1(s)}{J_1^2(s) + Y_1^2(s)} \frac{1 - \exp(-s^2 t)}{s^2} ds, \quad (34)$$

где J_0 , J_1 и Y_0 , Y_1 – функции Бесселя и Неймана нулевого и первого порядка соответственно. Решения (33), (34) представлены в виде несобственных интегралов, подынтегральные выражения которых сложны и по существу представляют собой дельта-функцию. Поэтому расчеты по формулам (33), (34) (особенно производных) дают существенные ошибки [11]. В случае переменных коэффициентов либо в условиях более сложного теплообмена решение задачи принимает чрезвычайно громоздкий и трудный для анализа вид.

В виде иллюстративного примера получим приближенное решение задачи для граничного условия первого рода $T(1, t) = 1$, задав температурный профиль в виде полинома третьей степени. Принимая во внимание, что температурное поле в стационарном режиме характеризуется наличием функции $\ln r$, представляется целесообразным дополнительно ввести в полином функцию $\ln r$. Кроме того, анализ приближенных решений для малых времен [12] дает основание ввести дополнительный общий множитель $1/\sqrt{r}$. Таким образом, решение ищем в виде

$$T(r, t) = \left(1 - \ln r + \sum_{j=1}^3 a_j(t)(r-1)^j \right) e^{-\frac{(r-1)^2}{\sqrt{8t}}}. \quad (35)$$

На основе (24)–(27), (35) приходим к системе из трех линейных алгебраических уравнений относительно $a_j(t)$, что в итоге дает аналитическое приближенное решение задачи. Так, для момента времени $t = 0,5$ запишем решение в виде

$$T(r, 0,5) = \frac{1}{\sqrt{r}} (0,753536 + 0,253741r - 0,0069272r^2 - 0,000350r^3 - \ln r) \exp(-(r-1)^2 / 2).$$

На рис. 2, а приведены рассчитанные на основе (33), (35) температурные профили для разных моментов времени. Отметим высокую точность аппроксимационного решения (даже при $N = 3$). Полученные кривые практически полностью сливаются с кривыми точного (численного) решения. Это находит подтверждение в величинах отклонений приближенного решения от точного (рис. 2, б), которые составляют тысячные доли.

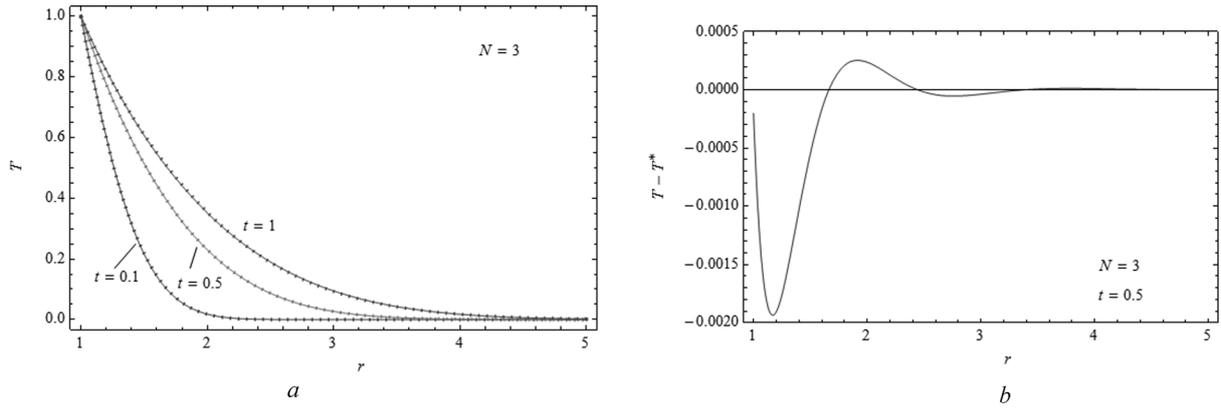


Рис. 2. Температурные профили в пространстве с цилиндрической полостью при постоянной (единичной) температуре поверхности, полученные на основе точного решения (сплошные кривые) и приближенного при $N = 3$ (пунктирные кривые) (a); отклонение температурного профиля от точного решения в момент времени $t = 0,5$ (b)

Fig. 2. Temperature profiles in the space with a cylindrical cavity at a constant (unique) surface temperature obtained on the basis of the exact solution (solid curves) and the approximate solution at $N = 3$ (dotted curves) (a); deviation of the temperature profile from the exact solution at the time moment $t = 0.5$ (b)

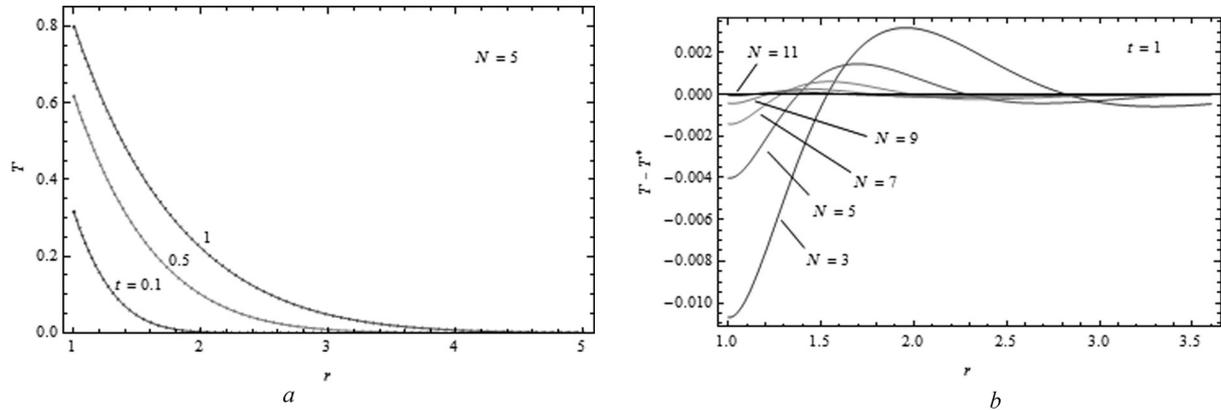


Рис. 3. Температурные профили в пространстве с цилиндрической полостью при постоянной (единичной) плотности теплового потока на поверхности, полученные на основе точного решения (сплошные кривые) и приближенного при $N = 5$ (пунктирные кривые) (a); отклонение температурного профиля от точного решения в момент времени $t = 1$ в решениях с разной степенью полинома (b)

Fig. 3. Temperature profiles in the space with a cylindrical cavity at a constant (unique) surface temperature obtained on the basis of the exact solution (solid curves) and the approximate solution at $N = 5$ (dotted curves) (a); deviation of the temperature profile from the exact solution at the time moment $t = 1$ in the solutions with different polynomial powers (b)

Рассмотрим вторую краевую задачу с единичным тепловым потоком на поверхности цилиндрической полости: $-\frac{\partial T(1, t)}{\partial r} = 1$. Точное решение описывается выражением (34). Запишем приближенное решение задачи в виде урезанного степенного ряда

$$T(r, t) = \frac{1}{\sqrt{r}} \left(\sum_{j=0}^N a_j(t)(r-1)^2 - \ln r \right) \exp\left(-\frac{(r-1)^2}{3t}\right), \tag{36}$$

что сводит задачу к нахождению лишь полиномиальных коэффициентов $a_j(t)$, $j = \overline{0, N}$. Из граничного условия на поверхности с учетом (36) получаем первое уравнение: $a_0 - 2a_1 = 0$. Остальные N вытекают из полученной выше последовательности (22) для $m = 1$. Запишем в виде примера решение задачи для полинома степени $N = 5$ в момент времени $t = 1$:

$$T(r, 1) = \frac{1}{\sqrt{r}} \exp(- (r-1)^2 / 3) (0,7980 + 0,3990(r-1) - 0,1016(r-1)^2 + 0,0431(r-1)^3 - 0,0093(r-1)^4 + 0,0008(r-1)^5 - \ln r).$$

Знакопеременные, быстро убывающие полиномиальные коэффициенты обеспечивают быструю сходимость. Рис. 3, *a* отражает практически полное слияние кривых приближенного решения и точного (численного). С увеличением степени полинома решение стремится к точному (рис. 3, *b*).

Заключение. Впервые на основе прямого интегрирования обобщенного уравнения переноса в бесконечной области, ограниченной изнутри плоской, цилиндрической или сферической поверхностями, получены последовательности из интегральных тождественных равенств, учитывающие особенности дифференциального уравнения и граничные условия. Это дало возможность на основе степенных полиномов с общим экспоненциальным множителем построить приближенные решения, максимально приближенные к **точным, что нашло отражение в высокой скорости сходимости.** Построенные решения нестационарной задачи теплопроводности в пространстве, ограниченном изнутри плоской, цилиндрической либо сферической поверхностями, по существу являются точными, поскольку погрешность для широкой области параметров составляет сотые–тысячные доли процента. С увеличением степени полинома отклонение от точного (численного) решения стремится к нулю.

Список использованных источников

1. Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М., 1970. – 767 с.
2. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / В. А. Лыков. – М., 1967. – 600 с.
3. Карташов, Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э. М. Карташов. – М., 2001. – 480 с.
4. Carslow, H. S. Conduction of Heat in Solids / H. S. Carslow, J. C. Jaeger. – Oxford, UK: Oxford University Press, 1992. – 510 p.
5. Özisic, M. N. Heat Conduction / M. N. Özisic. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993. – 692 p.
6. Баренблатт, Г. И. О некоторых краевых задачах для уравнения турбулентной теплопроводности / Г. И. Баренблатт, Б. М. Левитан // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1952. – № 16. – С. 253–280.
7. Карташов, Э. М. Об одном классе интегральных преобразований для обобщенного уравнения нестационарной теплопроводности / Э. М. Карташов // Инженерно-физический журнал. – 2008. – Т. 81, № 1. – С. 123–130.
8. Снеддон, И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. – М., 1955. – 668 с.
9. Бейтмен, Г. Таблицы интегральных преобразований / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М., 1969. – Т. 1: Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – 344 с.
10. Волков, И. К. Интегральные преобразования и операционное исчисление / И. К. Волков, А. Н. Канатников. – М., 2002. – 228 с.
11. Алхасов, А. Б. Радиальная модель извлечения пара из высокотемпературного пласта одиночной скважиной / А. Б. Алхасов, М. М. Рамазанов // Инженерно-физический журнал. – 2014. – Т. 87, № 3. – С. 539–548.
12. Mundry, E. Über die lösung der wärmeleitungsgleichung für den aussenraum eines zylinders mit kreisförmigem querschnitt / E. Mundry // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1966. – Vol. 9, N 3. – P. 189–197. doi.org/10.1016/0017-9310(66)90017-2.

References

1. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. *Equations of partial derivatives of mathematical physics*. Moscow, 1970. 767 p. (in Russian)
2. Lykov A. V. *Heat conduction theory*. Moscow, 1967. 600 p. (in Russian)
3. Kartashov E. M. *Analytical methods in heat conduction theory of solids*. Moscow, 2001. 480 p. (in Russian)
4. Carslow H. S., Jaeger J. C. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford, UK, Oxford University Press, 1992. 510 p.
5. Özisic M. N. *Heat Conduction*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993. 692 p.
6. Barenblatt G. I., Levitan B. M. On some boundary-value tasks for the turbulent heat conduction equation. *Izvestiia Akademii nauk SSSR. Seriya matematicheskaya* [Mathematics of the USSR – Izvestija], 1952, vol. 16, pp. 253–280. (in Russian)
7. Kartashov E. M. A class of integral transformations for the generalized equation of nonstationary heat conduction. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2008, vol. 81, no. 1, pp. 129–137. doi.org/10.1007/s10891-008-0023-6.
8. Sneddon I. *Fourier transforms*. New York, Mc Graw-Hill Book Co., 1951. 542 p.
9. Beitmen G., Ardeji A. *Tables of Integral Transformations. V. 1. Transformations of Fourier, Laplace, Mellin*. Moscow, 1969. 344 p. (in Russian)
10. Volkov I. K., Kanatnikov A. N. *Integral transformations and operational calculus*. Moscow, 2002. 228 p. (in Russian)
11. Alhasov A. B., Ramazanov M. M. Radial Model of Steam Extraction from a High-Temperature Bed by Means of a Single Well. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2014, vol. 87, no. 3, pp. 556–565. doi.org/10.1007/s10891-014-1045-x.
12. Mundry, E. Über die lösung der wärmeleitungsgleichung für den aussenraum eines zylinders mit kreisförmigem querschnitt. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1966, vol. 9, no. 3, pp. 189–197. doi.org/10.1016/0017-9310(66)90017-2.

Информация об авторах

Кот Валерий Андреевич – канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: valery.kot@hmti.ac.by.

Для цитирования

Кот, В. А. Прямое интегрирование уравнения теплопроводности для полугораниченного пространства / В. А. Кот // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 108–118.

Information about the authors

Kot Valery Andreevich – Ph. D. (Engineering), Senior researcher, A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: valery.kot@hmti.ac.by.

For citation

Kot V. A. Direct integration of the heat conduction equation for a semi-bounded space. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 108–118. (in Russian)

ISSN 0002–354X (print)

АГРАРНЫЕ НАУКИ
AGRARIAN SCIENCES

УДК 597.442.591.4

Поступило в редакцию 21.11.2016
Received 21.11.2016**Н. В. Барулин¹²***Белорусская государственная сельскохозяйственная академия, Горки, Республика Беларусь*

**ОБНАРУЖЕНИЕ ВНЕШНИХ ПОЛОСПЕЦИФИЧЕСКИХ ПРИЗНАКОВ
В СТРОЕНИИ ПРОИЗВОДНЫХ КОРИУМА ЛИЧИНОК
И МОЛОДИ СТЕРЛЯДИ *ACIPENSER RUTHENUS***

(Представлено академиком И. П. Шейко)

В технологии икорной аквакультуры используются только самки, а самцы должны выбраковываться как можно раньше. Считается, что осетровые рыбы не имеют ярко выраженных внешних морфологических половых отличий. По причине темной окраски большинства осетровых, ранее был не замечен внешний морфологический признак, строение и форма которого зависит от пола. Цель работы – исследовать морфологическое строение производных кориума (спинных костных пластинок) стерляди различных возрастов и выявить зависимости их строения от пола. Объект исследования – ремонтно-маточное стадо стерляди волжской популяции *Acipenser ruthenus* в возрасте трех лет с гонадами второй стадии зрелости, а также годовалая молодь и трехмесячная личинка стерляди. Выращивание осуществлялось в условиях установки замкнутого водоснабжения при средней температуре воды 16 ± 2 °C. Зимовка не использовалась. Впервые в практике ихтиологии и аквакультуры установлено, что спинные костные пластинки созревающей стерляди имеют достоверные морфологические отличия, которые зависят от пола. Для оценки морфологического строения спинных костных пластинок предлагается определять две группы показателей, характеризующих форму спинных костных пластинок, а также строение их зубцов. Определили, что у самцов стерляди спинные костные пластинки более вытянуты в ширину и имеют более сплюснутую форму. Спинные костные пластинки самцов также имеют более длинные и заостренные зубцы, количество которых больше чем у самок. Впервые обнаружено, что установленные закономерности в строении спинных костных пластин стерляди сохраняются также у молоди стерляди средней длиной $24,8 \pm 1,5$ см и у личинок стерляди средней длиной $70,3 \pm 3,6$ мм. Наши результаты создают методологические основы мировой практики аквакультуры для разработки систем ранней и сверхранней прижизненной идентификации пола всех представителей семейства *Acipenseridae*, в том числе на ранних стадиях онтогенеза.

Ключевые слова: стерлядь, *Acipenser ruthenus*, установка замкнутого водоснабжения, определение пола, внешний морфологический признак, спинные костные пластинки.

N. V. Barulin*Belarusian State Agricultural Academy, Gorki, Republic of Belarus*

**DETECTION OF THE EXTERNAL SEX SPECIFIC FEATURES IN THE STRUCTURE OF CORIUM
DERIVATIVES OF LARVAE AND JUVENILES OF STERLET *ACIPENSER RUTHENUS***

(Communicated by Academician I. P. Sheyko)

Only females are used in technology of caviar aquaculture, and the males shall be rejected as soon as possible. It is believed that sturgeons have no clearly defined external morphological sex character. Because of the dark color of most sturgeons, the external morphological character, the structure and form of which are sex-dependent, have not been noticed earlier. The aim of our work was to study the morphological structure of the derivatives of the corium (dorsal scutes) of different-age sterlet and to identify its sex-dependent structure. The object of this study was the broodstock of 3-year sterlet of the Volga population, with the gonads of the second stage of maturity, as well as the three-month larva and year-old juvenile sterlet. Cultivation was carried out in the re-circulating aquaculture system at an average water temperature of 16 ± 2 °C. Wintering was not used. We were the first in the practice of ichthyology and aquaculture who found that dorsal scutes of sterlet maturing had significant sex-dependent morphological differences. To assess the morphological structure of the dorsal

scutes, it was proposed to define two groups of indicators characterizing the scutes shape, as well as the structure of the cusps of scutes. We found that dorsal scutes of males are more extended in width and have a flattened shape. Dorsal scutes of males have long and thin cusps, the number of which is larger than that of females. For the first time it was found that the established dependence on the structure of dorsal scutes of sterlet is saved as in juveniles with an average length of 24.8 ± 1.5 cm and larvae with an average length of 70.3 ± 3.6 mm. Our results form a methodological basis for global aquaculture practice in effort to develop systems of early and very early sex identification of all Acipenseridae, including the early stages of ontogeny.

Keywords: sturgeon, *Acipenser ruthenus*, recirculating aquaculture system, sex determination, external morphological characteristics, dorsal scutes.

Введение. Икорное осетроводство в последнее время является популярным направлением рыбного хозяйства. В технологии икорной аквакультуры используются только самки, а самцы должны выбраковываться как можно раньше [1]. Теоретически, ранняя идентификация самцов и их выбраковка может снизить технологические финансовые затраты в процессе индустриального выращивания до 4 раз.

Считается, что осетровые рыбы не имеют ярко выраженных внешних морфологических гендерных отличий даже в период полового созревания, в отличие, к примеру, от лососевых рыб, у которых возможно определить пол по внешним признакам, например, по форме анального плавника [2].

В настоящее время многие исследователи предпринимают попытки разработать метод ранней идентификации пола осетровых. Однако универсальных методов еще не разработано. Методы биопсии и лапароскопии травмируют рыбу [3]. Ультразвуковой (УЗИ) и эндоскопические методы используются в относительно позднем возрасте [4; 5]. Биохимические [6], гормональные [7] и генетические [8] методы, а также метод инфракрасной спектроскопии [9] являются трудными для применения в практике аквакультуры и имеют высокую стоимость.

Мы считаем, что по причине темной окраски большинства осетровых, ранее был не замечен внешний морфологический признак, строение и форма которого зависит от пола.

Нами впервые было обнаружено, что производные кориума стерляди *Acipenser ruthenus* (спинные костные пластинки) имеют полоспецифические особенности строения. Это дает перспективы для разработки метода прижизненной идентификации пола стерляди и других осетровых.

Цель работы – исследовать морфологическое строение спинных костных пластин стерляди различных возрастов и выявить зависимости их строения от пола.

Материал и методы исследования. Исследования выполнялись на базе кафедры ихтиологии и рыбоводства и рыбоводного индустриального комплекса Белорусской государственной сельскохозяйственной академии (г. Горки, Могилевская область, Республика Беларусь) в период 2012–2016 годов. Указанный рыбоводный индустриальный комплекс работает по технологии замкнутого водоснабжения (УЗВ) с использованием механической и биологической фильтрации, озонирования и оксигенации воды. Средняя температура воды составила 16°C с короткими колебаниями $\pm 2^\circ\text{C}$ в течение года. Зимовка стерляди не проводилась. Для кормления использовали высокобелковые корма Сорренс с учетом рекомендаций указанной фирмы.

В исследованиях использовали разновозрастную стерлядь волжской популяции: взрослые особи (возраст 3 года, средняя длина $61,2 \pm 1,3$ см); молодь (возраст 1 год, средняя длина $24,8 \pm 1,5$ см), личинка (возраст 3 месяца, средняя длина $70,3 \pm 3,6$ мм). Статистически достоверных отличий между длиной у исследуемой стерляди не наблюдалось. Для исследований взрослой стерляди отбирались экземпляры с гонадами на второй стадии зрелости по классификации Трусова [4].

Наблюдение за стерлядью осуществлялось с трехмесячного возраста, с дальнейшим наблюдением в возрасте 1 года и с подтверждением пола в возрасте 2 лет. Наблюдаемых особей метили индивидуально с возраста 3 месяцев, что позволяло в дальнейшем после подтверждения пола в 2 года установить пол в возрасте 3 месяцев и 1 года.

Для определения пола у стерляди использовали метод УЗИ-диагностики на портативном ветеринарном сканере MindrayDP-6600, с последующей визуальной проверкой гонад у умерщвленных особей. В сложных случаях образцы гонад отправлялись на гистологические исследования. УЗИ-диагностика осуществлялась автором исследований, имеющим подтверждающий сертификат об обучении и опыт работы с данным методом более 5 лет (более 15000 просмотренных осетровых рыб).

Умерщвление рыбы осуществлялось с соблюдением принципов гуманного отношения к животным. Все умерщвленные экземпляры взрослой стерляди предназначались для убоя в товарных целях. У умерщвленных экземпляров срезался слой спинных костных пластинок (жучек) от головы до начала спинного плавника. Первая спинная пластинка, плотно прилегающая к костным пластинкам черепа, не срезалась, по причине сложности ее быстрого извлечения без деформации. В исследовании учитывались спинные пластинки от второй (начиная от головы, в наших исследованиях имеющая первый номер) до последней крупной пластинки перед спинным плавником или lsdr (last scute of dorsal row), имеющий вид так называемого копыя. Мелкие костные пластинки после lsdr во внимание не принимались. После среза спинные костные пластинки подвергались варке, чистке, мойке и фотографированию на камеру Canon EOS 500D в режиме макросъемки.

Полученные изображения подвергались измерению в программе ImageJ с использованием инструментов «Straight Line», «Polygon selections», «Elliptical selections» при помощи графического планшета Trust Canvas Widescreen Tablet. В процессе изучения спинных костных пластинок измерялись следующие параметры: длина спинной костной пластинки; ширина спинной костной пластинки; длина левой и правой лопасти; площадь спинной костной пластинки; площадь условного круга, в который помещалась спинная костная пластинка; длина максимального зубца спинной костной пластинки; ширина основания максимального зубца; количество зубцов. Диаметр условного круга, в который помещалась спинная костная пластинка, равнялся ее ширине или длине, в зависимости от удаления костной пластинки от головы (или ее номера). Спинные костные пластинки между № 10 и lsdr не учитывались, так как их количество сильно варьировало у всех исследуемых экземпляров вне зависимости от пола.

На основании полученных измерений рассчитывались следующие коэффициенты: «коэффициент Ш/Д» – отношение ширины спинной костной пластинки к ее длине; «усредненный коэффициент Дл/Д» – среднее отношение длины левой и правой лопасти спинной костной пластинки к ее общей длине; «коэффициент заполнения» – отношение площади спинной костной пластинки к площади условного круга, в который она помещалась; «коэффициент Дз/Ш» – отношение длины максимального зубца к ширине спинной костной пластинки; «коэффициент Дз/Шз» – отношение длины максимального зубца к ширине основания максимального зубца.

Для статистической обработки полученных результатов использовали программную среду R [10], включая пакеты R Commander, PMCMR, MASS, corrplot и др. Для определения уровня статистической достоверности использовали параметрический тест Стьюдента при условии соблюдения нормальности распределения данных (оценивалось тестом Шапиро–Уилка) и однородности групповых дисперсий (оценивалось тестом Ливина). При несоблюдении указанных условий использовали непараметрический *U*-критерий Манна–Уитни (для двух исследуемых групп).

Результаты и их обсуждение. В результате исследований было установлено, что между спинными костными пластинками взрослых самцов и самок стерляди имеются множество статистических достоверных различий. Однако различия по таким абсолютным параметрам, как длина спинной костной пластинки, длина левой лопасти спинной костной пластинки, длина правой лопасти спинной костной пластинки, площадь спинной костной пластинки, длина максимального зубца спинной костной пластинки, ширина максимального зубца спинной костной пластинки будут иметь значимость только в том случае, если сравнения будут осуществляться у рыб одного возраста и размера, в противном случае индивидуальные размерно-весовые показатели будут искажать указанные параметры и приводить к ошибкам в диагностике пола. Поэтому интерес для точной диагностики пола представляют относительные параметры (коэффициенты): влияние которых на индивидуальные размерно-весовые показатели будет минимальным. К этим относительным параметрам также следует отнести количество зубцов спинной костной пластинки.

В наших исследованиях коэффициент Ш/Д у самцов взрослой стерляди варьировал от $1,55 \pm 0,08$ до $1,17 \pm 0,05$; у самок – от $1,41 \pm 0,04$ до $1,16 \pm 0,05$ (таблица). Величина различий между костными пластинками самцов и самок по коэффициенту Ш/Д варьировала от первой до пятой костной пластинки от 15 до 13 п. п. (различия для первой, третьей и пятой костных пластинок являются статистически значимыми при уровне достоверности $p < 0,05$), с дальнейшим

снижением. Усредненный коэффициент Дл/Д у самцов варьировал от $0,70 \pm 0,02$ до $0,61 \pm 0,02$; у самок – от $0,76 \pm 0,02$ до $0,67 \pm 0,01$. Величина различий между костными пластинками самцов и самок по усредненному коэффициенту Дл/Д варьировала от первой до десятой костной пластинки от 10 до 4,5 п. п. (различия для всех пластинок, кроме четвертой и пятой, являются статистически значимыми при уровне достоверности $p < 0,05$). Средний коэффициент заполнения у самцов варьировал от $0,57 \pm 0,07$ до $0,49 \pm 0,06$; у самок – от $0,61 \pm 0,02$ до $0,57 \pm 0,02$. Величина различий между костными пластинками самцов и самок по коэффициенту заполнения варьировала от первой до шестой костной пластинки от 10 до 8 п. п. (различия для всех первых шести костных пластинок являются статистически значимыми при уровне достоверности $p < 0,05$), с дальнейшим снижением до 2–4 п. п. Средний коэффициент Дз/Ш у самцов варьировал от $0,08 \pm 0,01$ до $0,14 \pm 0,01$; у самок – от $0,05 \pm 0,01$ до $0,11 \pm 0,01$. Величина различий между костными пластинками самцов и самок по коэффициенту Дз/Ш варьировала от 2 до 5 п. п. (различия для всех костных пластинок, кроме седьмой и девятой, являются статистически значимыми при уровне достоверности $p < 0,05$). Максимальные различия были для первых шести костных пластинок. Средний коэффициент Дз/Шз у самцов варьировал от $0,89 \pm 0,06$ до $1,06 \pm 0,09$; у самок – от $0,46 \pm 0,05$ до $0,65 \pm 0,08$. Величина различий между костными пластинками самцов и самок по коэффициенту Дз/Шз варьировала от 28 до 51 п. п. (различия для всех костных пластинок являются статистически значимыми при уровне достоверности $p < 0,05$). Максимальные различия наблюдались для первых восьми костных пластинок. Среднее количество зубцов костных пластинок у самцов варьировало от $11,55 \pm 0,87$ до $7,55 \pm 0,5$ шт.; у самок – от $7,64 \pm 0,96$ до $5,00 \pm 0,54$ шт. Величина различий между костными пластинками самцов и самок по количеству зубцов варьировала от 77,7 до 31,3 п. п. (различия для всех костных пластинок являются статистически значимыми при уровне достоверности $p < 0,05$). Отметим, что максимальные различия наблюдались для первых пяти костных пластинок.

Сравнение коэффициентов (К) морфологических параметров (среднее значение \pm стандартная ошибка среднего) первых шести спинных костных пластинок самцов ($n = 20$) и самок ($n = 15$) стерляди волжской популяции (*Acipenser ruthenus* Linneaus, 1758). Возраст – 3 года. Вторая стадия зрелости гонад.

Средняя длина $61,2 \pm 1,3$ см. Условия выращивания – установка замкнутого водоснабжения.

Средняя температура выращивания 16 ± 2 °С. Зимовка не проводилась

Comparison of the coefficients (K) of morphological characters (average value \pm standard error of the average) of the first six dorsal scutes of males ($n = 20$) and females ($n = 15$) of starlet of the Volga population (*Acipenser ruthenus* Linneaus, 1758). Age – 3 years. Second maturity stage of gonads. The average length – $61,2 \pm 1,3$ cm. Cultivation conditions – installation of closed water supply. Average cultivation temperature – 16 ± 2 °C. Wintering is not used

Параметр Parameter	Номер спинной костной пластинки / пол Number of dorsal scute / sex					
	1		2		3	
	самец male	самка female	самец male	самка female	самец male	самка female
К Ш/Д	$1,48 \pm 0,04^*$	$1,33 \pm 0,04$	$1,55 \pm 0,08$	$1,41 \pm 0,04$	$1,54 \pm 0,04^*$	$1,41 \pm 0,04$
К Дл/Д	$0,67 \pm 0,02$	$0,76 \pm 0,02^*$	$0,66 \pm 0,02$	$0,74 \pm 0,02^*$	$0,67 \pm 0,02$	$0,77 \pm 0,02^*$
Кз	$0,51 \pm 0,06$	$0,61 \pm 0,01^*$	$0,50 \pm 0,08$	$0,58 \pm 0,02^*$	$0,49 \pm 0,06$	$0,58 \pm 0,02^*$
К Дз/Ш	$0,08 \pm 0,01^*$	$0,05 \pm 0,01$	$0,09 \pm 0,01^*$	$0,06 \pm 0,01$	$0,11 \pm 0,01^*$	$0,07 \pm 0,01$
К Дз/Шз	$0,89 \pm 0,06^*$	$0,51 \pm 0,04$	$0,95 \pm 0,05^*$	$0,46 \pm 0,05$	$1,03 \pm 0,06^*$	$0,56 \pm 0,04$
Кол-во зубцов	$11,24 \pm 1,03^*$	$7,64 \pm 0,96$	$11,55 \pm 0,87^*$	$6,50 \pm 0,97$	$10,64 \pm 0,62^*$	$6,50 \pm 0,76$
Параметр Parameter	4		5		6	
	самец male	самка female	самец male	самка female	самец male	самка female
К Ш/Д	$1,50 \pm 0,06$	$1,37 \pm 0,06$	$1,41 \pm 0,04^*$	$1,26 \pm 0,04$	$1,40 \pm 0,04$	$1,30 \pm 0,04$
К Дл/Д	$0,70 \pm 0,02$	$0,74 \pm 0,02$	$0,68 \pm 0,02$	$0,74 \pm 0,02$	$0,66 \pm 0,02$	$0,75 \pm 0,03^*$
Кз	$0,51 \pm 0,06$	$0,60 \pm 0,02^*$	$0,53 \pm 0,07$	$0,61 \pm 0,01^*$	$0,53 \pm 0,05$	$0,61 \pm 0,02^*$
К Дз/Ш	$0,13 \pm 0,01^*$	$0,08 \pm 0,01$	$0,12 \pm 0,01^*$	$0,08 \pm 0,01$	$0,13 \pm 0,01^*$	$0,09 \pm 0,01$
К Дз/Шз	$0,98 \pm 0,06^*$	$0,54 \pm 0,06$	$1,00 \pm 0,06^*$	$0,51 \pm 0,04$	$1,01 \pm 0,06^*$	$0,52 \pm 0,05$
Кол-во зубцов	$9,50 \pm 0,70^*$	$5,92 \pm 0,60$	$8,86 \pm 0,55^*$	$5,50 \pm 0,64$	$8,91 \pm 0,62^*$	$5,43 \pm 0,58$

Примечание. * – различия являются статистически значимыми при уровне достоверности $p < 0,05$.

Notes. * – the differences are statistically significant at the level of reliability, $p < 0.05$.

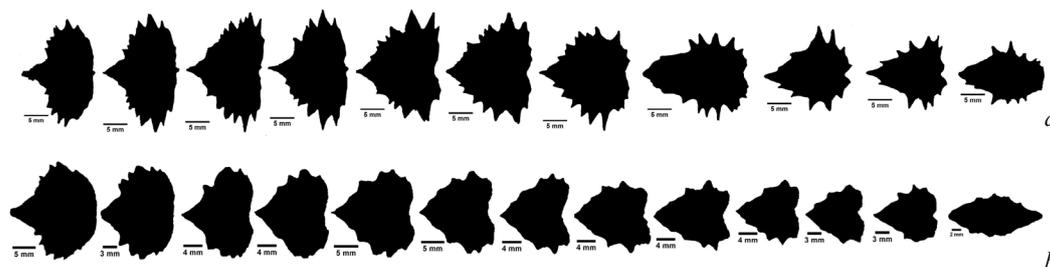


Рис. 1. Типичные контуры спинных костных пластинок самцов (а) и самок (b) взрослой стерляди. Возраст – 3 года. Вторая стадия зрелости гонад. Средняя длина $61,2 \pm 1,3$ см

Fig. 1. Typical contours of dorsal scutes of males (a) and females (b) of adult starlet. Age – 3 years. Second maturity stage of gonads. Average length – 61.2 ± 1.3 cm

Представленные данные в настоящей работе свидетельствуют, что между морфологическим строением спинных костных пластинок взрослых самцов и самок стерляди с гонадами, достигшими половой дифференциации, имеются статистические значимые различия (рис. 1).

Из исследуемых относительных параметров можно выделить две группы показателей, характеризующих визуальные качества спинных костных пластинок.

1. Группа морфологических параметров, характеризующих форму спинной костной пластинки: коэффициент Ш/Д, усредненный коэффициент Дл (длина лопасти)/Д, коэффициент заполнения.

2. Группа морфологических параметров, характеризующих зубцы спинной костной пластинки: коэффициент Дз/Ш, коэффициент Дз/Шз, количество зубцов.

Как показали наши исследования, наибольшее количество статистически достоверных отличий наблюдалось у первых пяти спинных костных пластинок.

В результате проведенных исследований оставался открытым вопрос о возможном сохранении наблюдаемых половых закономерностей в строении спинных костных пластинок у молоди стерляди. Как показали исследования Вюртца и соавт. [11], у личинок атлантического и американского атлантического осетров имеются видовые различия в строении костных пластинок, которые, как показали исследования Тиерена и соавт. [12], сохраняются у половозрелых особей. Это позволяло нам надеяться на положительный результат в разработке способа идентификации пола стерляди на более ранних стадиях онтогенеза.

Проведенные исследования установили, что выявленные полоспецифические закономерности в строении костных пластинок у взрослой стерляди, по большинству выявленных ранее морфологических параметров, сохранялись в строении спинных пластинок молоди стерляди (возраст 1 год, средняя длина $24,8 \pm 1,5$ см, рис. 2).

Так, коэффициент Ш/Д у самцов молоди стерляди варьировал в первых пяти спинных костных пластинках от $1,48 \pm 0,10$ до $1,18 \pm 0,07$; у самок – от $1,30 \pm 0,08$ до $1,17 \pm 0,05$. Величина различий между костными пластинками молоди самцов и самок по коэффициенту Ш/Д от первой до пятой костной пластинки варьировала от 17,8 до 1,4 п. п. (различия для второй и четвертой костных пластинок являются статистически значимыми при уровне достоверности $p < 0,05$). Усредненный коэффициент Дл/Д у самцов молоди варьировал в первых пяти спинных костных

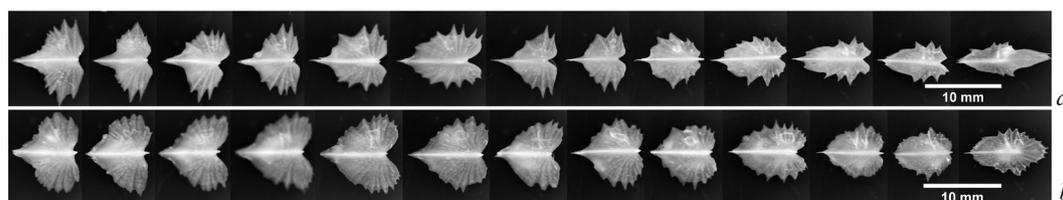


Рис. 2. Типичные спинные костные пластинки самцов (а) и самок (b) молоди стерляди. Возраст – 1 год. Средняя длина $24,8 \pm 1,5$ см

Fig. 2. Typical contours of dorsal scutes of males (a) and females (b) of young starlet. Age – 1 year. Average length – 24.8 ± 1.5 cm

пластинках от $0,69 \pm 0,03$ до $0,58 \pm 0,02$; у самок молоди – от $0,80 \pm 0,05$ до $0,66 \pm 0,03$. Величина различий между костными пластинками самцов и самок по усредненному коэффициенту Дл/Д варьировала от первой до пятой костной пластинки от 18,0 до 2,6 п. п. (различия для первых четырех пластинок являются статистически значимыми при уровне достоверности $p < 0,05$). Средний коэффициент заполнения у самцов молоди в первых пяти спинных костных пластинках варьировал от $0,53 \pm 0,09$ до $0,42 \pm 0,04$; у самок – от $0,57 \pm 0,03$ до $0,55 \pm 0,02$. **Величина различий между костными пластинками самцов и самок по коэффициенту заполнения** от первой до пятой костной пластинки варьировала от 13,5 до 4,3 п. п. (различия для первых четырех костных пластинок являются статистически значимыми при уровне достоверности $p < 0,05$). Средний коэффициент Дз/Ш у самцов молоди в первых пяти спинных костных пластинках варьировал от $0,14 \pm 0,01$ до $0,18 \pm 0,01$; у самок – от $0,05 \pm 0,01$ до $0,08 \pm 0,01$. **Величина различий между костными пластинками самцов и самок по коэффициенту Дз/Ш** от первой до пятой костной пластинки варьировала от 7,4 до 9,4 п. п. (различия для первых пяти костных пластинок являются статистически значимыми при уровне достоверности $p < 0,05$). **Средний коэффициент Дз/Шз у самцов молоди от первой до пятой костной пластинки** варьировал от $0,95 \pm 0,04$ до $1,75 \pm 0,10$; у самок – от $0,53 \pm 0,04$ до $1,39 \pm 0,09$. Величина различий между костными пластинками самцов и самок по коэффициенту Дз/Шз в первых пяти спинных костных пластинках варьировала от 13,7 до 101,7 п. п. (различия для всех первых пяти костных пластинок являются статистически значимыми при уровне достоверности $p < 0,05$). **Среднее количество зубцов костных пластинок у самцов молоди** варьировало в первых пяти спинных костных пластинках от $9,4 \pm 0,7$ до $7,2 \pm 0,5$ шт.; у самок – от $6,2 \pm 1,0$ до $4,0 \pm 0,6$ шт. Величина различий между костными пластинками самцов и самок по количеству зубцов варьировала от 125 до 60 % (различия для всех пяти костных пластинок являются статистически значимыми при уровне достоверности $p < 0,05$).

Таким образом, проведенные исследования установили, что между морфологическим строением спинных костных пластинок самцов и самок молоди стерляди размером $24,8 \pm 1,5$ см имеются статистические значимые различия.

В результате проведенных исследований оставался открытым вопрос о возможном сохранении наблюдаемых половых закономерностей в строении спинных костных пластинок у личинок стерляди.

Проведенные исследования установили, что выявленные полоспецифические закономерности в строении костных пластинок у взрослой стерляди по большинству выявленных ранее морфологических параметров сохранялись в строении спинных пластинок личинок стерляди (возраст 3 месяца, средняя длина $70,3 \pm 3,6$ мм, рис. 3).

Так, коэффициент Ш/Д у самцов личинок стерляди варьировал в первых пяти спинных костных пластинках от $1,75 \pm 0,12$ до $1,47 \pm 0,09$; у самок – от $1,40 \pm 0,07$ до $1,08 \pm 0,04$. Величина различий между костными пластинками личинок самцов и самок по коэффициенту Ш/Д от первой до пятой костной пластинки варьировала от 42,8 до 15,7 п. п. (различия для первых пяти костных пластинок являются статистически значимыми при уровне достоверности $p < 0,05$).

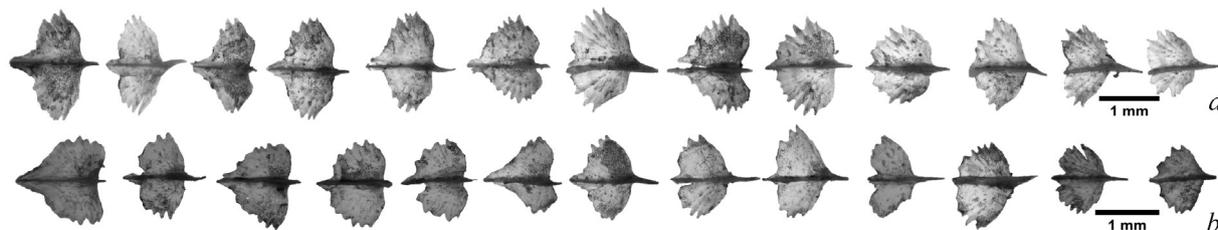


Рис. 3. Типичные спинные костные пластинки самцов (a) и самок (b) личинок стерляди. Возраст – 3 месяца. Средняя длина $70,3 \pm 3,6$ мм

Fig. 3. Typical contours of dorsal scutes of males (a) and females (b) of starlet avelins. Age – 3 months. Average length – 70.3 ± 3.6 mm

Усредненный коэффициент Дл/Д у самцов личинок варьировал в первых пяти спинных костных пластинках от $0,68 \pm 0,04$ до $0,57 \pm 0,02$; у самок личинок – от $0,74 \pm 0,05$ до $0,68 \pm 0,03$. Величина различий между костными пластинками самцов и самок по усредненному коэффициенту Дл/Д варьировала от первой до пятой костной пластинки от 10,1 до 1,2 п. п. (различия для первых четырех пластинок являются статистически значимыми при уровне достоверности $p < 0,05$). Средний коэффициент заполнения у самцов личинок в первых пяти спинных костных пластинках варьировал от $0,50 \pm 0,07$ до $0,40 \pm 0,02$; у самок – от $0,62 \pm 0,06$ до $0,52 \pm 0,03$. Величина различий между костными пластинками самцов и самок по коэффициенту заполнения от первой до пятой костной пластинки варьировала от 13,9 до 9,5 п. п. (различия для первых пяти костных пластинок являются статистически значимыми при уровне достоверности $p < 0,05$). Средний коэффициент Дз/Ш у самцов личинок в первых пяти спинных костных пластинках варьировал от $0,04 \pm 0,01$ до $0,11 \pm 0,01$; у самок – от $0,05 \pm 0,01$ до $0,10 \pm 0,01$ (статистические достоверные различия отсутствовали, $p > 0,05$). Средний коэффициент Дз/Шз у самцов личинок от первой до пятой костной пластинки варьировал от $0,91 \pm 0,02$ до $1,72 \pm 0,10$; у самок – от $0,42 \pm 0,01$ до $0,92 \pm 0,05$. Величина различий между костными пластинками самцов и самок по коэффициенту Дз/Шз в первых пяти спинных костных пластинках варьировала от 1,0 до 79,8 п. п. (различия для первой, второй, третьей, пятой костных пластинок являются статистически значимыми при уровне достоверности $p < 0,05$). Среднее количество зубцов костных пластинок у самцов личинок варьировало в первых пяти спинных костных пластинках от 8 до 4 шт.; у самок – от 5 до 3 шт. Величина различий между костными пластинками самцов и самок по количеству зубцов варьировала от 133 до 0 % (различия для второй, четвертой и пятой костных пластинок являются статистически значимыми при уровне достоверности $p < 0,05$).

Таким образом, проведенные исследования установили, что между морфологическим строением спинных костных пластинок самцов и самок личинок стерляди размеров $70,3 \pm 3,6$ мм имеются статистические значимые различия.

Наши результаты показывают, что у самцов всех возрастов (взрослые особи, молодежь, личинки) сохраняются общие полоспецифические закономерности в морфологическом строении спинных костных пластинок (в основном, на первых пяти пластинках): по сравнению с самками, спинные костные пластинки самцов более вытянуты в ширину, по отношению к длине (результаты длины и коэффициента Ш/Д); за счет меньших размеров лопастей, спинные костные пластинки у самцов выглядят более сплюснутыми и узкими, чем у самок (результаты длины левой и правой лопасти, результаты коэффициента Дл/Д). На основании результатов коэффициента заполнения мы наблюдали, что спинные костные пластинки у самок выглядят более округлыми или овальными, чем у самцов. Яркой отличительной особенностью всех исследуемых костных пластинок самцов является наличие более длинных, тонких и заостренных зубцов, которые выделяются относительно ширины пластинки, и их количество больше, чем у самок (результаты длины и ширины зубцов, коэффициенты Дз/Ш, Дз/Шз, количества зубцов).

Многие исследователи неоднократно предпринимали попытки найти внешние морфологические признаки у осетровых рыб, зависящие от пола, и разработать простой способ идентификации пола осетровых. Так, Фалахаткар и Поурсайд [3] не обнаружили достоверных половых отличий по размерно-весовым показателям у белуги *Huso huso*. Чиотти и соавт. [13] указывают на имеющиеся достоверные половые отличия при определении отношения длины к максимальному обхвату у озерного осетра *A. fulvescens*. Однако такое достоверное отличие наблюдалось у рыб, находящихся на последних стадиях зрелости.

По данным Бийада [4], у самцов и самок бестера (гибрид *H. huso* × *A. ruthenus*) имеются морфометрические различия в расстоянии между уrogenитальным и анальным отверстиями. На возможность раннего определения пола у русского осетра *A. gueldenstaedtii* с использованием биометрических методов указывали в своей работе Мальцев и Маркулов [14]. Однако, как отмечает Чебанов и Галич [4], указанные морфометрические методы не были разработаны в полной

мере и несмотря на простоту применения, они не могут быть рекомендованы для широкого применения в аквакультуре.

Вексей и соавт. [15] установили половые различия по форме уrogenитального отверстия у белого *A. transmontanus*, американского атлантического *A. oxyrinchus* и короткорылового *A. brevirostrum* осетров. Однако Чебанов и Галич [4] скептически отнеслись к такому методу определения пола, указывая на отсутствие достоверных половых отличий у других видов осетровых.

По нашему мнению, несмотря на сложившийся скептицизм к попыткам найти внешние морфологические половые различия у осетровых рыб, такие исследования должны продолжаться.

Мы обратили внимание на имеющиеся особенности в строении спинных костных пластинок, зависящих от пола. Такие особенности, возможно, не привлекали внимание других авторов из-за темной окраски спин стерляди.

Закключение. Впервые в практике ихтиологии и аквакультуры установлено, что спинные костные пластинки взрослой стерляди, а также молоди и личинок имеют достоверные морфологические отличия, которые зависят от пола. Для оценки морфологического строения спинных костных пластинок предлагается определять две группы показателей, характеризующих форму пластинки, а также строение их зубцов. Мы определили, что у самцов стерляди спинные костные пластинки более вытянуты в ширину, имеют более сплюснутую форму, а также имеют более длинные и заостренные зубцы, количество которых больше, чем у самок.

Мы считаем, что методика определения пола по внешним морфологическим признакам нуждается в дальнейших всесторонних исследованиях. Обнаруженные закономерности в строении спинных костных пластинок в зависимости от пола создают методологические основы мировой практики аквакультуры для разработки систем раннего и сверхраннего определения пола для других представителей семейства осетровых *Acipenseridae*, без использования дорогостоящего оборудования (например, УЗИ-сканера или эндоскопа). Это имеет практическое значение для аквакультуры. Интересным является вопрос о возможных половых закономерностях в строении не только спинных, но также боковых и брюшных костных пластинок. Обозначенные выше перспективы – тема наших дальнейших публикаций.

Список использованных источников

1. Barulin, N. V. Serum enzyme response of captive sturgeon brookstock *Acipenser baerii* Brandt 1869 females and two hybrids (bestor = female *Huso huso* Linnaeus, 1758 × male *Acipenser ruthenus* Linnaeus, 1758, and RsSs = *A. gueldenstaedtii* Brandt 1833 × *A. baerii* Brandt 1869) to hormonal stimulation for spawning induction / N. V. Barulin // *J. Appl. Ichthyol.* – 2015. – Vol. 31. – P. 2–6. doi.org/10.1111/jai.12898.
2. Zhivotovsky, L. A. Morphological markers of sex in pink salmon *Oncorhynchus gorbuscha* (Salmonidae) / L. A. Zhivotovsky, H. Y. Kim // *J. Ichthyol.* – 2015. – Vol. 55, N 1. – P. 131–133. doi.org/10.1134/s003294521501021x.
3. Falahatkar, B. Gender Identification in Great Sturgeon (*Huso huso*) Using Morphology, Sex Steroids, Histology and Endoscopy / B. Falahatkar, S. Poursaeid // *Anatomia, Histologia, Embryologia.* – 2014. – Vol. 43, N 2. – P. 81–89. doi.org/10.1111/ah.12049.
4. Chebanov, M. S. Sturgeon hatchery manual / M. S. Chebanov, E. V. Galich // *FAO Fisheries and Aquaculture.* – 2010. – N. 558, XXXII. – 303 p.
5. Use of endoscopy for gender and ovarian stage determinations in Russian sturgeon (*Acipenser gueldenstaedtii*) grown in aquaculture / A. Hurvitz [et al.] // *Aquaculture.* – 2007. – Vol. 270. – P. 158–166. doi.org/10.1016/j.aquaculture.2007.05.020.
6. Potential classification of sex and stage of gonadal maturity of wild white sturgeon using blood plasma indicators / M. A. H. Webb [et al.] // *Transactions of the American fisheries society.* – 2002. – Vol. 131, N 1. – P. 132–142. doi.org/10.1577/1548-8659(2002)131%3C0132:pcosas%3E2.0.co;2.
7. Gender and gonadal maturity stage identification of captive Chinese sturgeon, *Acipenser sinensis*, using ultrasound imagery and sex steroids / H. Du [et al.] // *Gen. Comp. Endocrinol.* – 2016. doi.org/10.1016/j.ygcn.2016.08.004.
8. Identification of the Molecular Sex-Differentiation Period in the Siberian Sturgeon / D. Vizziano-Cantonnet [et al.] // *Molecular Reproduction and Development.* – 2016. – Vol. 83, N 1. – P. 19–36. doi.org/10.1002/mrd.22589.
9. Distinguishing ovarian maturity of farmed white sturgeon (*Acipenser transmontanus*) by Fourier transform infrared spectroscopy: a potential tool for caviar production management / X. Lu [et al.] // *J. Agric. Food Chem.* – 2010. – Vol. 58, N 7. – P. 4056–4064. doi.org/10.1021/jf9038502.
10. The R Project for Statistical Computing. Vienna, Austria, 2016 [Electronic resource]. – Mode of access: <https://www.R-project.org>. – Date of access: 21.11.2016.

11. Morphological Distinction Between Juvenile Stages of the European Sturgeon *Acipenser sturio* and the Atlantic Sturgeon *Acipenser oxyrinchus* / S. Wuertz [et al.] // *Biology and Conservation of the European Sturgeon Acipenser sturio* L. 1758. – 2011. – P. 53–64. doi.org/10.1007/978-3-642-20611-5_4.
12. Thieren, E. Guide for the identification of archaeological sea sturgeon (*Acipenser sturio* and *A. oxyrinchus*) remains / E. Thieren, W. Wouters, W. Van Neer // *Cybium*. – 2015. – Vol. 39, N 3. – P. 175–192.
13. Assigning Sex and Reproductive Stage to Adult Lake Sturgeon using Ultrasonography and Common Morphological Measurements / J. A. Chiotti [et al.] // *North American J. of Fisheries Management*. – 2016. – Vol. 36, N 1. – P. 21–29. doi.org/10.1080/02755947.2015.1103823.
14. Mal'tsev, A. V. A biometric method for determining the sex of acipenserids, including the Russian sturgeon *Acipenser gueldenstaedtii* (Acipenseridae) of the Azov Population / A.V. Mal'tsev, Ya. G. Merkulov // *J. Ichthyol.* – 2016. – Vol. 46, N 6. – P. 460–464. doi.org/10.1134/s0032945206060075.
15. A noninvasive technique for determining sex of live adult North American sturgeons / P. Vecsei [et al.] // *Environ. Biol. Fishes.* – 2003. – Vol. 68, N 4. – P. 333–338. doi.org/10.1023/b:ebfi.0000005732.98047.f3.

References

1. Barulin N. V. Serum enzyme response of captive sturgeon brookstock *Acipenser baerii* Brandt 1869 females and two hybrids (bestor = female *Huso huso* Linnaeus, 1758 × male *Acipenser ruthenus* Linnaeus, 1758, and RsSs = *A. gueldenstaedtii* Brandt 1833 × *A. baerii* Brandt 1869) to hormonal stimulation for spawning induction. *Journal of Applied Ichthyology*, 2015, vol. 31, pp. 2–6. doi.org/10.1111/jai.12898.
2. Zhivotovsky L. A., Kim H. Y. Morphological markers of sex in pink salmon *Oncorhynchus gorbuscha* (Salmonidae). *Journal of Ichthyology*, 2015, vol. 55, no. 1, pp. 131–133. doi.org/10.1134/s003294521501021x.
3. Falahatkar B., Poursaeid S. Gender Identification in Great Sturgeon (*Huso huso*) Using Morphology, Sex Steroids, Histology and Endoscopy. *Anatomia, Histologia, Embryologia*. 2014, vol. 43, no. 2, pp. 81–89. doi.org/10.1111/ahc.12049.
4. Chebanov M. S., Galich E. V. Sturgeon hatchery manual. *FAO Fisheries and Aquaculture*, 2010, Technical Paper no. 558, XXXII. 303 p.
5. Hurvitz A., Jackson K., Degani G., Levavi-Sivan B. Use of endoscopy for gender and ovarian stage determinations in Russian sturgeon (*Acipenser gueldenstaedtii*) grown in aquaculture. *Aquaculture*, 2007, vol. 270, pp. 158–166. doi.org/10.1016/j.aquaculture.2007.05.020.
6. Webb M. A. H., Feist G. W., Foster E. P., Schreck C. B., Fitzpatrick M. S. Potential classification of sex and stage of gonadal maturity of wild white sturgeon using blood plasma indicators. *Transactions of the American fisheries society*, 2002, vol. 131, no. 1, pp. 132–142. doi.org/10.1577/1548-8659(2002)131%3C0132:pcosas%3E2.0.co;2.
7. Hao Du, Xiaoyan Zhang, Xiaoqian Leng, Shuhuan Zhang, Jiang Luo, Zhigang Liu, Xingmei Qiao, Boyd Kynard, Qiwei Wei. Gender and gonadal maturity stage identification of captive Chinese sturgeon, *Acipenser sinensis*, using ultrasound imagery and sex steroids. *General and Comparative Endocrinology*, 2016. doi.org/10.1016/j.ygcen.2016.08.004.
8. Vizziano-Cantonnet D., Landro S., Lasalle A., Martinez A., Mazzoni T. S., Quagio-Grassiotto I. Identification of the Molecular Sex-Differentiation Period in the Siberian Sturgeon. *Molecular Reproduction and Development*, 2016, vol. 83, no. 1, pp. 19–36. doi.org/10.1002/mrd.22589.
9. Lu X., Webb M., Talbott M., Van Eenennaam J., Palumbo A., Linares-Casenave J., Doroshov S., Struffenegger P., Rasco B. Distinguishing ovarian maturity of farmed white sturgeon (*Acipenser transmontanus*) by Fourier transform infrared spectroscopy: a potential tool for caviar production management. *Journal of Agricultural and Food Chemistry*, 2010, vol. 58, no. 7, pp. 4056–4064. doi.org/10.1021/jf9038502.
10. *The R Project for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2016. Available at: <https://www.R-project.org> (accessed 21 November 2016).
11. Wuertz S., Reiser S., Gessner J., Kirschbaum F. Morphological Distinction Between Juvenile Stages of the European Sturgeon *Acipenser sturio* and the Atlantic Sturgeon *Acipenser oxyrinchus*. *Biology and Conservation of the European Sturgeon Acipenser sturio* L. 1758, 2011, pp. 53–64. doi.org/10.1007/978-3-642-20611-5_4.
12. Thieren E., Wouters W., Van Neer W. Guide for the identification of archaeological sea sturgeon (*Acipenser sturio* and *A. oxyrinchus*) remains. *Cybium*, 2015, vol. 39, no. 3, pp. 175–192.
13. Chiotti J. A., Boase J. C., Hondorp D. W., Briggs A. S. Assigning Sex and Reproductive Stage to Adult Lake Sturgeon using Ultrasonography and Common Morphological Measurements. *North American Journal of Fisheries Management*, 2016, vol. 36, no. 1, pp. 21–29. doi.org/10.1080/02755947.2015.1103823.
14. Mal'tsev A. V., Merkulov Ya. G. A biometric method for determining the sex of acipenserids, including the Russian sturgeon *Acipenser gueldenstaedtii* (Acipenseridae) of the Azov Population. *Journal of Ichthyology*, 2016, vol. 46, no. 6, pp. 460–464. <https://doi.org/10.1134/s0032945206060075>.
15. Vecsei P., Litvak M. K., Noakes D. L. G., Rien T., Hochleithner M. A noninvasive technique for determining sex of live adult North American sturgeons. *Environmental Biology of Fishes*, 2003, vol. 68, no. 4, pp. 333–338. doi.org/10.1023/b:ebfi.0000005732.98047.f3.

Информация об авторе

Барулин Николай Валерьевич – канд. с.-х. наук, доцент, заведующий кафедрой, Белорусская государственная сельскохозяйственная академия (ул. Мичурина, 5, 213407, Горки, Могилевская область). E-mail: barulin@list.ru.

Для цитирования

Барулин, Н. В. Обнаружение внешних полоспецифических признаков в строении производных кориума личинок и молоди стерляди *Acipenser ruthenus* / Н. В. Барулин // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 119–128.

Information about the author

Barulin Nikolai Valerievich – Ph. D. (Agrarian), Assistant Professor, Head of the Department, Belarusian State Agricultural Academy (5, Michurin Str., 213407, Gorki, Mogilev region, Republic of Belarus). E-mail: barulin@list.ru.

For citation

Barulin N. V. Detection of the external sex specific features in the structure of corium derivatives of larvae and juveniles of sterlet *Acipenser ruthenus*. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 119–128. (in Russian)