

# ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

Выходит шесть номеров в год

Журнал основан в июле 1957 года

---

МИНСК, БЕЛОРУССКАЯ НАУКА, 2016, ТОМ 60, № 2

---

Учредитель – Национальная академия наук Беларуси

Редакционная коллегия:

**В. Г. Гусаков** (главный редактор),

**А. В. Кильчевский** (заместитель главного редактора),

**С. Я. Килин** (заместитель главного редактора),

**С. А. Чижик** (заместитель главного редактора),

**И. М. Богдевич, П. А. Витязь, И. Д. Вологовский, И. В. Гайшун, С. В. Гапоненко,**

**А. Е. Дайнеко, И. В. Залуцкий, О. А. Ивашкевич, Н. А. Изобов, Н. С. Казак,**

**А. А. Коваленя, Ф. Ф. Комаров, И. В. Котляров, В. А. Лабунов, А. П. Ласковнев,**

**О. Н. Левко, А. И. Лесникович, В. Ф. Логинов, А. А. Махнач, А. А. Михалевич,**

**М. Е. Никифоров, В. А. Орлович, О. Г. Пенязьков, Ю. М. Плескачевский,**

**Н. С. Сердюченко, А. Ф. Смеянович, Л. М. Томильчик, С. А. Усанов,**

**Л. В. Хотылева, В. А. Хрипач, И. П. Шейко,**

ведущий редактор **Т. П. Петрович**

*Адрес редакции:*

220072, Минск, ул. Академическая, 1, к. 119,

тел. 284-19-19

[csl.bas-net.by/Web/Pages/magNAS.asp](http://csl.bas-net.by/Web/Pages/magNAS.asp)

E-mail: [doklady\\_nanb@mail.ru](mailto:doklady_nanb@mail.ru)

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

<b>Берник В. И., Гётце Ф., Гусакова А. Г.</b> Алгебраические точки в коротких интервалах . . . . .	5
<b>Урбанович Т. М.</b> Особый случай сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши . . . . .	10
<b>Корзюк В. И., Мандрик А. А.</b> Первая смешанная задача для однородного нестроого гиперболического уравнения третьего порядка . . . . .	14
<b>Бусел Т. С., Супруненко И. Д.</b> Блочная структура образов унитарных элементов в неприводимых модулярных представлениях классических алгебраических групп малых размерностей . . . . .	21
<b>Астровский А. И.</b> Преобразование линейных нестационарных систем наблюдения со скалярным выходом к форме Шварца . . . . .	27
<b>Калинин А. И., Лавринович Л. И.</b> Сингулярные возмущения в линейно-квадратичной задаче оптимального управления . . . . .	31
<b>Янчевский В. И.</b> Приведенные группы Уайтхеда специальных унитарных групп анизотропных эрмитовых форм, связанных с гензелевыми алгебрами с делением, алгебры вычетов которых глобальны . . . . .	35

## ФИЗИКА

- Першукевич П. П., Макарова Е. А., Волкович Д. И., Соловьёв К. Н.** Влияние тетрафенилзамещения на фотофизику молекул тетраазпорфина и тетраазахлорина . . . . . 39
- Архиенко В. И., Гусаков Е. З., Симончик Л. В., Томов А. В., Трухачев Ф. М., Черкасова И. А.** Численные решения для собственных мод абсолютной параметрической распадной неустойчивости неоднородной плазмы на нелинейной стадии . . . . . 46
- Шахно Д. В., Шахно О. В.** Применение метода Монте-Карло с матрицей перехода для моделирования жидкостей различной сложности при низкой температуре . . . . . 51

## ХИМИЯ

- Садовская Л. Ю., Свиридова Т. В., Якименко Т. М., Свиридов Д. В.** Планарные фотокатализаторы с функцией накопления фотогенерированного заряда . . . . . 58
- Тарасевич В. А.** Исследование теплостойких свойств полимерных материалов, содержащих неорганические наполнители . . . . . 62
- Лазнев К. В., Агабеков В. Е.** Связывание гелевых магнитных микросфер с мононуклеарными клетками крови . . . . . 67
- Киселев П. А., Панибрат О. В., Сыса А. Г., Анисович М. В., Жабинский В. Н., Хрипач В. А.** Окислительный стресс как один из возможных путей антиракового действия брассиностероидов. . . . . 73

## БИОЛОГИЯ

- Котова С. А., Рыбакова В. И., Забавская Т. В., Шило Е. А., Спивак Е. А., Цыбовский И. С., Рембала К., Щерковска З.** Полиморфизм микросателлитных локусов X-хромосомы этнических белорусов в контексте судебно-экспертной идентификации личности . . . . . 78
- Кондратюк А. В., Козлова Л. Н., Козлов В. А., Кильчевский А. В.** Оценка эффективности ДНК-маркеров в селекции по биохимическим признакам качества клубней картофеля. . . . . 85

## НАУКИ О ЗЕМЛЕ

- Какарека С. В., Кокш Ю. Г.** Оценка воздействия деревообрабатывающих предприятий на уровни содержания формальдегида в атмосферном воздухе. . . . . 90

## ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

- Прушак В. Я.** Деформация контура горных выработок Старобинского месторождения калийных солей при различных глубинах заложения . . . . . 97
- Черенда Н. Н., Басалай А. В., Шиманский В. И., Углов В. В., Асташинский В. М.** Модификация поверхности сплава Ti-6Al-4V при высокоэнергетическом плазменном воздействии. . . . . 102
- Шевченко В. В., Песецкий С. С.** Структура и свойства смесей полибутилентерефталата и полибутилентерефталат-политетраметилепоксида блок-сополимера, содержащих добавки удлинителя цепи . . . . . 109

## СОЦИАЛЬНО-ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ

- Яковенко Н. В.** Специфика художественного перевода с близкородственных языков: теоретический аспект (на бел. яз.) . . . . . 116

## АГРАРНЫЕ НАУКИ

- Шейко И. П., Лобан Н. А., Шейко Р. И.** Повышение продуктивных, откормочных и мясных качеств свиней материнских пород с использованием селекционных индексов . . . . . 123

---

ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ. 2016. Т. 60, № 2

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,  
свидетельство о регистрации № 387 от 18.05.2009.

---

Редактор Т. П. Петрович  
Компьютерная верстка Н. И. Кашуба

Сдано в набор 29.03.2016. Выпуск в свет 25.04.2016. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Бумага офсетная. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 16,4. Тираж 164 экз. Заказ 77.

Цена номера: индивидуальная подписка – 102 900 руб.; ведомственная подписка – 252 168 руб.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/18 от 02.08.2013. ЛП № 02330/455 от 30.12.2013. Ул. Ф. Скорины, 40, 220141, г. Минск.

© «Издательский дом «Беларуская навука».  
Доклады НАН Беларуси, 2016

# DOKLADY OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

Published bimonthly

The journal has been published since July, 1957

---

MINSK, BELORUSSKAYA NAUKA, 2016, Vol. 60, N 2

---

Founder – National Academy of Sciences of Belarus

Editorial Board:

**V. G. Gusakov** (Editor-in-Chief),  
**S. Ya. Kilin** (Associate Editor-in-Chief),  
**A. V. Kilchevsky** (Associate Editor-in-Chief),  
**S. A. Chizhik** (Associate Editor-in-Chief),  
**I. M. Bogdevich, A. Ye. Daineko, I. V. Gaishun, S. V. Gaponenko, O. A. Ivashkevich,**  
**N. A. Izobov, N. S. Kazak, L. V. Khotyleva, V. A. Khripach,**  
**A. A. Kovalenya, F. F. Komarov, I. V. Kotlyarov, V. A. Labunov, A. P. Laskovnev,**  
**O. N. Levko, A. I. Lesnikovich, V. F. Loginov, A. A. Makhnach, A. A. Mikhalevich,**  
**M. Ye. Nikiforov, V. A. Orlovich, O. G. Penyazkov, Yu. M. Pleskachevsky,**  
**N. S. Serduchenko, I. P. Sheiko, A. F. Smeyanovich, L. M. Tomilchik,**  
**S. A. Usanov, P. A. Vitiaz, I. D. Volotovskii, I. V. Zalutsky,**  
lead editor **T. P. Petrovich**

*Address of the Editorial Office:*

220072, Minsk, 1 Akademicheskaya Str., room 119

telephone: 284-19-19

*csl.bas-net.by/Web/Pages/magNAS.asp*

*E-mail: doklady\_nanb@mail.ru*

## CONTENTS

### MATHEMATICS

<b>Bernik V. I., Goetze F., Husakova H. G.</b> Algebraic numbers in short intervals .....	5
<b>Urbanovich T. M.</b> Special case of the singular integral equation with the Cauchy kernel .....	10
<b>Korzyuk V. I., Mandryk A. A.</b> First mixed problem for the third-order homogeneous unstrict hyperbolic equation .....	14
<b>Busel T. S., Suprunenko I. D.</b> The Jordan block structure of the images of unipotent elements in irreducible modular representations of classical algebraical groups of small dimensions .....	21
<b>Astrovskii A. I.</b> Transformation of linear time-varying observation systems with scalar output to the Schwarz form .....	27
<b>Kalinin A. I., Lavrinovich L. I.</b> Singular perturbations in the linear-quadratic optimal control problem .....	31
<b>Yanchevskii V. I.</b> On reduced Whitehead groups of special unitary groups of anisotropic hermitian forms, related to henselian division algebras with global residue algebras .....	35

## PHYSICS

- Pershukevich P. P., Makarova E. A., Volkovich D. I., Solovyov K. N.** Influence of tetraphenyl substitution on photophysics of tetraazaporphin and tetraazachlorin molecules. . . . . 39
- Arkhipenko V. I., Gusakov E. Z., Simonchik L. V., Tomov A. V., Truhachev F. M., Cherkasova I. A.** Numerical solutions for the eigen modes of the absolute decay parametric instability of inhomogeneous plasma at the nonlinear stage . . . . . 46
- Shakhno D. V., Shakhno A. V.** Application of the transition matrix Monte Carlo technique to simulate different-complexity liquids at low temperature . . . . . 51

## CHEMISTRY

- Sadovskaya L. Yu., Sviridova T. V., Yakimenko T. M., Sviridov D. V.** Planar photocatalysts with the function of photo-produced charge accumulation . . . . . 58
- Tarasevich V. A.** Investigation of thermal protective properties of polymer materials containing inorganic fillers . . . . . 62
- Laznev K. V., Agabekov V. E.** Binding of magnetic gel microspheres to blood mononuclear cells . . . . . 67
- Kiselev P. A., Panibrat O. V., Sysa A. G., Anisovich M. V., Zhabinskii V. N., Khripach V. A.** Oxidative stress as one of the possible ways of anticancer effects of brassinosteroids . . . . . 73

## BIOLOGY

- Kotova S. A., Rybakova V. I., Zabauskaya T. V., Shyla A. A., Spivak E. A., Tsybovsky I. S., Reĭbala K., Szczerkowska Z.** Polymorphism of X-chromosome microsatellite loci of ethnic Belarusians in the context of the forensic personality identification . . . . . 78
- Kondratiuk A. V., Kozlova L. N., Kozlov V. A., Kilchevsky A. V.** Validation of the DNA marker efficiency in potato breeding for tuber quality traits. . . . . 85

## EARTH SCIENCES

- Kakareka S. V., Kokosh Y. G.** Impact assessment of wood-processing facilities on formaldehyde concentrations in atmospheric air. . . . . 90

## TECHNICAL SCIENCES

- Prushak V. Ya.** Deformation of the edge of the workings of the Starobin deposit of potash salts at different location depths . . . . . 97
- Cherenda N. N., Basalai A. V., Shymanski V. I., Uglov V. V., Astashynski V. M.** Surface modification of the Ti-6Al-4V alloy under the action of high-energy plasma . . . . . 102
- Shevchenko V. V., Pesetskii S. S.** Structure and properties of poly(butylene terephthalate) and poly(butylene terephthalate)-poly(tetra methylene oxide) block copolymer blends with chain extender additives . . . . . 109

## SOCIAL SCIENCES AND HUMANITIES

- Yakovenko N. V.** The specifics of literary translation from related languages: theoretical aspect . . . . . 116

## AGRARIAN SCIENCES

- Sheyko I. P., Loban N. A., Sheyko R. I.** Improvement of reproductive, fattening and meat traits of maternal breeds of pigs using selection indices. . . . . 123

## МАТЕМАТИКА

УДК 511.42

В. И. БЕРНИК<sup>1</sup>, Ф. ГЁТЦЕ<sup>2</sup>, А. Г. ГУСАКОВА<sup>1</sup>

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ТОЧКИ В КОРОТКИХ ИНТЕРВАЛАХ

(Представлено академиком В. И. Корзюком)

<sup>1</sup>Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
bernik.vasili@mail.ru; gusakova.anna.0@gmail.com<sup>2</sup>Университет г. Билефельда, Германия  
goetze@math.uni-bielefeld.de

При достаточно большом натуральном числе  $Q$  существуют интервалы  $I \subset [0, 1)$  длины  $c_1(n)Q^{-1}$ , не содержащие алгебраических чисел никакой степени  $n$  и высоты  $H(P) \leq Q$ . В сообщении найдено условие на интервалы  $I$  в терминах диофантовых приближений, при котором интервалы длины  $c_2(n)Q^{-\gamma}$ ,  $\gamma > 1$ , содержат не менее, чем  $c_3(n)Q^{n-2\gamma+1}$  алгебраических чисел  $\alpha$  высоты  $H(\alpha) \leq Q$  и степени  $\deg \alpha = n > 2\gamma - 1$ .

*Ключевые слова:* алгебраические числа, многочлен с целыми коэффициентами, результатант, мера Лебега.

V. I. BERNIK<sup>1</sup>, F. GOETZE<sup>2</sup>, H. G. HUSAKOVA<sup>1</sup>

## ALGEBRAIC NUMBERS IN SHORT INTERVALS

<sup>1</sup>Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
bernik.vasili@mail.ru; gusakova.anna.0@gmail.com<sup>2</sup>Bielefeld University, Germany  
goetze@math.uni-bielefeld.de

For sufficiently large  $Q$  there exist the intervals  $I \subset [0, 1)$  of length  $c_1(n)Q^{-1}$ , that do not contain algebraic numbers of any degree  $n$  and of height  $H(P) \leq Q$ . In this article we have found an condition for intervals  $I$  in terms of the Diophantine approximations when the intervals of length  $c_2(n)Q^{-\gamma}$ ,  $\gamma > 1$ , contain not less than  $c_3(n)Q^{n-2\gamma+1}$  algebraic numbers  $\alpha$  of height  $H(\alpha) \leq Q$  and degree  $\deg \alpha = n > 2\gamma - 1$ .

*Keywords:* algebraic numbers, polynomial with integer coefficients, resultant, Lebesgue measure.

Во многих математических теоремах используется тот факт, что рациональные точки есть в любых интервалах произвольной длины. Другими словами, множество рациональных чисел всюду плотно во множестве действительных чисел. Более сильными понятиями, чем свойство всюду плотности, являются понятия равномерной распределенности [1] и регулярности [2]. На этих понятиях мы не будем останавливаться, лишь отметим, что количество членов последовательности, взятых каким-нибудь естественным образом, пропорционально длине интервала (равномерное распределение) или отличается на разных интервалах равной длины в конечное число раз (регулярное распределение).

В теории чисел многие свойства трансцендентных чисел проявляются при изучении их приближений алгебраическими числами [3; 4]. Поэтому важно знать, как распределены алгебраические числа.

Для многочленов

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n \neq 0$$

обозначим через  $\deg P = n$  – степень многочлена  $P(x)$ , а через  $H = H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$  – высоту многочлена  $P(x)$ . Для достаточно большого натурального числа  $Q$  введем класс многочленов

$$P_n(Q) = \{ P(x) \in \mathbb{Z}[x], \deg P \leq n, H(P) \leq Q \}.$$

Будем обозначать через  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  – корни  $P(x)$ ;  $c_1 = c_1(n), c_2, \dots$  – величины, зависящие от  $n$  и не зависящие от  $H$  и  $Q$ ;  $\#A$  – количество элементов конечного множества  $A$ ;  $\mu B$  – меру Лебега измеримого множества  $B \subset \mathbb{R}$ . Множество всех корней  $\alpha$  многочленов  $P(x) \in P_n(Q)$  обозначим через  $T(P_n(Q))$ . Ясно, что  $\#P_n(Q) \leq (2Q+1)^{n+1}$  и тогда  $\#T(P_n(Q)) \leq n(2Q+1)^{n+1}$ . Известно [2], а для многочленов нечетной степени это очевидно, что  $\#T(P_n(Q)) \cap \mathbb{R} > c_1 Q^{n+1}$ . В работе [5] доказано, что действительные алгебраические числа, упорядоченные по росту высоты минимальных многочленов, равномерно распределены только при  $n=1$ , т. е. когда являются рациональными числами.

В данной работе мы будем изучать законы распределения множества  $T(P_n(Q)) \cap [0, 1)$  на коротких интервалах  $I \in [0, 1)$ ,  $\mu I = Q^{-\gamma}$ ,  $\gamma > 0$ . Выбор интервала  $[0, 1)$  несущественен, можно взять любой конечный интервал.

Короткие интервалы ведут себя очень избирательно по отношению к алгебраическим числам. В недавно вышедшей работе [6] доказано, что:

- а) существуют интервалы  $I_1$  длины  $\mu I_1 = 0,5Q^{-1}$  такие, что  $T(P_n(Q)) \cap I_1 = \emptyset$  при любом  $n$ ;
- б) при достаточно большой величине  $c_2 > 0$  для любого интервала  $I_2$ ,  $\mu I_2 > c_2 Q^{-1}$ , при подходящей величине  $c_3 > 0$  справедливо

$$\#\{ T(P(Q)) \cap I_2 \} > c_3 Q^{n+1} \mu I_2.$$

Ясно, что интервалов типа  $I_1$  немного, ведь известно [2], что  $\#\{ T(P_n(Q)) \cap [0, 1) \} > c_4 Q^{n+1}$ .

В работе впервые дается ответ на следующий вопрос, какие условия надо наложить на  $n$  и интервалы  $I$  длины  $\mu I = Q^{-\gamma_1}$ , чтобы при любом  $\gamma_1 > 1$  интервалы  $I$  содержали алгебраические точки из  $T(P_n(Q))$ . В [7] приведено условие для  $I$  при  $\gamma_1 = \frac{3}{2}$ .

Из теоремы Минковского о линейных формах [8] следует, что при любом  $x \in [0, 1)$  и  $Q > 1$  найдется целочисленный многочлен  $P(x)$ ,  $H(P) \leq Q$  такой, что

$$|P(x)| < 2(n+1)Q^{-n}. \quad (1)$$

В неравенстве (1) показатель степени  $n$  наилучший, так как можно привести пример  $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  такой, что  $|P(x_1)| > c_4 Q^{-n}$ . Из теоремы Спринджук [4] следует, что неравенство  $|P(x)| < Q^{-w}$ ,  $w > n$ , может выполняться только для  $x \in B_1 \subset [0, 1)$ ,  $\mu B_1 < \varepsilon_1$  при любом  $\varepsilon_1 > 0$ .

Это означает, что если множество  $B_2$  состоит из точек  $x \in [0, 1)$ , для которых  $|P_k(x)| < c_5 H^{-k-1}$  и  $H \leq Q$  достаточно велико, то  $\mu B_2 < \varepsilon_2$ , где  $\varepsilon_2 > 0$  – произвольно малая величина. Более того, известна оценка  $\mu B_2 < c_6 Q^{-1/n}$  [9].

В следующей теореме на точки интервалов  $I$  налагается условие

$$\max_{x \in I} |P_1(x)| > c_7 H(P_1)^{-\deg P_1 - 1}. \quad (2)$$

Это означает, что точки интервалов  $I$  не должны слишком хорошо приближаться алгебраическими числами  $\alpha$  степени, меньшей  $n$ .

**Т е о р е м а 1.** Пусть задан интервал  $I$  длины  $\mu I = Q^{-\gamma_2}$ ,  $\gamma_2 > 1$ , точки которого удовлетворяют неравенству (2). Тогда при подходящем  $c_8$  справедливо неравенство

$$\#\{ T(P_n(Q)) \cap I \} > c_8 Q^{n+1-\gamma_2} \mu I.$$

Основой доказательства теоремы 1 является следующее утверждение.

**Т е о р е м а 2.** Пусть интервал  $I$  удовлетворяет условию теоремы 1. Обозначим через  $B_3(\delta_0)$  множество точек, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < 2(n+1)Q^{-n}, \\ |P'(x)| < \delta_0 Q^{-\gamma_2+1}, \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение в полиномах  $P(x) \in P_n(Q)$ . Тогда при достаточно малом  $\delta_0$  верно

$$\mu B_3(\delta_0) < \frac{1}{4} \mu I.$$

Схема доказательства теоремы 2. Мы укажем, какие принципиальные изменения надо внести в рассуждения [6], чтобы получить необходимый результат. Возьмем  $\varepsilon_3 > 0$  и найдем  $\lambda_0$ , при котором система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < 2(n+1)Q^{-n}, \\ Q^{-\lambda_0 - \varepsilon_3} \leq |P'(x)| < \delta_0 Q^{-\lambda_0}, \end{cases} \quad (3)$$

выполняется на множестве с мерой, меньшей, чем  $\frac{1}{s} \mu I$ , где  $s$  – некоторое натуральное число, выбор которого будет сделан ниже.

**Л е м м а 1.** Если  $\alpha_1$  – ближайший к  $x$  корень многочлена  $P(x)$ , то при  $P'(x) \neq 0$ ,  $P'(\alpha_1) \neq 0$  из (3) следует

$$|x - \alpha_1| < n |P(x)| |P'(x)|^{-1}, |x - \alpha_1| < 2^{n-1} |P(x)| |P'(\alpha_1)|^{-1}.$$

Лемма 1 хорошо известна [4; 10].

**Л е м м а 2.** Пусть  $P_1(x)$  и  $P_2(x)$  – два целочисленных многочлена без общих корней с условиями

$$\deg P_1 \leq n, \deg P_2 \leq n, H(P_1) \leq Q, H(P_2) \leq Q.$$

Если на некотором интервале  $J$ ,  $\mu J = Q^{-\eta}$ ,  $\eta > 0$ , при  $\tau > 0$  выполняется неравенство

$$\max_{x \in J} (|P_1(x)|, |P_2(x)|) < Q^{-\tau},$$

то для любого  $\delta > 0$  и  $Q > Q_0(\delta)$  справедливо неравенство

$$\tau + 1 + 2 \max(\tau + 1 - \eta, 0) < 2n + \delta.$$

Лемма 2 доказана в [10].

Пользуясь леммой 1 и системой неравенств (3) при  $|P'(x)| > c_9 Q^{-(n-1)/2}$ , нетрудно доказать, что

$$\frac{1}{2} |P'(x)| < |P'(\alpha_1)| < 2 |P'(x)|$$

и поэтому вместо системы неравенств (3) будем рассматривать систему неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < 2(n+1)Q^{-n}, \\ \frac{1}{2} Q^{-\lambda_0 - \varepsilon_3} < |P'(\alpha_1)| < 2\delta_0 Q^{-\lambda_0}. \end{cases}$$

По лемме 1 система неравенств (3) выполняется на интервале

$$\sigma(P): |x - \alpha_1| < c_{10} Q^{-n} |P'(\alpha_1)|^{-1}. \quad (4)$$

Наряду с  $\sigma(P)$  рассмотрим интервал

$$\sigma_k(P): |x - \alpha_1| < c_{11} Q^{-k} |P'(\alpha_1)|^{-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Потребуем, чтобы интервал  $\sigma_k(P)$  содержался в  $I$ . Для этого должно выполняться неравенство

$$k \geq \gamma_2 + \lambda_0 + \varepsilon_3. \quad (6)$$

Зафиксируем вектор  $\bar{b}_k = (a_n, \dots, a_1)$ , состоящий из коэффициентов многочлена  $P(x)$ . Заметим, что при достаточно большом  $Q > Q_0(n)$

$$\#\{\bar{b}_k\} < 2^n Q^{n-k}. \quad (7)$$

Множество многочленов с одним и тем же вектором  $\bar{b}_k$  обозначим через  $T(\bar{b}_k)$ . Для натурального числа  $m \geq 3$  интервалы  $\sigma_k(P_i)$ , содержащие точки не более, чем  $m$  интервалов  $\sigma_k(P)$ ,



$P \in T(\bar{b}_k)$ , будем называть  $m$ -существенными. Если же количество многочленов больше  $m$ , то интервал  $\sigma_k(P_1)$  назовем  $m$ -несущественным.

*Существенные интервалы.* Множество  $m$ -существенных интервалов обозначим, как  $M_m(\bar{b}_k)$ . Имеем

$$\sum_{\sigma_k(P_1) \in M_m(\bar{b}_k)} \mu \sigma_k(P_1) \leq m \mu I. \quad (8)$$

Из (4) и (5) следует, что

$$\mu \sigma(P_1) \leq c_{10} c_{11}^{-1} Q^{-n+k} \mu \sigma_k(P_1),$$

откуда с учетом (7) и (8) получаем

$$\sum_{\bar{b}_k} \sum_{\sigma_k(P_1) \in M_m(\bar{b}_k)} \mu \sigma(P_1) \leq m \cdot 2^n c_{10} c_{11}^{-1} \mu I < \frac{1}{2s} \mu I$$

при подходящем выборе  $c_{11}$ .

*Несущественные интервалы.* Разложим  $P_1(x)$  при  $x \in \sigma_k(P_1)$  в ряд Тэйлора с остаточным членом в форме Лагранжа и оценим  $|P_1(x)|$  сверху

$$P_1(x) = P_1'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \frac{1}{2} P_1''(\xi)(x - \alpha_1)^2, \quad \xi \in (\alpha_1, x).$$

Так как величина  $|x - \alpha_1|$  оценена в (4), то

$$|P_1'(\alpha_1)(x - \alpha_1)| < c_{11} Q^{-k},$$

а

$$\left| \frac{1}{2} P_1''(\xi)(x - \alpha_1)^2 \right| < c_{12} Q^{1-2k+2\lambda_0+2\varepsilon_3}.$$

Если

$$k > 2\lambda_0 + 1 + 2\varepsilon_3,$$

то при достаточно больших  $Q$  получаем

$$|P_1(x)| < 2c_{12} Q^{-k}. \quad (9)$$

На интервале  $\sigma_k(P_1)$  имеется не менее  $m$  многочленов  $P_j(x) \in M_m(\bar{b}_k)$ ,  $2 \leq j \leq m$ , и для всех них справедливо неравенство (9). Первые коэффициенты многочленов  $P_j(x)$  совпадают и поэтому для многочленов  $R_j(x) = P_{j+1}(x) - P_1(x)$  верны неравенства

$$|R_j(x)| < 4c_{12} Q^{-k}, \quad \deg R_j(x) \leq k.$$

Если среди многочленов  $R_j(x)$  окажутся по крайней мере два неприводимых, то они не имеют общих корней и можно применить лемму 2. В данном случае имеем

$$\tau = k, \eta = k - \lambda_0 - \varepsilon_3$$

и

$$\tau + 1 + 2(\tau + 1 - \eta) = k + 3 + 2\lambda_0 + 2\varepsilon_3, \quad (10)$$

что больше, чем  $2k + \delta$ , при  $k < 2\lambda_0 + 3 + 2\varepsilon_3 - \delta$ . Пришли к противоречию.

Возьмем  $\lambda_0 = \gamma_2 - 1$ . Натуральное число  $k$  должно по (6) и (10) удовлетворять неравенству

$$2\gamma_2 - 1 + 2\varepsilon_3 \leq k \leq 2\gamma_2 + 1 + 2\varepsilon_3 - \delta.$$

Поскольку  $k$  находится в интервале длины  $2 - \delta > 1,9$  при  $\delta < 0,1$ , то такое целое число всегда можно выбрать.

Если из  $m - 1$  многочленов  $R_j(x)$  нельзя выбрать два неприводимых, то

$$R_j(x) = t_1(x)t_2(x).$$

Обозначим через  $\deg t_1 = n_1$  и  $H(t_1) = Q^{\lambda_1}$ . Тогда  $\deg t_2 \leq k - n_1$ ,  $H(t_2) < c_{13} Q^{1-\lambda_1}$  [4]. Найдем число  $a$  такое, что для всех  $x \in \sigma_k(P_1)$  выполняется



$$|t_1(x)| < c_{14} Q^{-a} = c_{14} H(t_1)^{-a/\lambda_1},$$

$$|t_2(x)| < c_{15} Q^{-k+a} < c_{16} H(t_2)^{-(k-a)/(1-\lambda_1)}.$$

Если  $\frac{a}{\lambda_1} \geq n_1 + 1$ , то это противоречит (2). Если же  $a < \lambda_1(n_1 + 1)$ , то  $\frac{k-a}{1-\lambda_1} \geq k > k - n_1 + 1$ , что опять же противоречит (2).

Покажем теперь, как из теоремы 2 следует теорема 1. Возьмем  $x_1 \in B_1 = I \setminus B_3$ . Из теоремы 2 следует, что

$$\mu B_4 \geq \frac{3}{4} \mu I.$$

В точке  $x_1$  выполняется система неравенств

$$\begin{cases} |P_1(x_1)| < 2(n+1)Q^{-n}, \\ |P_1'(x_1)| \geq \delta_0 Q^{-\gamma_2+1}. \end{cases}$$

Используя лемму 1 для корня  $\alpha_1(P_1)$ , ближайшего к  $x_1$ , верно неравенство

$$|x_1 - \alpha_1| < 2^n(n+1)\delta_0^{-1}Q^{-n-1+\gamma_2}. \quad (11)$$

Неравенству (11) могут удовлетворять и другие корни  $P_1(x)$ , поэтому мера множества  $B_5 \subset I$  всех  $x \in I$ , для которых  $|P_1(x)| < 2(n+1)Q^{-n}$  при фиксированном многочлене  $P_1(x)$  не превосходит  $\mu B_5 = 2^{n+1}(n+1)^2\delta_0^{-1}Q^{-n-1+\gamma_2}$ . Возьмем точку  $x_2 \in B_4 \setminus B_5$ . Такие точки существуют, поскольку  $\mu B_5 < \frac{3}{4}\mu I$ . Для нее найдем многочлен  $P_2(x)$  и корень  $\alpha_1(P_2)$ . Построение точек  $x_3, \dots, x_t$  и многочленов  $P_3(x), \dots, P_t(x)$  можно продолжать до тех пор, пока будет выполняться неравенство  $(t-1)(n+1)^2 2^{n+1}\delta_0^{-1}Q^{-n-1+\gamma_2} < \frac{3}{4}\mu I$ , а при замене  $t-1$  на  $t$  знак неравенства меняется на противоположный. Поэтому

$$t > \frac{3}{4}(n+1)^{-2} 2^{-n-1}\delta_0 Q^{n+1-\gamma_2} \mu I$$

и теорема 1 доказана.

### Список использованной литературы

1. *Kuipers, L.* Uniform distribution of sequences. Pure and Applied Mathematics / L. Kuipers, H. Niederreiter. – New York; London; Sydney, 1974. – xiv+390 p.
2. *Baker, A.* Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker, W. Schmidt // Proc. London Math. Soc. – 1970. – Vol. 21, N 3. – P. 1–11.
3. *Bugeaud, Y.* Approximation by algebraic numbers / Y. Bugeaud // Cambridge Tracts in Mathematics. – 2004. – Vol. 160. – 274 p.
4. *Спринджук, В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск: Наука и техника, 1967. – 184 с.
5. *Каляда, Д. У.* Аб размеркаванні рэчаісных алгебраічных лікаў дадзенай ступені / Д. У. Каляда // Докл. НАН Беларусі. – 2012. – Т. 56, № 3. – С. 28–33.
6. *Берник, В. И.* Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах / В. И. Берник, Ф. Гётце // Изв. РАН. Сер. мат. – 2014. – Т. 79, № 1. – С. 21–42.
7. *Гётце, Ф.* Алгебраические числа в коротких интервалах / Ф. Гётце, А. Г. Гусакова // Докл. НАН Беларусі. – 2015. – Т. 59, № 4. – С. 11–16.
8. *Касселс, Дж. В. С.* Введение в теорию диофантовых приближений / Дж. В. С. Касселс. – Москва: Изд-во Иностран. Литер., 1961. – 213 с.
9. *Budarina, N.* Distance between conjugate algebraic numbers in clusters / N. Budarina, F. Goetze // Math. Notes. – 2013. – Vol. 94, N 5. – P. 816–819.
10. *Берник, В. И.* Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник // Acta Arith. – 1983. – Vol. 42, N 3. – P. 219–253.

Поступило в редакцию 14.09.2015

УДК 517.968.23

Т. М. УРБАНОВИЧ

**ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ  
С ЯДРОМ КОШИ**

(Представлено академиком В. И. Корзюком)

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь

UrbanovichTM@gmail.com

Исследуется особый случай характеристического сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши с комплексными порядками нулей. Найдены явная формула решения и условия разрешимости. Все исследования выполнены в весовых классах Гельдера с комплексным весом.

*Ключевые слова:* весовые классы Гельдера, сингулярное интегральное уравнение, краевая задача Римана.

T. M. URBANOVICH

**SPECIAL CASE OF THE SINGULAR INTEGRAL EQUATION WITH THE CAUCHY KERNEL**

Polotsk State University, Novopolotsk, Belarus

UrbanovichTM@gmail.com

A special case of the singular integral equation with the Cauchy kernel in the case of the complex order of zeros is studied. The solvability conditions and the explicit formula of the solution are obtained. All studies are performed within the weighted Hölder classes with complex weight.

*Keywords:* Hölder weighted classes, singular integral equation with Cauchy kernel, Riemann boundary value problem.

Обозначим  $H(E)$  класс всех функций  $\varphi(z)$ , заданных на ограниченном множестве  $E \subset \mathbb{C}$  и удовлетворяющих условию Гельдера.

Пусть  $\Gamma$  – простой гладкий замкнутый контур, делящий плоскость комплексного переменного на внутреннюю область  $D^+$  и внешнюю  $D^-$ ;  $F$  – конечное множество точек контура  $\Gamma$ ;  $\lambda = (\lambda_\tau, \tau \in F)$  – заданное семейство комплексных чисел. По определению функция  $\varphi$  принадлежит классу  $H_\lambda(\Gamma, F)$ , если  $\varphi \in H(\Gamma_0)$  на каждой дуге  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \setminus F$  и представима в виде

$$\varphi(t) = |t - \tau|^{\lambda_\tau} \varphi_1(t)$$

на каждой дуге  $\Gamma_\tau$  с концом  $\tau$ , не содержащей других точек из  $F$ , с функцией  $\varphi_1(t) \in H(\Gamma_\tau)$ .

Будем говорить, что функция  $\Phi \in H_\lambda(\Gamma, F)$  обратима, если  $\varphi(t) \neq 0$ ,  $t \in \Gamma \setminus F$ , и  $1/\varphi(t) \in H_{-\lambda}(\Gamma, F)$ .

По определению функция  $\varphi(z)$  принадлежит классу  $H_\lambda(\bar{D}^\pm, F)$ , если в каждой замкнутой области  $\bar{D}_0 \subseteq \bar{D}^\pm \setminus F$  она принадлежит классу  $H(\bar{D}_0)$ , а в каждой области  $D_\tau^\pm \subseteq D^\pm$ , для которой  $\bar{D}_\tau^\pm \cap F = \{\tau\}$  представима в виде

$$\Phi(z) = (z - \tau)^{\lambda_\tau} \Phi_1(z),$$

где  $\Phi_1(z) \in H(\bar{D}_\tau^\pm)$ , причём в определении класса  $\Phi \in H_\lambda(\bar{D}^\pm, F)$  входит условие конечного порядка функции  $\Phi(z)$  на бесконечности. А именно, порядок функции  $\Phi$  на бесконечности не пре-

восходит целого  $n$ , если в некоторой окрестности бесконечно удалённой точки выполняется оценка  $|\Phi(z)| \leq C|z|^n$ .

Рассмотрим характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши [1, с. 176]

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad t \in \Gamma. \quad (1)$$

Напомним, что уравнение (1) является уравнением нормального типа, если коэффициенты  $(a+b)(t)$  и  $(a-b)(t)$  принадлежат классу  $H(\Gamma)$  и обратимы в этом классе.

Пусть  $F = F^+ \cup F^-$ . Особый случай задачи (1) возникает, когда функции  $a \pm b$  допускают нули в конечном числе точек контура  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} (a+b)(t) &= O(|t-\tau|^{\alpha_\tau}) \quad \text{при } t \rightarrow \tau \in F_+, \\ (a-b)(t) &= O(|t-\tau|^{\alpha_\tau}) \quad \text{при } t \rightarrow \tau \in F_-. \end{aligned} \quad (2)$$

Задача (1) в предположениях (2) при  $\alpha_\tau \in \mathbb{Z}$  рассматривалась многими авторами. Уравнение (1) в предположениях (2) было полностью исследовано Ф. Д. Гаховым [2] и Л. А. Чикиным [3] методом сведения к краевой задаче Римана для случая, когда обе функции  $a(t) \pm b(t)$  могут обращаться в нуль целого порядка в различных точках контура интегрирования. Д. И. Шерман [4; 5] независимо от работ Ф. Д. Гахова другим методом дал исследование исключительных (особых) случаев уравнений с ядром Коши в предположении, что только одна из функций  $a(t) \pm b(t)$  имеет нули целых порядков на контуре  $\Gamma$ .

Как было отмечено выше, уравнение (1) можно свести к соответствующей краевой задаче Римана [1, с. 176–177]. В [6] рассмотрен частный случай задачи линейного сопряжения, а именно:

$$\Phi^+(t) = |t - \tau_1|^{\mu_1} G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad (3)$$

где  $\tau_1$  – некоторая точка контура;  $\mu_1$  – произвольное число (вообще говоря, комплексное), коэффициенты  $G(t), g(t)$  удовлетворяют условию Гельдера, причем  $G(t) \neq 0$ .

Заметим, что уравнение (1) можно свести к задаче (3) в предположении, что одна из функций  $(a \pm b)(t)$  имеет один нуль произвольного порядка на контуре  $\Gamma$ .

В работе [7] исследована краевая задача Римана

$$\Phi^+(t) - \prod_{\tau \in F} (t - \tau)^{\alpha_\tau} G(t)\Phi^-(t) = g(t), \quad \alpha_\tau \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

Исследования в [7] выполнены в весовых классах Гельдера с любым комплексным весом, на который наложены дополнительные ограничения. Найдены явное представление решения задачи (4) и условия разрешимости.

В настоящей работе методом сведения к краевой задаче Римана исследован особый случай уравнения (1) для случая, когда обе функции  $(a \pm b)(t)$  могут обращаться в нуль комплексного порядка в различных точках контура интегрирования. Эта работа является продолжением работы [7].

**Постановка задачи.** Пусть  $-1 < \operatorname{Re} \lambda_\tau < 0$ ,  $\tau \in F$ ; заданы семейство комплексных чисел  $\alpha = (\alpha_\tau, \tau \in F)$ ,  $\operatorname{Re} \alpha_\tau > 0$  для всех  $\tau \in F$ , и функции

$$A(z) = \prod_{\tau \in F_+} (z - \tau)^{\alpha_\tau}, \quad z \in \bar{D}^+,$$

$$B(z) = \prod_{\tau \in F_-} \left( \frac{z - \tau}{z - z_0} \right)^{\alpha_\tau}, \quad z \in \bar{D}^-,$$

где  $z_0 \in D^+$  – фиксированная точка и ветви степенных функций во втором равенстве выбраны с разрезом вдоль дуг  $[\tau, z_0] \subset \bar{D}^+$ .

Требуется найти решение  $\varphi(t) \in H_\lambda(\Gamma, F)$  уравнения (1) в предположениях

$$\begin{aligned} (a+b)(t) &= c(t)A(t), \\ (a-b)(t) &= d(t)B(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где коэффициенты  $c(t), d(t)$  принадлежат  $H_0(\Gamma, F)$  и обратимы в этом классе, правая часть  $f(t) \in H_{\lambda+\alpha}(\Gamma, F)$ , причём весовой порядок  $\lambda$  подчинен дополнительным требованиям

$$\operatorname{Re}(\alpha_\tau + \lambda_\tau) \neq \frac{1}{2\pi} \left[ \left( \arg \frac{d}{c} \right) (\tau - 0) - \left( \arg \frac{d}{c} \right) (\tau + 0) \right] \pmod{\mathbb{Z}}. \quad (6)$$

Хорошо известно, (см., напр., [8, с. 95]), что при  $\varphi(t) \in H_\lambda(\Gamma, F)$ ,  $-1 < \operatorname{Re} \lambda_\tau < 0$ ,  $\tau \in F$ , интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z} \quad (7)$$

принадлежит классу  $H_\lambda(\bar{D}^\pm, F)$ , исчезает на бесконечности и справедливы формулы Сохоцкого–Племеля (см., напр., [1, с. 38])

$$2\Phi^\pm(t) = \pm\varphi(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t}.$$

По отношению к кусочно-аналитической функции (7), исчезающей на бесконечности, уравнение (1) в предположениях (5) равносильно задаче линейного сопряжения

$$c(t)A(t)\Phi^+(t) - d(t)B(t)\Phi^-(t) = f(t) \quad (8)$$

(см. [1, с. 176]).

Положим

$$\Psi(z) = \begin{cases} A(z)\Phi(z), & z \in D^+, \\ B(z)\Phi(z), & z \in D^-, \end{cases}$$

и задачу (8) сведём к задаче о скачке

$$\Psi^+(t) - G(t)\Psi^-(t) = \frac{f(t)}{c(t)} \quad (9)$$

с коэффициентом  $G(t) = \frac{d(t)}{c(t)}$ .

Построим каноническую функцию  $X(z)$  задачи (9) в классе  $H_{\lambda+\alpha}(\bar{D}^\pm, F)$ . Для этого выберем произвольную непрерывную на  $\Gamma \setminus F$  ветвь функции  $\ln G(t)$ , которая принадлежит  $H_0(\Gamma, F)$ , и положим

$$X_0(z) = e^{\Omega(z)}, \quad \Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(\ln G)(t) dt}{t - z}.$$

Рассмотрим семейство чисел

$$\delta_\tau = \frac{1}{2\pi i} ((\ln G)(\tau - 0) - (\ln G)(\tau + 0)), \quad \tau \in F. \quad (10)$$

Выберем целые числа  $n_\tau$  по условию

$$-1 < \operatorname{Re}(\alpha_\tau + \lambda_\tau - \delta_\tau) + n_\tau < 0, \quad \tau \in F, \quad (11)$$

(дополнительным условием на  $\lambda$  является то, что  $\operatorname{Re}(\alpha_\tau + \lambda_\tau - \delta_\tau)$  не принадлежат множеству целых чисел).

В терминах целой части числа условия (11) примут вид

$$n_\tau = [\operatorname{Re}(\delta_\tau - \alpha_\tau - \lambda_\tau)], \quad \tau \in F.$$

Положим

$$X(z) = X_0(z) \prod_{\tau \in F} (z - \tau)^{-n_\tau}.$$

**Т е о р е м а.** Пусть  $f \in H_{\alpha+\lambda}(\Gamma, F)$ ,  $-1 < \operatorname{Re} \lambda_\tau < 0$ ,  $\tau \in F$ , выполняется условие (6) и в обозначениях (10)

$$\varkappa = \sum_{\tau \in F} n_\tau, \quad n_\tau = [\operatorname{Re}(\delta_\tau - \alpha_\tau - \lambda_\tau)].$$

Тогда при  $\varkappa \geq 0$  уравнение (1) в предположениях (5) безусловно разрешимо в классе  $H_\lambda(\Gamma, F)$  и его общее решение даётся формулой

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A(t)c(t)} + \frac{1}{B(t)d(t)} \right) f(t) + \\ & \frac{1}{2\pi i} \left( \frac{1}{A(t)c(t)} - \frac{1}{B(t)d(t)} \right) c(t) X^+(t) \int_{\Gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{c(\tau) X^+(\tau)(\tau-t)} + \\ & \left( \frac{1}{A(t)c(t)} - \frac{1}{B(t)d(t)} \right) c(t) X^+(t) P(t), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $P(t)$  – произвольный многочлен степени не выше  $\varkappa - 1$  (при  $\varkappa = 0$  положим  $P(t) = 0$ ). Если  $\varkappa < 0$ , то для существования решения необходимо и достаточно выполнение  $-\varkappa$  условий разрешимости

$$\int_{\Gamma} \frac{f(t)}{c(t) X^+(t)} t^j dt = 0, \quad j = 0, 1, \dots, -\varkappa - 1,$$

и (единственное) решение уравнения (1) в предположениях (5) даётся формулой (12) при  $P(t) = 0$ .

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф14Каз-034).

### Список использованной литературы

1. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения / Ф. Д. Гахов // Изв. Казанского физ.-матем. общества. – 1949. – Т. 14, сер. 3. – С. 75–160.
3. Чикин, Л. А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений / Л. А. Чикин // Ученые зап. Казанского гос. ун-та им. В. И. Ульянова-Ленина. – 1953. – Т. 113, кн. 10. – С. 57–105.
4. Шерман, Д. И. О приемах решения некоторых сингулярных интегральных уравнений / Д. И. Шерман // Прикладная математика и механика. – 1948. – Т. 12, вып. 4. – С. 423–452.
5. Шерман, Д. И. Об одном случае регуляризации сингулярных уравнений / Д. И. Шерман // Прикладная математика и механика. – 1951. – Т. 15, вып. 1. – С. 75–82.
6. Михайлов, Л. Г. Сингулярные краевые задачи сопряжения / Л. Г. Михайлов, Н. Усманов // Докл. АН. – 2002. – Т. 387, № 3. – С. 309–313.
7. Урбанович, Т. М. Особый случай краевой задачи Римана / Т. М. Урбанович // Докл. НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 6. – С. 18–21.
8. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 512 с.

Поступило в редакцию 14.09.2015

УДК 517.956.32

Академик В. И. КОРЗЮК<sup>1</sup>, А. А. МАНДРИК<sup>2</sup>**ПЕРВАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОРОДНОГО НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**<sup>1</sup>Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
korzyuk@bsu.by<sup>2</sup>Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
mndkaa@gmail.com

Изучаются классические решения граничных задач для нестроого гиперболического уравнения третьего порядка. Уравнение задается в полуполосе двух независимых переменных. На нижнем основании области задаются условия Коши, а на боковых границах – условия Дирихле. Методом характеристик выписываются в аналитическом виде решения рассматриваемых задач. Доказывается единственность решений.

*Ключевые слова:* нестроого гиперболическое уравнение, смешанная задача, условия согласования.

V. I. KORZYUK<sup>1</sup>, A. A. MANDRYK<sup>2</sup>**FIRST MIXED PROBLEM FOR THE THIRD-ORDER HOMOGENEOUS UNSTRICT HYPERBOLIC EQUATION**<sup>1</sup>Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
korzyuk@bsu.by<sup>2</sup>Belarusian State University, Minsk, Belarus  
mndkaa@gmail.com

In this article we research the classical solutions of the boundary problems for the third-order unstrict hyperbolic equation. The equation is defined in the half-strip of two independent variables. There are Cauchy's conditions on the bottom of the area and Dirichlet's conditions on the side boundary. Using the method of characteristics, the analytic solutions of the considered problem are written out. The uniqueness of the solutions is proved.

*Keywords:* not strictly hyperbolic equation, mixed problem, adjusting conditions.

**Введение.** Граничные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка возникают при описании конкретных физических явлений. Например, при математическом моделировании распространения линейных акустических волн в среде с дисперсией [1, с. 87]. Свойства этих уравнений и задач изучались в [2; 3].

Большая часть литературы по гиперболическим уравнениям посвящена задаче Коши. В работах [4–6] рассматривались обобщенные решения для смешанных задач гиперболических уравнений третьего порядка, где доказаны теоремы существования и единственности таких решений в подходящих функциональных пространствах. Отметим также работы [7–9], где изучались функциональными методами граничные задачи на плоскости в случае двух независимых переменных.

Исследование или отыскание классических решений задач всегда было актуальным для теории дифференциальных уравнений с частными производными. Заметим, что классические решения определяются не только правильным выбором вида граничных условий для дифференциальных уравнений с частными производными, но и условиями согласования для функций, входящих в условия и уравнения. Классическому решению посвящена работа [10], в которой рассмотрена первая смешанная задача для простейшего гиперболического уравнения третьего порядка с разными характеристиками.

**Постановка задачи.** В области  $Q = (0, +\infty) \times (0, l)$  двух независимых переменных  $(t, x) \in Q \subset R^2$  рассмотрим однородное нестрогое гиперболическое уравнение третьего порядка

$$(\partial_t - a\partial_x + b_1)(\partial_t + a\partial_x + b)^2 u(t, x) = 0, (t, x) \in \overline{Q} = [0, \infty) \times [0, l], \quad (1)$$

где  $a, b, b_1, l$  – действительные числа;  $\overline{Q}$  – замыкание области  $Q$ ;  $\partial_t, \partial_x$  – частные производные по  $t$  и  $x$  соответственно. В общем случае  $\partial_t^k \partial_x^p = \frac{\partial^{k+p}}{\partial t^k \partial x^p}$  – частные производные по  $t$  и  $x$  порядка  $k + p$ , где  $k$  и  $p$  – целые неотрицательные числа. Для определенности положим  $a > 0$ . К уравнению (1) на нижнем основании области  $Q$  присоединим условия Коши

$$\partial_t^i u(0, x) = \varphi_i(x), \quad i = \overline{0, 2}, \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

а на боковых частях границы  $\partial Q$  задаются граничные условия вида

$$\begin{aligned} \partial_x^i u(t, 0) &= \psi_i(t), \quad i = \overline{0, 1}, \quad t \in [0, +\infty), \\ u(t, l) &= \mu(t), \quad t \in [0, +\infty). \end{aligned} \quad (3)$$

Согласно работе [11] общее решение уравнения (1) представимо в виде линейной комбинации трех произвольных функций

$$u(t, x) = e^{-bt} f_1(x + at) + e^{-bt} [f_2(x - at)t + f_3(x - at)] \quad (4)$$

с соответствующими областями определения  $D(f_i)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ . Нетрудно видеть, что  $D(f_1) = [0, +\infty)$  и  $D(f_i) = (-\infty, l]$ ,  $i = \overline{2, 3}$ , если  $(t, x) \in \overline{Q}$ . Обозначим через  $C^\infty(\overline{Q})$  множество бесконечно дифференцируемых функций, заданных на  $\overline{Q}$ , а через  $C^{i,j}(\overline{Q})$  множество функций, заданных на  $\overline{Q}$ , которые  $i$  раз непрерывно дифференцируемы по первому аргументу и  $j$  раз – по второму.

Полученный результат подытожим в виде леммы.

**Л е м м а 1.** *Общее решение уравнения (1) из класса  $C^\infty(\overline{Q})$  представимо в виде (4), где  $u$  и  $f_i$  – произвольные бесконечно дифференцируемые на  $D(f_i)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , функции.*

Таким образом, чтобы отыскать решение  $u: \mathbb{R}^2 \supset \overline{Q} \ni (t, x) \rightarrow u(t, x) \in \mathbb{R}$  задачи (1)–(3) необходимо выбрать функции  $f_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , такими, чтобы они в сумме вида (4) удовлетворяли еще условиям (2), (3).

**Условия согласования.** Введем для значений функций и их производных в случае одной независимой переменной следующие обозначения. Пусть  $g: R \rightarrow g(z)$  – функция переменной  $z$ . Тогда  $d^k g(z) = \frac{d^k}{dz^k} g(z)$  – производная  $k$ -го порядка;  $g(a)$ ,  $d^k g(a)$  – значения функции  $g$  и ее производной  $d^k g$   $k$ -го порядка в точке  $a$  и т. д.

Если функцию  $u$  вида (4) подставить в условия (2), то из полученной системы путем интегрирования значения функций  $f_j$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) будут содержать произвольные действительные постоянные  $C_1$  и  $C_2$ . Между ними имеется функциональная связь. Чтобы установить ее, введем следующие функции, которые будем использовать далее

$$\begin{aligned} \Psi_1(y, C_1, C_2) &= e^{-\frac{(b_1-b)y}{2a}} (C_1 y + C_2), \\ \Psi_2(y, C_1, C_2) &= -2ae^{-\frac{(b_1-b)y}{2a}} C_1, \\ \Psi_3(y, C_1, C_2) &= -e^{-\frac{(b_1-b)y}{2a}} (C_1 y + C_2), \end{aligned}$$

где отображения  $\Psi_i: R^3 \rightarrow R$  принадлежат классу бесконечно дифференцируемых функций.

**Л е м м а 2.** *Для любых  $t, x, C_1, C_2 \in R$  верно тождество*

$$e^{-bt} \Psi_1(x + at, C_1, C_2) + e^{-bt} (t \Psi_2(x - at, C_1, C_2) + \Psi_3(x - at, C_1, C_2)) \equiv 0. \quad (5)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о** проводится непосредственной подстановкой аналитических выражений функций  $\Psi_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , в (5) и подсчетом коэффициентов при  $C_1$  и  $C_2$ . Действительно,



$$\begin{aligned}
& e^{-bt}\Psi_1(x+at, C_1, C_2) + e^{-bt}(t\Psi_2(x-at, C_1, C_2) + \Psi_3(x-at, C_1, C_2)) = \\
& e^{-bt} \left[ e^{\frac{(b_1-b)(x+at)}{2a}} (C_1(x+at) + C_2) \right] + e^{-bt} \left[ -2ate^{\frac{(b_1-b)(x-at)}{2a}} C_1 \right] + \\
& e^{-bt} \left[ -e^{\frac{(b_1-b)(x-at)}{2a}} (C_1(x-at) + C_2) \right] = C_2 \left( e^{\frac{(b_1-b)x-at(b+b_1)}{2a}} - e^{\frac{(b_1-b)x-at(b+b_1)}{2a}} \right) + \\
& C_1 e^{\frac{(b_1-b)x-at(b+b_1)}{2a}} ((x+at) - (x-at) - 2at) \equiv 0.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

**Т е о р е м а 1.** Если выполняются следующие условия гладкости на заданные функции:  $\varphi_i \in C^\infty([0, l])$ ,  $i = \overline{0, 2}$ ,  $\psi_j \in C^\infty([0, +\infty))$ ,  $j = \overline{0, 1}$ ,  $\mu \in C^\infty([0, +\infty))$ , то задача (1)–(3) однозначно разрешима в классе  $C^\infty(\overline{Q})$ , тогда и только тогда, когда выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned}
& d^k \left( e^{\frac{(b-b_1)(l-y)}{a}} \left[ (l-y)d\varphi_0(2l-y) + \frac{b(l-y)-a}{a}\varphi_0(2l-y) + \frac{l-y}{a}\varphi_1(2l-y) \right] + \right. \\
& \left. e^{\frac{b_1(y-l)}{a}} \mu \left( \frac{y-l}{a} \right) + \frac{1}{4a^2} \int_0^{2l-y} \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} (y-z) dz \right) \Big|_{y=l} =
\end{aligned} \tag{6}$$

$$d^k \left( \frac{1}{4a^2} \int_0^y \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} (y-z) dz \right) \Big|_{y=l}, \quad k \geq 0;$$

$$\begin{aligned}
& d^k \left( e^{-\frac{by}{a}} \left[ d\psi_0 \left( -\frac{y}{a} \right) + b\psi_0 \left( -\frac{y}{a} \right) + a\psi_1 \left( -\frac{y}{a} \right) \right] - \frac{1}{2a} \int_0^{-y} \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} dz \right) \Big|_{y=0} = \\
& d^k \left( \varphi_1(y) + b\varphi_0(y) + ad\varphi_0(y) - \frac{1}{2a} \int_0^y \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} dz \right) \Big|_{y=0}, \quad k \geq 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
& d^k \left( e^{-\frac{by}{a}} \left[ \frac{y}{a} d\psi_0 \left( -\frac{y}{a} \right) + \frac{by+a}{a} \psi_0 \left( -\frac{y}{a} \right) + y\psi_1 \left( -\frac{y}{a} \right) \right] - \right. \\
& \left. \frac{1}{4a^2} \int_0^{-y} \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} (y-z) dz \right) \Big|_{y=0} =
\end{aligned} \tag{8}$$

$$d^k \left( \varphi_0(y) - \frac{1}{4a^2} \int_0^y \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} (y-z) dz \right) \Big|_{y=0}, \quad k \geq 0,$$

где  $\Phi(y) = \varphi_2(y) + 2b\varphi_1(y) + 2ad\varphi_1(y) + b^2\varphi_0(y) + 2abd\varphi_0(y) + a^2d^2\varphi_0(y)$ ,  $y \in [0, l]$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Воспользуемся формулой общего решения (4) и подставим ее в начальные условия (2), в результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
& f_1(x) + f_3(x) = \varphi_0(x), \\
& -b^{(1)}f_1(x) + adf_1(x) + f_2(x) - bf_3(x) - adf_3(x) = \varphi_1(x), \\
& (b_1)^2 f_1(x) - 2ab_1df_1(x) + a^2d^2 f_1(x) - 2bf_2(x) - \\
& 2adf_2(x) + b^2 f_3(x) + 2abdf_3(x) + a^2d^2 f_3(x) = \varphi_2(x),
\end{aligned} \tag{9}$$

при  $x \in [0, l]$ . Решив систему (9), получаем выражения для функций функций  $f_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , на отрезке  $[0, l]$

$$\begin{aligned}
f_3(y) &= \varphi_0(y) - \frac{1}{4a^2} \int_0^y \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} (y-z) dz + \Psi_3(y, C_1, C_2), \\
f_2(y) &= \varphi_1(y) + b\varphi_0(y) + a d\varphi_0(y) - \\
&\quad \frac{1}{2a} \int_0^y \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} dz + \Psi_2(y, C_1, C_2), \\
f_1(y) &= \frac{1}{4a^2} \int_0^y \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} (y-z) dz + \Psi_1(y, C_1, C_2),
\end{aligned} \tag{10}$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные.

Таким образом, функции  $f_i$ ,  $i = 1, 3$ , однозначно определяются из начальных условий (2) на отрезке  $[0, l]$  с точностью до констант  $C_1, C_2$ . Несмотря на то что выражения для функций  $f_i(y)$ ,  $i = 1, 3$ , на отрезке  $[0, l]$  содержат константы  $C_1$  и  $C_2$ , при подстановке в формулу общего решения (4) они взаимосокащаются (см. лемму 2) и мы получаем единственное решение в области  $Q_0 = \{(t, x) | t \geq 0, 0 \leq x + at \leq l, 0 \leq x - at \leq l\}$  задачи (1)–(3), которое определяется формулой

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= e^{-bt} (t[\varphi_1(x - at) + b\varphi_0(x - at) + a\varphi_0'(x - at)] + \varphi_0(x - at)) + \\
&\quad \frac{1}{4a^2} e^{-\frac{ab_1-ab}{2a}t} \int_{x-at}^{x+at} \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(x-z)} (x + at - z) dz.
\end{aligned}$$

Далее находим значения функции  $f_1$  на множестве  $[l, +\infty)$ , а функций  $f_i$ ,  $i = \overline{2, 3}$ , – на  $(-\infty, 0]$ . Введем обозначения

$$\begin{aligned}
f_1^{(k)}(y) &= f_1(y), y \in [kl, (k+1)l], \\
f_j^{(k)}(y) &= f_j(y), y \in [-kl, (1-k)l], j = 2, 3.
\end{aligned}$$

В соответствии с данными обозначениями из начальных условий нами были определены функции  $f_1^{(0)}(y)$ ,  $f_2^{(0)}(y)$  и  $f_3^{(0)}(y)$  формулами (10).

Подставив в граничные условия (3) формулу общего решения (4), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
e^{-bt} f_1(at + l) + e^{-bt} (t f_2(l - at) + f_3(l - at)) &= \mu(t), t \in [0, +\infty), \\
e^{-bt} f_1(at) + e^{-bt} (t f_2(-at) + f_3(-at)) &= \psi_0(t), t \in [0, +\infty), \\
e^{-bt} d f_1(at) + e^{-bt} (t d f_2(-at) + d f_3(-at)) &= \psi_1(t), t \in [0, +\infty).
\end{aligned}$$

Рассматривая эту же систему на отрезках  $t \in \left[ k \frac{l}{a}, (k+1) \frac{l}{a} \right]$ , где  $k = \overline{0, \infty}$ , получим

$$\begin{aligned}
f_1^{(k+1)}(y) &= e^{b_1 \frac{y-l}{a}} \mu \left( \frac{y-l}{a} \right) - e^{(b_1-b) \frac{y-l}{a}} \left( \frac{y-l}{a} f_2^{(k)}(2l-y) + f_3^{(k)}(2l-y) \right), \\
y &\in [(k+1)l, (k+2)l],
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
f_2^{(k+1)}(y) &= e^{-\frac{by}{a}} \left( b\psi_0 \left( -\frac{y}{a} \right) + d\psi_0 \left( -\frac{y}{a} \right) + a\psi_1 \left( -\frac{y}{a} \right) \right) - \\
(b-b_1) e^{(b_1-b) \frac{y}{a}} f_1^{(k)}(-y) - 2ae^{(b_1-b) \frac{y}{a}} d f_1^{(k)}(-y), & y \in [-(k+1)l, -kl],
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
f_3^{(k+1)}(y) &= e^{-\frac{by}{a}} \left( \Psi_0 \left( -\frac{y}{a} \right) + \frac{by}{a} \Psi_0 \left( -\frac{y}{a} \right) + \frac{y}{a} d\Psi_0 \left( -\frac{y}{a} \right) + y\Psi_1 \left( -\frac{y}{a} \right) \right) - \\
&e^{\frac{(b_1-b)y}{a}} f_1^{(k)}(-y) + (b_1-b) \frac{y}{a} e^{\frac{(b_1-b)y}{a}} f_1^{(k)}(-y) - 2ye^{\frac{(b_1-b)y}{a}} df_1^{(k)}(-y), \\
&y \in [-(k+1)l, -kl].
\end{aligned} \tag{13}$$

Из начальных условий мы установили, что функции  $f_i^{(0)}$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , имеют следующий вид:

$$f_i^{(0)}(y) = F_i^{(0)}(y) + \Psi_i(y, C_1, C_2), \quad i = \overline{1, 3},$$

$F_i^{(0)}(y)$  не зависят от констант  $C_1$  и  $C_2$ . Докажем далее, что функции  $f_i^{(k)}$  также представимы в таком виде, т. е.

$$f_i^{(k)}(y) = F_i^{(k)}(y) + \Psi_i(y, C_1, C_2), \quad i = \overline{1, 3}, \quad k \geq 1, \tag{14}$$

где функции  $F_i^{(k)}(y)$  не зависят от констант  $C_1$  и  $C_2$  и определяются однозначно. Отсюда следует, что все функции  $f_i^{(k)}$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $k \geq 0$ , также будут содержать в своем аналитическом представлении эти константы. Покажем, что для любого  $k$  функции  $f_i^{(k)}$  будут содержать одно и тоже слагаемое, зависящее от  $C_j$ ,  $j = 1, 2$ .

Предположим, что это выполняется для некоторого  $k \geq 1$ , тогда согласно формулам (11)–(13) для  $k+1$  функции  $f_i^{(k+1)}$  определяются соотношениями

$$f_1^{(k+1)}(y) = F_1^{(k+1)}(y) - e^{\frac{(b_1-b)y-l}{a}} \left( \frac{y-l}{a} \Psi_2(2l-y) + \Psi_3(2l-y) \right), \quad y \in [(k+1)l, (k+2)l],$$

$$f_2^{(k+1)}(y) = F_2^{(k+1)}(y) - (b-b_1)e^{\frac{(b_1-b)y}{a}} \Psi_1(-y) - 2ae^{\frac{(b_1-b)y}{a}} d\Psi_1(-y), \quad y \in [-(k+1)l, -kl],$$

$$\begin{aligned}
f_3^{(k+1)}(y) &= F_3^{(k+1)}(y) - e^{\frac{(b_1-b)y}{a}} \Psi_1(-y) + \\
&(b_1-b) \frac{y}{a} e^{\frac{(b_1-b)y}{a}} \Psi_1(-y) - 2ye^{\frac{(b_1-b)y}{a}} d\Psi_1(-y), \quad y \in [-(k+1)l, -kl].
\end{aligned}$$

Непосредственными вычислениями для значений функций  $\Psi_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , доказываются следующие формулы:

$$\Psi_1(y, C_1, C_2) = -e^{\frac{(b_1-b)y-l}{a}} \left( \frac{y-l}{a} \Psi_2(2l-y) + \Psi_3(2l-y) \right),$$

$$\Psi_2(y, C_1, C_2) = -(b-b_1)e^{\frac{(b_1-b)y}{a}} \Psi_1(-y) - 2ae^{\frac{(b_1-b)y}{a}} d\Psi_1(-y),$$

$$\begin{aligned}
\Psi_3(y, C_1, C_2) &= -e^{\frac{(b_1-b)y}{a}} \Psi_1(-y) + \\
&(b_1-b) \frac{y}{a} e^{\frac{(b_1-b)y}{a}} \Psi_1(-y) - 2ye^{\frac{(b_1-b)y}{a}} d\Psi_1(-y).
\end{aligned}$$

Таким образом, отсюда следует, что если для функций  $f_i^{(k)}$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $k = \overline{1, \infty}$ , справедливо представление (14), то функции  $f_i^{(k+1)}$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , также представимы в таком виде, т. е.

$$f_1^{(k+1)}(y) = F_1^{(k+1)}(y) + \Psi_1(y, C_1, C_2), \quad y \in [(k+1)l, (k+2)l],$$

$$f_j^{(k+1)}(y) = F_j^{(k+1)}(y) + \Psi_j(y, C_1, C_2), \quad y \in [-(k+1)l, -kl], \quad j = 2, 3.$$

Так как для функции  $f_i^{(0)}$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , это представление также имеет место (см. (10)), то, следовательно, оно выполняется для любого  $k = \overline{1, \infty}$ . Из доказанного утверждения и леммы 2 следует, что решение  $u(t, x)$  в каждой точки области  $Q$  не будет в своем аналитическом представлении содержать  $C_1$  и  $C_2$ .

Пользуясь этими формулами определим функции  $f_1^{(1)}$ ,  $f_2^{(1)}$  и  $f_3^{(1)}$

$$f_1^{(1)}(y) = e^{\frac{(b-b_1)(l-y)}{a}} \left[ \int_0^{2l-y} e^{\frac{(b_1-b)(2l-y-z)}{2a}} \frac{(y-z)\Phi(z)}{4a^2} dz + (l-y)d\varphi_0(2l-y) + \frac{b(l-y)-a}{a}\varphi_0(2l-y) + \frac{l-y}{a}\varphi_1(2l-y) \right] + e^{\frac{b_1(y-l)}{a}} \mu\left(\frac{y-l}{a}\right) + \Psi_1(y, C_1, C_2),$$

$$f_2^{(1)}(y) = e^{\frac{by}{a}} \left[ d\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right) + b\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right) + a\psi_1\left(-\frac{y}{a}\right) - \int_0^{-y} e^{\frac{b(y+z)+b_1(y-z)}{2a}} \frac{\Phi(z)}{2a} dz \right] + \Psi_2(y, C_1, C_2),$$

$$f_3^{(1)}(y) = e^{\frac{by}{a}} \left[ \int_0^{-y} -\frac{(y-z)e^{\frac{b(y+z)+b_1(y-z)}{2a}} \Phi(z)}{4a^2} dz + \frac{y}{a} d\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right) + \frac{by+a}{a}\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right) + y\psi_1\left(-\frac{y}{a}\right) \right] + \Psi_3(y, C_1, C_2).$$

Для того чтобы решение (4) принадлежало классу  $C^\infty(Q)$ , необходимо чтобы функции  $f_i(y)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , были бесконечно дифференцируемы на своих областях определения. Поскольку функции  $f_i$  состоят из функций  $f_i^{(k)}$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $k = \overline{0, \infty}$ , то и  $f_i^{(k)}$  должны быть бесконечно дифференцируемыми. Кроме того,  $f_i^{(k)}$  и все их производные должны совпадать в общих точках пересечения отрезков, на которых они определены. Это означает, что должны выполняться следующие условия непрерывности:

$$\begin{aligned} d^i f_1^{(k)}((k+1)l) &= d^i f_1^{(k+1)}((k+1)l), \\ d^i f_j^{(k)}(-kl) &= d^i f_j^{(k+1)}(-kl), \quad j = 2, 3, \\ i &= \overline{0, \infty}, \quad k = \overline{0, \infty}. \end{aligned} \quad (15)$$

Условия (15) выполняются для всех  $k = \overline{0, \infty}$  тогда и только тогда, когда они выполняются для  $k = 0$ . Это видно из представления значений  $f_j^{(k+1)}(y)$  через значения  $f_j^k(y)$  функций  $f_j$  (см. (11)–(13)).

Далее, условия (15) для  $k = 0$  выполняются тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (6)–(8). Действительно, подставив значения функций  $f_i^{(j)}$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $j = \overline{0, 1}$ , в (15) при  $k = 0$  и сократив функции  $\Psi_i(y, C_1, C_2)$ , а также их производные в левой и правой частях равенств, получим равенства (6)–(8).

Таким образом, теорема 1 доказана.

**Заключение.** В данном сообщении были найдены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости однородной задачи (1)–(3) в классе бесконечно дифференцируемых функций, когда функции из начальных и граничных условий также являются бесконечно дифференцируемыми. Также было получено классическое решение этой задачи, позволяющее находить значение искомой функции и ее производных в каждой точке полуполосы  $Q$ . Также интерес для дальнейшего исследования представляет данная задача в случае неоднородного уравнения (1), а также вопрос разрешимости задачи (1)–(3) в классе трижды непрерывно дифференцируемых функций.

## Список использованной литературы

1. Руденко, О. В. Теоретические основы нелинейной акустики / О. В. Руденко, С. И. Солюян. – М., 1975.
2. Варламов, В. В. Об одной задаче распространения волн сжатия в вязкой среде / В. В. Варламов // Журн. вычислит. матем. и мат. физики. – 1988. – Т. 25, № 10. – С. 1561–1565.
3. Варламов, В. В. Об одной начально-краевой задаче для гиперболического уравнения третьего порядка / В. В. Варламов // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 8. – С. 1455–1457.
4. Корзюк, В. И. Задача Коши для гиперболических дифференциально-операторных уравнений третьего порядка / В. И. Корзюк, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 8. – С. 1448–1450.
5. Корзюк, В. И. Энергетическое неравенство для граничной задачи гиперболического уравнения с волновым оператором третьего порядка / В. И. Корзюк // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 6. – С. 1014–1022.
6. Корзюк, В. И. Граничная задача для гиперболического уравнения с волновым оператором 3-го порядка / В. И. Корзюк // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 2. – С. 208–215.
7. Thomee, V. Estimates of the Friedrichs–Lewy type for a hyperbolic equation with three characteristics / V. Thomee // Math. Scand. – 1955. – Vol. 3. – P. 115–123.
8. Thomee, V. Estimates of the Friedrichs–Lewy type for mixed problems in the theory of linear hyperbolic differential equation in two independent variables / V. Thomee // Math. Scand. – 1957. – Vol. 5. – P. 93–113.
9. Thomee, V. Existence proofs for mixed problems for hyperbolic differential equations in two independent variables by means of the continuity method / V. Thomee // Math. Scand. – 1958. – Vol. 6, N 1. – P. 5–32.
10. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения третьего порядка с волновым оператором / В. И. Корзюк, А. А. Мандрик // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 4. – С. 492–504.
11. Корзюк, В. И. Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 5. – С. 700–709.

Поступило в редакцию 05.10.2015

УДК 512.554.32

Т. С. БУСЕЛ, И. Д. СУПРУНЕНКО

**БЛОЧНАЯ СТРУКТУРА ОБРАЗОВ УНИПОТЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
В НЕПРИВОДИМЫХ МОДУЛЯРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ КЛАССИЧЕСКИХ  
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ***(Представлено академиком В. И. Янчевским)**Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
tbusel@gmail.com; suprunenko@im.bas-net.by*

Определена блочная структура образов унипотентных элементов в модулярных неприводимых  $p$ -ограниченных представлениях классических алгебраических групп размерности  $\leq 100$ . Предложенные подходы к определению такой структуры могут быть использованы при решении аналогичной задачи для представлений больших размерностей, а полученная новая информация – для выдвижения обоснованных гипотез о поведении унипотентных элементов в представлениях алгебраических групп. Изучение такого поведения важно для решения задач распознавания представлений и линейных групп. В настоящее время мало известно о блочной структуре образов произвольных элементов в представлениях классических групп, поэтому детальное изучение таких образов для представлений малых размерностей оказывается полезным.

*Ключевые слова:* унипотентные элементы, размерности блоков Жордана, представления малой размерности.

T. S. BUSEL, I. D. SUPRUNENKO

**THE JORDAN BLOCK STRUCTURE OF THE IMAGES OF UNIPOTENT ELEMENTS IN IRREDUCIBLE  
MODULAR REPRESENTATIONS OF CLASSICAL ALGEBRAICAL GROUPS OF SMALL DIMENSIONS***Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
tbusel@gmail.com; suprunenko@im.bas-net.by*

For unipotent elements of prime order, the Jordan block structure of their images in the infinitesimally irreducible representations of the classical algebraic groups in odd characteristic, whose dimensions are at most 100, is determined. The approach proposed can be applied for solving a similar problem for representations of larger dimensions. Detailed information on small cases is important for stating reasonable conjectures on the behavior of unipotent elements in irreducible representations of the classical algebraic groups.

*Keywords:* unipotent elements, Jordan block sizes, representations of small dimension.

**Введение.** Определена блочная структура образов унипотентных элементов в модулярных неприводимых  $p$ -ограниченных представлениях классических алгебраических групп размерности  $\leq 100$ . Заметим, что во многих случаях картина существенно отличается от аналогичных представлений в характеристике 0 даже при сохранении размерности представления с определенным старшим весом. Предложенные подходы к определению такой структуры могут быть использованы при решении аналогичной задачи для представлений больших размерностей, а полученная новая информация – для выдвижения обоснованных гипотез о поведении унипотентных элементов в представлениях алгебраических групп. Изучение такого поведения важно для решения задач распознавания представлений и линейных групп. В настоящее время мало известно о блочной структуре образов произвольных элементов в представлениях классических групп, поэтому детальное изучение таких образов для представлений малых размерностей оказывается полезным.

**Основная часть.** Далее  $K$  – алгебраически замкнутое поле нечетной характеристики  $p$ ,  $G$  – простая односвязная алгебраическая группа классического типа над  $K$ ,  $l$  – ранг группы  $G$ ,  $\mathcal{W}(G)$  –

группа Вейля группы  $G$ ,  $\omega_i$  и  $\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq l$ , – фундаментальные веса и простые корни группы  $G$ ,  $\Lambda(G)$  ( $\Lambda(M)$ ) – множество весов группы  $G$  (модуля  $M$ ),  $\varphi(\omega)$  – неприводимое представление со старшим весом  $\omega$ ,  $\omega(\varphi)$  – старший вес неприводимого представления  $\varphi$ ,  $\langle \lambda, \mu \rangle$  – значение веса  $\lambda$  на корне  $\mu$ ,  $\rho$  – полусумма положительных корней группы  $G$ ,  $V$  – стандартный (естественный) модуль группы  $G$ ,  $\Lambda^r V$ ,  $S^r(V)$  и  $S^{r,p}(V)$  –  $r$ -я внешняя,  $r$ -я симметрическая и усеченная симметрическая степени модуля  $V$  соответственно. Предполагается, что  $l > 1$  при  $G = A_l(K)$  или  $C_l(K)$ ,  $l > 2$  при  $G = B_l(K)$  и  $l > 3$  при  $G = D_l(K)$ .

Ниже символами  $M(\lambda)$ ,  $V(\lambda)$ ,  $\Delta(\lambda)$  и  $T(\lambda)$  обозначаем соответственно неприводимый модуль, модуль Вейля, комодуль Вейля и неразложимый тилтинг-модуль со старшим весом  $\lambda$ . Напомним, что  $G$ -модуль называется тилтинг-модулем, если у него существуют и фильтрация модулями Вейля, и фильтрация комодулями Вейля.

При определении блочной структуры образов унипотентных элементов в рассматриваемых представлениях существенно используются следующие леммы.

Л е м м а 1 [1, лемма 1.1].

(а) Любой тилтинг-модуль есть прямая сумма неразложимых тилтинг-модулей вида  $T(\lambda)$ .

(б) Прямое слагаемое тилтинг-модуля – тилтинг-модуль.

(в) Тензорное произведение тилтинг-модулей – тилтинг-модуль.

Л е м м а 2 [2]. Пусть  $\lambda$  – доминантный вес полупростой алгебраической группы  $\Gamma$  и модуль Вейля  $V(\lambda)$  неприводим. Предположим, что  $\lambda$  – максимальный вес  $\Gamma$ -модуля  $U$  и весовое подпространство этого веса одномерно в  $U$ . Тогда  $U = V \oplus M(\lambda)$ .

Л е м м а 3. Пусть  $A \subset G$  – связная полупростая замкнутая подгруппа,  $M$  – неприводимый  $G$ -модуль со старшим весом  $\omega$ . Предположим, что ограничения на  $A$  неприводимых  $G$ -модулей с фундаментальными старшими весами – тилтинг-модули и что  $\langle \omega + \rho, \alpha \rangle \leq p$  для всех корней  $\alpha$  группы  $G$ . Тогда  $M|_A$  – тилтинг-модуль.

Л е м м а 4. Пусть  $G = A_l(K)$ ,  $A \subset G$  – образ вполне приводимого представления группы  $A_l(K)$  с  $p$ -ограниченными неприводимыми компонентами,  $M$  и  $\omega$  удовлетворяют условиям леммы 3 и  $\omega = \sum_{i=1}^{p-1} t_i \omega_i$ . Тогда  $M|_A$  – тилтинг-модуль.

Л е м м а 5. Пусть  $H = A_l(K)$ ,  $X$  и  $Y$  – корневые элементы алгебры Ли группы  $H$ , ассоциированные с положительным и отрицательным корнями соответственно, и  $0 \leq s < p - 2$ . Тогда  $H$ -модуль  $T(p + s)$  содержит вектор  $u$  веса  $p - s - 2$  такой, что  $Y^{s+1}X^{s+1}u \neq 0$ , а модуль  $V(p + s) \oplus \Delta(p + s)$  не содержит таких векторов.

В предложениях 1 и 2 и леммах 6 и 7  $G = A_l(K)$ .

П р е д л о ж е н и е 1 [3, ч. 2, п. 2.15]. При  $1 \leq r \leq l$  пространство  $\Lambda^r V$  – неприводимый  $G$ -модуль со старшим весом  $\omega_r$ . Все весовые подпространства этого модуля одномерны.

П р е д л о ж е н и е 2 [4, предложение 1.2]. Пусть  $k$  и  $j$  – целые неотрицательные числа и  $j \leq p - 1$ ,  $r = k(p - 1) + j \leq (l + 1)(p - 1)$ . Тогда  $r$ -я усеченная симметрическая степень  $S^{r,p}(V)$  является неприводимым  $G$ -модулем со старшим весом  $(p - 1 - j)\omega_k + j\omega_{k+1}$ . Все весовые подпространства этого модуля одномерны. В частности, при  $r < p$  пространство  $S^r(V)$  – неприводимый  $G$ -модуль со старшим весом  $r\omega_1$ .

Л е м м а 6. При  $rk(l + 1)$  модуль  $M(\omega_1 + \omega_r)$  является прямым слагаемым в тензорном произведении естественного и дуального к нему модулей.

Следующий факт известен и вытекает из неприводимости модулей Вейля со старшими весами  $\omega_2$  и  $2\omega_1$  ([3, ч. 2, предложение 2.14] и [5, утверждение 1.15i]).

Л е м м а 7. При  $p > 2$  тензорный квадрат естественного модуля изоморфен прямой сумме его внешнего квадрата и симметрического квадрата.

Множество весов группы типа  $A_l$  канонически отождествляется с множеством целых чисел, а множество ее доминантных весов – с множеством целых неотрицательных чисел.

Л е м м а 8 [6, лемма 7]. Пусть  $U$  –  $A_l(K)$ -модуль и  $|a| < p$  для всех весов  $a \in \Lambda(U)$ . Тогда модуль  $U$  вполне приводим.

Следующие леммы и предложение описывают строение некоторых модулей Вейля и тилтинг-модулей для группы  $A_l(K)$ .



**Л е м м а 9** [1, леммы 1.2, 1.3]. При  $0 \leq c < p$  модуль  $T(c) \cong V(c) \cong M(c)$ . При  $p \leq c \leq 2p - 2$  положим  $c = r + p$ . Тогда максимальный подмодуль  $M$  модуля  $V(c)$  изоморфен  $M(p - r - 2)$  и  $V(c) / M \cong M(c)$ . В модуле  $T(c)$  имеется фильтрация

$$T(c) = M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset M_4 = 0 \text{ с } M_1 / M_2 \cong M_3 \cong M(p - r - 2) \text{ и } M_2 / M_3 \cong M(r + p);$$

$\dim(T(c)) = 2p$ . В этом случае модуль  $T(c)$  проективен для группы  $A_1(p)$ .

**Л е м м а 10** [1, лемма 1.4]. Пусть  $0 \leq r \leq p - 2$ . Положим  $c = r + p$ ,  $d = p - r - 2$ . Предположим, что композиционные факторы  $A_1(K)$ -модуля  $U$  изоморфны либо  $M(c)$ , либо  $M(d)$ . Тогда  $U = T(c)^q \oplus V(c)^s \oplus \Delta(c)^t \oplus M(c)^u \oplus M(d)^v$ . При этом модуль  $U$  самодуален тогда и только тогда, когда  $s = t$ .

Ниже  $Fr$  – морфизм Фробениуса группы  $G$ , задаваемый возведением элементов поля  $K$  в степень  $p$ .

**П р е д л о ж е н и е 3** [7, пример 2]. Пусть  $m \geq p$ . Тогда  $T(m) \cong T(p - 1 + r) \otimes T(s)^{Fr}$ , где  $r$  и  $s$  определяются из равенства  $m + 1 - p = r + ps$ ,  $0 \leq r \leq p - 1$ .

В теоремах 1–3  $G = C_l(K)$ .

**Т е о р е м а 1** [8]. Неприводимые представления группы  $G$  со старшими весами  $\omega_{l-1} + \frac{p-3}{2}\omega_l$  и  $\frac{p-1}{2}\omega_l$  имеют размерности  $\frac{p^l-1}{2}$  и  $\frac{p^l+1}{2}$  соответственно, и все их веса имеют кратность 1.

**Т е о р е м а 2** [5, 8.1]. Неприводимые представления группы  $G$  со старшими весами  $a\omega_1$  при  $a < p$  или  $a\omega_i + (p-1-a)\omega_{i+1}$ , где  $1 \leq i < l$  и  $a \neq 0$  для  $i = l-1$ , эквивалентны ограничениям на  $G$  неприводимых представлений группы  $A_{2l-1}$  с такими же старшими весами.

**Т е о р е м а 3** [9, теорема 5.1]. Пусть  $M = M(\omega_2)$ . Тогда  $\dim M = 2l^2 - l - 2$  при  $p \mid l$  и  $\dim M = 2l^2 - l - 1$  при  $p \nmid l$ . Если  $p \nmid l$ , то ограничение на  $G$  внешнего квадрата естественного модуля группы  $A_{2l-1}(K)$  изоморфно прямой сумме модуля  $M$  и тривиального модуля.

В теоремах 4–6  $G = B_l(K)$  или  $D_l(K)$ .

**Т е о р е м а 4** (см., напр., [10, предложение 2.34]). Пусть  $t = 2l - 1$ ,  $i < l - 1$  при  $G = D_l(K)$  и  $t = 2l$ ,  $i < l$  при  $G = B_l(K)$ . Тогда неприводимое представление группы  $G$  со старшим весом  $\omega_i$  эквивалентно ограничению на  $G$  неприводимого представления группы типа  $A_l(K)$  с таким же старшим весом.

**Т е о р е м а 5** [10, лемма 2.23]. Пусть  $G = D_l(K)$ ,  $f + g = l - 1$  и  $B \cong B_f(K)B_g(K)$  (здесь положим  $B_0(K) = 1$ ) – естественно вложенная подгруппа в  $G$ . Тогда ограничения на  $B$  представлений  $\phi(\omega_i)$  и  $\phi(\omega_{l-1})$  неприводимы. При  $B \cong B_{l-1}(K)$  эти ограничения эквивалентны спинорному представлению  $\phi(\omega_{l-1})$ .

**Т е о р е м а 6** [9, теорема 5.1]. Пусть  $t = 2l$  при  $G = B_l(K)$  и  $t = 2l - 1$  при  $G = D_l(K)$ . Положим  $M = M(2\omega_1)$ . Если  $p \nmid (t + 1)$ , то  $\dim M = 2l^2 + 3l$  при  $G = B_l(K)$  и  $\dim M = 2l^2 + l - 1$  при  $G = D_l(K)$ . В этой ситуации ограничение на  $G$  симметрического квадрата естественного модуля группы  $A_l(K)$  эквивалентно прямой сумме модуля  $M$  и тривиального модуля. Если  $p \mid (t + 1)$ , то  $\dim M = 2l^2 + 3l - 1$  при  $G = B_l(K)$  и  $\dim M = 2l^2 + l - 2$  при  $G = D_l(K)$ .

**Общая схема определения блочной структуры образов унитарных элементов в рассматриваемых представлениях.**

Объем сообщения не позволяет привести полные доказательства даже основных результатов. Ниже изложена схема этих доказательств.

Список неприводимых представлений классических алгебраических групп размерностей, меньших 100, взят из работы Любека [9, теорема 5.1 и таблицы в § 6]. Ясно, что можно не рассматривать стандартные и тривиальные модули, а также модули, получаемые из стандартных с помощью графовых автоморфизмов группы. Учитывая это, заключаем, что интересующие нас представления имеются у групп  $A_l(K)$ ,  $l \leq 13$ ,  $B_l(K)$ ,  $l \leq 6$ ,  $C_l(K)$  и  $D_l(K)$ ,  $l \leq 7$ .

Известно, что если  $G \neq D_l(K)$  или унитарный элемент  $x \in G$  имеет хотя бы один блок нечетной размерности в стандартной реализации группы, то класс сопряженности элементов, содержащий  $x$ , однозначно определяется жордановой формой этих элементов в стандартной реализации. При  $G = D_l(K)$ , если в стандартной реализации размерности всех блоков Жордана унипо-

тентного элемента четны, то множество элементов с такой формой Жордана разбивается на два класса сопряженности.

Кроме того, унипотентный элемент из группы  $SL_n(K)$  сопряжен с элементом из группы  $Sp_n(K)$  тогда и только тогда, когда кратности всех блоков Жордана нечетной размерности четны, и сопряжен с элементом из  $SO_n(K)$  тогда и только тогда, когда кратности блоков четной размерности четны (см., напр., [11, лемма 2.3 и замечание после предложения 2.8]).

Известно, что каждый элемент  $x \in G$  порядка  $p$  содержится в замкнутой связной подгруппе  $A_x$  со следующими свойствами:  $A_x \cong A_1(K)$ , для некоторого максимального тора  $T \subset G$  подгруппа  $T_x = T \cap A_x$  – максимальный тор в  $A_x$  и ограничение весов с  $T$  на  $T_x$  задает гомоморфизм  $\tau_x: \Lambda(G) \rightarrow \mathbb{Z}$  с  $\tau_x(\alpha_i) \in \{0, 1, 2\}$ . При этом значения  $\tau_x(\alpha_i)$  равны соответствующим меткам на помеченной схеме Дынкина элемента  $x$  (см., напр., [1, предложение 2.2]).

Т а б л и ц а 1. Группы типа  $A_i$

$G$	$\dim \phi$	$\omega(\phi)$	$p$	$J(\phi(x))$
$A_5$	84	$\omega_1 + \omega_4$	7	$(7^{12})$
			11	$(11^4, 10, 8, 6^2, 4^2, 2)$
			13	$(13^2, 10^2, 8^2, 6^2, 4^2, 2)$
			$\geq 17$	$(14, 12, 10^2, 8^2, 6^2, 4^2, 2)$
$A_6$	84	$3\omega_1$	7	$(7^{12})$
			11	$(11^7, 7)$
			13	$(13^5, 9, 7, 3)$
			17	$(17^2, 13, 11, 9, 7^2, 3)$
			$\geq 19$	$(19, 15, 13, 11, 9, 7^2, 3)$
$A_7$	70	$\omega_4$	11	$(11^5, 9, 5, 1)$
			13	$(13^3, 11, 9, 5^2, 1)$
			$\geq 17$	$(17, 13, 11, 9^2, 5^2, 1)$
$A_8$	80	$\omega_1 + \omega_8$	11	$(11^7, 3)$
			13	$(13^5, 7, 5, 3)$
			$\geq 17$	$(17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3)$
	84	$\omega_3$	11	$(11^7, 7)$
			13	$(13^5, 9, 7, 3)$
			17	$(17^2, 13, 11, 9, 7^2, 3)$
			$\geq 19$	$(19, 15, 13, 11, 9, 7^2, 3)$
$A_9$	99	$\omega_1 + \omega_9$	11	$(11^9)$
			13	$(13^7, 5, 3)$
			17	$(17^3, 13, 11, 9, 7, 5, 3)$
			$\geq 19$	$(19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3)$
$A_{11}$	78	$2\omega_1$	13	$(13^6)$
			17	$(17^4, 7, 3)$
			19	$(19^3, 11, 7, 3)$
			$\geq 23$	$(23, 19, 15, 11, 7, 3)$
$A_{12}$	78	$\omega_2$	13	$(13^6)$
			17	$(17^4, 7, 3)$
			19	$(19^3, 11, 7, 3)$
			$\geq 23$	$(23, 19, 15, 11, 7, 3)$
	91	$2\omega_1$	13	$(13^7)$
			17	$(17^5, 5, 1)$
			19	$(19^4, 9, 5, 1)$
			23	$(23^2, 17, 13, 9, 5, 1)$
			$\geq 29$	$(25, 21, 17, 13, 9, 5, 1)$
$A_{13}$	91	$\omega_2$	17	$(17^5, 5, 1)$
			19	$(19^4, 9, 5, 1)$
			23	$(23^2, 17, 13, 9, 5, 1)$
			$\geq 29$	$(25, 21, 17, 13, 9, 5, 1)$

Пусть  $M$  – модуль, в котором реализуется представление  $\varphi$ ,  $\omega = \omega(M)$ . Ясно, что  $\tau(\omega) = \max_{\mu \in \Lambda(M)} \tau(\mu)$ . Оказывается, что для рассматриваемых представлений  $\tau(\omega) \leq 3p$  и для большинства из них  $\tau(\omega) \leq 2p - 2$ . Чтобы найти размерности блоков Жордана элемента  $x$  на модуле  $M$ , определим неразложимые компоненты модуля  $M_x = M|A_x$ . Сначала находим композиционные факторы модуля  $M_x$ . Для этого необходимо знать размерности весовых подпространств модуля  $M$ . В ряде рассматриваемых случаев модуль Вейля  $V(\omega)$  неприводим, т. е.  $M \cong V(\omega)$ . Тогда эти размерности вычисляются по известным формулам [12, § 22, п. 3]. Часто  $M$  оказывается одним из модулей с одномерными весовыми подпространствами из предложений 1, 2 и теоремы 1. В других ситуациях явно строятся базисы весовых подпространств для всех доминантных весов модуля  $M$ . Нетрудно установить, что при  $G \neq D_l(K)$  или  $\omega = \sum_{i=1}^{l-2} a_i \omega_i$  модуль  $M_x$  самодуален.

В ряде случаев леммы 3 и 4 позволяют установить, что  $M_x$  – тилтинг-модуль, тогда это прямая сумма модулей  $T(\lambda)$ . Слагаемые определяются с помощью леммы 9 и предложения 3. В тех ситуациях, когда априори не ясно, является ли  $M_x$  тилтинг-модулем, для определения неразложимых компонент модуля  $M_x$  используются явные вычисления, рассматривается действие корневых элементов алгебры Ли группы  $A_x$  и элементов гипералгебры этой группы на определенные весовые векторы модуля  $M_x$ . Существенную роль играют принцип связи [13, теорема 3.6] и лемма 9. Часто приходится выяснять, имеет ли модуль  $M_x$  прямое слагаемое вида  $T(\lambda) \oplus M(\lambda)$  или  $W(\lambda) \oplus \Delta(\lambda)$  при  $\lambda = p + a$ ,  $a < p - 1$ . Для этого используется лемма 5. Для определения блочной структуры образов элементов, отличных от регулярных, применяется анализ ограничений рассматриваемых представлений на подсистемные и некоторые другие естественно вложенные подгруппы.

Далее, если  $x \in GL(n, K)$  – унитарный элемент, имеющий  $k_1$  блоков Жордана размерности  $d_1$ ,  $k_2$  блоков размерности  $d_2, \dots, k_t$  блоков размерности  $d_t$  с  $d_1 > d_2 > \dots > d_t$  и  $k_1 d_1 + k_2 d_2 + \dots + k_t d_t = n$ , будем писать  $J(x) = (d_1^{k_1}, d_2^{k_2}, \dots, d_t^{k_t})$ .

Объем сообщения позволяет привести лишь часть полученных результатов. В табл. 1–4 указана блочная структура образов регулярных унитарных элементов в  $p$ -ограниченных неприводимых представлениях, размерности которых  $\geq 70$ , но  $\leq 100$ . Если два представления получаются друг из друга с помощью графового автоморфизма группы, то указано только одно из них. У авторов имеются аналогичные таблицы для всех  $p$ -ограниченных неприводимых представлений размерностей  $\leq 100$ .

Т а б л и ц а 2. Группы типа  $B_l$

$G$	$\dim \varphi$	$\omega(\varphi)$	$p$	$J(\varphi(x))$
$B_3$	77	$3\omega_1$	7	$(7^{11})$
			11	$(11^7)$
			13	$(13^5, 9, 3)$
			17	$(17^2, 13, 11, 9, 7, 3)$
			$\geq 19$	$(19, 15, 13, 11, 9, 7, 3)$
$B_4$	84	$\omega_3$	11	$(11^7, 7)$
			13	$(13^5, 9, 7, 3)$
			17	$(17^2, 13, 11, 9, 7^2, 3)$
			$\geq 19$	$(19, 15, 13, 11, 9, 7^2, 3)$
$B_6$	78	$\omega_2$	13	$(13^6)$
			17	$(17^4, 7, 3)$
			19	$(19^3, 11, 7, 3)$
			$\geq 23$	$(23, 19, 15, 11, 7, 3)$
	89	$2\omega_1$	13	$(13^6, 11)$
			17	$(17^5, 5)$
	90	$2\omega_1$	19	$(19^4, 9, 5)$
			23	$(23^2, 17, 13, 9, 5)$
$\geq 29$			$(25, 21, 17, 13, 9, 5)$	

Т а б л и ц а 3. Группы типа  $C_l$ 

$G$	$\dim \varphi$	$\omega(\varphi)$	$p$	$J(\varphi(x))$
$C_6$	78	$2\omega_1$	13	$(13^6)$
			17	$(17^4, 7, 3)$
			19	$(19^3, 11, 7, 3)$
			$\geq 23$	$(23, 19, 15, 11, 7, 3)$
$C_7$	90	$\omega_2$	17	$(17^5, 5)$
			19	$(19^4, 9, 5)$
			23	$(23^2, 17, 13, 9, 5)$
			$\geq 29$	$(25, 21, 17, 13, 9, 5)$

Т а б л и ц а 4. Группы типа  $D_l$ 

$G$	$\dim \varphi$	$\omega(\varphi)$	$p$	$J(\varphi(x))$
$D_6$	77	$2\omega_1$	11	$(11^7)$
			13	$(13^5, 11, 1)$
			17	$(17^3, 11, 9, 5, 1)$
			19	$(19^2, 13, 11, 9, 5, 1)$
			$\geq 23$	$(21, 17, 13, 11, 9, 5, 1)$
$D_7$	91	$\omega_2$	13	$(13^7)$
			17	$(17^4, 13, 7, 3)$
			19	$(19^3, 13, 11, 7, 3)$
			$\geq 23$	$(23, 19, 15, 13, 11, 7, 3)$

**Заключение.** Определена блочная структура образов унитарных элементов в модулярных неприводимых  $p$ -ограниченных представлениях классических алгебраических групп размерности  $\leq 100$ . Размерности блоков Жордана этих образов существенно зависят от характеристики поля.

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция» (2011–2015) и частично поддержана Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (проект Ф14Р-109).

### Список использованной литературы

1. Seitz, G. M. Unipotent elements, tilting modules, and saturation / G. M. Seitz // Invent. Math. – 2000. – Vol. 141, N 3. – P. 467–502.
2. Velichko, M. V. On the behaviour of the root elements in irreducible representations of simple algebraic groups / M. V. Velichko // Тр. Ин-та математики. – 2005. – Т. 13, № 2. – С. 116–121.
3. Jantzen, J. C. Representations of algebraic groups (2 ed.) / J. C. Jantzen // Mathematical Surveys and Monographs. – 2003. – Vol. 107. – 576 p.
4. Залесский, А. Е. Срезанные симметрические степени естественных реализаций групп  $SL_m(P)$  и  $Sp_m(P)$  и их ограничения на подгруппы / А. Е. Залесский, И. Д. Супруненко // Сиб. математ. журн. – 1990. – Т. 31, № 4. – С. 33–46.
5. Seitz, G. M. The maximal subgroups of classical algebraic groups / G. M. Seitz // Memoirs Amer. Math. Soc. – 1987. – Vol. 67, N 365. – P. iv–286.
6. Супруненко, И. Д. О блочной структуре регулярных унитарных элементов из подсистемных подгрупп типа  $A_1 \times A_2$  в представлениях специальной линейной группы / И. Д. Супруненко // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2011. – Т. 388. – С. 247–269.
7. Donkin, S. On tilting modules for algebraic groups / S. Donkin // Math. Zeits. – 1993. – Vol. 212. – P. 39–60.
8. Залесский, А. Е. Представления размерности  $(p^n + 1) / 2$  симплектической группы степени  $2n$  над полем характеристики  $p$  / А. Е. Залесский, И. Д. Супруненко // Вести АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1987. – № 6. – P. 9–15.
9. Lubeck, F. Small degree representations of finite Chevalley groups in defining characteristic / F. Lubeck // LMS J. Comput. Math. – 2001. – Vol. 4. – P. 135–169.
10. Suprunenko, I. D. The minimal polynomials of unipotent elements in irreducible representations of the classical groups in odd characteristic / I. D. Suprunenko // Memoirs Amer. Math. Soc. – 2009. – Vol. 200, N 939. – 154 p.
11. Seitz, G. M. Unipotent and nilpotent classes in simple algebraic groups and Lie algebras / G. M. Seitz, M. W. Liebeck // Mathematical Surveys and Monographs. – 2012. – Vol. 180. – 380 p.
12. Хамфрис, Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений / Дж. Хамфрис. – М.: МЦНМО, 2003. – 216 с.
13. Humphreys, J. Modular representations of finite groups of Lie types / J. Humphreys. – UK: LMS Lecture Note Series 326, 2006. – 233 p.

Поступило в редакцию 19.10.2015

УДК 517.977

А. И. АСТРОВСКИЙ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ НАБЛЮДЕНИЯ  
СО СКАЛЯРНЫМ ВЫХОДОМ К ФОРМЕ ШВАРЦА

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь

aastrov@tut.by

Для линейных нестационарных систем наблюдения со скалярным выходом получены необходимые и достаточные условия приводимости к системам наблюдения в форме Шварца с помощью непрерывно дифференцируемой группы.

*Ключевые слова:* линейная нестационарная система наблюдения, каноническая форма, форма Шварца.

A. I. ASTROVSKII

TRANSFORMATION OF LINEAR TIME-VARYING OBSERVATION SYSTEMS  
WITH SCALAR OUTPUT TO THE SCHWARZ FORM

Belarusian State Economic University, Minsk, Belarus

aastrov@tut.by

The necessary and sufficient conditions for linear time-varying observation systems with scalar output to be transformed to the Schwarz form under the action of a linear continuously differentiable group are obtained.

*Keywords:* linear time-varying observation system, canonical form, Schwarz form.

**Введение.** Исследование структурных свойств динамических систем часто основывается на преобразовании их к некоторой простейшей (канонической) форме. Выбор группы преобразований и вида канонической системы определяется изучаемыми свойствами. Общая концепция исследования линейных систем управления-наблюдения, основанная на классификации их относительно действия различных групп преобразований, изложена в [1]. Реализация этой концепции достаточно полно разработана в [2–9].

В данной работе, продолжающей исследования [1–9], получены необходимые и достаточные условия приводимости линейных нестационарных систем наблюдения со скалярным выходом к форме Шварца [10–12]. Важность систем Шварца в первую очередь состоит в том, что для них достаточно просто находятся функции Ляпунова.

**Функции Ляпунова для систем Шварца.** Рассмотрим на полупрямой  $\mathbb{R}_+$  линейную нестационарную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad (1)$$

где  $x(t)$  –  $n$ -вектор-столбец состояний, а  $A(t)$  – непрерывная на  $\mathbb{R}_+$  ( $n \times n$ )-матрица.

Для системы (1) функции Ляпунова чаще всего строятся в виде квадратичной формы, что приводит к необходимости решать матричное уравнение Ляпунова

$$\frac{dP(t)}{dt} + A'(t)P(t) + P(t)A(t) = Q(t), \quad (2)$$

в котором  $Q(t) = (q_{ij}(t))$  – непрерывная симметричная отрицательно определенная  $(n \times n)$ -матрица. Решение уравнения Ляпунова (2) сильно упрощается, если матрица  $A(t)$  представлена в форме Шварца

$$A(t) = H(t) = \begin{pmatrix} 0 & h_0(t) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & h_1(t) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & h_{n-2}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & h_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $h_i(t)$  – непрерывные на  $\mathbb{R}_+$  функции. Например, если  $n=3$  и матрица  $H(t)$  стационарна, то элементы  $p_{ij}$  матрицы  $P$  при условии  $h_i \neq 0$  ( $i=0,1,2$ ) определяются следующим образом:

$$p_{12} = \frac{q_{11}}{2}, \quad p_{23} = \frac{q_{22} - h_0 q_{11}}{2}, \quad p_{33} = \frac{q_{33} - h_1 q_{22} + h_0 h_1 q_{11}}{2h_2}, \quad p_{13} = \frac{2q_{13} - q_{22} - (h_1 - h_0)q_{11}}{2h_2},$$

$$p_{22} = \frac{2h_2 q_{23} - q_{33} - 2h_0 q_{13} + (h_0 + h_1 - h_2^2)q_{22} + (h_0 h_2^2 - h_0^2)q_{11}}{2h_1 h_2},$$

$$p_{11} = \frac{q_{33} + (h_0^2 + h_1^2 - h_0 h_1 - h_0 h_2^2)q_{11} + (h_2^2 - h_0)q_{22} + 2(h_0 - h_1)q_{13} - 2h_2 q_{23} + 2h_1 h_2 q_{12}}{2h_0 h_1 h_2}.$$

Пусть матрица  $H(t)$  нестационарна и

$$Q(t) = \begin{pmatrix} q_{11}(t) & q_{12}(t) & 0 \\ q_{12}(t) & q_{22}(t) & q_{23}(t) \\ 0 & q_{23}(t) & q_{33}(t) \end{pmatrix}.$$

Решение уравнения (2) будем искать в виде  $P(t) = \text{diag}(p_1(t), p_2(t), p_3(t))$ . Простые вычисления показывают, что в этом случае

$$p_1(t) = \int_{t_0}^t q_{11}(\tau) d\tau + C_1, \quad p_2(t) = \int_{t_0}^t q_{22}(\tau) d\tau + C_2, \quad p_3(t) = q_{23}(t) - h_1(t) \left( \int_{t_0}^t q_{22}(\tau) d\tau + C_2 \right),$$

$$q_{12}(t) = h_0(t) \left( \int_{t_0}^t q_{11}(\tau) d\tau + C_1 \right) + \int_{t_0}^t q_{22}(\tau) d\tau + C_2,$$

$$q_{33}(t) = \dot{q}_{23}(t) + 2h_2(t)q_{23}(t) - \dot{h}_1(t) \left( \int_{t_0}^t q_{22}(\tau) d\tau + C_2 \right) - h_1(t) \left( q_{22}(t) + 2h_2(t) \left( \int_{t_0}^t q_{22}(\tau) d\tau + C_2 \right) \right).$$

**Форма Шварца для систем наблюдения.** Присоединим к системе (1) скалярный выход

$$y(t) = c(t)x(t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (4)$$

с непрерывной  $n$ -вектор строкой  $c(t)$ . Для краткости систему наблюдения (1), (4) отождествим с парой  $(A, c)$ .

Пусть  $\mathcal{G}$  – группа всех невырожденных при каждом  $t \in T$  квадратных  $(n \times n)$ -матриц  $G(t)$ , принадлежащих  $C^1(T, R^{n \times n})$ . Действие группы  $\mathcal{G}$  на паре  $(A, c)$  зададим стандартным образом

$$G * (A, c) = (G^{-1}AG - G^{-1}\dot{G}, cG), \quad G \in \mathcal{G}, \quad (5)$$

а символом  $\mathcal{O}(A, c)$  будем обозначать орбиту пары  $(A, c)$  относительно действия группы  $\mathcal{G}$ .

Говорят, что система (1), (4) обладает формой Шварца, если в множестве  $\mathcal{O}(A, c)$  существует система  $(H, c^0)$ , где  $H(t)$  матрица вида (3), а  $c^0 = (0, 0, \dots, 1)$ .

Отметим, что если в орбите  $\mathcal{O}(A, c)$  пары  $(A, c)$  существует форма Шварца, то, вообще говоря, она не является единственной. Например, если  $n=3$  и для системы  $(A, c)$  существует форма Шварца

$$H(t) = \begin{pmatrix} 0 & h_0(t) & 0 \\ 1 & 0 & h_1(t) \\ 0 & 1 & h_2(t) \end{pmatrix},$$

то у этой системы имеется множество форм Шварца

$$H_g(t) = \begin{pmatrix} 0 & h_0(t) \pm g(t) & 0 \\ 1 & 0 & h_1(t) \mp g(t) \\ 0 & 1 & h_2(t) \end{pmatrix},$$

где  $g(t) = \exp\left(C - \int_{t_0}^t h_2(\tau) d\tau\right)$ ,  $C$  – произвольная постоянная. Других форм Шварца, кроме указанных, в данном случае нет.

**З а м е ч а н и е.** Если предположить, что  $h_0(t) \equiv 1$ , то при  $n=2, 3, 4$  форма Шварца единственна.

**Условия существования формы Шварца.** Анализ соотношения (5) показывает, что для существования формы Шварца  $(H, c^0)$  необходимо выполнение условий

$$c \in C^1(T, R^n) \text{ и } c(t) \neq 0, t \in T.$$

Считая их выполненными, определим функции  $b_{ij}(t)$  и  $n$ -вектор функции  $p_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) по правилу

$$\begin{aligned} b_{10}(t) &= \|c(t)\|, \quad p_1(t) = \frac{c(t)}{\|c(t)\|}, \quad b_{nn}(t) = (p_1(t)A(t) + \dot{p}_1(t))p_1'(t), \\ b_{n,n-1}(t) &= \|p_1(t)A(t) + \dot{p}_1(t) - b_{nn}(t)p_1(t)\|, \quad p_2(t) = \frac{p_1(t)A(t) + \dot{p}_1(t) - b_{nn}(t)p_1(t)}{b_{n,n-1}(t)}, \dots, \\ b_{n+1-i,n+1-j}(t) &= (p_i(t)A(t) + \dot{p}_i(t))p_j'(t), \quad (j=1, 2, \dots, i), \\ b_{n+1-i,n-i}(t) &= \left\| p_i(t)A(t) + \dot{p}_i(t) - \sum_{k=1}^i b_{n+1-i,n+1-k}(t)p_k(t) \right\|, \\ p_{i+1}(t) &= \frac{p_i(t)A(t) + \dot{p}_i(t) - \sum_{k=1}^i b_{n+1-i,n+1-k}(t)p_k(t)}{b_{n+1-i,n-i}(t)}, \\ & \quad (i=1, 2, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Справедлива

**Т е о р е м а 1.** Пусть элементы  $(n \times n)$ -матрицы  $A(t)$   $(2n-2)$  раза, а элементы  $n$ -вектор функции  $c(t)$   $(2n-1)$  раз непрерывно дифференцируемы на  $T$ . Система  $(A, c)$  обладает формой Шварца тогда и только тогда, когда выполняются условия  $b_{i,i-1}(t) \neq 0$ ,  $t \in T$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

Формы Шварца тесно связаны с каноническими формами Фробениуса  $(A^0, c^0)$ ,  $A^0(t) = (\delta_{i,j+1} + \delta_{n,j}\alpha_{i-1}(t))_{i,j=1}^n$  ( $\delta_{ij}$  – символ Кронекера), которые широко используются в математической теории систем [1; 2; 13; 14]. Например, для систем пятого порядка форма Шварца  $(H, c^0)$  преобразуется к канонической форме Фробениуса с помощью следующей матрицы:

$$G(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h_0(t) & -\dot{h}_0(t) & \ddot{h}_0(t) + h_0^2(t) + h_0(t)h_1(t) \\ 0 & 1 & 0 & h_0(t) + h_1(t) & -2\dot{h}_0(t) - \dot{h}_1(t) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & h_0(t) + h_1(t) + h_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$



при этом функции, определяющие каноническую форму Фробениуса, находятся по формулам

$$\begin{aligned}\alpha_4(t) &= h_4(t), \quad \alpha_3(t) = h_0(t) + h_1(t) + h_2(t) + h_3(t), \\ \alpha_2(t) &= -3\dot{h}_0(t) - 2\dot{h}_1(t) - \dot{h}_2(t) - h_4(t)(h_0(t) + h_1(t) + h_2(t)), \\ \alpha_1(t) &= 3\ddot{h}_0(t) + \ddot{h}_1(t) + h_4(t)(2\dot{h}_0(t) + \dot{h}_1(t)) - h_0(t)h_2(t) - h_3(t)(h_0(t) + h_1(t)), \\ \alpha_0(t) &= -\ddot{h}_0(t) + \dot{h}_0(t)h_2(t) + h_0(t)\dot{h}_2(t) - h_4(t)(\ddot{h}_0(t) - h_0(t)h_2(t)) + \dot{h}_0(t)h_3(t).\end{aligned}$$

Заметим, что несмотря на неединственность формы Шварца, из всех таких форм, находящихся в орбите  $\mathcal{O}(A, c)$ , получается одна и та же каноническая форма Фробениуса.

**Форма Шварца для равномерно наблюдаемых систем.** Рассмотрим равномерно наблюдаемую систему  $(A, c)$  класса  $n$  [1; 2]. Для нее существует непрерывно дифференцируемая невырожденная при каждом  $t \in T$  матрица наблюдаемости  $S(t)$ , строки которой находятся по рекуррентным формулам

$$s_0(t) = c(t), \quad s_{i+1}(t) = s_i(t)A(t) + \dot{s}_i(t) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Пусть  $(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)) = s_n(t)S^{-1}(t)$  [1; 2] – полный инвариант пары  $(A, c)$  относительно действия группы  $\mathcal{G}$ .

**Т е о р е м а 2.** *Форма Шварца для равномерно наблюдаемых систем  $(A, c)$  класса  $n$  существует тогда и только тогда, когда  $f_i \in C^{i-1}(T, R)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).*

Например, для системы третьего порядка функции  $h_0(t), h_1(t), h_2(t)$ , определяющие форму Шварца, находятся по формулам

$$\begin{aligned}h_2(t) &= f_3(t), \quad h_0(t) = f_2(t) - h_1(t) - 2f_3(t), \\ h_1(t) &= \exp\left(-\int_{t_0}^t f_3(\tau) d\tau\right) \left( C + \int_{t_0}^t (f_1(\tau) + f_3(\tau)f_2(\tau) - \dot{f}_3(\tau) - 2f_3(\tau)\dot{f}_3(\tau)) \exp\left(-\int_{t_0}^t f_3(\xi) d\xi\right) d\tau \right),\end{aligned}$$

где  $C$  – произвольная постоянная. Коэффициенты же канонической формы Фробениуса в данном случае имеют вид

$$\alpha_2(t) = f_3(t), \quad \alpha_1(t) = f_2(t) - 2f_3(t), \quad \alpha_0(t) = f_1(t) - \dot{f}_2(t) + \ddot{f}_3(t).$$

### Список использованной литературы

1. Гайшун, И. В. Введение в теорию линейных нестационарных систем / И. В. Гайшун. – М.: Едиториал УРСС, 2004.
2. Астровский, А. И. Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений / А. И. Астровский, И. В. Гайшун. – Минск: Беларус. навука, 2013.
3. Астровский, А. И. Связь между каноническими формами линейных дифференциальных систем наблюдения и каноническими формами их дискретных аппроксимаций / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 7. – С. 954–962.
4. Астровский, А. И. Канонические формы линейных нестационарных систем наблюдения с квазидифференцируемыми коэффициентами относительно различных групп преобразований / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 2. – С. 254–263.
5. Астровский, А. И. Один способ построения канонических форм Фробениуса линейных нестационарных систем наблюдения / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 10. – С. 1479–1487.
6. Астровский, А. И. Квазидифференцируемость и канонические формы линейных нестационарных систем наблюдения / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 3. – С. 423–431.
7. Астровский, А. И. Преобразование линейных нестационарных систем наблюдения со скалярным выходом к каноническим формам Фробениуса / А. И. Астровский // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 6. – С. 16–21.
8. Астровский, А. И. Квазидифференцируемость и наблюдаемость линейных нестационарных систем / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 11. – С. 1567–1576.
9. Астровский, А. И. Канонические формы линейных нестационарных систем наблюдения и хессенбергова наблюдаемость / А. И. Астровский // Докл. РАН. – 2002. – Т. 383, № 4. – С. 439–442.
10. Chen, C. F. A matrix for evaluating Schwarz's form / C. F. Chen, H. Chu // IEEE Trans. Autom. Control. – 1966. – Vol. AC-11, N 2. – P. 303–305.
11. Lab, M. On Schwarz canonical form for large system simplification / M. Lab // IEEE Trans. Autom. Control. – 1975. – Vol. AC-20, N 2. – P. 262–263.
12. Anderson, B. D. O. Schwarz matrix properties for continuous and discrete systems / B. D. O. Anderson, E. I. Jury, M. Mansour // Int. J. Control. – 1976. – Vol. 23, N 1. – P. 1–16.
13. Д'Анжело, Г. Линейные системы с переменными параметрами / Г. Д'Анжело. – М.: Машиностроение, 1974.
14. Silverman, L. M. Transformation time-variable systems to canonical (phase-variable) form / L. M. Silverman // IEEE Trans. Autom. Control. – 1966. – Vol. AC-11, N 2. – P. 300–303.

Поступило в редакцию 27.01.2016

УДК 517.977

*А. И. КАЛИНИН, Л. И. ЛАВРИНОВИЧ***СИНГУЛЯРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧЕ  
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ***(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)**Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь**kalininai@bsu.by; lavrinovich@bsu.by*

Рассматривается задача об управлении с минимальной энергией линейной сингулярно возмущенной системой. Конечное состояние системы и время перехода считаются заданными. Строятся асимптотические приближения к оптимальному программному управлению и оптимальной обратной связи в этой задаче. Основное достоинство предлагаемых алгоритмов состоит в том, что при их применении исходная задача оптимального управления распадается на две невозмущенные задачи меньшей размерности.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, обратная связь, линейно-квадратичная задача, малый параметр, сингулярные возмущения, асимптотические приближения.

*A. I. KALININ, L. I. LAVRINOVICH***SINGULAR PERTURBATIONS IN THE LINEAR-QUADRATIC OPTIMAL CONTROL PROBLEM***Belarusian State University, Minsk, Belarus**kalininai@bsu.by; lavrinovich@bsu.by*

The control problem for a linear singularly perturbed system with minimum energy is under consideration. The final state of the system and the transition time are assumed to be given. Asymptotic approximations to the optimal open-loop and optimal feedback controls for this problem are constructed. The main advantage of the proposed algorithms is that the original optimal control problem is split into two unperturbed problem of smaller dimension.

*Keywords:* optimal control, feedback, linear-quadratic problem, small parameter, singular perturbations, asymptotic approximations.

**Введение.** В математической теории оптимальных процессов значительное внимание уделяется асимптотическим методам оптимизации сингулярно возмущенных систем, содержащих малые параметры при части производных (см. обзоры в [1–3]). Как известно, численное решение задач оптимального управления предполагает неоднократное интегрирование прямой и сопряженной систем. В сингулярно возмущенных задачах эти системы являются жесткими [4] и, как следствие, при вычислениях возникают серьезные трудности, выражающиеся в недопустимо большом времени счета и неизбежном накоплении вычислительных ошибок. Поэтому возрастает роль асимптотических методов, тем более что при их применении происходит декомпозиция исходной задачи оптимального управления на задачи меньшей размерности. Настоящее сообщение посвящено построению асимптотических приближений в виде программы и обратной связи к решению задачи оптимизации переходного процесса в линейной сингулярно возмущенной системе. Эта задача состоит в нахождении допустимого управления с минимальными энергетическими затратами.

Следует отметить, что сингулярно возмущенным линейно-квадратичным задачам оптимального управления посвящено значительное число работ (см., напр., [5–8]), однако в них не накладывались ограничения на правый конец траекторий.

**Постановка задачи.** В классе  $r$ -мерных управляющих воздействий  $u(t)$ ,  $t \in T = [t_*, t^*]$ , с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u, \quad y(t_*) = y_*, \\ \mu \dot{z} &= A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u, \quad z(t_*) = z_*, \end{aligned} \quad (1)$$

$$y(t^*) = 0, \quad z(t^*) = 0, \quad (2)$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} u^T P(t) u dt \rightarrow \min, \quad (3)$$

где  $\mu$  – малый положительный параметр;  $t_*$ ,  $t^*$  – заданные моменты времени ( $t_* < t^*$ );  $y$  –  $n$ -вектор медленных переменных;  $z$  –  $m$ -вектор быстрых переменных;  $P(t)$  – положительно определенная симметрическая матрица для всех  $t \in T$ .

**Предположение 1.** Матрица  $A_4(t)$ ,  $t \in T$ , устойчивая, т. е. действительные части всех ее собственных значений отрицательны.

**Предположение 2.** Элементы всех матриц, формирующих задачу, бесконечно дифференцируемы.

Управление с кусочно-непрерывными компонентами принято называть допустимым, если для порожденной им траектории системы (1) выполнены терминальные ограничения (2). Допустимое управление, на котором критерий качества (3) принимает наименьшее значение, называют оптимальным. Асимптотические приближения к решению рассмотренной задачи будем называть асимптотически субоптимальными управлениями.

**Определение 1.** Управление  $u^{(N)}(t, \mu)$ ,  $t \in T$ , с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением  $N$ -го порядка ( $N = 0, 1, 2, \dots$ ), если оно переводит динамическую систему в состояние  $O(\mu^{N+1})$  и отклоняется по критерию качества (3) от оптимального управления на величину того же порядка малости.

**Определение 2.** Вектор-функцию  $u^{(N)}(y, z, t, \mu)$  назовем асимптотически субоптимальной обратной связью  $N$ -го порядка, если для любого начального состояния  $(y_*, z_*, t_*)$ ,  $t_* < t^*$ , имеет место

$$u^{(N)}(y_*, z_*, t_*, \mu) = u^{(N)}(t_*, \mu),$$

где  $u^{(N)}(t, \mu)$ ,  $t \in T$ , – асимптотически субоптимальное управление  $N$ -го порядка в задаче (1)–(3).

Целью исследования рассмотренной задачи, которую можно трактовать как задачу управления с минимальными энергетическими затратами, является построение асимптотических приближений к ее решению в виде программы и обратной связи.

**Базовые задачи.** Основная идея применяемого подхода состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра начальных значений сопряженных переменных – конечномерных элементов, по которым можно легко восстановить решение задачи. Старшие коэффициенты этих разложений могут быть найдены в результате решения двух базовых невозмущенных задач оптимального управления с  $n$  и  $m$  фазовыми переменными соответственно. Первой из них является вырожденная задача

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_0(t)y + B_0(t)u, \quad y(t_*) = y_*, \quad y(t^*) = 0, \\ J_1(u) &= \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} u^T P(t) u dt \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $A_0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t)$ ,  $B_0(t) = B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t)$ . В дальнейшем эту задачу будем называть *первой базовой*.

**Предположение 3.** Динамическая система в задаче (4) является вполне управляемой [9].

При таком предположении в первой базовой задаче существуют допустимые управления, а тогда (см. [10]) эта задача имеет единственное решение  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , которое является нормальной экстремалью.

Вторая базовая задача имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds} &= A_4(t^*)z + B_2(t^*)u, z(0) = A_4^{-1}(t^*)B_2(t^*)u^0(t^*), \\ z(-\infty) &= 0, J_2(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 u^T P(t^*)uds \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (5)$$

Предположение 4. Выполнено условие управляемости

$$\text{rank}(B_2(t^*), A_4(t^*)B_2(t^*), \dots, A_4^{m-1}(t^*)B_2(t^*)) = m.$$

Это предположение гарантирует существование допустимых управлений во второй базовой задаче. Отсюда в свою очередь следует (см. [10]), что задача (5) имеет единственное решение  $u^*(s)$ ,  $s \leq 0$ , и является нормальной.

**Т е о р е м а.** При выполнении предположений 1–4 решению задачи (1)–(3) с достаточно малым  $\mu$  соответствует в силу принципа максимума единственный вектор сопряженных переменных  $(\psi_1^0(t, \mu), \psi_2^0(t, \mu))$ ,  $t \in T$ . Величины  $\lambda(\mu) = \psi_1^0(t^*, \mu)$ ,  $\nu(\mu) = \psi_2^0(t^*, \mu)$  допускают асимптотические разложения

$$\lambda(\mu) \sim \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_k, \quad \nu(\mu) \sim \nu_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \nu_k,$$

в которых  $\nu_0 = \sigma_0 - (A_2(t^*)A_4^{-1}(t^*))^T \lambda_0$ , а  $\lambda_0, \sigma_0$  – начальные значения (в момент времени  $t^*$ ) сопряженных переменных соответственно в первой и второй базовых задачах.

**Построение асимптотически субоптимальных управлений.** На основе конструктивного доказательства теоремы разработан алгоритм, позволяющий для заданного числа  $N$  построить асимптотическое субоптимальное управление  $N$ -го порядка. Асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка представимо в виде

$$u^{(0)}(t, \mu) = u^0(t) + u^*((t - t^*) / \mu), \quad t \in T, \quad (6)$$

и может быть сформировано непосредственно после решения базовых задач. Заметим, что управление (6) не зависит от начального состояния  $z_*$  вектора быстрых переменных и при малых  $\mu$  будет существенно отличаться от решения  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , первой базовой задачи лишь в пограничном слое, т. е. в некоторой левосторонней окрестности точки  $t^*$ . Для построения асимптотически субоптимальных управлений более высокого порядка нужно дополнительно интегрировать системы линейных дифференциальных уравнений и находить решения невырожденных линейных алгебраических систем.

**Асимптотически субоптимальный синтез.** Введем в рассмотрение матричную функцию

$$C_1(t) = \int_t^{t^*} \Phi_0(\tau) P^{-1}(\tau) \Phi_0^T(\tau) d\tau, \quad t \in T,$$

где  $\Phi_0(t) = F_0(t)B_0(t)$ ,  $t \in T$ , а  $F_0(t)$ ,  $t \in T$ , –  $(n \times n)$ -матричная функция, являющаяся решением начальной задачи

$$\dot{F}_0 = -F_0 A_0(t), \quad F_0(t^*) = E_n.$$

Определим также матрицу

$$C_2 = \int_{-\infty}^0 (\Pi \Phi(s) P^{-1}(t^*) \Pi \Phi^T(s)) ds,$$

где  $\Pi \Phi(s) = G(s)B_2(t^*)$ ,  $s \leq 0$ , а  $G(s)$ ,  $s \leq 0$ , –  $(m \times m)$ -матричная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{dG}{ds} = -GA_4(t^*), \quad G(0) = E_m.$$

В силу неявного критерия управляемости [11] при выполнении предположений 3, 4 матрицы  $C_1(t)$ ,  $t < t^*$ ,  $C_2$  будут невырожденными.

Асимптотически субоптимальная обратная связь нулевого порядка имеет вид

$$u^{(0)}(y, z, t, \mu) = -P^{-1}(t)(B_0^T(t)F_0^T(t) + B_2^T(t)G^T((t-t^*)/\mu)C_0)C_1^{-1}(t)F_0(t)y,$$

где

$$C_0 = C_2^{-1}A_4^{-1}(t^*)B_2(t^*)P^{-1}(t^*)B_0^T(t^*).$$

Отметим, что построенная обратная связь не зависит от текущей позиции вектора быстрых переменных  $z$ .

**Заключение.** В сообщении предложены вычислительные процедуры построения асимптотических приближений к решению рассмотренной задачи в виде программы и обратной связи. При реализации предлагаемых алгоритмов исходная задача оптимального управления распадается на две невозмущенные задачи меньшей размерности. Такая декомпозиция позволяет эффективно решать задачи оптимизации динамических систем с большим числом фазовых переменных. Кроме того, вычислительные процедуры алгоритмов не содержат интегрирований жестких систем.

### Список использованной литературы

1. *Дмитриев, М. Г.* Сингулярные возмущения в задачах управления / М. Г. Дмитриев, Г. А. Курина // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 1. – С. 3–51.
2. *Калинин, А. И.* Асимптотика решений возмущенных задач оптимального управления / А. И. Калинин // Изв. РАН. Техн. кибернетика. – 1994. – № 3. – С. 104–114.
3. *Kokotovic, P. V.* Singular perturbations in systems and control / P. V. Kokotovic, H. K. Khalil. – New York: IEEE Press, 1986. – 362 p.
4. *Ракитский, Ю. В.* Численные методы решения жестких систем / Ю. В. Ракитский, С. М. Устинов, И. Г. Черно-руцкий. – М.: Наука, 1979. – 208 с.
5. *Kokotovic, P. V.* Singular perturbation of linear regulators: basic theorems / P. V. Kokotovic, R. A. Jackel // IEEE Trans. Automat. Control. – 1972. – Vol. 17, N 1. – P. 29–37.
6. *Wilde, R. R.* Optimal open - and closed loop control of singularly perturbed linear systems / R. R. Wilde, P. V. Kokotovic // IEEE Trans. Automat. Control. – 1973. – Vol. 18, N 6. – P. 616–626.
7. *Глизер, В. Я.* Сингулярные возмущения в линейной задаче оптимального управления с квадратичным функционалом / В. Я. Глизер, М. Г. Дмитриев // Докл. АН СССР. – 1975. – Т. 225, № 5. – С. 997–1000.
8. *O'Malley, R. E. Jr.* Singular perturbations and optimal control / R. E. O'Malley Jr. // Lect. Notes Math. – 1978. – Vol. 680. – P. 171–218.
9. *Красовский, Н. Н.* Теория управления движением / Н. Н. Красовский. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
10. *Мордухович, Б. Ш.* Существование оптимальных управлений / Б. Ш. Мордухович // Соврем. пробл. матем. (Итоги науки и техн.). – М.: ВИНТИ, 1976. – Т. 6. – С. 207–271.
11. *Габасов, Р.* Оптимизация линейных систем / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Минск: Изд-во БГУ, 1973. – 248 с.

Поступило в редакцию 03.02.2016

ДК 512.74+512.552.13

Академик В. И. ЯНЧЕВСКИЙ

**ПРИВЕДЕННЫЕ ГРУППЫ УАЙТХЕДА СПЕЦИАЛЬНЫХ УНИТАРНЫХ ГРУПП  
АНИЗОТРОПНЫХ ЭРМИТОВЫХ ФОРМ, СВЯЗАННЫХ С ГЕНЗЕЛЕВЫМИ  
АЛГЕБРАМИ С ДЕЛЕНИЕМ, АЛГЕБРЫ ВЫЧЕТОВ КОТОРЫХ ГЛОБАЛЬНЫ**

*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
yanch@im.bas-net.by*

Данное сообщение ставит своей целью получение схемы вычисления приведенных групп Уайтхеда специальных унитарных групп анизотропных эрмитовых форм, связанных с гензелевыми алгебрами с делением, алгебры вычетов которых глобальны.

*Ключевые слова:* приведенные группы Уайтхеда, гензелевы алгебры с инволюциями, специальные унитарные группы алгебр с делением.

V. I. YANCHEVSKIĬ

**ON REDUCED WHITEHEAD GROUPS OF SPECIAL UNITARY GROUPS OF ANISOTROPIC HERMITIAN  
FORMS, RELATED TO HENSELIAN DIVISION ALGEBRAS WITH GLOBAL RESIDUE ALGEBRAS**

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
yanch@im.bas-net.by*

The aim of the given paper is to obtain a scheme of computation of reduced Whitehead groups of special unitary groups of anisotropic hermitian forms, related to henselian division algebras with global residue algebras.

*Keywords:* reduced Whitehead groups, henselian algebras with involutions, special unitary groups of division algebras.

**Введение.** Пусть  $k$  – поле. В теории линейных алгебраических групп многие важные структурные проблемы тесно связаны с аналогичными проблемами строения групп  $G(k)$   $k$ -рациональных точек односвязных простых  $k$ -определенных групп  $G$ . С каждой такой группой можно связать абелеву группу – приведенную группу Уайтхеда. Приведенные группы Уайтхеда играют ключевую роль при изучении  $G(k)$ . Наиболее трудными для изучения (по крайней мере для групп классического типа) являются группы типа  $A_r$  (см., напр., [1]). Исходя из явной реализации групп  $G(k)$ , задача описания приведенных групп Уайтхеда сводится к описанию некоторых факторов групп обратимых элементов простых ассоциативных конечномерных  $k$ -алгебр. В самом деле, группы  $G(k)$  описываются следующим образом.

Пусть  $A = M_m(D)$  – полная матричная алгебра степени  $m$  над конечномерной ассоциативной центральной  $k$ -алгеброй с делением  $D$  индекса  $d$ ,  $Nrd_A : A \rightarrow k$  – отображение приведенной нормы алгебры  $A$ ,  $GL(m, D)$  – группа обратимых элементов алгебры  $A$ , и

$$SL(m, D) = \{g \in GL(m, D) \mid Nrd_A(g) = 1\}.$$

Известно, что группа  $SL(m, D)$  отождествляется с группой  $k$ -рациональных точек односвязной группы (которую мы будем обозначать через  $\mathbf{SL}(m, D)$ ), являющейся внутренней формой типа  ${}^1A_{n-1}$  (здесь  $n = md$ ). Приведенные группы Уайтхеда  $Wh(\mathbf{SL}(m, D)(k))$  групп  $SL(m, D)$  определяются в этом случае так:

$$Wh(\mathbf{SL}(m, D)(k)) = SL(m, D) / [GL(m, D), GL(m, D)],$$

где  $[GL(m, D), GL(m, D)]$  – коммутант группы  $GL(m, D)$ . Обычно, группа  $Wh(\mathbf{SL}(m, D)(k))$  обозначается через  $SK_1(M_m(D))$ .

Для описания групп  $k$ -рациональных точек в случае внешних форм  ${}^2A_{n-1}$  рассматриваются специальные унитарные группы подходящих эрмитовых форм. Пусть  $K/k$  – квадратичное сепар-



рабельное расширение полей,  $A = M_m(D)$  – полная матричная алгебра степени  $m$  над конечномерной центральной  $K$ -алгеброй с делением  $D$  индекса  $d$ . Предположим, что алгебра  $A$  обладает  $K/k$ -инволюцией  $\tau$ , где  $k$  – подполе инвариантов  $\tau$  в  $K$ . Алгебра  $A$  обладает также  $D$ -инвариантной  $K/k$ -инволюцией  $\delta$  такой, что  $\|d_{ij}\|_{i,j=1,\dots,m}^{\delta} = \|d_{ji}^{\delta}\|_{i,j=1,\dots,m}$  (здесь  $\|d_{ij}\|$  –  $m \times m$  матрица над  $D$  с элементом  $d_{ij} \in D$  на позиции  $(i, j)$ ). Известно, что для подходящего  $\delta$ -инвариантного  $F$  при произвольном  $a \in A$  верно  $a^{\tau} = F^{-1}a^{\delta}F$ . Это позволяет определить унитарную и специальную унитарную группы подходящих эрмитовых форм. Именно, для правого  $m$ -мерного векторного пространства  $V$  над  $D$  и его базиса  $e_1, \dots, e_m$  пусть  $f$  эрмитова форма на  $V$  с матрицей  $F$  (относительно этого базиса). Положим

$$U(m, D, f) = \{u \in GL(m, D) \mid u^{\delta}Fu = u\},$$

$$SL(m, D, f) = \{u \in U(m, D) \mid Nrd_A(u) = 1\}.$$

Обе группы  $U(m, D, f)$  и  $SU(m, D, f)$  отождествляются с группами  $k$ -рациональных точек соответствующих  $k$ -определенных алгебраических групп: унитарной  $U(m, D, f)$  и специальной унитарной  $SU(m, D, f)$ .

В случае внешних форм приведенные группы Уайтхеда определяются следующим образом:

$$Wh(SU(m, D, f)(k)) = SL(m, D, f) / [U(m, D, f), U(m, D, f)],$$

где  $[U(m, D, f), U(m, D, f)]$  – коммутант группы  $U(m, D, f)$ .

Существует другая интерпретация групп  $k$ -рациональных точек внешних форм.

Для произвольной  $K/k$ -инволюции  $\mu$  алгебры  $A$  определены унитарная и специальная унитарная группы пары  $(A, \mu)$ :

$$U(A, \mu) = \{u \in A \mid u^{\mu}u = 1\},$$

$$SL(A, \mu) = \{u \in U(A, \mu) \mid Nrd_A(u) = 1\}.$$

Отметим, что между унитарными (специальными унитарными) группами эрмитовых форм и унитарными (специальными унитарными) группами алгебр с инволюциями имеется простая связь.

Пусть, как и выше,  $F$  – матрица эрмитовой формы  $f$ . Для любого  $a \in A$  положим  $a^{\theta} = F^{-1}a^{\delta}F$ . Тогда  $\theta$  –  $K/k$ -инволюция алгебры  $A$  и

$$U(m, D, f) = U(A, \theta),$$

$$SU(m, D, f) = SU(A, \theta).$$

При изучении приведенных групп Уайтхеда внутренних форм важную роль играет следующее обстоятельство: они не зависят от  $m$ . Более точно, имеют место следующие изоморфизмы:

$$SK_1(M_m(D)) \cong SK_1(D),$$

где  $SK_1(D) := SK_1(M_1(D))$ . Таким образом, вычисление групп  $SK_1(M_m(D))$  не зависит от того, являются ли группы  $SL(m, D)$  изотропными или анизотропными над  $k$ . Положение оказывается иным в случае внешних форм. В изотропной ситуации группы  $Wh(SU(m, D)(k))$  оказываются изоморфными группам  $SUK_1(A, \delta) := \Sigma'_{\delta}(A) / \Sigma_{\delta}(A)$ , где  $\Sigma'_{\delta}(A) := \{d \in A \mid Nrd_A(d) \in k \setminus \{0\}\}$ ,  $\Sigma_{\delta}(A)$  – подгруппа, порожденная  $\delta$ -инвариантными элементами из  $GL(m, D)$ .

Поскольку группы  $\Sigma'_{\delta}(A)$  и  $\Sigma_{\delta}(A)$  зависят лишь от ограничения инволюции  $\delta$  на  $k$ , повсюду ниже мы будем опускать индекс  $\delta$ .

Приведенные группы Уайтхеда  $SK_1(A)$  и  $SUK_1(A, \delta)$  (в изотропном случае) достаточно хорошо изучены [2–10] и обладают многими общими свойствами. Напротив, в анизотропной ситуации группы  $Wh(SU(m, D, f)(k))$  изучены мало и их свойства значительно отличаются от свойств групп  $SK_1(A)$  и  $SUK_1(A, \delta)$ . Чтобы подчеркнуть это обстоятельство мы будем обозначать группы  $Wh(SU(m, D, f)(k))$  в анизотропной ситуации через  $SUK_1^{an}(A, \delta)$ .

Основной объект наших рассуждений – группы  $SUK_1^{an}(A, \delta)$ . Ниже для краткости мы ограничиваемся наиболее интересным случаем некоммутативных  $D$  (по поводу случая  $d = 1$ ,  $k$  – поле алгебраических чисел см. [11]).

Длительное время считалось, что группы  $SUK_1^{an}(A, \delta)$  обладают свойствами, схожими со свойствами групп  $SK_1(A)$  и  $SUK_1(A, \delta)$  (по крайней мере в случае специальных полей  $k$ ). Так, для глобаль-



ных полей  $k$  обсуждалась проблема тривиальности групп  $SUK_1^{an}(D, \delta)$  как один из начальных шагов для получения результатов о нормальном строении групп  $SU(1, D, \delta)$  (соответствующие группы  $SK_1(D)$  и  $SUK_1(D, \delta)$  в этом случае тривиальны). Однако оказалось, что положение на самом деле более сложное. В [12] было показано, что для полей рациональных функций от одной переменной над подходящими циклотомическими расширениями  $\mathbb{Q}$  и специальных символ-алгебр произвольных степеней  $n > 2$  группы  $SUK_1^{an}(D, \delta)$  могут быть даже бесконечными, а затем Б. Сури в [13] вычислил группы  $SUK_1^{an}(D, \delta)$  для кватернионных алгебр  $D$  с делением над глобальными полями  $K$ . Заметим, что в случае глобальных полей  $K$  эти группы всегда конечны.

Никаких общих результатов о группах  $SUK_1^{an}(A, \delta)$  (за исключением [14], где была установлена важная связь групп  $SUK_1^{an}(A, \delta)$  и  $SUK_1(A, \delta)$ , не зависящих от структуры  $A$ ) до недавнего времени получено не было.

Цель сообщения – предложить схему вычисления групп  $SUK_1^{an}(D, \tau) = SU(D, \tau)/[U(D, \tau), U(D, \tau)]$  в терминах алгебры вычетов  $\bar{D}$  алгебры  $D$  в том случае, когда  $D$  – центральная  $K$ -алгебра с делением нечетного индекса такая, что  $k$  – гензелево поле, поле вычетов которого является полем алгебраических чисел.

**Основная часть.** Для изложения основного результата приведем необходимые определения и обозначения.

Пусть  $k$  – гензелево поле, поле вычетов которого является полем алгебраических чисел и  $D$  – центральная  $K$ -алгебра с делением такая, что  $K$  – квадратичное расширение поля  $k$ . Обозначим через  $v$  единственное продолжение нормирования поля  $k$  до нормирования алгебры  $D$ . Тогда алгебра вычетов  $\bar{D}$  алгебры  $D$  относительно  $v$  определяется как  $\bar{K}$ -алгебра  $V_D / M_D$ , где  $V_D$  – кольцо целых, а  $M_D$  – идеал нормирования  $v$ . Аналогично пусть  $\bar{K}, \bar{k}$  – поля вычетов полей  $K$  и  $k$  соответственно относительно ограничений  $v$  на  $K$  и  $k$ . Вообще, для множества  $S$   $v$ -целых элементов из  $D$  через  $\bar{S}$  будет обозначаться множество редукций в  $\bar{D}$  элементов из  $S$ . Предположим, что алгебра  $D$  обладает  $K/k$ -инволюцией  $\tau$ . Тогда однозначно определена редукция  $\bar{\tau}$  инволюции  $\tau$ . Пусть  $Z(\bar{D})$  – центр алгебры  $\bar{D}$ . Для формулировки основного результата нам потребуются следующие группы:

$$\begin{aligned} SL^v(D) &= \{d \in SL(D) \mid N_{Z(\bar{D})/\bar{K}}(Nrd_{\bar{D}}(\bar{d})) = 1\}, \\ SU^v(D, \tau) &= \{d \in SU(D, \tau) \mid N_{Z(\bar{D})/\bar{K}}(Nrd_{\bar{D}}(\bar{d})) = 1\}, \\ SUK_1^v(D, \tau) &= \overline{SU^v(D, \tau) / [U(\bar{D}, \bar{\tau}), U(\bar{D}, \bar{\tau})]}. \end{aligned}$$

Упомянутая схема вычисления групп  $SUK_1^{an}(D, \tau)$  возникает из следующего утверждения.

**Т е о р е м а 1.** В вышеприведенных обозначениях для алгебр  $D$  нечетного индекса имеют место следующие точные последовательности групп и подходящих гомоморфизмов:

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow SUK_1^{an}(\bar{D}, \bar{\tau}) \rightarrow SUK_1^v(D, \tau) \rightarrow Nrd_{\bar{D}}(U(\bar{D}, \bar{\tau})) \cap \overline{Nrd_{\bar{D}}(SL^v(D))} \rightarrow 1, \\ 1 \rightarrow SUK_1^v(D, \tau) \rightarrow SUK_1^{an}(D, \tau) \rightarrow E_\lambda \rightarrow 1, \end{aligned}$$

где  $E_\lambda$  – подгруппа группы корней  $\varepsilon_\lambda$  степени  $\lambda$  из единицы, лежащих в  $\bar{K}$ , таких, что  $\varepsilon_\lambda^{\bar{\tau}} \varepsilon_\lambda = 1$ , совпадающая с образом гомоморфизма  $N_{Z(\bar{D})/\bar{K}} \circ Nrd_{\bar{D}}$ , ограниченного на группу  $SU(D, \tau)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о** этой теоремы основано на следующих утверждениях:

1. Конгруэнц-теорема. Пусть, как и выше,  $D$  – алгебра с делением нечетного индекса. Тогда  $(1 + M_D) \cap SU(D, \tau) \subseteq [U(D, \tau), U(D, \tau)]$ , где  $(1 + M_D)$  – подгруппа элементов алгебры  $D$  вида  $1 + m$ , где  $m \in M_D$ .

2. Описание редукции группы  $SU^v(D, \tau)$ ;  $SU^v(D, \tau) = \overline{U(\bar{D}, \bar{\tau}) \cap SL^v(D, \tau)}$ .

3. Описание редукции группы  $U(D, \tau)$  и ее коммутанта  $[U(D, \tau), U(D, \tau)]$ :

$$\begin{aligned} \overline{U(D, \tau)} &= U(\bar{D}, \bar{\tau}), \\ \overline{[U(D, \tau), U(D, \tau)]} &= [U(\bar{D}, \bar{\tau}), U(\bar{D}, \bar{\tau})]. \end{aligned}$$

В случае, когда  $\bar{k}$  – поле алгебраических чисел, из теоремы 1 выводится основная теорема, позволяющая вычислить группы  $SUK_1^{an}(D, \tau)$  в терминах алгебры  $\bar{D}$ .

**Т е о р е м а 2.** В обозначениях теоремы 1 для случая  $\bar{k}$  – поле алгебраических чисел имеют место следующие точные последовательности групп и гомоморфизмов:

$$1 \rightarrow SUK_1^{an}(\bar{D}, \bar{\tau}) \rightarrow SUK_1^v(D, \tau) \rightarrow SL(Z(\bar{D})/Z(\bar{D})_{\bar{\tau}}) \cap SL(Z(\bar{D})/\bar{K}) \rightarrow 1,$$

где  $SL(Z(\bar{D})/Z(\bar{D})_{\bar{\tau}})$ ,  $SL(Z(\bar{D})/\bar{K})$  – ядра нормальных гомоморфизмов расширений полей  $Z(\bar{D})/Z(\bar{D})_{\bar{\tau}}$ ,  $Z(\bar{D})/\bar{K}$  соответственно,

$$1 \rightarrow SUK_1^v(D, \tau) \rightarrow SUK_1^{an}(D, \tau) \rightarrow E_\lambda \rightarrow 1.$$

При доказательстве теоремы 2, помимо предыдущей теоремы, используется также описание группы  $Nrd_{\bar{D}}(U(\bar{D}, \bar{\tau}))$ , а также описание группы  $Nrd_{\bar{D}}(SL^v(D))$  и следующее следствие из теоремы Эйхлера о приведенных нормах в алгебрах над глобальными полями нечетных индексов.

**С л е д с т в и е.** Пусть  $E$  – простая центральная алгебра над глобальным полем  $F$  нечетного индекса. Тогда гомоморфизм приведенной нормы  $Nrd_E$  сюръективен.

**З а м е ч а н и е.** Утверждение, аналогичное теореме 2, справедливо также и в случае глобального поля  $\bar{k}$ .

**Заключение.** Получена схема вычисления групп  $SUK_1^{an}(D, \tau)$  для гензелевых алгебр с делением  $D$  нечетных индексов в терминах глобальных алгебр  $\bar{D}$  (т. е. центры которых глобальные поля).

### Список использованной литературы

1. Segev, Y. On finite homomorphic images of the multiplicative groups of a division algebra / Y. Segev // Ann. Math. – 1999. – Т. 149, N 1. – P. 219–251.
2. Chernousov, V. R-equivalence and special unitary groups / V. Chernousov, A. Merkurjev // J. Algebra. – 2002. – Т. 209, N 1. – P. 175–198.
3. Draxl, P.  $SK_1$  von Algebren über vollständig diskret bewerteten Körpern und Galois Kohomologie abelscher Körpererweiterungen / P. Draxl // J. reine angew. Math. – 1977. – Bd. 293–294. – P. 116–142.
4. Hazrat, R. Unitary  $SK_1$  of graded and valued division algebras / R. Hazrat, A. R. Wadsworth // Proc. London Math. Soc. – 2011. – Vol. 103, N 3. – P. 508–534.
5. Wadsworth, A. R. Unitary  $SK_1$  for a graded division ring and its quotient division ring / A. R. Wadsworth, V. I. Yanchevskii // J. Algebra. – 2012. – Vol. 352, N 1. – P. 62–78.
6. Yanchevskii, V. I. Whitehead groups and groups of R-equivalence classes of linear algebraic groups of noncommutative classical type over some virtual fields / V. I. Yanchevskii // Proceeding of the International Conference on Algebraic Groups and Arithmetic, TIFR, Mumbai, December 2001. – Mumbai, 2001. – P. 491–505.
7. Платонов, В. П. Проблема Таннака–Артина и приведенная K-теория / В. П. Платонов // Изв. АН СССР, сер. мат. – 1976. – Т. 40, № 2. – С. 227–261.
8. Янчевский, В. И. Простые алгебры с инволюциями и унитарные группы / В. И. Янчевский // Матем. сб. – 1974. – Т. 93, № 3. – С. 368–380.
9. Янчевский, В. И. Приведенная K-теория и тела над гензелевыми дискретно нормированными полями / В. И. Янчевский // Изв. АН СССР, сер. мат. – 1978. – Т. 42, № 4. – С. 879–918.
10. Янчевский, В. И. Приведенная унитарная K-теория. Приложения к алгебраическим группам / В. И. Янчевский // Матем. сб. – 1979. – Т. 110(152), № 4(12). – С. 579–596.
11. Kneser, M. Orthogonale Gruppen über algebraischen Zahlkörpern / M. Kneser // J. reine angew. Math. – 1956. – N 196. – P. 213–220.
12. Sethuraman, B. A. On the special unitary group of a division algebra / B. A. Sethuraman, B. Sury // Proc. Amer. Math. Soc. – 2006. – Vol. 134, N 2. – P. 351–354.
13. Sury, B. On  $SU(1, D)/[U(1, D), U(1, D)]$  for a quaternion division algebra  $D$  / B. Sury // Arch. Math. – 2008. – Vol. 90, N 6. – P. 493–500.
14. Yanchevskii, V. I. Reduced Whitehead groups and the conjugacy problem for special unitary groups of anisotropic Hermitian forms / V. I. Yanchevskii // J. Math. Sci. – 2013. – Vol. 192, N 2. – P. 250–262.

Поступило в редакцию 09.11.2015

## ФИЗИКА

УДК 535.34/37:547.979.733

П. П. ПЕРШУКЕВИЧ<sup>1</sup>, Е. А. МАКАРОВА<sup>2</sup>, Д. И. ВОЛКОВИЧ<sup>1</sup>,  
член-корреспондент К. Н. СОЛОВЬЁВ<sup>1</sup>

**ВЛИЯНИЕ ТЕТРАФЕНИЛЗАМЕЩЕНИЯ НА ФОТОФИЗИКУ  
МОЛЕКУЛ ТЕТРААЗАПОРФИНА И ТЕТРААЗАХЛОРИНА**

<sup>1</sup>Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
p.persh@ifanbel.bas-net.by; valkovich\_d@yahoo.com; solovyov@imaph.bas-net.by

<sup>2</sup>Научно-исследовательский институт органических полупродуктов и красителей, Москва, Россия  
ea\_makarova22@yahoo.com

Измерены спектрально-люминесцентные характеристики тетрафенилтетраазпорфина и замещенного тетрафенилтетраазхлорина, нового потенциального поглотителя и излучателя для ближней ИК области, в растворах при 293 и 77 К, а также значения квантовых выходов флуоресценции и генерации синглетного кислорода. Показано, что изменения энергии возбужденных электронных состояний при переходе от тетрафенилзамещенных соединений к октафенилзамещенным незначительны. На основе выполненных квантово-химических расчетов дано объяснение этого свойства. Найдено, что в результате тетрафенилзамещения для тетраазпорфина значения квантовых выходов флуоресценции и образования синглетного кислорода снижаются, а для тетраазхлорина, наоборот, повышаются.

*Ключевые слова:* тетрафенилтетраазхлорин, тетрафенилтетраазпорфин, спектр поглощения, флуоресценция, поляризационный спектр, синглетный кислород.

P. P. PERSHUKEVICH<sup>1</sup>, E. A. MAKAROVA<sup>2</sup>, D. I. VOLKOVICH<sup>1</sup>, K. N. SOLOVYOV<sup>1</sup>

**INFLUENCE OF TETRAPHENYL SUBSTITUTION ON PHOTOPHYSICS OF TETRAAZAPORPHIN  
AND TETRAAZACHLORIN MOLECULES**

<sup>1</sup>B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
p.persh@ifanbel.bas-net.by; valkovich\_d@yahoo.com; solovyov@imaph.bas-net.by

<sup>2</sup>Organic Intermediates and Dyes Institute, Moscow, Russia  
ea\_makarova22@yahoo.com

We have measured the spectral-luminescent characteristics of tetraphenyltetraazaporphin and a substituted tetraphenyltetraazachlorin, a new potential absorber and emitter for the near IR region, in solutions at 293 and 77 K as well as the quantum yields of fluorescence and singlet oxygen generation. It has been shown that the changes in the excited electronic states energy in passing from tetraphenyl substituted to octaphenyl substituted compounds are not minor. Based on performed quantum-chemical calculation, an explanation of this property is given. It has been found that, for tetraazaporphin, the tetraphenyl substitution results in decreasing the quantum yields of fluorescence and singlet oxygen generation whereas, for tetraazachlorin, on the contrary, tetraphenyl substitution results in the rise of their values.

*Keywords:* tetraphenyltetraazachlorin, tetraphenyltetraazaporphin, absorption spectra, fluorescence, polarization spectrum, singlet oxygen.

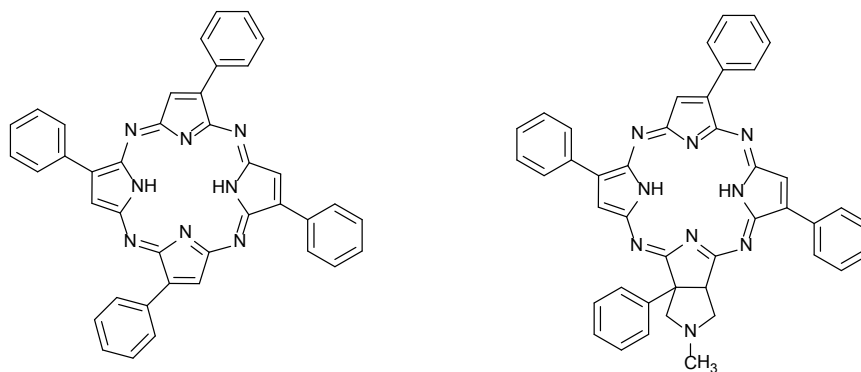
**Введение.** Присоединение фенильных групп к тетрапиррольному макроциклу, так же как и азамещение, бензозамещение и гидрирование пиррольных колец, является фактором, существенно влияющим на электронные состояния молекул и определяемые ими характеристики вещества, в частности, электронные спектры и энергетику фотофизических процессов. Различные сочетания таких факторов позволяют управлять физико-химическими свойствами молекул типа хлорофилла и фталоцианина.

Начиная с 1999 г. [1] в НИОПИК (г. Москва, Россия) проводятся работы по синтезу и исследованию гидропроизводных тетраазпорфина (порфиразина, H<sub>2</sub>ТАП), являющихся тетраазааналогами хлорина и бактериохлорина (H<sub>2</sub>ТАХ и H<sub>2</sub>ТАБХ) – см. обзоры [2; 3]. Нашей научной группой выполнен ряд работ по изучению связи фотофизики молекул данного класса с их строением.

Сводка ссылок на эти работы дана в недавних публикациях [4; 5]. В соответствии со сказанным выше представляло интерес распространить сложившиеся подходы на фенилзамещенные аналоги  $H_2TAX$ .

В работе нашей группы [5] подробно исследована фотофизика молекул производных с двумя фенильными группами, присоединенными к каждому негидрированному пиррольному кольцу. Характеристики негидрированного аналога этих соединений, октафенилпорфиразина ( $H_2Ph_8TAP$ ), изучались в ряде работ, в частности, в недавней [6]. Однако вопросы взаимодействия сопряженных систем макроцикла и фенильных колец в возбужденных электронных состояниях остаются нерешенными. К тому же интересно, почему у углеродного аналога  $H_2Ph_8TAP$  – октафенилпорфина ( $H_2Ph_8P$ ) – влияние фенильных колец на спектр поглощения относительно порфина ( $H_2P$ ) значительно слабее [7]. Для более глубокого выяснения природы влияния фенилзамещения на свойства молекул порфиразинов представляется необходимым изучение соединений, макроцикл которых содержит монофенилзамещенные пиррольные кольца.

В настоящей работе представлены результаты экспериментального определения спектрально-люминесцентных характеристик таких соединений, нового производного  $H_2TAX$  – N-метилпирролидинотетрафенилтетраазахлорина ( $H_2Ph_4TAX^{mp}$ , индекс «mp» обозначает N-метилпирролидин) и тетрафенилтетраазапорфина ( $H_2Ph_4TAP$ ) – при 293 и 77 К в растворах. Структурные формулы исследованных соединений представлены на схеме. Строение  $H_2Ph_4TAX^{mp}$  подобно строению  $H_2Ph_8TAX^{mp}$  – одного из объектов, исследованных в работе [5].



Структурные формулы  $H_2Ph_4TAP$  и  $H_2Ph_4TAX^{mp}$

**Материалы и методы исследований.** Безметалльный  $H_2Ph_4TAP$  получен по ранее описанной методике [8] при обработке трифторуксусной кислотой магниевого комплекса, который синтезирован взаимодействием бутилата магния с Z-1,2-дицианофенилэтиленом по аналогии с известным методом Линстеда [9; 10]. Теоретически тетрафенилтетраазапорфин может образовываться в виде смеси четырех структурных изомеров в зависимости от положения фенильных заместителей, однако разделение изомеров не проводилось.  $H_2Ph_4TAX^{mp}$  получен реакцией 1,3-циклоприсоединения  $H_2Ph_4TAP$  с азометинилидом, генерируемым *in situ* из N-метилглицина и параформа, в o-дихлорбензоле при 150 °С в инертной атмосфере в течение 1,5 ч [11].

Методика измерений подробно описана в [5]. В качестве растворителей использовались 2-метилтетрагидрофуран (МТГФ), образующий прозрачное стекло при замораживании, и толуол.

**Результаты и их обсуждение.** Результаты экспериментов представлены на рис. 1–4 и в таблице. В целях сравнения в таблицу включены данные наших работ: [4] по  $H_2TAX$  и [5] по  $H_2Ph_8TAX^{mp}$ ,  $H_2Ph_6TAX^{tm}$  (индекс «tm» обозначает тетраметил) и  $H_2TAP$ .

На рис. 1 показаны спектры поглощения, флуоресценции и возбуждения флуоресценции (СВФ)  $H_2Ph_4TAX^{mp}$  в МТГФ (а) и толуоле (б). Они аналогичны характеристикам других тетраазахлоринов. Сопоставление спектров поглощения и СВФ с учетом данных рис. 2 выявляет в  $H_2Ph_4TAX^{mp}$  небольшую примесь  $H_2Ph_4TAP$ . Из рис. 1 видно, что спектры поглощения и флуоресценции  $H_2Ph_4TAX^{mp}$  слабо зависят от природы растворителя.

Фотофизические характеристики гидропорфиризинов

Вещество	Растворитель	$T, K$	$\lambda_{Q_1}, \lambda_{Q_2}, nm$	$\lambda_{F}, nm$	$\Phi_F, \%$	$\Phi_A, \%$
$H_2Ph_4TAX^{mp}$	МТГФ	293	712, 547	728	4,0	14
		77	713, 553	721	–	–
	толуол	293	716, 549	732	16,0	67
		77	716, 549	732	16,0	67
$H_2Ph_8TAX^{mp}$ [5]	МТГФ	293	720, 555,5	737	7,0	62
		77	726, 559	728	–	–
	толуол	293	723, 558	743	10,5	65
		77	723, 558	743	10,5	65
$H_2Ph_6TAX^{tm}$ [5]	МТГФ	293	725, 555,5	748	11,3	49
		77	731, 557	732	–	–
	толуол	293	729, 558	751	14,6	58
		77	729, 558	751	14,6	58
$H_2TAX$ [4]	МТГФ	293	673, 516	682	2,1	12
		77	672,5, 516,5	676	–	–
$H_2Ph_4TAP$	МТГФ	293	658, 595	667	1,8	11
		77	661, 599	663	–	–
	толуол	293	661, 597	672	4,8	27
		77	661, 597	672	4,8	27
$H_2TAP$ [5]	МТГФ	293	612, 539,5	618	5,8	–
		77	611, 541	613	–	–
	толуол	293	616,5, 543	623	17,4	47
		77	616,5, 543	623	17,4	47

Сравнение спектров поглощения  $H_2Ph_4TAX^{mp}$  и  $H_2Ph_8TAX^{mp}$  (из работы [5]) в МТГФ показывает, что положение полос поглощения мало изменяется при переходе от тетрафенилпроизводного к октафенилпроизводному. Обычно в спектроскопии тетрапирролов длинноволновая полоса поглощения обозначается  $Q_x$  при наличии симметрии  $D_{2h}$  или  $C_{2v}$  (электронный переход поляризован по линии NH–HN, выбранной за ось  $x$ , см., напр., [5]), или  $Q_1$  в общем случае. Присоединение к молекуле  $H_2Ph_4TAX^{mp}$  четырех дополнительных фенильных групп сдвигает полосу  $Q_1(0-0)$  батохромно всего на 8 нм ( $160\text{ см}^{-1}$ ), а полосу  $Q_2(0-0)$  – на 8,5 нм ( $280\text{ см}^{-1}$ ). В области полосы Soret, или ее аналога, у  $H_2Ph_8TAX^{mp}$  наблюдаются два максимума при 340 и 370 нм, а у  $H_2Ph_4TAX^{mp}$  – асимметричная полоса с максимумом при 360 нм и «плечом» при ~330 нм, сдвиг от «тетра» к «окта» также батохромный на 10 нм ( $750\text{ см}^{-1}$ ). Введение четырех дополнительных фенилов влияет более заметно на интенсивность полос – относительная интенсивность  $Q_1(0-0)$  полосы возрастает. Если рассматривать спектральные сдвиги относительно незамещенного  $H_2TAX$ , то естественно, из приведенных данных следует, что сдвиги относительно исходного спектра  $H_2TAX$  велики, а различия между ними у  $H_2Ph_4TAX^{mp}$  и  $H_2Ph_8TAX^{mp}$  незначительны.

Спектры флуоресценции на рис. 1 (кривая 3) имеют вид, типичный для  $H_2TAX$  и его производных: в длинноволновой части отсутствует колебательная структура, что приводит к наруше-

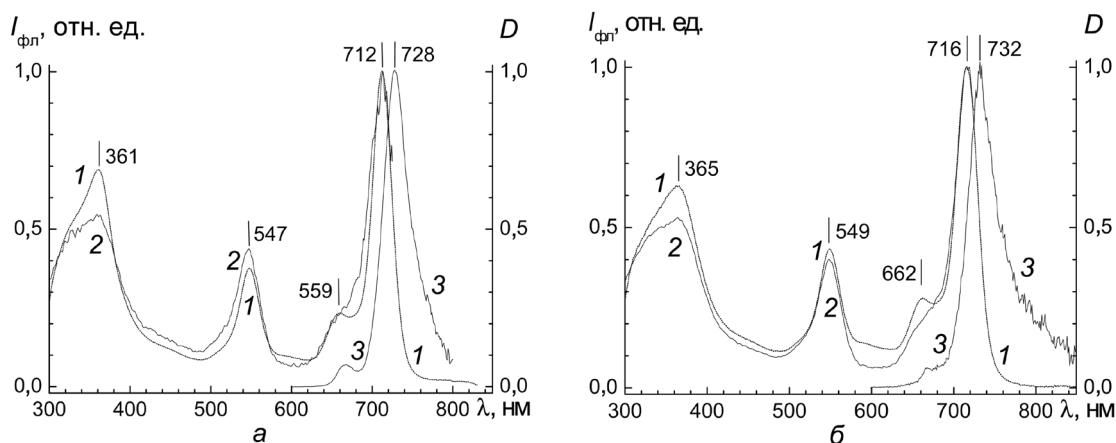


Рис. 1. Спектры поглощения (1), спектры возбуждения флуоресценции (2) и спектры флуоресценции (3)  $H_2Ph_4TAX^{mp}$  в МТГФ (а) и толуоле (б) при 293 К; длина волны регистрации  $\lambda_{рег} = 730\text{ нм}$  (2), длина волны возбуждающего света  $\lambda_{возб} = 545\text{ нм}$  (3)



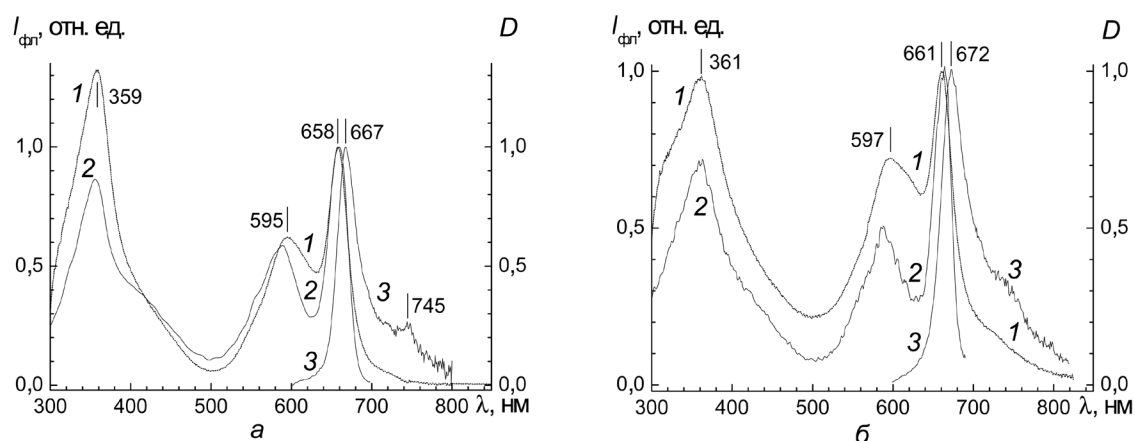


Рис. 2. Спектры поглощения (1), спектры возбуждения флуоресценции (2) и спектры флуоресценции (3)  $H_2Ph_4TAP$  в МТГФ (а) и толуоле (б) при 293 К;  $\lambda_{пер} = 670$  нм (2),  $\lambda_{возб} = 580$  нм (3)

нию правила зеркальной симметрии Лёвшина. Мы объясняем такие факты перестройкой молекул тетраазахлоринов в возбужденном электронном состоянии  $S_1$ .

На рис. 2 приведены результаты измерений для  $H_2Ph_4TAP$ . Спектры поглощения этого соединения в обоих растворителях несколько отличаются от СВФ. Это можно объяснить частичным образованием ассоциированных форм, а также наличием примесей. В этих условиях СВФ лучше характеризуют мономерные молекулы, чем спектр поглощения. Вместе с тем положение главных максимумов в них одинаковое. СВФ  $H_2Ph_4TAP$  имеет сходство со спектром поглощения  $H_2TAP$ , но как бы сдвинут в длинноволновую сторону. В то же время полосе  $Q_y(0-0)$   $H_2TAP$ , уширенной несильно по сравнению с полосой  $Q_x(0-0)$ , соответствует довольно широкая полоса с максимумом при 595 нм (МТГФ). Подобные «конгломераты» полос отмечены нами в спектрах поглощения трибензотетраазахлоринов и объяснены перемешиванием второго электронного состояния  $S_2$  с вибранными состояниями подходящей симметрии, принадлежащими электронному состоянию  $S_1$ , по типу сложного вибранный аналога резонанса Ферми [12].

Сравнение со спектром поглощения незамещенного  $H_2TAP$  в МТГФ [5] показывает, что полоса  $Q_1(0-0)$  смещена батохромно на 46 нм ( $1140\text{ см}^{-1}$ ), главная компонента 2-го электронного перехода – на 55 нм ( $1730\text{ см}^{-1}$ ), а полоса Соре смещена на 30 нм ( $\sim 2500\text{ см}^{-1}$ ). В результате большего понижения уровня  $Q_2$  интервал  $Q_2-Q_1$  уменьшается от 2200 до  $1620\text{ см}^{-1}$ . Аналогичная тенденция в смещении полос наблюдается для спектров поглощения  $H_2Ph_4TAX^{mp}$ . Сопоставление со спектром поглощения незамещенного  $H_2TAX$  в МТГФ [4] показывает, что полоса  $Q_1(0-0)$  смещена батохромно на 39 нм, главная компонента 2-го электронного перехода – на 31 нм, а полоса Соре – приблизительно на 30 нм. Как отмечено в работе [6], батохромные сдвиги полос  $Q_x$  и  $Q_y$  при фенилзамещении обусловлены дестабилизацией верхней заполненной МО типа  $a_u$  в результате электронодонорного воздействия фенильных групп. При отсутствии фенильных групп полоса Соре менее уширена, имеются два максимума при 328 и 342 нм и заметна слабая полоса около 400 нм [4]. В целом можно сказать, что подобие спектров незамещенного и тетрафенилзамещенного соединения имеет место и оно несколько больше для  $H_2TAX$ , чем для  $H_2TAP$ .

Наконец, следует сопоставить спектр  $H_2Ph_4TAP$  в толуоле со спектром поглощения  $H_2Ph_8TAP$  в том же растворителе [6]. Если рассматривать структуру  $H_2Ph_8TAP$  как результат присоединения еще четырех фенильных групп, то такое присоединение приводит к батохромному сдвигу полосы  $Q_1(0-0)$  всего на 7 нм ( $160\text{ см}^{-1}$ ),  $Q_2$  на 6 нм ( $170\text{ см}^{-1}$ ), полосы Соре – на 10 нм ( $750\text{ см}^{-1}$ ); интервал  $Q_2-Q_1$  практически тот же. В данном случае, так же, как и для хлоринов, влияние дополнительных четырех фенилов на электронный спектр поглощения незначительно. По-видимому, в обоих случаях расширение сопряженной системы при увеличении числа присоединенных фенильных колец компенсируется ослаблением эффекта сопряжения. Сопряжение  $\pi$ -электронных систем фенильных колец и макроцикла уменьшается вследствие увеличения значений углов между их плоскостями. Как следует из результатов выполненных квантово-химиче-

ских расчетов, углы наклона этих колец к плоскости макроцикла, равные 26–28° для тетрафенилзамещенных соединений, увеличиваются до 45° у октафенилзамещенных.

На рис. 3 и 4 представлены результаты измерений для замороженных растворов в МТГФ при 77 К. Понижение температуры не приводит к существенному изменению в СВФ, не считая некоторого сужения полос. В середине полосы Core  $H_2Ph_4TAX^{mp}$  (рис. 3) появляется неглубокий минимум около 340 нм. Диффузное поглощение  $H_2Ph_4TAP$  (рис. 4) в области 400–460 нм при 77 К становится интенсивнее, что имеет аналогию в спектре поглощения  $H_2TAP$  [13].

Спектр флуоресценции  $H_2Ph_4TAP$  в МТГФ при 293 К (рис. 2, а) имеет обычную для порфиринов колебательную структуру, которая лучше проявляется при 77 К (рис. 4). В данном случае правило Лёвшина нарушается по иной причине, чем у тетраазахлоринов; а именно, в связи с малостью интервала  $Q_2-Q_1$  и значительной шириной  $Q_2$  «конгломерата». В спектре флуоресценции в толуоле при 293 К заметно наложение ассоциированной формы (рис. 2, б).

Измерены низкотемпературные поляризационные спектры флуоресценции, т. е. зависимости степени поляризации флуоресценции  $P$  от длины волны возбуждающего света  $\lambda_{возб}$  (кривые 3 на рис. 3 и 4). Поляризационный спектр  $H_2Ph_4TAX^{mp}$  (рис. 3, кривая 3) имеет характерный для тетраазахлоринов вид: высокие положительные значения  $P$  в области 1-го электронного перехода, далее, с уменьшением  $\lambda_{возб}$ , переход в область отрицательных значений  $P$  с минимумом  $P$  в максимуме полосы поглощения  $Q_2$  (0–0), что подтверждает ее интерпретацию, рост  $P$  до близких к 0 значений, понижение до  $-0,02$  при 360 нм и рост до 0,16 при 315 нм. Минимальное значение  $P = -0,22$  при 553 нм достаточно близко к предельному значению  $P = -1/3$  для взаимно перпендикулярных осцилляторов поглощения и испускания, чтобы утверждать, что переход  $G \rightarrow Q_1$  поляризован перпендикулярно переходу  $G \rightarrow Q_2$ . Можно полагать, что возмущение, вносимое в сопряженную систему связей гидрированием пиррольного кольца, сильнее действия фенильных заместителей и симметрия сопряженной системы близка к  $C_{2v}$ . В этом случае, как следует из квантово-химических расчетов для  $H_2Ph_6TAX^{tm}$  [5] переход  $G \rightarrow Q_1$  поляризован по оси NH–NH (ось  $x$ ), а переход  $G \rightarrow Q_2$  поляризован по оси  $y$  ( $C_{2v}$ ). В области полосы Core длинноволновая компонента поляризована преимущественно по  $y$ , коротковолновая – по  $x$ . Необходимо отметить, что число электронных переходов, проявляющихся здесь, согласно расчетам, не два, а значительно больше.

Из рис. 4 видно, что поляризационный спектр  $H_2Ph_4TAP$  (кривая 3) как бы сглажен. В частности, максимуму полосы  $Q_2$  («конгломерата») соответствует минимальное значение  $P = -0,08$ , тоже отрицательное, но значительно меньшее по абсолютной величине, чем  $-0,22$ . Это должно быть обусловлено отличием угла между моментами переходов  $G \rightarrow Q_1$  и  $G \rightarrow Q_2$  от  $\pi/2$ . В соответствии со сказанным выше при отсутствии гидрированного пиррольного кольца нельзя ожидать приближенной взаимоперпендикулярности моментов этих переходов. К тому же при наличии в растворе нескольких структурных изомеров вклады отдельных изомеров будут усредняться.

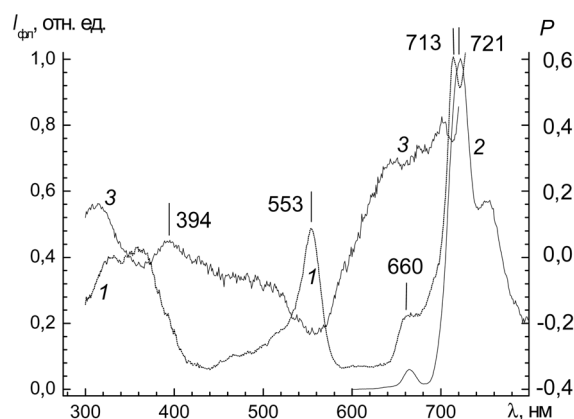


Рис. 3. Спектры раствора  $H_2Ph_4TAX^{mp}$  в МТГФ при 77 К: 1 – спектр возбуждения флуоресценции ( $\lambda_{пер} = 725$  нм); 2 – спектр флуоресценции ( $\lambda_{возб} = 545$  нм); 3 – поляризационный спектр флуоресценции ( $\lambda_{пер} = 725$  нм)

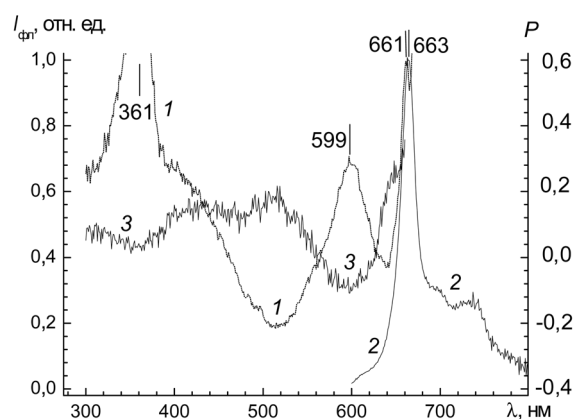


Рис. 4. Спектры раствора  $H_2Ph_4TAP$  в МТГФ при 77 К: 1 – спектр возбуждения флуоресценции ( $\lambda_{пер} = 670$  нм); 2 – спектр флуоресценции ( $\lambda_{возб} = 580$  нм); 3 – поляризационный спектр флуоресценции ( $\lambda_{пер} = 670$  нм)



При комнатной температуре измерены квантовые выходы флуоресценции ( $\phi_F$ ) исследованных растворов. В МТГФ у незамещенного  $H_2TAП$   $\phi_F$  выше, чем у тетрафенилзамещенного ( $H_2Ph_4TAП$ ). Для  $H_2TAX$  и его аналогов [4], наоборот,  $\phi_F$  ниже, чем у  $H_2Ph_4TAX$ . Значения  $\phi_F$  зависят также от растворителя (таблица) – в толуоле  $\phi_F$  выше, чем в МТГФ. Следует обратить внимание на то, что спектр флуоресценции  $H_2Ph_4TAX^{mp}$  расположен в ближней ИК области спектра (0–0 полоса при  $\lambda_F = 732$  нм), представляющей в настоящее время значительный интерес для исследователей в области молекулярной люминесценции. Значение  $\phi_F = 16\%$  у него достаточно высокое для поиска практических применений.

С целью оценки исследуемых соединений в качестве фотосенсибилизаторов образования синглетного кислорода нами были определены квантовые выходы фотосенсибилизированного образования синглетного кислорода ( $\phi_\Delta$ ). При измерениях квантового выхода генерации синглетного кислорода  $\phi_\Delta$  в качестве эталона использовался платиновый комплекс трибензотетраазахлорина в толуоле ( $\phi_\Delta^{эт} \approx 68\%$ ) [14]. Основные результаты измерений приведены в таблице, в которой они сопоставлены с фотофизическими характеристиками гидропорфиразинов, полученными в работах [4; 5], в том числе  $H_2Ph_8TAX^{mp}$  и  $H_2Ph_6TAX^{tm}$ , в молекулах которых к каждому негидрированному пиррольному кольцу присоединены по два фенила.

Из таблицы следует, что в результате тетрафенилзамещения для тетраазапорфина значения квантовых выходов флуоресценции и образования синглетного кислорода снижаются, а для тетраазахлорина, наоборот, повышаются и превышают значения, полученные авторами ранее для  $H_2Ph_8TAX^{mp}$  и  $H_2Ph_6TAX^{tm}$  [5]. Кроме того,  $\phi_\Delta$  значительно ниже для растворов в МТГФ, чем для растворов в толуоле. Так, при переходе от МТГФ к толуолу для  $H_2Ph_4TAП$  значения  $\phi_\Delta$  возрастают соответственно от 11 до 27%, для  $H_2Ph_4TAX^{mp}$  – от 14 до 67%.

Для  $H_2Ph_8TAX^{mp}$  и  $H_2Ph_6TAX^{tm}$  такие сильные различия не наблюдаются [5]. Интересно, что для  $H_2Ph_4TAX^{mp}$  и  $H_2Ph_8TAX^{mp}$  в толуоле (инертном, малополярном растворителе) значения  $\phi_\Delta$  близки к 70%. По-видимому, в обоих случаях взаимодействие сопряженных систем тетраазахлоринового макроцикла и фенилов одинаково влияет на вероятность интеркомбинационной конверсии  $S_1 \rightsquigarrow T_1$ .

**Заключение.** Изучено влияние монофенилзамещения в пиррольных кольцах макроцикла тетраазахлорина на спектры поглощения и флуоресценции, низкотемпературные поляризационные спектры, квантовые выходы флуоресценции и генерации синглетного кислорода. Параллельно исследован негидрированный аналог – тетрафенилтетраазапорфин. Сравнение с данными для соединений с дифенилзамещенными пиррольными кольцами [5; 6] показало, что присоединение второго фенила слабо влияет на положение полос  $Q_1$  и  $Q_2$  (небольшие батохромные сдвиги) и несколько больше – на полосу  $Soret$ . Эти факты объяснены на основе выполненных квантово-химических расчетов тем, что расширение сопряженной системы при присоединении второго фенила компенсируется ослаблением эффекта сопряжения вследствие увеличения двугранных углов между плоскостями макроцикла и фенила. Квантовый выход флуоресценции у  $H_2Ph_4TAX^{mp}$  в толуоле (16%) значительно выше, чем у незамещенного  $H_2TAX$  и несколько выше, чем у  $H_2Ph_8TAX^{mp}$ , а значения  $\phi_\Delta$  у обоих фенилзамещенных одинаковы и довольно велики (около 70%). Эти соединения могут найти практическое применение как поглотители и излучатели для ближней ИК области (710–750 нм).

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф13-087).

#### Список использованной литературы

1. Макарова, Е. А. Фталоцианины и родственные соединения XXXVI. Синтез тетраазахлорина и тетраазапорфина из сукцинонитрила / Е. А. Макарова, Г. В. Королева, Е. А. Лукьянец // Журн. общ. химии. – 1999. – Т. 69, № 8. – С. 1356–1361.
2. Макарова, Е. А. Синтез и некоторые свойства гидрированных производных тетраазапорфина / Е. А. Макарова, Е. А. Лукьянец // Успехи химии порфиринов. – СПб.: НИИ химии СПбГУ, 2007. – Т. 5. – С. 28–47.
3. Makarova, E. A. Design and synthesis of tetraazachlorins, tetraazabacteriochlorins, and tetraazaisobacteriochlorins / E. A. Makarova, E. A. Lukyanets // J. Porphyrins Phthalocyanines. – 2009. – Vol. 13, N 2. – P. 188–202.
4. Спектрально-люминесцентные свойства норборнено-замещенного тетраазахлорина и его металлокомплексов / М. В. Бельков [и др.] // Журн. прикл. спектр. – 2010. – Т. 77, № 2. – С. 230–240.

5. Флуоресценция и электронная структура молекул фенилзамещенных тетраазахлоринов / П. П. Першукевич [и др.] // *Опт. и спектр.* – 2014. – Т. 117, № 5. – С. 743–761.
6. Porphyrazines with Annulated Chalcogen-Containing Heterocycle: Study of Spectral-Luminescent Properties and Quantum-Chemical Calculations of the Excited Electronic States / K. N. Solovyov [et al.] // *Макрогетероциклы/Macroheterocycles.* – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 51–62.
7. *Friedman, M.* Octaarylporphyrins / M. Friedman // *J. Org. Chem.* – 1965. – Vol. 30, N 3. – P. 859–863.
8. Синтез и спектральные свойства комплексов железа с тетрафенилтетраазапорфином / П. А. Стужин [и др.] // *Коорд. химия.* – 1994. – Т. 20, № 6. – С. 444–448.
9. *Linstead, R. P.* Conjugated macrocycles. Part XXII. Tetrazaporphin and its metallic derivatives / R. P. Linstead, M. Whalley // *J. Chem. Soc.* – 1952. – P. 4839–4846.
10. *Ficken, G. E.* Conjugated macrocycles. Part XXIII. Tetracyclohexeno-tetrazaporphin / G. E. Ficken, R. P. Linstead // *J. Chem. Soc.* – 1952. – P. 4846–4854.
11. Тетраазахлорины как фотосенсибилизаторы для фотодинамической терапии: Патент РФ № 2278119 (2004) / С. В. Барканова, Г. И. Быстрицкий, Г. Н. Ворожцов, Т. А. Кармакова, Ю. М. Лужков, Е. А. Лукьянец, Е. А. Макарова, Н. Б. Морозова, Л. В. Умнова, Р. И. Якубовская // *Б. И.* – 2006. – № 17.
12. Влияние аннелирования бензольных колец на фотофизику и электронную структуру молекул тетраазахлоринов / Д. И. Волкович [и др.]. – Минск, 2015. – 37 с. – Препринт № 750 / Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси.
13. Spectral-luminescent and quantum-chemical study of azaporphyrin molecules / S. S. Dvornikov [et al.] // *J. Luminescence.* – 1981. – Vol. 23, N 3–4. – P. 373–392.
14. Фосфоресценция палладиевых и платиновых комплексов бензоконденсированных гидропорфиразинов / П. П. Першукевич [и др.] // *Журн. прикл. спектр.* – 2010. – Т. 77, № 6. – С. 852–865.

*Поступило в редакцию 12.10.2015*

УДК 533.951; 537.872.3

*В. И. АРХИПЕНКО<sup>1</sup>, Е. З. ГУСАКОВ<sup>2</sup>, Л. В. СИМОНЧИК<sup>1</sup>, А. В. ТОМОВ<sup>3</sup>,  
Ф. М. ТРУХАЧЕВ<sup>4</sup>, И. А. ЧЕРКАСОВА<sup>4</sup>*

### **ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ МОД АБСОЛЮТНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ РАСПАДНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ НА НЕЛИНЕЙНОЙ СТАДИИ**

*(Представлено академиком В. С. Бураковым)*

<sup>1</sup>*Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
arkhip@imaph.bas-net.by; l.simonchik@ifanbel.bas-net.by*

<sup>2</sup>*Физико-технический институт РАН, Санкт-Петербург, Россия  
Evgeniy.Gusakov@mail.ioffe.ru*

<sup>3</sup>*Могилевский государственный университет, Могилев, Беларусь  
alextom@yandex.ru*

<sup>4</sup>*Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь  
ftru@mail.ru; cherkasova.ir.an@gmail.com*

Создана математическая модель, описывающая нелинейную абсолютную параметрическую неустойчивость в неоднородной плазме. Подробно рассмотрен распад ленгмюровской волны накачки на ленгмюровскую и ионно-звуковую волны. Получены численные решения, описывающие собственные моды неустойчивости. Показано, что в нелинейной стадии неустойчивости наблюдается истощение накачки и уширение спектра ионно-звуковой волны. Результаты численных расчетов согласуются с экспериментальными результатами.

*Ключевые слова:* параметрическая неустойчивость, распадные условия, собственные моды неустойчивости, неоднородная плазма, ленгмюровская волна.

*V. I. ARKHIPENKO<sup>1</sup>, E. Z. GUSAKOV<sup>2</sup>, L. V. SIMONCHIK<sup>1</sup>, A. V. TOMOV<sup>3</sup>, F. M. TRUHACHEV<sup>4</sup>, I. A. CHERKASOVA<sup>4</sup>*

### **NUMERICAL SOLUTIONS FOR THE EIGEN MODES OF THE ABSOLUTE DECAY PARAMETRIC INSTABILITY OF INHOMOGENEOUS PLASMA AT THE NONLINEAR STAGE**

<sup>1</sup>*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
arkhip@imaph.bas-net.by; l.simonchik@ifanbel.bas-net.by*

<sup>2</sup>*Physical-Technical Institute of Russian Academy of Sciences, St-Petersburg, Russia  
Evgeniy.Gusakov@mail.ioffe.ru*

<sup>3</sup>*Mogilev State University, Mogilev, Belarus  
alextom@yandex.ru*

<sup>4</sup>*Belarusian-Russian University, Mogilev, Belarus  
ftru@mail.ru; cherkasova.ir.an@gmail.com*

A mathematical model for the nonlinear absolute decay parametric instability of inhomogeneous plasma is developed. Decay of the Langmuir pump wave on the Langmuir and ion-acoustic waves is considered in detail. The numerical solutions describing the eigen modes of the instability are obtained. It is shown that at the nonlinear stage of the instability, a depletion of a pump wave and a broadening of an ion-acoustic wave spectrum are observed. The simulation results are in agreement with the experimental ones.

*Keywords:* parametric instability, decay conditions, eigenmodes of instability, inhomogeneous plasma, Langmuir wave.

**Введение.** Параметрические распадные неустойчивости играют важную роль в динамике плазмы. В частности, они могут существенно влиять на процесс нагрева плазмы электромагнитным излучением. Зачастую параметрические распадные неустойчивости приводят к аномальному отражению греющей мощности и, следовательно, к уменьшению эффективности нагрева. В некоторых случаях, напротив, неустойчивости могут выступать в роли посредника при пере-

даче энергии в отдельные области плазмы. Можно выделить два режима неустойчивости в неоднородной плазме: конвективный и абсолютный. Конвективный режим представляет собой параметрическое усиление собственных плазменных шумов. Режим абсолютной неустойчивости реализуется на базе конвективного усиления при возникновении положительной обратной связи и характеризуется экспоненциальным нарастанием плазменных шумов во времени. Как правило, абсолютная неустойчивость обладает узким частотным спектром и насыщается за счет нелинейных волновых процессов, причем на практике это часто приводит к истощению греющей волны (волны накачки).

Теория конвективной параметрической распадной неустойчивости неоднородной плазмы была развита в 1970-е годы в работах А. Д. Пилюя и учеников. В [1] построена нестационарная теория конвективной параметрической распадной неустойчивости в неоднородной плазме в предположении заданной волны накачки. Задача решена для двух связанных волновых уравнений, описывающих две дочерние волны. В двухволновой постановке задачи наблюдается рост амплитуды дочерних волн по экспоненциальному закону, ограниченный только выносом энергии из точки распада дочерними волнами. В результате был определен инкремент начального роста неустойчивости и уровень его насыщения за счет конвективного выноса энергии, определяющий значение коэффициента конвективного усиления. Однако на практике часто часть энергии, вынесенной из области распада, возвращается и при этом возбуждается абсолютная неустойчивость. Теоретическая модель абсолютной параметрической неустойчивости, в которой такое возвращение энергии происходит из-за модуляции фазы взаимодействующих волн длинноволновой турбулентностью, была предложена в [2], где был получен ряд частных решений для собственных мод. Тем не менее, анализ насыщения неустойчивости на нелинейной стадии в [2] не проводился. Необходимо отметить также, что исчерпывающей нелинейной теории насыщения абсолютных параметрических распадных неустойчивостей на сегодняшний момент не существует. Одним из нелинейных механизмов насыщения роста амплитуд дочерних волн является истощение волны накачки. В [3] представлен анализ влияния этого механизма на конвективную параметрическую неустойчивость в трехволновой постановке задачи. К уравнениям для дочерних волн добавлено уравнение для волны накачки конечной амплитуды. Показано, что при достижении определенного порога по амплитудам дочерних волн наблюдается истощение накачки, а рост амплитуд дочерних волн насыщается. Аналитические решения являются асимптотическими и не описывают эволюцию волн в окрестности точки распада. Тем не менее, аналитических решений нелинейной задачи, описывающей абсолютную неустойчивость при конечной мощности накачки, к настоящему времени не существует. С другой стороны, для корректной интерпретации многих экспериментальных данных [4; 5] требуется именно нелинейная модель абсолютной параметрической неустойчивости.

В настоящей работе создана математическая модель, описывающая нелинейную абсолютную параметрическую неустойчивость в неоднородной плазме, а также получены численные решения, описывающие собственные моды неустойчивости.

**Теоретическая модель.** Рассмотрим одномерную задачу воздействия электромагнитного излучения на пространственно-неоднородную плазму. Электрическое поле волны накачки вызывает модуляцию параметров плазмы. Если амплитуда волны превышает некоторое пороговое значение, то происходит раскачка собственных колебаний плазмы, частоты, волновые вектора которых связаны с соответствующими величинами волны накачки условиями параметрического резонанса:  $k_0 = k_1 + k_2$ ,  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ , где  $k_j$ ,  $\omega_j$  – проекции волновых векторов взаимодействующих волн на направление неоднородности и их частоты. Положим  $j = 0$  для ленгмюровской волны накачки,  $j = 1, j = 2$  для дочерних волн – ленгмюровской и ионно-звуковой соответственно. Описать взаимодействие волн можно посредством трех волновых уравнений согласно [2]:

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} + v_1 a_1 = i\gamma_0 a_0 a_2^* e^{i\Phi(x,t)}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial t} - v_2 \frac{\partial a_2}{\partial x} + v_2 a_2 = i\gamma_0 a_0 a_1^* e^{i\Phi(x,t)} + S_2(x), \quad (2)$$

$$\frac{\partial a_0}{\partial t} - v_1 \frac{\partial a_0}{\partial x} + v_1 a_0 = i\gamma_0 a_1 a_2 e^{-i\Phi(x,t)}, \quad (3)$$

где  $a_0, a_1, a_2, v_1, v_2$  – комплексные амплитуды и скорости взаимодействующих волн ( $v_0 = v_1$ ),  $v_1, v_2$  – коэффициенты затухания волн;  $\gamma_0$  – инкремент неустойчивости в однородной плазме. Символ «\*» обозначает комплексное сопряжение. Для моделирования фоновых ионно-звуковых шумов в уравнение (2) введена функция  $S_2(x)$ . Функция  $\Phi(x, t) = x^2 / 2\ell^2$  характеризует набег фаз, связанный с неоднородностью плазмы в окрестности области параметрического резонанса;

$\ell = \left| \frac{d}{dx}(k_1 - k_0 - k_2) \right|_{x=x_0}^{-1/2}$  – масштаб неоднородности плазмы. При решении системы (1)–(3) удобно использовать безразмерные величины  $t = t v_1 / \ell, v_2 = v_2 / v_1, x = x / \ell$ . Уравнения (1)–(3), описывающие нелинейную конвективную неустойчивость [3], легко обобщить на случай абсолютной неустойчивости, модифицировав, в соответствии с [2], выражение для набега фаз

$$\Phi(x, t) = \frac{x^2}{2\ell^2} + \frac{K}{\chi} \cos(kx), \quad (4)$$

где  $\chi$  определяет размер петли обратной связи, а  $K$  – глубину обратной связи. Решение системы (1)–(3) с учетом (4) отражает эволюцию волн, участвующих во взаимодействии, и позволяет найти основные параметры абсолютной неустойчивости, в частности инкремент. Аналитические решения рассматриваемой системы к настоящему времени неизвестны, поэтому численное ее интегрирование будет уместным и полезным.

Все вычисления проведем в рамках прямой конечно-разностной схемы с учетом критерия сходимости Куранта–Фридрихса–Леви. Точку параметрического резонанса поместим около центра пространственной области интегрирования, а источник накачки – около правой границы так, чтобы накачка распространялась к центру. Будем считать, что волны, дошедшие до границ области интегрирования, затухают. Начальные условия зададим в виде ионно-звуковой волны  $a_2(x)$  на собственных частотах неустойчивости. В простейшем случае  $a_2(x)$  можно представить в виде гармонической функции

$$a_2(x) = a_{02} \exp\left(ix \frac{\omega_n}{v_2}\right). \quad (5)$$

Здесь  $\omega_n = (2\pi n + \delta\phi) / \alpha\chi$  – частота  $n$ -й собственной моды [3],  $\alpha = 1 - v_1 / v_2$ ;  $a_{02}$  – начальная амплитуда ионно-звуковой волны;  $\delta\phi$  – малая добавка, которой можно пренебречь [3].

Найдем далее положение параметрического резонанса для различных собственных мод. Частоты дочерних волн определим согласно:  $\omega_1 = \omega_{01} + \omega_n, \omega_2 = \omega_{02} + \omega_n$ , где  $\omega_{01}, \omega_{02}$  – частоты дочерних волн для основной моды. Тогда

$$\begin{aligned} k_1 &= (\omega_{01} + \omega_n) / v_1 = k_{01} + k'_1, \\ k_2 &= (\omega_{02} + \omega_n) / v_2 = k_{02} + k'_2, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $k_{01}, k_{02}$  – волновые числа дочерних волн для основной моды. Резонансное условие для собственных мод можно записать в виде

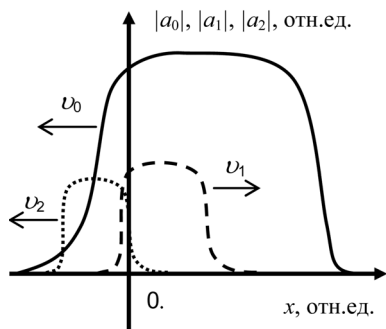


Рис. 1. Структура моделируемой параметрической неустойчивости

или

$$k_1 + k_2 = k_0$$

учитывая, что  $k_1' + k_2' = k_0 - (k_1' + k_2')$ , получим

$$k_1' + k_2' = x / \ell^2$$

или учитывая (6)

$$\omega_n (-1 / v_1 + 1 / v_2) = x / \ell^2$$

откуда

$$x(\omega_n) = \ell^2 \omega_n (-1 / v_1 + 1 / v_2), \quad (7)$$

вводя нормировку для (7)  $\ell^2 \omega_n / \nu_1 = (2\pi n + \delta\phi) / \alpha \chi$ , окончательно получим

$$x(\omega_n) = (2\pi n + \delta\phi) / \chi.$$

**Результаты численного интегрирования.** Схематично структура неустойчивости представлена на рис. 1. Дочерние волны начинают возбуждаться в окрестности точки параметрического резонанса ( $x = 0$ ) за счет энергии волны накачки, направление распространения взаимодействующих волн указано стрелками.

*Линейная задача.* В линейной постановке задачи при бесконечной мощности накачки собственные моды неустойчивости возбуждаются независимо. На рис. 2 представлены зависимости амплитуд дочерних ленгмюровских волн для мод с номерами 1 и 2, полученные в результате численного интегрирования. Начальные условия заданы в соответствии с (5), где  $n = 1, n = 2$ , остальные параметры таковы:  $\gamma_0 = 0,7, \nu_1 = 1, \nu_2 = 0,2, \ell = 1, \nu_1 = 0, \nu_1 = 0,5, k = 2,5, K = 0,1$ .

Из рис. 2 видно, что в случае абсолютной неустойчивости реализуется циклический рост амплитуды дочерних волн (отображено два цикла), что связано с движением волн внутри петли обратной связи. Рост амплитуды дочерних волн происходит неограниченно по экспоненциальному закону. Кроме того, точки параметрического резонанса сдвинуты в пространстве в соответствии с (7). В линейной постановке задачи спектр неустойчивости содержит преимущественно собственные частоты, которые были заданы в начальных условиях (5). Действительно, если рост амплитуды волн неограничен, то неустойчивость будет развиваться на частотах с наибольшим инкрементом, т. е. если неустойчивость начала развиваться на  $n$ -й собственной моде в соответствии с (5), то именно эта частота и будет доминировать в спектре. Обогащение спектра гармониками не наблюдается.

*Нелинейная задача.* Ограничение мощности накачки в значительной мере преобразует характер неустойчивости. В этом случае следует ожидать насыщения неустойчивости за счет истощения накачки. На рис. 3 представлена эволюция неустойчивости от начала ее развития (когда накачка доходит до области резонанса) и до момента насыщения, когда наблюдается истощение накачки и насыщения роста дочерних волн (показана только ионно-звуковая волна).

Как видно на рис. 3, развитие неустойчивости проявляется в росте амплитуды дочерних волн, когда накачка достигает области распада. По мере роста амплитуд дочерних волн наблюдается истощение накачки, что хорошо согласуется с экспериментальными данными [6]. Нелинейность неустойчивости также проявляется в обогащении спектра неустойчивости модами, которые отсутствовали в начальных условиях. На рис. 4 представлен спектр неустойчивости в сравнении со спектром собственных мод (5). Первоначально неустойчивость развивалась на

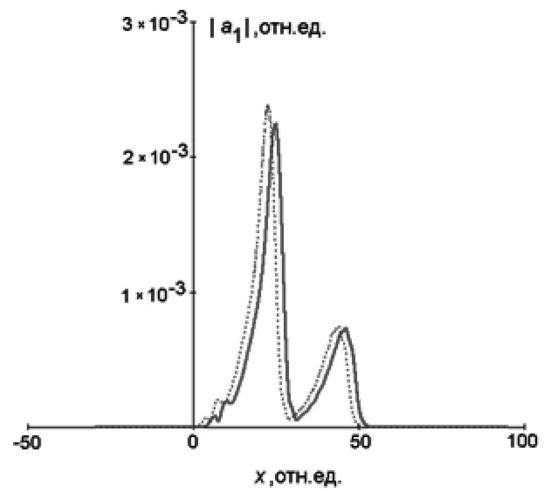


Рис. 2. Модуль амплитуд волн  $a_1$ , при  $t = 40$  отн. ед., в линейной постановке задачи: мода 1 – пунктирная кривая; мода 2 – сплошная кривая

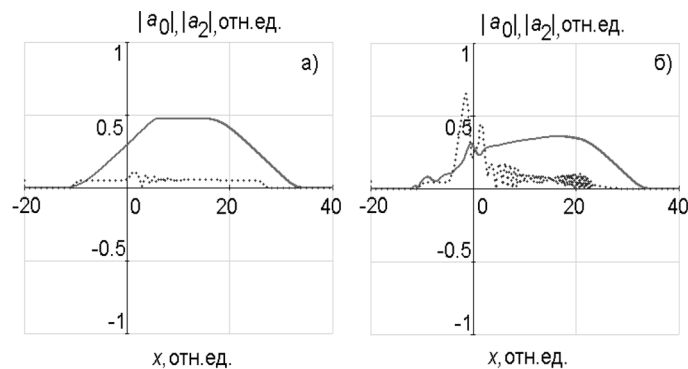


Рис. 3. Эволюция взаимодействующих волн  $a_0$  и  $a_2$ ;  $a - t = 23$  отн. ед.;  $b - t = 43$  отн. ед.



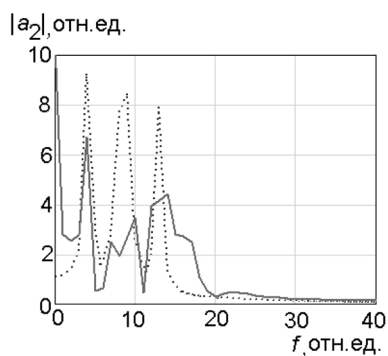


Рис. 4. Спектр ионно-звуковой волны, совмещенный со спектром собственных мод ионно-звуковой волны при  $t = 133$  отн. ед.: собственные моды – пунктирная кривая; дочерняя волна – сплошная кривая

нулевой моде в соответствии с начальным условием (5), по мере насыщения ее спектр начинает обогащаться модами высших порядков, что также хорошо согласуется с экспериментальными данными [7].

**Закключение.** Построена численная модель нелинейной абсолютной параметрической неустойчивости в неоднородной плазме. Получены численные решения для собственных мод неустойчивости. Показано, что в нелинейной постановке задачи абсолютная неустойчивость приводит к истощению накачки. Найден спектр неустойчивости, который состоит преимущественно из ее собственных мод. В нелинейном случае наблюдается обогащение спектра собственными частотами, отсутствующими в начальном условии. Результаты численных расчетов хорошо согласуются с экспериментальными и будут использованы для развития теории параметрических неустойчивостей, а также для повышения эффективности нагрева плазмы электромагнитным излучением.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта БРФФИ–РФФИ (Ф14Р-047, 14-02-90003).

### Список использованной литературы

1. Пилия, А. Д. Нестационарная теория распадной неустойчивости в слабонеоднородной плазме / А. Д. Пилия // ЖЭТФ. – 1973. – Т. 64, № 4. – С. 1237–1244.
2. Гусаков, Е. З. Параметрические неустойчивости неоднородной плазмы в присутствии длинноволновых низкочастотных колебаний / Е. З. Гусаков, А. Д. Пилия // Физика плазмы. – 1980. – Т. 6. – С. 509–519.
3. Gusakov, E. Z. Nonlinear stage of the three-wave parametric interaction in an inhomogeneous medium / E. Z. Gusakov, A. N. Savel'ev // JETP. – 1988. – Vol. 67, N 4. – P. 698–705.
4. Suppression and Feedback Control of Anomalous Induced Backscattering by Pump-Frequency Modulation / V. I. Arkhipenko [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2008. – Vol. 101. – P. 175004.
5. Absolute parametric decay instability control by the complementary pump / V. I. Arkhipenko [et al.] // European Physical Letters. – 2011. – Vol. 93. – P. 25001.
6. Ограничение генерации быстрых электронов за счет параметрического отражения греющей волны / В. И. Архипенко [и др.] // Письма в ЖТФ. – 1986. – Т. 12, № 49. – С. 1190–1194.
7. Экспериментальное исследование абсолютной параметрической неустойчивости неоднородной плазмы / В. И. Архипенко [и др.] // ЖЭТФ. – 1987. – Т. 93, № 10. – С. 1221–1234.

Поступило в редакцию 05.10.2015



УДК 544.272

Д. В. ШАХНО<sup>1</sup>, О. В. ШАХНО<sup>2</sup>**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО С МАТРИЦЕЙ ПЕРЕХОДА  
ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЖИДКОСТЕЙ РАЗЛИЧНОЙ СЛОЖНОСТИ  
ПРИ НИЗКОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ**

(Представлено академиком В. С. Солдатовым)

<sup>1</sup>Институт физико-органической химии НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
shahnodima@mail.ru<sup>2</sup>Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
shahno1990@mail.ru

Предложена принципиально новая методика эффективного использования многопроцессорных систем для расчета свойств жидкости методом Монте-Карло с матрицей перехода, позволяющая снизить реальное время расчета в десятки раз. Данная методика расширяет интервал моделирования равновесия «жидкость–пар» в сторону низких температур, для которых расчет с помощью стандартного подхода невозможен.

*Ключевые слова:* компьютерное моделирование, метод Монте-Карло, параллельные вычисления, равновесие жидкость–газ.

D. V. SHAKHNO<sup>1</sup>, A. V. SHAKHNO<sup>2</sup>**APPLICATION OF THE TRANSITION MATRIX MONTE CARLO TECHNIQUE  
TO SIMULATE DIFFERENT-COMPLEXITY LIQUIDS AT LOW TEMPERATURE**<sup>1</sup>Institute of Physical Organic Chemistry of the National Academy of Sciences of Belarus  
shahnodima@mail.ru<sup>2</sup>Belarusian State University, Minsk, Belarus  
shahno1990@mail.ru

A new original method has been proposed for effective use of multi-core systems to simulate liquid properties by the transition matrix Monte Carlo technique. The calculation real time has been reduced substantially. The technique proposed has extended a simulation range of “liquid–vapor” equilibrium to low temperatures, at which simulations by a standard approach are impossible.

*Keywords:* computer simulation, Monte Carlo method, parallel modeling, vapor-liquid equilibrium.

**Введение.** Метод Монте-Карло (МК) – это общее название группы численных математических методов, основанных на постоянном использовании генератора случайных чисел. Метод МК используется в различных областях математики, физики, химии, биологии. В применении к молекулярному моделированию сущность метода Монте-Карло заключается в следующем [1]: значения свойств системы определяются с помощью усреднения значения данного свойства по большому числу сгенерированных микросостояний. Надо учитывать, что метод Монте-Карло может быть использован для определения только равновесных свойств систем [2].

Метод Монте-Карло с матрицей перехода (МКМП) – это сравнительно новый метод, который был разработан для высокоэффективного моделирования свойств жидкостей [2; 3]. В отличие от метода ансамблей Гиббса [4], в котором различные фазы моделируются одновременно в отдельных ящиках, в методе МКМП для моделирования используется только один ящик. В данном методе принципиальное значение для термодинамического описания однокомпонентной системы имеет функция плотности вероятности  $\Pi(N, \mu, V, T)$ , которая показывает вероят-

ность нахождения  $N$  молекул в системе объемом  $V$  при фиксированной температуре  $T$  и химическом потенциале  $\mu$ .

При фиксированном химическом потенциале  $\mu$ , температуре  $T$  и объеме  $V$  моделирование методом МКМП включает в себя два основных типа пробных перемещений: перемещение частиц в пределах ящика и добавление/изъятие частицы из ящика. Добавление/изъятие частицы отражает тот факт, что система находится в контакте с внешней средой [2; 3].

В целом метод МКМП нашел множество применений. Его используют для определения свойств чистых жидкостей и многокомпонентных растворов, констант Генри [5], изучения процессов смачивания поверхностей [6], построения изотерм адсорбции [7], исследования свойств растворов белка [8], построения диаграмм сосуществования фаз для многокомпонентных систем [9]. Тем не менее, пока методом МКМП были исследованы модели только относительно простых моделей жидкостей. Такая же ситуация имела место для метода ансамблей Гиббса, когда он только появился [2].

Задача любой сложности, решаемая с помощью метода ансамблей Гиббса, может быть смоделирована с использованием метода МКМП, поскольку эти методы имеют один и тот же основополагающий набор пробных перемещений, за исключением изменения объема ящика в методе ансамблей Гиббса [2]. Перемещение типа добавление/изъятие частицы в методе МКМП аналогично перемещению частиц между ящиками в методе ансамблей Гиббса. Метод ансамблей Гиббса и МКМП дают результаты, сходящиеся в пределе погрешностей методов. Однако погрешность метода МКМП в большинстве случаев ниже, чем погрешность метода ансамблей Гиббса. Метод ансамблей Гиббса дает меньшую погрешность только в случае достаточно сложных молекул при низкой температуре [2].

Высокая погрешность метода МКМП при низкой температуре или в случае сложных молекул связана со снижением вероятностей добавления/изъятия молекул и может привести к невозможности расчета свойств жидкости (в процессе расчета система не может перейти в состояние с большим числом частиц).

Цель работы – разработка методики расчета равновесия «жидкость–газ» в рамках метода Монте-Карло с матрицей перехода для систем различной сложности при низких температурах.

**Методы и алгоритмы расчетов.** При использовании метода МКМП рассчитываются вероятности добавления/изъятия частиц. Фактический расчет вероятности перехода  $P(N, \pm 1)$  из системы с числом частиц  $N$  в состояние с числом частиц большим или меньшим на 1 происходит за счет накопления информации о вероятностях принятия перемещения  $p_a$  в так называемой накопительной матрице  $C$ . Для любого пробного перемещения два элемента указанной матрицы обновляются одновременно:

$$C(N, \pm 1) = C(N, \pm 1) + p_{a(\pm 1)}; \quad (1)$$

$$C(N, 0) = C(N, 0) + p_{a(0)}. \quad (2)$$

Вероятность принятия перемещения, соответствующая добавлению или изъятию частицы  $p_a$ , определяется как

$$p_a = \min \left( 1, \frac{\pi_n}{\pi_o} \right), \quad (3)$$

где  $\pi_o$  и  $\pi_n$  – вероятности нахождения системы в старой «о» и новой «n» конфигурациях соответственно. Отношение данных вероятностей рассчитывается из распределения Гиббса. Добавка в (3) множителя  $\Pi[N_o] / \Pi[N_n]$  – главная идея метода МКМП. Такое добавление множителя приводит к тому, что расчет будет производиться не только для наиболее вероятного числа частиц. Модифицированная функция  $\text{acc}(o \rightarrow n)$  равна вероятности принятия перемещения добавления/изъятия и рассчитывается следующим образом:

$$\text{acc}(o \rightarrow n) = \min \left\{ 1, \frac{\Pi[N_o] \pi_n}{\Pi[N_n] \pi_o} \right\}.$$

В целом вероятность перехода  $P(N, \pm 1)$  рассчитывается из накопленной информации и соответствует элементу  $C(N, \pm 1)$ , нормированному следующим образом:

$$P(N, \pm 1) = \frac{C(N, \pm 1)}{\sum_{j=-1}^{+1} C(N, j)}.$$

Поскольку  $N$  дискретно и все время меняется на единицу, плотность вероятности  $\Pi(N)$  непосредственно вычисляется с использованием следующего соотношения:

$$\ln \Pi(N+1) = \ln \Pi(N) + \ln \frac{P(N, +1)}{P(N+1, -1)}.$$

Для того чтобы вышеописанная схема была эффективной,  $N$  обязательно должно охватывать широкий диапазон значений (соответствующий как фазе газа, так и фазе жидкости).

Конечным итогом симуляции является функция плотности вероятности  $\Pi(N; \mu, V, T)$ . В общем случае заданный химический потенциал не соответствует равновесному  $\mu_{\text{равн}}$  при заданной температуре. Для нахождения свойств с использованием функции  $\Pi(N; \mu, V, T)$  необходимо найти значение равновесного химического потенциала  $\mu_{\text{равн}}$ . Это можно сделать с использованием процедуры расширения результатов моделирования [10]. Возможно проведение такой процедуры для пересчета либо к другому химическому потенциалу, либо к другой температуре.

В ходе расширения результатов моделирования по химическому потенциалу функция  $\Pi(N; \mu)$  меняется следующим образом:

$$\ln \Pi(N; \mu) = \ln \Pi(N; \mu_0) + \beta(\mu - \mu_0)N,$$

где  $\mu_0$  – первоначально заданный химический потенциал;  $\beta = 1 / T$  – обратная температура.

Равновесный химический потенциал  $\mu_{\text{равн}}$  находится из условия равенства площадей под пиками функции  $\Pi(N; \mu)$ , соответствующими газовой и жидкой фазам.

Равновесное давление рассчитывается по следующей формуле:

$$\beta PV = -\ln \left[ 2 \frac{\Pi(0, \mu_{\text{равн}})}{\sum_{N=0}^{N_{\text{max}}} \Pi(N, \mu_{\text{равн}})} \right].$$

Расширение результатов моделирования по температуре заключается в пересчете вероятности реализации каждого полученного в процессе моделирования микросостояния при одной температуре к другой. Для такого расчета необходимыми данными являются значения энергии каждого отдельного микросостояния [6]. В ходе данной процедуры функция  $\Pi(N, E; \mu, \beta)$  пересчитывается по следующей формуле:

$$\Pi(N, E; \mu, \beta) = \Pi(N, E; \mu_0, \beta_0) \exp[(\beta \mu - \beta_0 \mu_0)N - E(\beta - \beta_0)],$$

где  $\beta_0$  и  $\mu_0$  относятся к проведенному расчету, а  $\beta$  и  $\mu$  – к желаемой гистограмме.

Для повышения точности расширения результатов расчета по температуре применяется метод объединения нескольких гистограмм, в котором получают объединенную функцию распределения вероятностей  $\Pi_c(N, E; \mu, \beta)$ . Такое объединение осуществляется по следующей формуле [11]:

$$\Pi_c(N, E; \mu, \beta) = \frac{\sum_{i=1}^R f_i(N, E) \Pi_i(N) \exp[-\beta E + \beta \mu N]}{\sum_{i=1}^R \exp[-\beta_i E + \beta_i \mu_i N]},$$

где  $R$  – число объединяемых гистограмм.

Для расчетов ММК была выбрана программа Towhee версии 7.0. Данная программа имеет следующие преимущества: возможность расчетов в различных ансамблях (в том числе и в большом каноническом ансамбле с использованием метода МКМП); легкое переключение между различными силовыми полями; открытый код.

Параметры проведенных расчетов представлены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1. Параметры проведения расчетов равновесия «жидкость–пар» для различных систем

Вещество	$N_{\max}$	Силовое поле	$l_{\text{ящика}}, \text{ \AA}$	$T, \text{ K}$	$\mu, \text{ K}$	Методика		
						Стандартная	Разбиение	Расширение по температуре
Kr	320	OPLS [12]	25	80	-1475	+	+, предельное	-
	300			90	-1535	+	-	+
	300			120	-1720	+	+	+
	300			160	-2140	+	-	+
N <sub>2</sub>	160	TraPPE [13]	20	77,4	-950	+	+, предельное	-
C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	100	OPLS-AA [14]	20	184,29	9070	+	предельное	+

**Результаты и их обсуждение.** Для проведения процедуры расширения результатов моделирования по температуре необходим расчет функции плотности вероятности  $\Pi(N, \mu_0)$  и энергии каждого посещенного микросостояния. Программа Towhee в качестве выходных данных дает  $\ln\Pi(N, \mu_0)$  и в обычном варианте усредненное значение энергии по блокам из заданного числа шагов. Для того чтобы получить энергию каждого микросостояния длина блока была задана в 1 шаг. Однако при таком частом выводе блоков, выходной файл не может вместить сразу весь расчет длиной порядка 100 млн шагов (1 блок  $\approx$  1 кбайт). В связи с этим был предложен алгоритм для проведения процедуры расширения результатов моделирования по температуре, заключающийся в циклическом запуске программы Towhee (в данной работе по 20000 шагов). После завершения одного цикла программы из выходного файла извлекались значения энергии состояний с заданным числом частиц и записывались в соответствующие файлы энергий. После извлечения необходимых данных выходной файл удалялся и программа перезапускалась, используя конечную конфигурацию системы в качестве начального состояния на новом цикле. Результатом расчета является файл, содержащий значения энергии для всех посещенных состояний.

С помощью предложенного алгоритма было проведено расширение результатов моделирования по температуре для криптона. В результате расчеты показали, что эффективный диапазон данной процедуры, произведенной из одного расчета, не превышает  $\pm 40 \text{ K}$ ; для Kr достаточно трех расчетов ( $T = 90; 120$  и  $160 \text{ K}$ ), чтобы с использованием данной процедуры, проводимой способом объединения гистограмм, получить значения плотностей и давлений насыщенного пара в температурном интервале от 90 до 200 K (т. е. в доступном для расчета стандартным методом МКМП). Отклонение давления насыщенного пара при объединении гистограмм не превышало 0,7 %, а плотности жидкости – 0,2 %.

Таким образом, используя процедуру расширения результатов моделирования по температуре, можно сократить количество расчетов для получения термодинамических свойств веществ в широком температурном диапазоне.

Одной из проблем любых расчетов методами молекулярного моделирования является ограниченная производительность компьютеров, что приводит к тому, что даже расчеты не самых сложных систем длятся месяцами. В связи с этим для экономии реального времени расчета было предложено разбиение расчета на несколько независимых подзадач. В каждой отдельной подзадаче рассчитывалась  $P(N, +1) / P(N + 1, -1)$  для интервала  $a(i - 1) - ai$  частиц, где  $a$  – ширина интервала;  $i$  – номер подзадачи. Для проверки предложенного метода был проведен расчет для Kr (30 подзадач).

На рис. 1 представлены зависимости  $\ln\Pi(N, \mu_{\text{равн}})$  от  $N$ , кривая 1 получена стандартным способом, кривая 2 – с использованием методики разбиения. Полученные данные (рис. 1) показывают, что в системе присутствует жидкая (правее минимума) и газообразная (левее минимума)

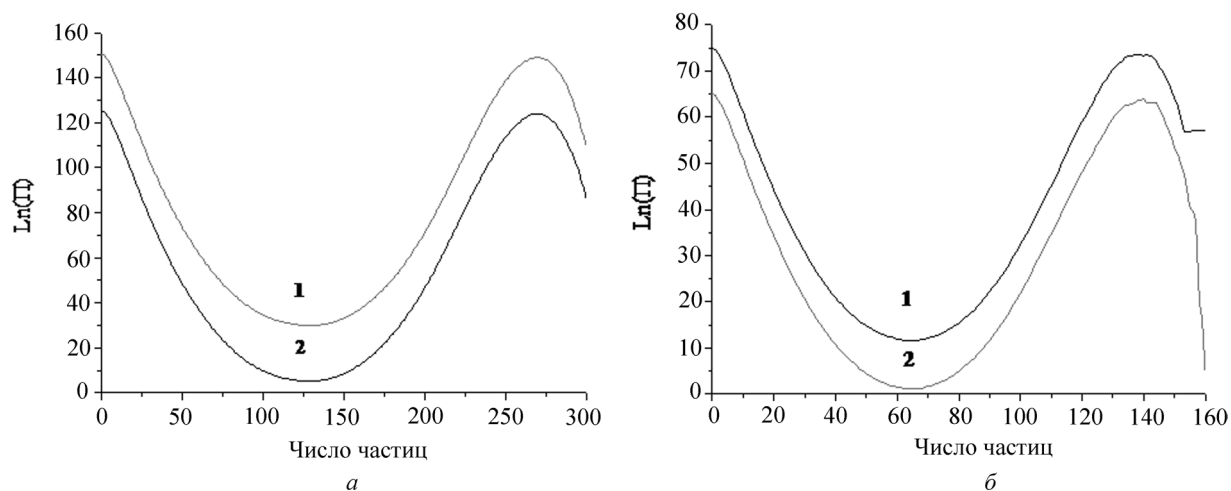


Рис. 1. Зависимости  $\ln(P, \mu_{\text{sat}})$  от  $N$ , полученные с помощью стандартного метода (1) и метода разбиения (2).  
 а – Kr (на 30 подзадач), б –  $N_2$  (на предельное число подзадач)

фазы, полученные данные позволяют рассчитать равновесное давление и плотности жидкой и газовой фазы. Для стандартной и предложенной методики не различаются (в пределе погрешности) функции плотности вероятности и рассчитанные для Kr свойства.

Предложенная методика позволяет сократить реальное время расчета в десятки раз, сохраняя при этом точность расчета. Кроме того, время расчета можно дополнительно сократить и за счет изменения интервалов разбиения. В табл. 2 представлена зависимость относительного времени расчета ( $t_i / t_1$ ) от номера подзадачи. Как видно из приведенных данных, время расчета увеличивается с ростом числа частиц в 4 раза. Для оптимизации разбиения необходимо разбивать задачу на интервалы разного размера, добиваясь приблизительно равного времени расчета в каждом интервале (чем меньше частиц, тем больше интервал).

Т а б л и ц а 2. Зависимость относительного времени расчета ( $t_i / t_1$ ) от диапазона изменения числа частиц (в  $i$ -ом расчете от  $10(i-1)$  до  $10i$  частиц)

Номер расчета	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Относительное время расчета, $t_i / t_1$	1,00	1,19	1,19	1,43	1,50	1,57	1,74	1,83	2,00	2,03
Номер расчета	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Относительное время расчета, $t_i / t_1$	2,07	2,16	2,34	2,36	2,45	2,57	2,72	2,66	2,93	2,99
Номер расчета	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Относительное время расчета, $t_i / t_1$	2,92	3,02	3,05	3,25	3,23	3,35	3,51	3,62	3,76	3,83

В предельном случае разбиение можно свести к расчетам с фиксированным числом частиц в каждой подзадаче. При таком подходе расчет разбивается на  $N_{\text{max}} + 1$  независимых подзадач. Постоянство частиц (от 0 до  $N_{\text{max}}$ ) в каждой подзадаче обеспечивается тем, что пробные перемещения не могут быть приняты, при этом вероятности добавления  $P(N, +1)$  и изъятия  $P(N, -1)$  частицы рассчитываются. После определения  $P(N, +1)$  и  $P(N, -1)$  для всех  $N$  гистограмму находят в соответствии с уравнением.

Результаты расчета с помощью методики предельного разбиения в сравнении со стандартной методикой приведены на рис. 1, б. Свойства, рассчитанные из приведенных функций плотности вероятности, сходятся в пределе погрешности, однако методика предельного разбиения позволяет рассчитать функцию плотности вероятности для большего числа частиц. Даже для азота при температуре 77,9 К стандартный метод не смог рассчитать функцию плотности вероятности для  $N$  больше чем 152 (выход на постоянное значение кривой 1 на рис. 1, б). Ситуация усугубляется при понижении температуры или в случае больших молекул.

С целью проверки работы методики предельного разбиения при низких температурах были рассчитаны свойства Kr при 80 К (рис. 2). Так, с использованием стандартной методики расчета

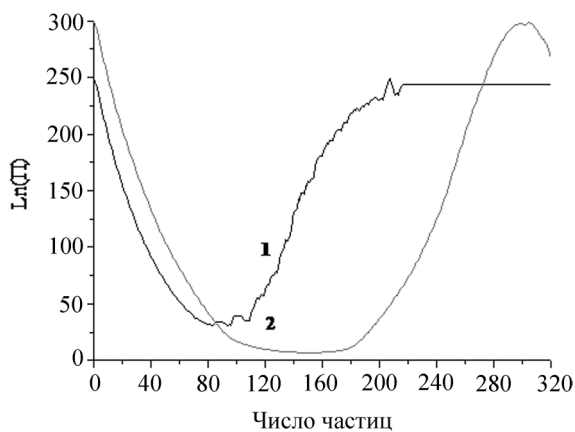


Рис. 2. Зависимости  $\ln\Pi(N, \mu_{\text{sat}})$  от  $N$  для Kr при  $T = 80$  К, полученные с помощью стандартной методики (1) и методики предельного разбиения (2)

его использовании удалось получить всю кривую функции плотности вероятности (рис. 2, кривая 2), что позволило рассчитать термодинамические параметры. Таким образом, предложенная методика позволяет расширить диапазон температур в сторону низких значений (при которых стандартная методика расчета не работает).

Т а б л и ц а 3. Зависимость вероятности добавления/изъятия от числа частиц для Kr и  $N_2$  при  $\mu$ , близком к равновесным значениям

Kr, 120 К			Kr, 80 К			$N_2$ , 77,9 К		
$N$	$P(N, -1)$	$P(N, +1)$	$N$	$P(N, -1)$	$P(N, +1)$	$N$	$P(N, -1)$	$P(N, +1)$
0	0	$3,3 \cdot 10^{-1}$	0	0	$4,2 \cdot 10^{-3}$	0	0	$3,6 \cdot 10^{-2}$
1	$2,8 \cdot 10^{-1}$	$2,0 \cdot 10^{-1}$	1	$2,5 \cdot 10^{-1}$	$2,4 \cdot 10^{-3}$	1	$5,0 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$
10	$3,2 \cdot 10^{-1}$	$5,7 \cdot 10^{-2}$	10	$2,5 \cdot 10^{-1}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	5	$4,0 \cdot 10^{-2}$	$7,3 \cdot 10^{-3}$
20	$3,2 \cdot 10^{-1}$	$5,1 \cdot 10^{-2}$	20	$1,7 \cdot 10^{-1}$	$3,1 \cdot 10^{-3}$	10	$3,3 \cdot 10^{-2}$	$5,1 \cdot 10^{-3}$
50	$2,2 \cdot 10^{-1}$	$6,2 \cdot 10^{-2}$	100	$3,1 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	25	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$4,4 \cdot 10^{-3}$
100	$1,1 \cdot 10^{-1}$	$7,5 \cdot 10^{-2}$	200	$6,1 \cdot 10^{-3}$	$3,0 \cdot 10^{-2}$	50	$7,8 \cdot 10^{-3}$	$4,7 \cdot 10^{-3}$
200	$2,1 \cdot 10^{-2}$	$6,9 \cdot 10^{-2}$	250	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	100	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$4,6 \cdot 10^{-3}$
250	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$4,8 \cdot 10^{-3}$	280	$9,7 \cdot 10^{-6}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$	125	$1,7 \cdot 10^{-4}$	$4,6 \cdot 10^{-4}$
280	$7,7 \cdot 10^{-4}$	$3,2 \cdot 10^{-4}$	300	$5,9 \cdot 10^{-6}$	$4,8 \cdot 10^{-6}$	140	$4,5 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-5}$
300	$5,9 \cdot 10^{-4}$	$4,2 \cdot 10^{-5}$	320	$1,0 \cdot 10^{-5}$	$1,8 \cdot 10^{-9}$	160	$2,8 \cdot 10^{-5}$	$2,2 \cdot 10^{-6}$

Методика предельного разбиения может быть также использована и для более сложных систем. На рис. 3 представлены зависимости  $\ln\Pi(N, \mu_{\text{sat}})$  от  $N$ , кривая 1 получена стандартным способом, кривая 2 – с использованием методики предельного разбиения. Хотя полученные данные (рис. 3) показывают, что в системе присутствует жидкая и газообразная фаза, но для стандартного метода, начиная с 93 частиц, функция плотности вероятности не может быть рассчитана. В результате расчетов термодинамических параметров были получены следующие данные:

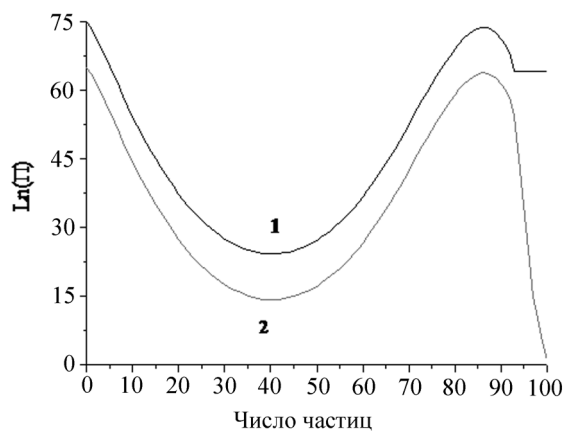


Рис. 3. Зависимости  $\ln\Pi(N, \mu_{\text{sat}})$  от  $N$  для этана при  $T = 184,29$  К, полученные с помощью стандартной методики (1) и методики предельного разбиения (2)

не удалось получить число частиц, соответствующих жидкости (рис. 2, кривая 1). Кроме того, из-за снижения вероятностей добавления и изъятия система большинство времени находилась в состоянии с числом частиц от 205 до 220 и не была накоплена статистика даже для области с меньшим  $N$ . Это объясняется тем, что при низкой температуре с увеличением числа частиц резко снижаются как вероятность добавления, так и вероятность изъятия частицы (табл. 3), и не происходит добавления частицы выше определенного числа (вероятность ниже  $10^{-5}$ ). Однако в методике предельного разбиения не происходит фактического добавления частиц, и поэтому данный подход пригоден для расчета свойств систем даже при чрезвычайно низких температурах. При

его использовании удалось получить всю кривую функции плотности вероятности (рис. 2, кривая 2), что позволило рассчитать термодинамические параметры. Таким образом, предложенная методика позволяет расширить диапазон температур в сторону низких значений (при которых стандартная методика расчета не работает).

стандартный метод  $P_{\text{sat}} = 102,6$  кПа;  $\rho_{\text{vap}} = 4,625$  кг  $\cdot$  м $^{-3}$ ;  $\rho_{\text{liq}} = 802,8$  кг  $\cdot$  м $^{-3}$ ; предельное разбиение  $P_{\text{sat}} = 102,6$  Па;  $\rho_{\text{vap}} = 4,627$  кг  $\cdot$  м $^{-3}$ ;  $\rho_{\text{liq}} = 802,0$  кг  $\cdot$  м $^{-3}$ ; эксперимент [15]  $P_{\text{sat}} = 101,814$  кПа;  $\rho_{\text{liq}} = 806,43$  кг  $\cdot$  м $^{-3}$ . Отклонение расчетных значений от экспериментальных связано с неточностью моделей, а не погрешностью метода расче-



та. Следовательно, методика предельного разбиения позволяет не только ускорить проведение расчета, но и провести расчет для более сложных молекул, для которых стандартная методика не позволяет рассчитать даже свойств жидкой фазы.

**Заключение.** Предложен алгоритм использования процедуры расширения результатов моделирования по температуре в программе Towhee для проведения расчетов методом Монте-Карло с матрицей перехода. Определен температурный интервал использования данной процедуры для систем различной сложности. Для криптона в интервале 90–200 К рассчитаны значение плотностей и давление насыщенного пара, с относительным отклонением от стандартной методики менее 1 %.

Разработана новая методика расчета в методе Монте-Карло с матрицей перехода, заключающаяся в разбиении на независимые подзадачи. Данная методика позволяет снизить реальное время расчета за счет использования нескольких процессорных ядер.

Предложен подход предельного разбиения, который позволяет моделировать равновесие «жидкость–пар» в тех случаях, в которых моделирование с помощью стандартной методики расчета в методе Монте-Карло с матрицей перехода было невозможно (при низких температурах и для сложных молекул). Рассчитанные значения свойств хорошо соответствуют экспериментальным значениям.

### Список использованной литературы

1. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines / N. Metropolis [et al.] // *J. Chem. Phys.* – 1953. – Vol. 21, N 6. – P. 1087–1092.
2. *Paluch, A. S.* Comparing the Use of Gibbs Ensemble and Grand-Canonical Transition-Matrix Monte Carlo Methods to Determine Phase Equilibria / A. S. Paluch, V. K. Shen, J. R. Errington // *Ind. Eng. Chem. Res.* – 2008. – Vol. 47, N 13. – P. 4533–4541.
3. *Smith, G. R.* A study of the multi-canonical Monte Carlo method / G. R. Smith, A. D. Bruce // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 1995. – Vol. 28, N 23. – P. 6623–6644.
4. *Panagiotopoulos, A. Z.* Monte Carlo methods for phase equilibria of fluids / A. Z. Panagiotopoulos // *J. Phys.: Condens. Matter.* – 2000. – Vol. 12, N 3. – P. 25–30.
5. *Cichowski, E. C.* Determination of Henry's law constants through transition matrix Monte Carlo simulation / E. C. Cichowski, T. R. Schmidt, J. R. Errington // *Fluid Phase Equilib.* – 2005. – Vol. 236, N 1. – P. 58–65.
6. *Kumar, V.* Monte Carlo simulation strategies for computing the wetting properties of fluids at geometrically rough surfaces / V. Kumar, S. Sridhar, J. R. Errington // *J. Chem. Phys.* – 2011. – Vol. 135, N 18. – P. 184702–184715.
7. *Chen, H.* Efficient Simulation of Binary Adsorption Isotherms Using Transition Matrix Monte Carlo / H. Chen, D. S. Sholl // *Langmuir.* – 2006. – Vol. 22, N 2. – P. 709–716.
8. Coarse-Grained Strategy for Modeling Protein Stability in Concentrated Solutions. II: Phase Behavior / V. K. Shen [et al.] // *Biophys. J.* – 2006. – Vol. 90, N 6. – P. 1949–1960.
9. *Shen, V. K.* Determination of fluid-phase behavior using transition-matrix Monte Carlo: Binary Lennard-Jones mixtures / V. K. Shen, J. R. Errington // *J. Chem. Phys.* – 2005. – Vol. 122, N 6. – P. 064508–064525.
10. *Ferrenberg, A. M.* New Monte Carlo technique for studying phase transitions / A. M. Ferrenberg, R. H. Swendsen // *Phys. Rev. Lett.* – 1989. – Vol. 61, N 23. – P. 2635–2638.
11. *Ferrenberg, A. M.* Optimized Monte Carlo Data Analysis / A. M. Ferrenberg, R. H. Swendsen // *Phys. Rev. Lett.* – 1989. – Vol. 63, N 12. – P. 1195–1198.
12. *Jorgensen, W. L.* Development and Testing of the OPLS All-Atom Force Field on Conformational Energetics and Properties of Organic Liquids / W. L. Jorgensen, D. S. Maxwell, J. Tirado-Rives // *J. Am. Chem. Soc.* – 1996. – Vol. 118, N 45. – P. 11225–11236.
13. *Potoff, J. J.* Vapor-Liquid Equilibria of Mixtures Containing Alkanes, Carbon Dioxide, and Nitrogen / J. J. Potoff, J. I. Siepmann // *AIChE J.* – 2001. – Vol. 43, N 7. – P. 1676–1682.
14. Evaluation and Reparametrization of the OPLS-AA Force Field for Proteins via Comparison with Accurate Quantum Chemical Calculations on Peptides / G. A. Kaminski [et al.] // *J. Phys. Chem. B.* – 2001. – Vol. 105, N 28. – P. 6474–6487.
15. NIST ThermoData Engine // National Institute of Standards and Technology [Electronic resource]. – 2010. – Mode of access: [www.nist.gov/srd/nist103b.cfm](http://www.nist.gov/srd/nist103b.cfm).

Поступило в редакцию 12.10.2015



## ХИМИЯ

УДК 541.145

Л. Ю. САДОВСКАЯ, Т. В. СВИРИДОВА, Т. М. ЯКИМЕНКО,  
член-корреспондент Д. В. СВИРИДОВ

**ПЛАНАРНЫЕ ФОТОКАТАЛИЗАТОРЫ С ФУНКЦИЕЙ НАКОПЛЕНИЯ  
ФОТОГЕНЕРИРОВАННОГО ЗАРЯДА**

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
lyubov.sadovskaya.93@mail.ru; sviridova@bsu.by; Yakimenka@bsu.by; sviridov@bsu.by

Показано, что наноструктурированные пленки  $\text{TiO}_2 : \text{MoO}_3$  способны под действием УФ-облучения накапливать фотоиндуцированный заряд при облучении за счет генерации восстановленных форм  $\text{MoO}_3$  (водородных бронз). Окисление указанных восстановленных форм в контакте с воздухом сопровождается генерацией активных форм кислорода, вследствие чего пленки  $\text{TiO}_2 : \text{MoO}_3$  сохраняют окислительную способность и патофизиологическую активность в течение длительного времени (свыше 3 ч) после завершения облучения.

*Ключевые слова:* аккумулярующие фотокатализаторы, диоксид титана, триоксид молибдена.

L. Yu. SADOVSKAYA, T. V. SVIRIDOVA, T. M. YAKIMENKO, D. V. SVIRIDOV

**PLANAR PHOTOCATALYSTS WITH THE FUNCTION OF PHOTO-PRODUCED CHARGE ACCUMULATION**

Belarusian State University, Minsk, Belarus  
lyubov.sadovskaya.93@mail.ru; sviridova@bsu.by; Yakimenka@bsu.by; sviridov@bsu.by

It is shown that nanostructured  $\text{TiO}_2 : \text{MoO}_3$  films are capable to accumulate the charges induced under UV irradiation due to the generation of reduced forms of molybdenum oxide (hydrogen bronzes). Oxidation of these reduced forms in the air condition is accompanied by the generation of reactive oxygen species, due to which  $\text{TiO}_2 : \text{MoO}_3$  films retain the oxidation ability and the pathophysiological activity for a long time after irradiation completion.

*Keywords:* accumulating photocatalysts, titanium dioxide, molybdenum trioxide.

**Введение.** Характерная для широкозонных оксидов (прежде всего для  $\text{TiO}_2$ ) способность к генерации активных форм кислорода (гидроксильных радикалов, супероксид-ионов) при УФ-облучении как результат протекания фотокаталитических процессов с участием неосновных и основных носителей заряда открывает возможность создания фотокаталитических покрытий, способных обеспечить деструктивное фотоокисление адсорбированных загрязнений органической природы и, таким образом, обладающих способностью к самоочищению и самостерилизации [1–4]. Вследствие малого времени жизни фотогенерированных активных форм кислорода на оксидной поверхности (единицы секунд в случае ОН-радикалов и менее 20 мин в случае  $\text{O}_2^-$  [5]) окислительная и патофизиологическая активность таких покрытий проявляется только при облучении, что ограничивает спектр их возможных приложений. Цель настоящего исследования состояла в рассмотрении возможности создания условий для накопления фотогенерированных зарядов в фотокаталитических покрытиях, представляющих собой комбинацию диоксида титана (фотогенерирующая компонента) и слоистого оксида переходного металла (триоксида молибдена), способного восстанавливаться при малых перенапряжениях с образованием водородных бронз  $\text{H}_x\text{MoO}_3$  переменного состава; при этом слоистое строение пластинчатых кристаллов  $\text{MoO}_3$  создает благоприятные условия для транспорта протонов в объеме кристалла при восстановлении.

**Материалы и методы эксперимента.** Частицы  $\text{MoO}_3$  в виде правильных пластинчатых кристаллов были получены в сольвотермических условиях путем поликонденсации молибденовой кислоты (0,2 М), синтезированной методом ионного обмена [6]. Дисперсный  $\text{MoO}_3$  (средний размер частиц 3 мкм) вводился в коллоидный раствор диоксида титана (средний размер частиц 6–10 нм), полученный путем медленного титрования 2,5 М  $\text{TiCl}_4$  в 0,65 М  $\text{HCl}$  водным раствором аммиака при 0 °С до конечного значения  $\text{pH} \sim 5$  с последующей ультразвуковой пептизацией [3]. Пленки фотокатализаторов  $\text{TiO}_2$  и  $\text{TiO}_2 : \text{MoO}_3$  наносили пульверизацией водных коллоидов на горячую ( $\sim 200$  °С) подложку из глазурованной керамики с последующим прогревом при 450 °С. Поверхность глазури предварительно травили в  $\text{CH}_3\text{COOH}$  для того, чтобы исключить диффузию ионов натрия в оксидный слой, что может негативным образом сказаться на фотокаталитической активности последнего [7].

В качестве тестовой реакции, позволяющей оценить фотокаталитическую (окислительную) активность полученных оксидных композитов, использовалась фотодеструкция родамина 6Ж, который наносился на поверхность исследуемого образца в количестве  $2 \cdot 10^8$  молекул/см<sup>2</sup> из водного раствора. Источником облучения служила выделенная линия 365 нм ртутной лампы высокого давления ДРК-120, интенсивность облучения составляла  $\sim 10$  мВт/см<sup>2</sup>. За изменением поверхностной концентрации красителя в процессе облучения и в темновых условиях после прекращения облучения следили по величине оптического отражения на длине волны, соответствующей максимуму оптического поглощения красителя. Измерения проводили с помощью денситометра ДО-1, полученная величина отражения  $R$  пересчитывалась по формуле Кубелки–Мунка [8] в величину, пропорциональную поверхностной концентрации красителя:  $\Gamma \sim (1 - R)^2 / 2R$ .

Электрохимические и фотоэлектрохимические измерения выполнялись с помощью потенциостата PGstat 204 (Autolab); в этом случае пленка композита наносилась на поверхность проводящего стекла из смешанного оксида олова-индия. Для определения относительной концентрации активных форм кислорода, генерированных на поверхности фотокатализатора, облученные образцы помещались в кювету спектрофлуориметра Robin Yvon, в которую впрыскивался водный ( $\text{pH} 9$ ) раствор люминола (4 мг/мл), содержащий  $10^{-4}$  М  $\text{FeSO}_4$ , и регистрировалась вспышка быстро спадающей во времени люминесценции; площадь под этой кривой пропорциональна поверхностной концентрации активных форм кислорода [3; 4].

**Результаты и их обсуждение.** Приведенные на рис. 1 кинетические кривые свидетельствуют о том, что переход от пленки  $\text{TiO}_2$  к пленке  $\text{TiO}_2 : \text{MoO}_3$  сопровождается значительным увеличением скорости фотоокисления адсорбированного красителя.

Поскольку в условиях фотоэлектрохимической ячейки (при приложении потенциала к фотокаталитическому покрытию, нанесенному на проводящую подложку из смешанного оксида индия-олова) пленка  $\text{TiO}_2 : \text{MoO}_3$  обеспечивает большую эффективность генерации фототока (рис. 2), то можно заключить, что в случае наногетерогенного фотокатализатора обеспечивается большая эффективность разделения фотогенерированных зарядов (и, соответственно, меньший уровень рекомбинации) вследствие захвата частицами  $\text{MoO}_3$  фотоэлектронов, генерированных в  $\text{TiO}_2$ . При этом

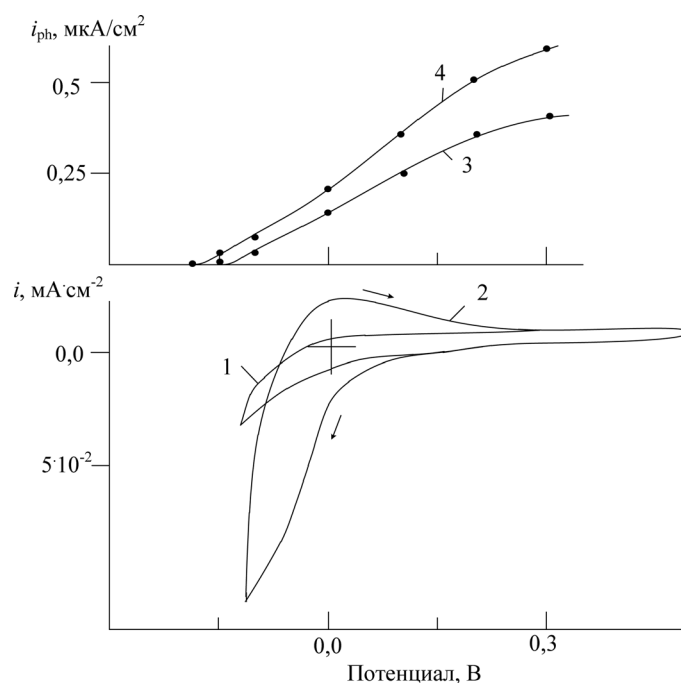


Рис. 1. Циклические вольтамперметрические кривые (1, 2) и поляризационные зависимости фототока (3, 4) для пленок  $\text{TiO}_2$  (1, 3) и  $\text{TiO}_2 : \text{MoO}_3$  (2, 4). Электролит: деаэрированный 0,25 М  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  + 0,1 М  $\text{CH}_3\text{COONa}$ ,  $\text{pH} 3$ . Скорость развертки потенциала 20 мВ · с<sup>-1</sup>

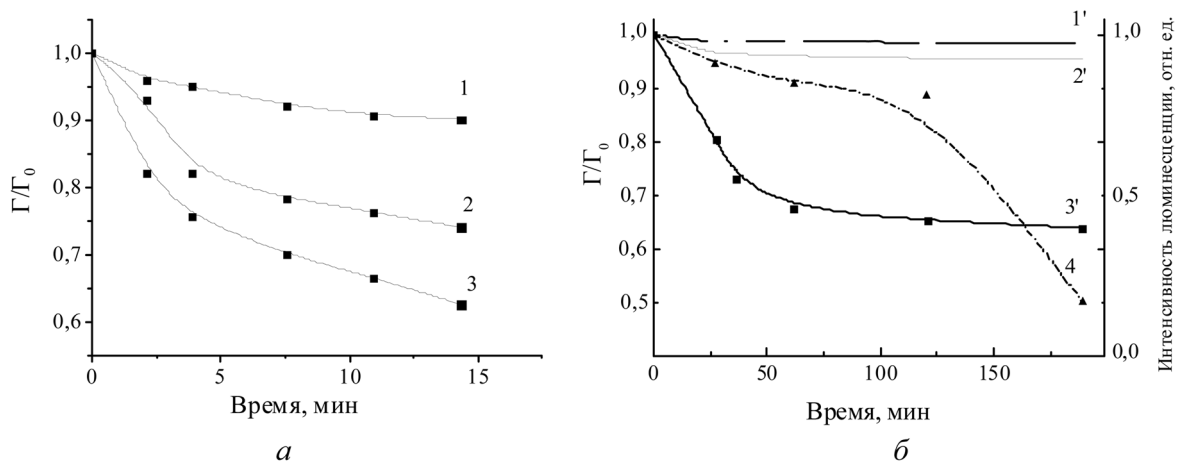


Рис. 2. Относительное изменение поверхностной концентрации зондового красителя Родамин 6Ж в результате фото-окисления при УФ-облучении (а) и в результате темного окисления после экспонирования в течение 30 мин (б) на поверхности керамической подложки (1, 1'),  $\text{TiO}_2$  (2, 2'),  $\text{TiO}_2 : \text{MoO}_3$  (3, 3'); относительное изменение интенсивности хемолуминесценции люминола в фентоновском растворе, контактирующем с предварительно экспонированной поверхностью фотокатализатора  $\text{TiO}_2 : \text{MoO}_3$  (4)

необратимый характер захвата фотоэлектронов триоксидом молибдена определяется возможностью восстановления последнего.

Циклические поляризационные кривые, приведенные на рис. 2, свидетельствуют о том, что композит  $\text{TiO}_2 : \text{MoO}_3$ , в отличие от  $\text{TiO}_2$ , восстанавливается при катодных потенциалах, окисляясь на обратном ходе потенциодинамической кривой. При этом, как видно из рис. 2, потенциал начала восстановления  $\text{MoO}_3$  лежит аноднее потенциала начала протекания фототока. Таким образом, величина фото-эдс, развиваемая в случае наногетерогенного фотокатализатора  $\text{TiO}_2 : \text{MoO}_3$ , будет достаточной для того, чтобы обеспечить восстановление частиц  $\text{MoO}_3$  в матрице  $\text{TiO}_2$ . Последнее обстоятельство обеспечивает накопление заряда, генерированного при облучении, в виде восстановленных оксидных форм (водородных бронз). Дальнейшее окисление указанных восстановленных состояний кислородом воздуха сопровождается генерацией пероксидных соединений, о чем свидетельствует наличие вспышек люминесценции (рис. 2), наблюдающихся в течение длительного времени (около 3 ч) при приведении предварительно экспонированного фотокатализатора  $\text{TiO}_2 : \text{MoO}_3$  в контакт с содержащим люминол раствором Фентона.

Вследствие этого пленки  $\text{TiO}_2 : \text{MoO}_3$  сохраняют окислительную активность после прекращения облучения, что подтверждается кинетическими кривыми темного окисления тестового красителя на поверхности предварительно облученного фотокатализатора (рис. 1).

Таким образом, наличие у наноструктурированных пленок  $\text{TiO}_2 : \text{MoO}_3$  как высокой активности в процессах прямого окисления органических веществ, так и способности к накоплению фотоиндуцированного заряда и генерации активных форм кислорода после прекращения облучения, открывает возможность создания самоочищающихся и самодезинфицирующихся покрытий пролонгированного действия (т. е. способных функционировать как при облучении, так и длительное время после его прекращения).

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № X16-074).

### Список использованной литературы

1. Fujishima, A. Titanium dioxide photocatalysis / A. Fujishima, T. N. Rao, D. A. Truk // J. Photochem. Photobiol. C: Photochem. Rew. – 2000. – Vol. 1. – P. 1–21.
2. Bactericidal mode of titanium dioxide photocatalysis / Z. Huang [et al.] // J. Photochem. Photobiol. A: Chem. – 2000. – Vol. 130. – P. 163–170.
3. Photocatalytic activity of  $\text{TiO}_2 : \text{In}_2\text{O}_3$  nanocomposite films towards the degradation of arylmethane and azo dyes / E. V. Skorb [et al.] // J. Photochem. Photobiol. – 2008. – Vol. 193. – P. 97–103.

4. Antibacterial activity of thin-film photocatalysts based on metal-loaded  $\text{TiO}_2$  and  $\text{TiO}_2:\text{In}_2\text{O}_3$  nanocomposite / E. V. Skorb [et al.] // *Appl. Catal. Env.* – 2008. – Vol. 53. – P. 222–226.
5. Generation and deactivation processes of superoxide formed on  $\text{TiO}_2$  film illuminated by very weak UV light in air or water / K. Ishibashi [et al.] // *J. Phys. Chem. B.* – 2000. – Vol. 104. – P. 4934–4938.
6. *Sviridova, T. V.* Nano- and microcrystals of molybdenum trioxide and metal-matrix composites on their basis / T. V. Sviridova, L. I. Stepanova, D. V. Sviridov // *Molybdenum: Characteristics, Production and Applications* / ed. by M. Ortiz [et al.]. – NY: Nova Sci. Publishers, 2012. – P. 147–179.
7. *Tada, H.* Dependence of  $\text{TiO}_2$  photocatalytic activity upon its film thickness / H. Tada, M. Tanaka // *Langmuir.* – 1997. – Vol. 13. – P. 360–364.
8. *Wedland, W.* Reflectance Spectroscopy / W. Wedland, H. Hecht. – NY: Intersci. Publ., 1966.

*Поступило в редакцию 20.01.2016*

УДК 62-761:678.6

*В. А. ТАРАСЕВИЧ*

## ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОЗАЩИТНЫХ СВОЙСТВ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ, СОДЕРЖАЩИХ НЕОРГАНИЧЕСКИЕ НАПОЛНИТЕЛИ

*(Представлено академиком В. Е. Агабековым)*

*Институт химии новых материалов НАН Беларуси, Минск, Беларусь*

*tar@ichnm.basnet.by*

Предложены составы теплозащитных композиций на основе полиэфиримида и неорганических наполнителей и исследованы их термические характеристики. Установлено, что из исследованных неорганических наполнителей в составе теплозащитных композиций наиболее эффективным является карбид кремния при его содержании 45–50 мас. %.

*Ключевые слова:* теплозащитная композиция, полиэфиримид, неорганические наполнители, карбид кремния, углеродное волокно.

*V. A. TARASEVICH*

## INVESTIGATION OF THERMAL PROTECTIVE PROPERTIES OF POLYMER MATERIALS CONTAINING INORGANIC FILLERS

*Institute of Chemistry of New Materials of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

*tar@ichnm.basnet.by*

Thermal protective compositions based on polyetherimide and inorganic fillers are proposed, and their thermal characteristics are investigated. The most effective inorganic filler in thermal protective composition was established to be silicon carbide at a content of 45–50 wt. %.

*Keywords:* heat shielding composition, polyetherimide, inorganic fillers, silicon carbide, carbon fiber.

**Введение.** Одним из перспективных направлений повышения термостойкости и огнестойкости полимерных композиций, в том числе и абляционных материалов, применяемых в ракетной и авиационной технике, является использование в их составе высокодисперсных неорганических наполнителей. Введение их в полимеры сопровождается различными взаимодействиями на границе раздела «полимер–наполнитель», влияющими на механические, физико-химические и термоокислительные свойства композиционного материала [1].

Теплозащита поверхностей протекает через поглощение тепла композитом при его нагреве до температуры разрушения, излучение от нагретой поверхности, эндотермические процессы, сопровождающие физико-химические превращения в самом материале и за счет выхода газообразных продуктов разрушения теплозащитного материала в пограничный слой.

При интенсивном тепловом воздействии на защитный композитный слой начинаются процессы коксообразования и структурирования, приводящие к образованию защитного слоя с низкой теплопроводностью [2; 3]. В большинстве теплозащитных композиций неорганические наполнители несут функцию первичных элементов, на которых возникает первичный углерод и в дальнейшем отлагается кокс, образующийся в результате термического разложения материалов.

В работе представлены результаты исследований термоокислительной деструкции и горючести композиционных материалов на основе полиэфиримида производства компании Aldrich (CAS 61128-46-9) с  $M = 622$  г/моль,  $n = 1,27$  г/см<sup>3</sup> при 25 °С (поли-[2,2'-бис(4-(3,4-дикарбоксо-

фенокси)фенилпропан)-1,3-фениленбисимид (П), армированных стекловолокном Т11 (ГОСТ 19170–2001) и углеродным волокном ЛТ-2-22-150 (ОАО СветлогорскХимволокно). В качестве наполнителей использованы каолин ( $\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ ) – ГОСТ 19617–74, трепел ( $\text{SiO}_2 \cdot \text{CaCO}_3 \cdot \text{Al}_2\text{O}_3$ ) месторождения «Стальное» Могилевской области, оксид кремния ( $\text{SiO}_2 \cdot n\text{H}_2\text{O}$ ) – ГОСТ 9428–73 (14922-77 аэросил) и карбид кремния (SiC), выделенный из отработанной суспензии, образующейся в результате резки слитков кремния на пластины методом струнной резки (продукт ОАО «Интеграл», филиал «Камертон»). Наибольший интерес в качестве наполнителя представляет карбид кремния, для которого характерны высокие показатели теплофизических и механических свойств, а также низкие значения коэффициента теплового расширения.

**Материалы и методы исследования.** Исследование термических характеристик образцов проводили с использованием термоаналитической установки NETZSCH STA 449F3 Jupiter (Германия) в температурном интервале 20–1100 °С при скорости линейного повышения температуры 10 °С/мин.

*Приготовление композиций.* Полиэфиримид растворяли в N,N'-диметилацетамиде при нагревании (70 °С) до концентраций 21,0 мас. %. После этого к заданному количеству раствора полиэфиримида (10 г) добавляли необходимое количество соответствующего наполнителя, смесь тщательно перемешивали, а затем вводили требуемые количества углеродного или стекловолокна с размером волокон 3–5 мм. Полученную композицию наносили на стальную пластину (8 × 8 см) и сушили при комнатной температуре в течение 24 ч. Толщину полученных после высыхания покрытий измеряли при помощи цифрового микрометра МКЦ-25.

Теплозащитные свойства покрытий определяли путем воздействия на металлическую пластинку с нанесенным защитным покрытием пламени пропановой горелки с температурой ~1000 °С. Изменение температуры обратной стороны металлической пластинки непрерывно фиксировали с помощью термопары «хромель–алюмель», подключенной к цифровому измерителю ЦР 8001/6.

Из отработанной суспензии SiC в ПЭГ-200 путем разбавления ее дистиллированной водой (1 : 1) и центрифугирования был выделен осадок, который отделялся от жидкой фазы и подвергался отмывке от ПЭГ-200 декантацией дистиллированной водой.

Электронно-микроскопические исследования показали, что осадок состоит из частиц SiC размером 8–12 мкм. Плотность высушенного до постоянного веса порошка составляет 0,82 г/см<sup>3</sup>. Термоиспытания подтвердили высокую термостойкость SiC, который не подвергается химическому и фазовому изменениям при конечной температуре нагревания 1100 °С.

**Результаты и их обсуждение.** При нагревании полиэфиримида в воздухе интенсивная потеря массы начинается при температуре около 500 °С и сопровождается экзотермическим эффектом. Потеря массы образца при температуре 995 °С составила 88,1 мас. %. Введение в полимер инертных наполнителей позволяет увеличить количество остающегося после прокаливания сухого остатка и, следовательно, улучшить защитные свойства покрытия при повышенной температуре.

Потеря массы образца  $\text{SiO}_2 \cdot n\text{H}_2\text{O}$  при 120 °С сопровождается сильным эндотермическим эффектом, характеризующим удаление находящейся в образце воды. Общая потеря массы составляет 19,6 мас. %. Таким образом,  $\text{SiO}_2 \cdot n\text{H}_2\text{O}$  обладает хорошей термической стабильностью и может быть использован в качестве наполнителя композиций.

При термоиспытаниях образца трепела уменьшение массы происходит в диапазоне температур 100–400 °С (9,6 мас. %), 800 °С (14,2 мас. %) и при температуре 1100 °С (30,6 мас. %). При нагревании каолина при температуре 546,8 °С наблюдается сильный эндотермический эффект, по всей видимости, обусловленный разложением примесей  $\text{MgCO}_3$  и  $\text{CaCO}_3$ , входящих в состав каолина. Общая потеря массы при 1100 °С составила 17,1 мас. %. Образец карбида кремния при температуре 1100 °С теряет только 7,0 % массы.

Исследование теплозащитных свойств композиций, содержащих 40,0 мас. %  $\text{SiO}_2 \cdot n\text{H}_2\text{O}$ , SiC, каолина и трепела, в пламени пропановой горелки (рис. 1) показывает, что из всех предложенных наполнителей наилучший теплозащитный эффект обеспечивают оксид и карбид кремния. За 150 с нахождения в пламени горелки температура стальной пластины достигает 450



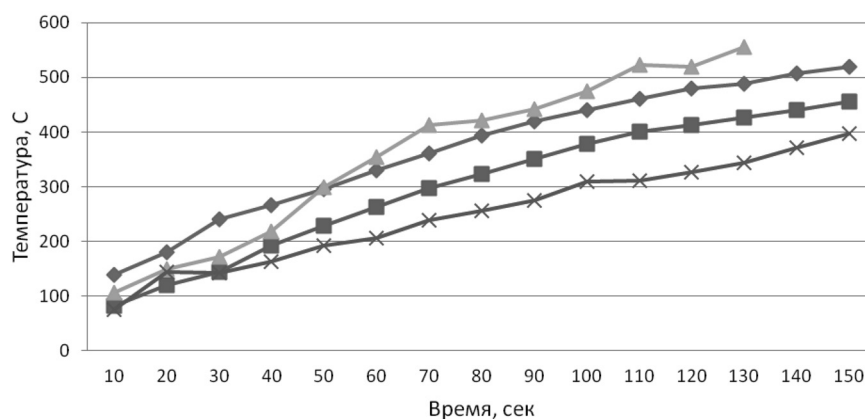


Рис. 1. Изменение температуры металлической пластинки при введении в полимер 40 мас. %: ◆ – каолин, ■ – карбид кремния, ▲ – трепел, × – оксид кремния

и 400 °С соответственно. Добавление в раствор полимера указанных наполнителей позволяет получать визуально однородные по консистенции, не расслаивающиеся суспензии. Карбид и оксид кремния характеризуются и лучшими «наполняющими свойствами» (увеличение доли полимера, находящегося в граничном слое). Введение одинаковых их количеств (40,0 мас. %) позволяет получать более толстые покрытия, для SiC 0,949 мм и SiO<sub>2</sub> · nH<sub>2</sub>O 1,080 мм, что являлось дополнительным преимуществом использования этих материалов в составе композиций.

В качестве армирующих добавок в термокомпозициях исследованы стекловолокно и углеродное волокно, характеризующиеся высокой химической инертностью и термостабильностью. Нагревание стекловолокна в воздухе сопровождается потерей массы в 4,2 % при 1000 °С, а углеродного волокна 0,9 мас. % при температуре 1100 °С.

Увеличение содержания наполнителя повышает термическую стабильность покрытий, однако при превышении некоторого граничного значения наблюдается так называемый эффект меления, т. е. матрицы становится недостаточно для связывания всего наполнителя, что приводит к возникновению неоднородного, слабосвязанного покрытия и отслаиванию его от металлической подложки в процессе огневых испытаний. Отмеченный эффект наблюдается при введении 50,0 мас. % SiO<sub>2</sub> и 65,0 мас. % SiC. При добавлении больших количеств армирующих волокон (>10,0 мас. %) не удается получить однородные составы. Поэтому для приготовления композиционных материалов использовали количества армирующих волокон, не превышающие 10,0 мас. %

При получении композита с использованием углеродного волокна ЛТ-2-22-150, содержание наполнителя (SiC) изменяли от 45,0 до 64,0 мас. %, а содержание армирующего материала от 1,0 до 10,0 мас. %. Внешний вид покрытий до (а) и после (б) испытания пламенем горелки показан на рис. 2. За время испытания (150 с) не наблюдалось «прогорания» защитного слоя при одновременном, интенсивном его коксовании.

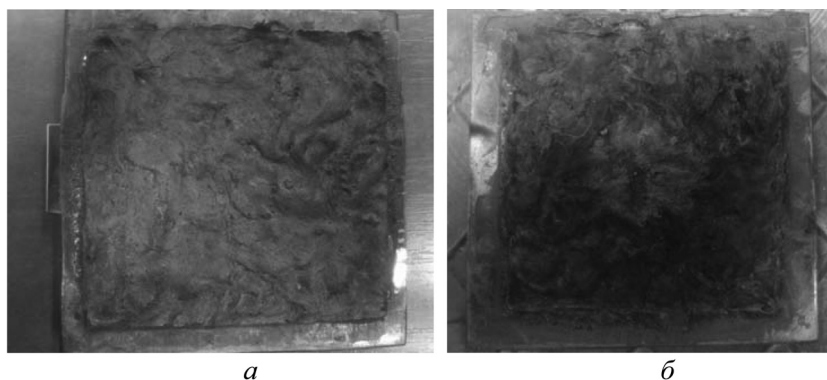


Рис. 2. Внешний вид покрытия до (а) и после (б) огневых испытаний



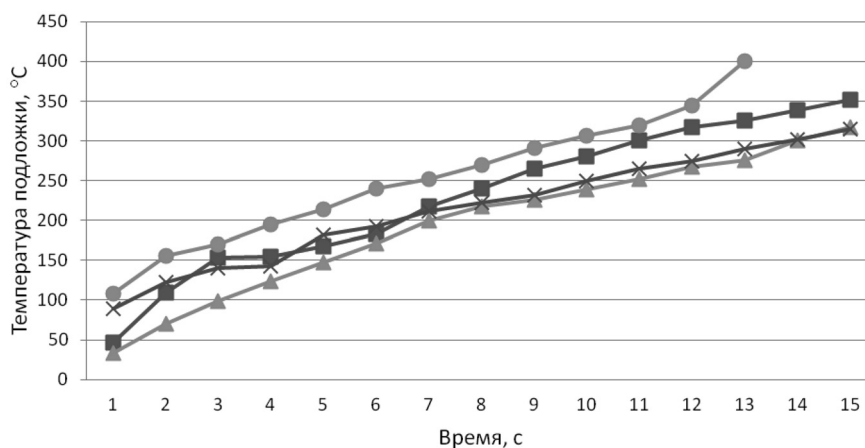


Рис. 3. Изменение температуры подложки с нанесенным защитным покрытием, содержащим SiC и углеродное волокно, от времени воздействия пламени (■ – 40,0 % П, 57,5 % SiC, 5,0 % УВ; ▲ – 45,0 % П, 50,0 % SiC, 5,0 % УВ; × – 40,0 % П, 50,0 % SiC, 10,0 % УВ; ● – 35,0 % П, 64,0 % SiC, 1,0 % УВ)

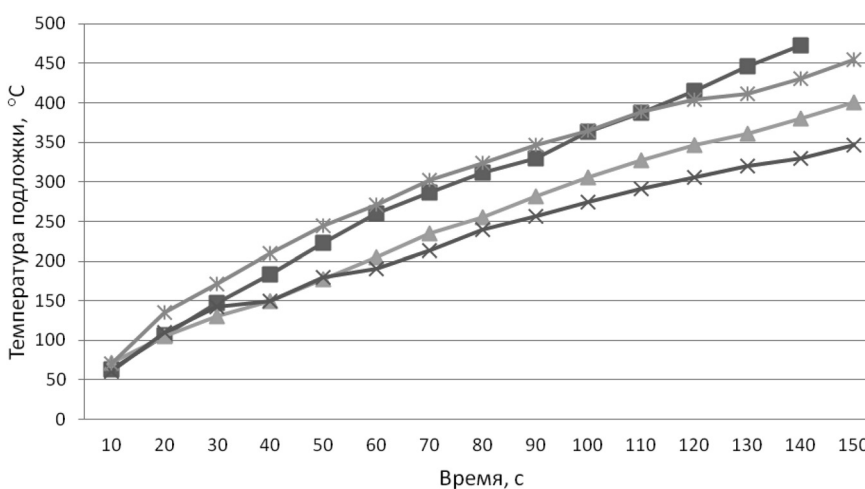


Рис. 4. Изменение температуры подложки с нанесенным защитным покрытием, содержащим SiO<sub>2</sub> · nH<sub>2</sub>O и стекловолокно, от времени воздействия пламени (■ – 65,0 % П, 30,0 % SiO<sub>2</sub>, 5,0 % СТ; ▲ – 60,0 % П, 30,0 % SiO<sub>2</sub>, 10,0 % СТ; × – 50,0 % П, 40,0 % SiO<sub>2</sub>, 10,0 % СТ; \* – 45,0 % П, 50,0 % SiO<sub>2</sub>, 5,0 % СТ)

Образцы, содержащие 45,0 мас. % полиэфиримида (П), 50,0 мас. % SiC, 5,0 мас. % углеродного волокна (УВ) и 40,0 мас. % П, 50,0 мас. % SiC, 10,0 мас. % УВ (рис. 3), показали наилучшие теплозащитные свойства.

При получении композита на основе полиэфиримида и SiO<sub>2</sub> · nH<sub>2</sub>O и использовании в качестве армирующего материала стекловолокна, количество наполнителя изменяли от 30,0 до 50,0 мас. %, а армирующего материала от 5,0 до 10,0 мас. %. Наилучшими защитными свойствами обладал образец, содержащий 50,0 мас. % П, 40,0 мас. % SiO<sub>2</sub>, 10,0 % стекловолокна (СТ) (рис. 4). Увеличение количества наполнителя приводило к отслаиванию покрытия от подложки при нагревании, а уменьшение содержания наполнителя до 30,0–35,0 мас. % – к прогоранию покрытия.

**Вывод.** Установлено, что наиболее эффективным наполнителем в составе термозащитных композиций является карбид кремния, который обладает хорошей совместимостью с раствором полиэфиримида, химической инертностью и термостабильностью. Наилучший защитный эффект достигается при содержании SiC 45,0–50,0 мас. %. Оптимальным является применение в качестве армирующего материала углеродного волокна (5,0–10,0 мас. %), которое отличается высокой термической стабильностью (до 2200 °C) и требуемыми армирующими свойствами, обеспечивающими сохранение целостности защитного покрытия при повышенных температурах.

Автор выражает благодарность м. н. с. В. В. Юрачка за участие в экспериментальной работе и выполнение термических испытаний.

### **Список использованной литературы**

1. Разработка и исследование огнетеплозащитных материалов для экстремальных условий эксплуатации // В. Ф. Каблов [и др.] // 24-й симпозиум «Проблемы шин и резинокордных композитов». М., 14–18 окт. 2013 / ООО НТЦ «НИИШП». – М., 2013. – С. 42–46.
2. Брык, М. Т. Деструкция наполненных полимеров / М. Т. Брык. – М.: Химия, 1989.
3. Асеева, Р. М. Горение полимерных материалов / Р. М. Асеева, Г. Е. Заиков. – М.: Наука, 1981.

*Поступило в редакцию 11.11.2015*

УДК 544.778.3+547-316+544.723.212+621.318.134

*К. В. ЛАЗНЕВ, академик В. Е. АГАБЕКОВ*

### СВЯЗЫВАНИЕ ГЕЛЕВЫХ МАГНИТНЫХ МИКРОСФЕР С МОНОУКЛЕАРНЫМИ КЛЕТКАМИ КРОВИ

*Институт химии новых материалов НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
kvlaznev@mail.ru; agabekov@ichnm.basnet.by*

Покрытие поливиниловым спиртом (ПВС) магнитных микросфер (ММС) на основе хитозана, сшитого глутаральдегидом, уменьшает их неспецифическое связывание с моноуклеарными клетками крови (МНК) эффективнее, чем покрытие карбоксиметилдекстраном со степенью карбоксилирования <10 %. Поливинилспиртовые ММС, покрытые дополнительным слоем ПВС после сшивки глутаральдегидом, в т. ч. функционализированные карбоксильными группами благодаря обработке  $H_2O_2$ , характеризуются низким неспецифическим связыванием с МНК. В осадке после магнитной сепарации на одну клетку приходится  $4670 \pm 760$  поливинилспиртовых ММС, обработанных 4 %  $H_2O_2$ , а коммерческих ММС Magnosphere™ MS300/Carboxyl –  $2040 \pm 400$ .

*Ключевые слова:* поливиниловый спирт, иммуномагнитная сепарация, микросферы, лейкоциты, неспецифическое связывание.

*K. V. LAZNEV, V. E. AGABEKOV*

### BINDING OF MAGNETIC GEL MICROSPHERES TO BLOOD MONONUCLEAR CELLS

*Institute of Chemistry of New Materials of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
kvlaznev@mail.ru; agabekov@ichnm.basnet.by*

A polyvinyl alcohol (PVA) coating decreases the non-specific binding of magnetic microspheres (MMS) composed of glutaraldehyde-cross-linked chitosan to blood mononuclear cells (BMC) more efficiently than a carboxymethyl dextran (carboxylation degree <10 %) coating. PVA-composed MMS coated with an additional PVA layer after glutaraldehyde cross-linking, including ones functionalized with carboxyl groups due to the  $H_2O_2$  treatment, demonstrate low non-specific binding to BMC. In the pellets resulting from magnetic separation, there were  $4670 \pm 760$  PVA MMS and  $2040 \pm 400$  Magnosphere™ MS300/Carboxyl commercial MMS per one BMC.

*Keywords:* polyvinyl alcohol, immunomagnetic separation, microspheres, leukocytes, nonspecific binding.

**Введение.** Иммуномагнитная сепарация применяется в медицине, биологии и биотехнологии. Метод основан на способности магнитных микросфер (ММС) селективно связываться с определенными клетками или молекулами в биологической или культуральной жидкости и затем осаждаться магнитом. В настоящее время этим способом получают очищенные на 95–99 % клеточные фракции с производительностью до  $10^{10}$  клеток в час. Иммуномагнитная сепарация применяется в тканевой инженерии и регенеративной медицине (получение стволовых клеток и клеток-предшественниц для последующего культивирования; очистка трансплантируемого материала от лейкоцитов), а также для диагностики и мониторинга течения заболеваний (в частности, обнаружения циркулирующих опухолевых клеток и редких популяций лейкоцитов) [1].

Поверхность ММС, применяемых для сепарации клеток, должна обладать как можно меньшей способностью к неспецифическому связыванию с плазматической мембраной клетки и нести молекулы-лиганды (например, антитела), обеспечивающие селективное связывание ММС с определенной клеточной популяцией. Неспецифическое связывание с клетками уменьшается за счет покрытия ММС гидрофильными нейтральными полимерами, такими как полиэтиленгликоль (ПЭГ), поливиниловый спирт (ПВС) [2] и полисахариды (декстран) [2; 3], которые в фи-

зиологической среде химически инертны. Для иммобилизации лигандов, ответственных за селективность связывания, в состав покрытия ММС должны быть введены реакционно активные группы: карбоксильные, аминные, тиольные или эпоксидные [4]. Количество заряженных групп не должно быть избыточным во избежание потери полимером способности блокировать неспецифическую адгезию клеток, причем наличие в составе гидрофильной поверхности аминогрупп в большей степени способствует адгезии, чем присутствие карбоксильных [5].

Цель работы – путем модификаций поверхности гелевых ММС на основе желатина, хитозана и ПВС уменьшить их неспецифическое связывание с моноклеарными клетками крови (МНК) до уровня коммерческих ММС Magnosphere™ MS300/Carboxyl (полистироловых с гидрофильным покрытием), обеспечив при этом наличие в составе поверхности функциональных групп.

В качестве модельного биологического объекта были выбраны МНК ввиду их доступности, гетерогенности фенотипа, а также с учетом того, что МНК содержатся в крови и костном мозге – наиболее широко применяемых источниках клеточного материала для регенеративной медицины [1].

#### **Экспериментальная часть.**

*Наночастицы магнетита* получали по методике, упрощенной по сравнению с применявшейся нами ранее [6]: смешивали 180 мкл раствора  $\text{FeSO}_4$  0,36М подкисленного и 320 мкл раствора  $\text{FeCl}_3$  0,37М; добавляли полученный раствор в пробирку с 200 мкл 25 %-ного раствора  $\text{NH}_3$  на вортексе; инкубировали 15 мин при 60 °С; осаждали магнитом, трижды отмывали 2 мл дистиллированной воды.

Для получения *магнитной жидкости* (МЖ) на основе желатина к 10 мкл сконцентрированной суспензии магнетита добавляли 1 мл фракции пищевого желатина (РБ), полученной путем преципитации ацетоном [7], удаления жидкой (низкомолекулярной) фракции и перерастворения преципитата в дистиллированной воде. Обрабатывали ультразвуком (УЗ) 22 кГц 100 Вт до кипения.

Для получения *МЖ на основе хитозана* к 10 мкл сконцентрированной суспензии магнетита добавляли 50 мкл ледяной уксусной кислоты, 400 мкл дистиллированной воды и 500 мкл раствора хитозана 1,5 %<sub>м/об</sub> и обрабатывали УЗ 22 кГц 100 Вт до кипения.

Для получения *МЖ на основе ПВС* к 10 мкл сконцентрированной суспензии магнетита добавляли 50 мкл ледяной уксусной кислоты, 200 мкл дистиллированной воды и 250 мкл ПВС (ГОСТ 10779–78, марка 11/2) 10 %<sub>м/об</sub> и обрабатывали УЗ 22 кГц 100 Вт до кипения.

*Эмульгирование и сшивку* МЖ проводили, внося по 200 мкл в 2400 мкл раствора Tween 85 1,5 %<sub>м</sub> и Span 85 2,8 %<sub>м</sub> в изооктане (ИО/ПАВ) и пипетируя 5 мин на водяной бане при 60 °С. Для пипетирования использовали дозатор 150 мкл с наконечником 200 мкл, укороченным до выходного сечения  $\approx 1$  мм<sup>2</sup>, приводимый с частотой  $\approx 400$  Гц электромешалкой с зажатым в патрон эксцентриком. По окончании пипетирования суспензию отстаивали 5 мин и удаляли прозрачную фракцию. Эмульсии МЖ обрабатывали сшивающим агентом – глутаральдегидом (ГА). В 2400 мкл ИО/ПАВ вносили 100 мкл раствора  $\text{CaCl}_2$  1М и ГА 25 %<sub>об</sub> в дистиллированной воде, обрабатывали УЗ 22 кГц 100 Вт до прозрачного состояния и объединяли с эмульсией МЖ. Эмульсию МЖ на основе желатина пипетировали с ГА 30 мин при комнатной температуре; на основе хитозана 30 мин при 70 °С; на основе ПВС 1 ч при 60 °С. Полученные ММС осаждали магнитом.

*ММС на основе желатина* отмывали 5 %-ным раствором ГА в этаноле и дважды – дистиллированной водой, суспендировали в сшивающем буфере (ГА 15 %<sub>об</sub>,  $\text{NaCl}$  0,5М, фосфатов натрия ( $\text{NaP}_i$ ) 0,2 М, pH 7), инкубировали при комнатной температуре в течение ночи и трижды отмывали фосфатно-солевым буфером (ФСБ) pH 7,4 (Sigma кат. № P4417).

*ММС на основе хитозана* отмывали 5 %-ным раствором ГА в этаноле и дважды – буфером  $\text{NaCl}$  0,5М, фосфаты натрия 0,2 М, pH 7, суспендировали в сшивающем буфере такого же состава, как и применявшийся для получения ММС на основе желатина, перемешивали при 70 °С 1 ч и трижды отмывали ФСБ pH 7,4.

*ММС на основе ПВС* инкубировали в 5 %<sub>об</sub> растворе ГА в этаноле 2 мин при 60 °С и трижды отмывали дистиллированной водой.

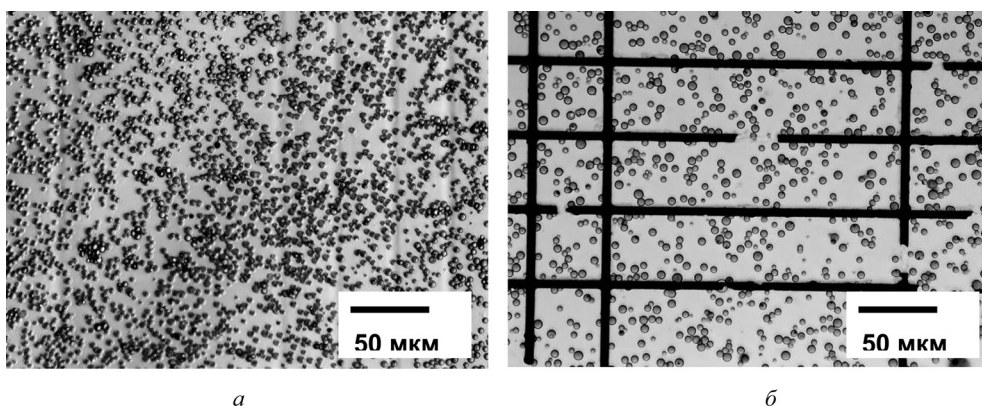


Рис. 1. Оптические изображения ММС: *а* – хитозановых, средний диаметр 2,9 мкм; *б* – поливинилспиртовых, средний диаметр 4,2 мкм

Полученные ММС имели средний размер 3–5 мкм, коэффициент полидисперсности  $\approx 0,1$  (рис. 1).

*Карбоксилирование декстрана (60 кДа)* проводили в растворе бромуксусной кислоты 0,125M и NaOH 2M с перемешиванием в течение 8 ч. Доводили pH до 3,0, диализовали и высушивали. Для характеристики КМД определяли дзета-потенциал покрытых им наночастиц CdSe/ZnS (PlasmaChem кат. № PL-QD-O-560).

*Модификация микросфер КМД.* 1 мг КМД и 2 мг 1-этил-3-(3-диметиламинопропил)карбодимида (EDC) растворяли в 500 мкл MES-буфера – 0,1 M р-ра 2-(N-морфолино)этансульфоновой кислоты в воде, pH 5. К полученному раствору добавляли 250 мкл суспензии ММС в MES-буфере 0,1M pH 5, приготовленной непосредственно после сшивки; инкубировали с перемешиванием 2 ч при 37 °C, отмывали дистиллированной водой и ФСБ pH 7,4.

*Модификация микросфер глицином.* Непосредственно после сшивки ММС инкубировали 30 мин при 60 °C в растворе глицина 0,25 %<sub>м/об</sub>, NaCl 0,5M, фосфаты натрия 0,2 M, при pH 7 или 9, или в растворе глицина 0,5 %<sub>м/об</sub>, уксусной кислоты 10 %<sub>об</sub>, затем трижды отмывали дистиллированной водой.

*Модификация микросфер ПВС.* Непосредственно после сшивки ММС ресуспендировали в водном растворе ПВС 0,5 %<sub>м/об</sub> и уксусной кислоты 10 %<sub>об</sub>, обрабатывали УЗ 22 кГц 100 Вт до кипения, перемешивали 45 мин при 60 °C и трижды отмывали дистиллированной водой.

*Модификация микросфер ПВС и глицином.* Непосредственно после сшивки ММС суспендировали в водном растворе ПВС 0,5 %<sub>м/об</sub>, глицина 0,5 %<sub>м/об</sub> и уксусной кислоты 10 %<sub>об</sub>, обрабатывали УЗ 22 кГц 100 Вт до кипения, перемешивали 45 мин при 60 °C и трижды отмывали дистиллированной водой.

*Обработка перекисью водорода.* ММС суспендировали в водном растворе, содержащем 10 %<sub>об</sub> уксусной кислоты и 4,5 %<sub>об</sub> или 15 %<sub>об</sub> H<sub>2</sub>O<sub>2</sub>, перемешивали 45 мин при 70 °C, дважды отмывали дистиллированной водой и один раз – буфером NaCl 0,5M, NaP<sub>i</sub> 0,2M при pH 9.

*Обработка боргидридом натрия.* Финальной стадией синтеза и модификации всех микросфер была обработка боргидридом натрия для конверсии непрореагировавших альдегидных групп в спиртовые, а оснований Шиффа (продуктов сшивки) – во вторичные амины. Проводили 2 цикла обработки NaBH<sub>4</sub> 10 мг/мл в буфере NaCl 0,5M, NaP<sub>i</sub> 0,2M, pH 9, 20 мин при 60 °C, в конце первого цикла – обработка УЗ 22 кГц 50 Вт в течение 15 с. Восстановленные боргидридом ММС трижды отмывали PBS и ресуспендировали в PBS.

*Связывание ММС с клетками.* Мононуклеарные клетки крови (МНК) получали по стандартной методике [8] центрифугированием крови, стабилизированной этилендиаминтетраацетатом натрия (Na<sub>2</sub>ЭДТА), на гистопаке (Sigma кат. № 10771). Отмывали ФСБ pH 7,4 с добавкой 10<sup>-5</sup>M красителя Hoechst-3342 для витального окрашивания ядер, затем – ФСБ pH 7,4 без красителя и сепарационной средой (СС) состава: ФСБ pH 7,4 с добавками 0,5 %<sub>м/об</sub> бычьего сывороточного альбумина (БСА) и 2 мМ Na<sub>2</sub>ЭДТА. Суспензии ММС и МНК в СС объединяли, обеспечивая со-



отношение ММС : МНК 10 : 1, инкубировали 20 мин при 4 °С, перемешивая каждые 5 мин, и проводили 3 цикла магнитной сепарации, каждый раз удаляя супернатант и ресуспендируя осадок в свежей СС. Клетки в осадке идентифицировали по синей флуоресценции ядер при освещении в ультрафиолетовой области спектра на люминесцентном микроскопе «Планар Микро МБ» (Беларусь).

**Результаты и их обсуждение.** Сшитые ГА и восстановленные боргидридом натрия желатиновые и хитозановые ММС без покрытия характеризуются высоким неспецифическим связыванием с МНК. Это характерно для частиц, несущих на поверхности значительное количество заряженных групп, особенно катионных [3; 5]. Неспецифическое связывание поливинилспиртовых ММС на порядок меньше, чем хитозановых (таблица).

Соотношения ММС : МНК в осадке после магнитной сепарации

ММС			ММС : МНК	
Полимер ядра	Полимер оболочки	Модификация оболочки		
Желатин	–	–	110 ± 30	
Хитозан	–	–	180 ± 40	
	ПВС	–	720 ± 190	
	КМД	–	280 ± 10	
ПВС	–	–	2960 ± 540	
		глицин в присутствии CH <sub>3</sub> COOH	180 ± 20	
		глицин при рН 7	1000 ± 110	
	ПВС	ПВС	глицин при рН 9	130 ± 40
			–	4800 ± 600
			глицин	4000 ± 1100
			H <sub>2</sub> O <sub>2</sub> (15%)	3600 ± 410
		H <sub>2</sub> O <sub>2</sub> (4%)	4670 ± 760	
Magnosphere™ MS300/Carboxyl			2040 ± 400	

В результате обработки ПВС неспецифическое связывание хитозановых ММС с МНК уменьшается в 4 раза, но остается в 4,1 раза больше, чем у поливинилспиртовых ММС (таблица). Можно предположить, что применявшаяся методика обработки не обеспечивает полного покрытия микросфер ПВС либо происходит появление участков хитозановых цепей на поверхности обработанных ММС в результате их диффузии. Известно, что даже для сшитых полимеров характерна определенная степень диффузии; этим явлением объясняется, в частности, зависимое от времени упрочнение пленок, сформированных из латексных микросфер [9].

При обработке хитозановых микросфер КМД их неспецифическое связывание с МНК уменьшается в 1,6 раза (таблица, рис. 2, а). Сравнение дзета-потенциала покрытых КМД наночастиц ( $\zeta = -4,3 \pm 0,5$  В при рН 7) с данными [10] позволяет заключить, что применявшийся КМД имеет степень карбоксилирования менее 10 %.

Модификация поливинилспиртовых ММС глицином (с целью обеспечить наличие карбоксильных групп в составе поверхности) увеличивает количество связываемых ими МНК в 3–23 раза (таблица). Обработка глицином при рН 7 меньше влияет на связывание ММС с МНК, чем в кислой и щелочной средах. Известно, что в нейтральных и щелочных условиях преобладающая реакция альдегидов с аминокислотами – образование оснований Шиффа, которое в интервале рН 7–9 практически необратимо и интенсивнее протекает при рН 9, чем при рН 7 [4]. Повышенное связывание ММС, обработанных при рН 9, с МНК, возможно, обусловлено тем, что они несут на поверхности больше иммобилизованного глицина (и, соответственно, карбоксильных групп). Кроме того, при рН 9 ММС проявляют склонность к агрегации, при этом вероятно появление сшивок между контактирующими микросферами за счет наличия на их поверхности свободных альдегидных групп. Механический разрыв этих сшивок при перемешивании суспензии может вносить вклад в модификацию поверхности. Кислая среда способствует гидролизу ацета-



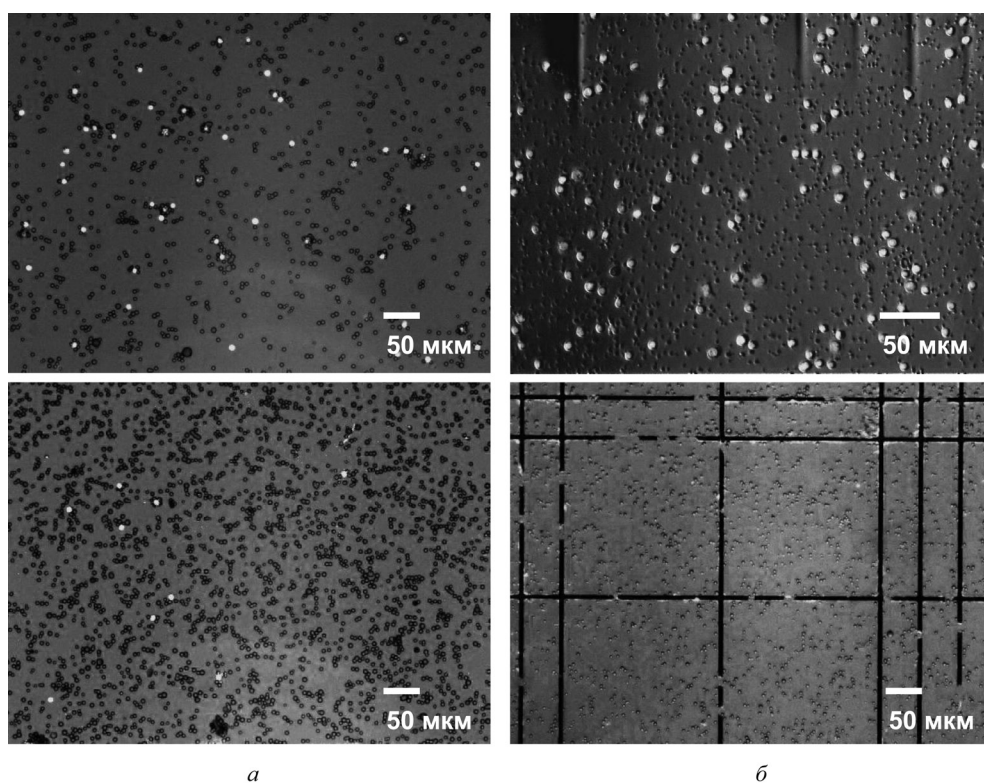


Рис. 2. Магнитная сепарация. Вверху – суспензия клеток и ММС до сепарации, внизу – осадок после сепарации. Светящиеся объекты – ядра клеток. *а* – хитозановые ММС с оболочкой из КМД; *б* – поливинилспиртовые ММС с оболочкой из ПВС

лей, формирование которых лежит в основе сшивки ПВС глутаральдегидом [11]: с уменьшением рН на единицу скорость гидролиза возрастает примерно в 10 раз [12]. Гидролиз, кроме разрыхления ММС, может вести к появлению на их поверхности дополнительных свободных альдегидных групп, а также образованию свободного ГА (включая полимерные формы) [13] и растворимых форм модифицированного глутаральдегидом ПВС. Как следствие возможно протекание целого ряда побочных реакций, которые могут быть ответственны за повышенное связывание с МНК микросфер, модифицированных глицином в присутствии уксусной кислоты.

Обработка поливинилспиртовых ММС дополнительным количеством ПВС, предпринятая с целью уменьшения количества свободных альдегидных групп после удаления из среды глутаральдегида перед восстановлением боргидридом натрия, приводит к снижению неспецифического связывания ММС с МНК в 1,6 раза (таблица, рис. 2, *б*).

Совместная обработка ПВС и глицином поливинилспиртовых ММС, предпринятая непосредственно после сшивки с целью уменьшения количества свободных альдегидных групп и создания групп –СООН, приводит к увеличению неспецифического связывания в 1,2 раза по сравнению с ММС, обработанными ПВС без глицина (таблица).

При обработке  $H_2O_2$  с целью конверсии части альдегидных групп в карбоксильные [14] (не прореагировавшие альдегидные группы затем восстанавливаются боргидридом натрия в спиртовые) неспецифическое связывание поливинилспиртовых ММС с МНК увеличивается в 1,2 раза при использовании 15 %-ного раствора  $H_2O_2$  и практически не изменяется в случае 4 %-ного раствора  $H_2O_2$  (таблица). Этот факт может отражать различие в количестве образующихся на поверхности ММС карбоксильных групп. Известно, что наличие заряженных групп способствует неспецифическому связыванию клеток с гидрофильными поверхностями [5]. В частности, адгезия эндотелиальных клеток к поливинилацетатным пленкам возрастает с увеличением количества групп –СООН на единице поверхности [15]. Таким образом, конверсия большого количества альдегидных групп в карбоксильные нежелательна. Известно также, что при 70 °С катали-

зируемая кислотой реакция окисления альдегидных групп в карбоксильные протекает медленно (выход порядка нескольких процентов в течение 2 ч [14]), что и обусловило выбор данного температурного режима для частичного окисления –CHO в –COOH.

Неспецифическое связывание с МНК поливинилспиртовых микросфер, покрытых после сшивки оболочкой ПВС и модифицированных глицином, меньше, чем у предназначенных для магнитной сепарации биологических материалов коммерческих микросфер Magnosphere™ MS300/Carboxyl в 2,0 раза (таблица). Поливинилспиртовые микросферы, покрытые после сшивки оболочкой ПВС и модифицированные H<sub>2</sub>O<sub>2</sub> 4 % или 15 %, связывают соответственно в 2,2 и 1,8 раза меньше МНК, чем Magnosphere™ MS300/Carboxyl.

### Список использованной литературы

1. *Plouffe, B. D.* Fundamentals and application of magnetic particles in cell isolation and enrichment: a review / B. D. Plouffe, S. K. Murthy, L. H. Lewis // *Rep. Prog. Phys.* – 2015. – Vol. 78, N 1. – P. 016601. – doi: 10.1088/0034-4885/78/1/016601.
2. *Salmaso, S.* Stealth properties to improve therapeutic efficacy of drug nanocarriers / S. Salmaso, P. Caliceti // *J. Drug Deliv.* – 2013. – Vol. 2013. – Article ID 374252.
3. A biotechnological perspective on the application of iron oxide magnetic colloids modified with polysaccharides / A. M. G. C. Dias [et al.] // *Biotechnology Advances.* – 2011. – Vol. 29. – P. 142–155.
4. *Hermanson, G. T.* Bioconjugate Techniques / G. T. Hermanson. – 2nd ed. – Elsevier, 2008.
5. Self-assembled monolayers with different terminating groups as model substrates for cell adhesion studies / N. Faucheux [et al.] // *Biomaterials.* – 2004. – Vol. 25. – P. 2721–2730.
6. Influence of Co amount on the efficiency of energy absorption of Fe-Co ferrite nanoparticles / K. A. Kekalo [et al.] // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2009. – Vol. 321. – P. 1514–1516.
7. Gelatin nanoparticles by two-step desolvation – a new preparation method, surface modifications and cell uptake / C. J. Coester [et al.] // *J. Microencapsul.* – 2000. – Vol. 17. – P. 187–193.
8. *Panda, S. K.* Isolation of Human PBMCs / S. K. Panda, B. Ravindran // *Bio-protocol* 3(3): e323. – 2013 [Electronic resource]. – Mode of access: <http://www.bio-protocol.org/e323>.
9. *Tamai, T.* Effect of cross-linking on polymer diffusion in poly(butylmethacrylate-co-butyl acrylate) latex films / T. Tamai, P. Pinenq, M. A. Winnik // *Macromolecules.* – 1999. – Vol. 32. – P. 6102–6110.
10. Effect of surface charge on the colloidal stability and in vitro uptake of carboxymethyl dextran-coated iron oxide nanoparticles / V. Ayala [et al.] // *J. Nanopart. Res.* – 2013. – Vol. 15, N 8. – P. 1874.
11. Polyvinyl alcohol-glutaraldehyde network as a support for protein immobilisation / A. M. Araujo [et al.] // *Biotechnology Techniques.* – 1997. – Vol. 1, N 2. – P. 67–70.
12. *Gillies, E. R.* Acetals as pH-sensitive linkages for drug delivery / E. R. Gillies, A. P. Goodwin, J. M. J. Frechet // *Bioconjugate Chem.* – 2004. – Vol. 15. – P. 1254–1263.
13. Glutaraldehyde: behavior in aqueous solution, reaction with proteins, and application to enzyme crosslinking / I. Migneault [et al.] // *BioTechniques.* – 2004. – Vol. 37. – P. 790–802.
14. Hydrogen peroxide oxidation of aldehydes to carboxylic acids: an organic solvent-, halide- and metal-free procedure / K. Sato [et al.] // *Tetrahedron Letters.* – 2000. – Vol. 41, N 9. – P. 1439–1442.
15. Surface chemistry and polymer film thickness effects on endothelial cell adhesion and proliferation / D. Bhattacharyya [et al.] // *Biomed. Mater. Res. A.* – 2010. – Vol. 94. – P. 640–648.

Поступило в редакцию 20.07.2015

УДК 577.29 57.085.23 547.92

П. А. КИСЕЛЕВ, О. В. ПАНИБРАТ, А. Г. СЫСА, М. В. АНИСОВИЧ,  
В. Н. ЖАБИНСКИЙ, академик В. А. ХРИПАЧ

## ОКИСЛИТЕЛЬНЫЙ СТРЕСС КАК ОДИН ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ПУТЕЙ АНТИРАКОВОГО ДЕЙСТВИЯ БРАССИНОСТЕРОИДОВ

Институт биоорганической химии НАН Беларуси, Минск, Беларусь

kiselev@iboch.bas-net.by; panisestra@tut.by; aliaksei.sysa@gmail.com; solus@list.ru; vz@iboch.bas-net.by;  
khripach@iboch.bas-net.by

В настоящей работе нами впервые охарактеризовано влияние brassinosteroidов 24-эпибрасинолида (24-ЭБ) и 28-гомокастастерона (28-ГКС), а также их стереоизомеров (22S,23S)-24-гомобрасинолида ((22S,23S)-24-ЭБ) и (22S,23S)-28-гомокастастерона ((22S,23S)-28-ГКС) на уровень активных форм кислорода в раковой клеточной линии A549 (аденокарцинома легких), а полученные результаты сопоставлены с данными по их антипролиферативной активности.

Оказываемый эффект зависел от структуры боковой цепи и был более выражен в случае SS-ориентации гидроксильных групп в положении C22 и C23 ((22S,23S)-28-гомокастастерон). Это соединение обладало и большей антипролиферативной активностью, что позволяет говорить о возможной взаимосвязи между индукцией активированных форм кислорода и цитотоксичностью исследованных веществ.

Результаты настоящей работы позволяют допустить, что один из путей влияния brassinosteroidов на раковые клетки может заключаться в иницировании окислительного стресса, что приводит к гибели последних по АФК-зависимым механизмам.

*Ключевые слова:* brassinosteroidы, окислительный стресс, внутриклеточный уровень активных форм кислорода, антипролиферативная активность.

P. A. KISELEV, O. V. PANIBRAT, A. G. SYSA, M. V. ANISOVICH, V. N. ZHABINSKII, V. A. KHRIPACH

## OXIDATIVE STRESS AS ONE OF THE POSSIBLE WAYS OF ANTICANCER EFFECTS OF BRASSINOSTEROIDS

Institute of Bioorganic Chemistry of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

kiselev@iboch.bas-net.by; panisestra@tut.by; aliaksei.sysa@gmail.com; solus@list.ru; vz@iboch.bas-net.by;  
khripach@iboch.bas-net.by

In this paper, the effect of brassinosteroids – 24-epibrassinolide and 28-homocastasterone, as well as their stereoisomers – (22S,23S)-24-homobrassinolide and (22S,23S)-28-homocastasterone on the level of reactive oxygen species in cancer cell line A549 (lung adenocarcinoma) has been characterized for the first time, and the results obtained have been compared with the data on their antiproliferative activity.

The effect depended on the structure of the side chain and was more pronounced in the case of the SS-orientation of hydroxyl groups at the C22 and C23 positions ((22S,23S)-28-homocastasterone). This compound also had greater antiproliferative activity, which suggested a possible relationship between the induction of activated oxygen species and cytotoxicity of the substances.

The results of this work allow one to assume that one of the ways of the effect of brassinosteroids on cancer cells may lie in the initiation of oxidative stress, which leads to the death of cancer cells through ROS-dependent mechanisms.

*Keywords:* brassinosteroids, oxidative stress, intracellular level of reactive oxygen species, antiproliferative activity.

**Введение.** Несмотря на существенные достижения в области онкологии количество ежегодных смертельных исходов достигает 8 миллионов и имеет тенденцию к росту [1; 2]. Это обуславливает актуальность поиска новых химиотерапевтических средств и установления механизма их действия. К сожалению, абсолютное большинство известных антиопухолевых препаратов обладают выраженными побочными действиями, что ограничивает их применение [3; 4]. В связи с этим обращают на себя внимание стероиды и их производные, в т. ч. природные и синтетиче-

ские brassinостероиды [5–10]. Брассиностероиды (БС) относятся к группе растительных гормонов, сходных с таковыми животных и человека как по своей структуре, так и по выполняемым функциям: они регулируют в растениях экспрессию генов, влияют на протекание процессов метаболизма, рост и дифференцировку клеток [5; 9]. В последние годы их рассматривают в качестве потенциальных антиканцерогенных агентов. Предпосылками для этого являются антипролиферативная активность брассиностероидов, показанная на ряде раковых клеточных линий, их способность к ингибированию ангиогенеза и низкая цитотоксичность в отношении нормальных клеток [6–10]. Причем более высокая эффективность обнаружена для синтетических производных брассиностероидов. Считается, что БС участвуют в регуляции клеточного цикла и индуцируют апоптоз по независимому от андрогенового и эстрогенового стероидных рецепторов пути [9]. Однако в целом молекулярный механизм действия стероидов остается во многом неясным. В настоящей работе нами впервые охарактеризовано влияние брассиностероидов 24-эпи-брасинолида (24-ЭБ) и 28-гомокастастерона (28-ГКС), а также их стереоизомеров (22S,23S)-24-эпибрасинолида ((22S,23S)-24-ЭБ) и (22S,23S)-28-гомокастастерона ((22S,23S)-28-ГКС) (структура показана на рис. 1) на уровень активных форм кислорода в раковой клеточной линии A549 (аденокарцинома легких), а полученные результаты сопоставлены с данными по их антипролиферативной активности.

**Материалы и методы исследования.** *Культивирование клеток.* Клеточную культуру A549 культивировали в среде DMEM (Sigma, США), содержащей 10 % эмбриональной сыворотки крупного рогатого скота (HyClone, США), 4 mM L-глутамина, антибиотиков пенициллина (100 ед/мл), стрептомицина (100 мкг/мл) и антимикотика Fungizone® (25 мкг/мл) (Invitrogen, США), при 37 °C во влажной атмосфере с 5 % CO<sub>2</sub>. Клеточная культура поддерживалась на стадии логарифмического роста путем рутинной пересадки трижды в неделю. Контроль адгезии клеток на подложке, роста и возможной контаминации производили визуально с помощью инвентированного микроскопа АУ-12 (ЛОМО, Россия).

*Характеристика антипролиферативной активности.* Для определения антипролиферативной активности использовали МТТ-тест [11]. Клетки опухолевой линии A549 (карцинома легкого) помещали на 96-луночный планшет (Sarstedt, Германия) в концентрации  $1 \cdot 10^4$  клеток/луночка и инкубировали в среде DMEM (Sigma, США) с добавлением 10 % эмбриональной сыворотки крупного рогатого скота (HyClone, США) и антибиотиков пенициллина (100 ед/мл), стрептомицина (100 мкг/мл) и антимикотика Fungizone® (25 мкг/мл) (Invitrogen, США). Через 24 ч инкубирования, при 37 °C во влажной атмосфере, содержащей 5 % CO<sub>2</sub>, среду сливали и заменяли ее на среду, содержащую брассиностероиды в концентрациях от 1 до 200 мкМ. Контрольные клетки инкубировали в среде с 1 % DMSO. Через 24 ч инкубации с брассиностероидами в среду добавляли соль 3-[4,5-диметилтиазол-2-ил]-2,5-дифенилтетразолия бромид (Carl Roth, США) в концентрации 5 мг/мл. Через 4 ч экспозиции при 37 °C темно-фиолетовые гранулы формаза растворяли в диметилсульфоксиде. Количество восстановленного продукта измеряли фотометрически при длине волны 570 нм на планшетном анализаторе АИФ-М/340. Проллиферативную активность клеток в присутствии исследуемого соединения рассчитывали по формуле:  $(\text{ОП опытных лунок} / \text{ОП контр. лунок}) \cdot 100 \%$ , где ОП – оптическая плотность.

*Определение внутриклеточного уровня активных форм кислорода.* Для определения уровня внутриклеточных АФК использовали зонд 2',7'-дихлордигидрофлуоресцеин диацетат (DCF-DA, ИБОХ НАН Беларуси).

Клетки растили в 6-луночных планшетах (Sarstedt, Германия) и при достижении ими 70 % конfluентности проводили 2-часовую инкубацию с брассиностероидами в концентрациях 10, 30, 70, 100 мкМ и DCF-DA в концентрации 10 мкМ, добавленными одновременно, в 5 mM PBS, pH 7,4. Контрольные клетки инкубировали с 10 мкМ DCF-DA и 1 % DMSO. Затем клетки снимали 0,25 %-ным раствором трипсин/EDTA. Уровень АФК определяли с помощью проточной цитометрии на приборе Beckman Coulter Cytomics FC 500 ( $\lambda_{\text{ex}} = 495$  нм и  $\lambda_{\text{em}} = 520$  нм).

**Результаты и их обсуждение.** В работе использовали брассиностероиды, полученные в соответствии с [12]. Как видно из рис. 1, использованные соединения (1), (2) содержали 6-кето-функцию в кольце В стероидного скелета, а соединения (3), (4) – 6-оксо-7-оксалактонную струк-



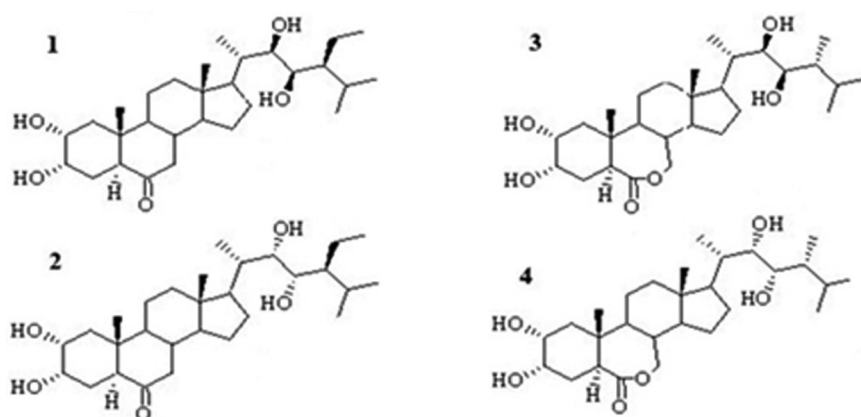


Рис. 1. Структура исследованных соединений: 1 – 28-гомокастастерон, 2 – (22S,23S)-28-гомокастастерон, 3 – 24-эпи-брасинолид, 4 – (22S,23S)-24-эпибрасинолид

туру. Кроме того, брасиностероиды отличались строением боковой цепи. Так, природный 24-эпибрасинолид содержит в положении C24 метильную группу, в то время как у 28-гомокастастерона в этом положении находится этильный заместитель.

Отличительная особенность синтетических производных 24-эпибрасинолида (4) и 28-гомокастастерона (2) заключалась в S-конфигурации C22 и C23 атомов углерода, содержащих гидроксильные группы.

Предварительная оценка антиканцерогенной эффективности, поиск соответствующих веществ и выяснение механизма их действия часто базируются на характеристике их влияния на свойства культур опухолевых клеток. В случае природных и синтетических брасиностероидов надежно документирована их антипролиферативная активность в отношении ряда раковых клеток [6–10]. При этом, исходя из идеологии близости структур и функций стероидных регуляторов в растительных и животных системах, в первую очередь речь идет об андроген- и эстроген-зависимых клеточных линиях. Меньше известно о взаимосвязи между структурой соединений и их влиянием на поведение эстроген-независимых органов и тканей. Отправной точкой настоящей работы стала оценка воздействия природных брасиностероидов и их синтетических аналогов на пролиферацию опухолевой клеточной линии A549 (аденокарцинома легких). Для этого использован ставший уже классическим МТТ-тест (рис. 2). Как видно из рис. 2, исследованные соединения обладают достоверной антипролиферативной активностью в отношении клеточной линии A549.

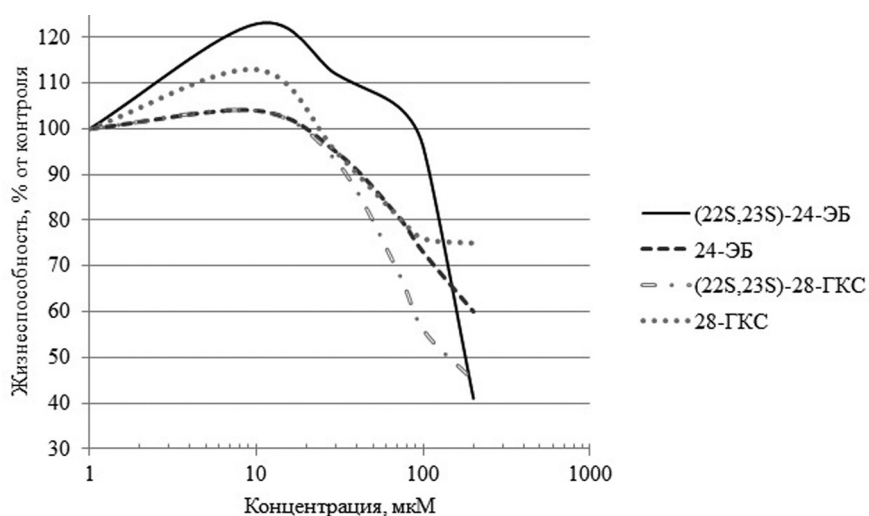


Рис. 2. Зависимость влияния брасиностероидов на пролиферацию раковых клеток (линия A549) от концентрации изученных соединений

Из рис. 2 следует, что в целом соединения с SS-ориентацией гидроксильных групп в положении C22 и C23 ((22S,23S)-28-гомокастастерон и (22S,23S)-24-эпибрассинолид) являются более активными в подавлении клеточной пролиферации, чем соединения с RR-ориентацией гидроксильных групп в указанном положении боковой цепи. Диапазон  $IC_{50}$  для SS-стереоизомеров brassinosterоидов составил 130–200 мкМ. Наряду с (22S,23S)-28-гомокастастероном антипролиферативная активность при высоких концентрациях наблюдается в случае (22S,23S)-24-эпибрассинолида. Другой важной особенностью brassinosterоидов является тот факт, что соединения с 6-кетофункцией проявляют более выраженное цитостатическое влияние, чем соединения с 6-оксо-7-оксафункцией.

Полученные результаты хорошо согласуются с появившимися в последние 2–3 года данными о том, что 28-гомокастастерон влияет на жизнеспособность опухолевых клеток лейкемии (линия СЕМ,  $IC_{50}$  составляет 13 мкМ) и миеломы (линия RPMI 8226) [5; 6; 9].

На следующем этапе работы методом проточной флуоресцентной цитометрии был определен внутриклеточный уровень активных форм кислорода в отсутствие и в присутствии исследуемых brassinosterоидов. Для этой цели в качестве зонда использован 2',7'-дихлордигидрофлуоресцеин диацетат, который после попадания в клетку гидролизуется эстеразами и окисляется АФК до флуоресцирующего продукта – 2',7'-дихлорфлуоресцеина, параметры свечения которого отражают уровень внутриклеточных активных форм кислорода [13].

На рис. 3 представлена зависимость среднего значения флуоресценции DCF от концентрации brassinosterоидов. Для всех исследованных соединений, кроме 24-эпибрассинолида, максимально эффективная концентрация составила 30 мкМ, дальнейшее увеличение концентрации стероидов приводило либо к стабилизации эффекта (28-гомокастастерон), либо к его снижению ((22S,23S)-28-гомокастастерон и (22S,23S)-24-эпибрассинолид).

Отметим, что максимальная эффективность, как и в случае с подавлением клеточной пролиферации, найдена для (22S,23S)-28-гомокастастерона, для которого при его 30-микромольной концентрации зарегистрировано по сравнению с контролем почти 6-кратное увеличение интенсивности свечения.

Выяснение роли активных форм кислорода в функционировании живых организмов имеет вековую историю. Сегодня не вызывает удивления способность АФК как к отрицательному, так и положительному влиянию на процессы жизнедеятельности. Конкретный эффект определяется многими факторами, включая состав и количество АФК, тип и состояние клетки, продолжительность воздействия и т. д. [14; 15].

В настоящей работе нами впервые показана возможность генерирования АФК в раковой клеточной линии А549 под действием brassinosterоидов и их стереоизомеров. Оказываемый эффект зависел от структуры боковой цепи и был более выражен в случае SS-ориентации гидроксильных групп в положении C22 и C23 ((22S,23S)-28-гомокастастерон). Это соединение обладало и большей анти-

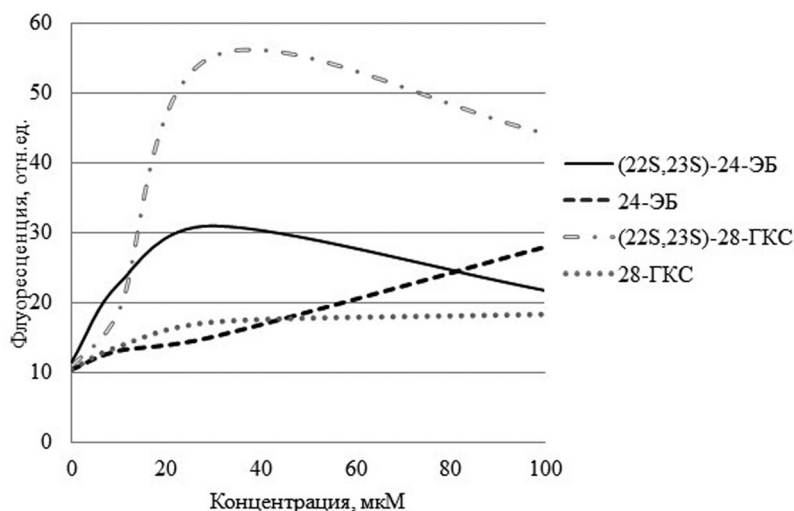


Рис. 3. Зависимость средней интенсивности флуоресценции DCF в клетках от концентрации brassinosterоидов



пролиферативной активностью, что позволяет говорить о возможной взаимосвязи между индукцией активированных форм кислорода и цитотоксичностью исследованных веществ.

Наконец отметим, что к настоящему времени накоплен значительный опыт, позволяющий рассматривать brassinостероиды в качестве потенциальных антиопухолевых средств с низкой цитотоксичностью в отношении нормальных клеток. Однако ситуация серьезно осложнена наличием у brassinостероидов широкого спектра еще до конца не ясных путей их воздействия на клеточные события животных и человека.

Результаты настоящей работы позволяют допустить, что один из путей влияния brassinостероидов на раковые клетки может заключаться в иницировании окислительного стресса, что приводит к гибели последних по АФК-зависимым механизмам.

### Список использованной литературы

1. WHO Cancer: Factsheet N. 297, February 2012.
2. Siegel, R. Cancer statistics / R. Siegel, D. Naishadham, A. Jemal // *Cancer J. Clin.* – 2012. – Vol. 62(1). – P. 10–29.
3. Cardiac side-effects of cancer chemotherapy / J. J. Monsuez [et al.] // *Int. J. Cardiol.* 2010. Vol. 144. P. 3–15.
4. Cell Death Pathways in Photodynamic Therapy of Cancer / P. Mroz [et al.] // *Cancers.* – 2011. – Vol. 3. – P. 2516–2539.
5. Khripach, V. A. Brassinosteroids. A new class of plant hormones / V. A. Khripach, V. N. Zhabinskii, A. de Groot. – San Diego: Academic Press, 1999.
6. Zhabinskii, N. Steroid plant hormones: Effects outside plant kingdom / N. Zhabinskii, N. Khripach, V. Khripach // *Steroids.* – 2015. – Vol. 97. – P. 87–97.
7. Anticancer and antiproliferative activity of natural brassinosteroids / J. Malikova [et al.] // *Phytochemistry.* – 2008. – Vol. 69. – P. 418–426.
8. Toxicity of (22R,23R)-22,23-dihydroxystigmastane derivatives to cultured cancer cells / A. Misharina [et al.] // *Steroids.* – 2010. – Vol. 75. – P. 287–294.
9. Anticancer Activities of Brassinosteroids / L. Hoffmannová [et al.] // *Brassinosteroids: Practical Applications in Agriculture and Human Health.* – 2012. – P. 84–93.
10. Взаимосвязь структура-функция при оценке антипролиферативной активности brassinостероидов в отношении раковых клеток молочной железы MCF-7 / A. G. Sysa [et al.] // *Vestnik Found Fund Res.* – 2011. – Vol. 5. – P. 56–63.
11. Van Meerloo, J. Cell Sensitivity Assays: The MTT Assay / J. Van Meerloo, G. J. Kaspers, J. Cloos // *Methods Mol. Biol.* – 2011. – Vol. 731. – P. 237–245.
12. Новый синтез (22S,23S)-гомобрассинолида / А. А. Ахрем [и др.] // *Докл. Академии наук СССР.* – 1985. – Т. 283. – С. 130–133.
13. 2,3,7,8-Tetrachlorodibenzo-p-dioxin induced cytochrome P450s alter the formation of reactive oxygen species in liver cells / S. Knerr [et al.] // *Mol. Nutr. Food Res.* – 2006. – Vol. 50. – P. 378–384.
14. Eruslanov, E. Identification of ROS using oxidized DCFDA and flow-cytometry / E. Eruslanov, S. Kusmartsev // *Methods Mol. Biol.* – 2010. – Vol. 594. – P. 57–72.
15. Reactive Oxygen Species in Vascular Formation and Development / Y. Zhou [et al.] // *Oxid. Med. Cell Longev.* – 2013. – Vol. 2. – P. 10–25.

Поступило в редакцию 14.12.2015

## БИОЛОГИЯ

УДК 575.17:343.98

С. А. КОТОВА<sup>1</sup>, В. И. РЫБАКОВА<sup>1</sup>, Т. Н. ЗАБАВСКАЯ<sup>1</sup>, Е. А. ШИЛО<sup>1</sup>, Е. А. СПИВАК<sup>1</sup>,  
И. С. ЦЫБОВСКИЙ<sup>1</sup>, К. РЕМБАЛА<sup>2</sup>, З. ЩЕРКОВСКА<sup>2</sup>

**ПОЛИМОРФИЗМ МИКРОСАТЕЛЛИТНЫХ ЛОКУСОВ X-ХРОМОСОМЫ  
ЭТНИЧЕСКИХ БЕЛОРУСОВ В КОНТЕКСТЕ СУДЕБНО-ЭКСПЕРТНОЙ  
ИДЕНТИФИКАЦИИ ЛИЧНОСТИ**

(Представлено членом-корреспондентом С. А. Усановым)

<sup>1</sup>Научно-практический центр Государственного комитета судебных экспертиз Республики Беларусь,  
Минск, Беларусь  
svetlkotova@mail.ru; Fishveronika@gmail.com; zabava\_t@mail.ru; alena.shyla@gmail.com; spivak\_e@inbox.ru;  
tsybovsky@yahoo.com

<sup>2</sup>Департамент судебной медицины, Гданьский медицинский университет, Гданьск, Республика Польша  
k.rebala@gumed.edu.pl; szczerko@gumed.edu.pl

Проведено первое обширное исследование полиморфизма X-хромосомы этнических белорусов в массиве 360 мужских и 423 женских образцов (всего 783 образца, 1206 хромосом) из 11 регионов Беларуси. В исследовании задействованы 19 STR-локусов: DXS10135, DXS8378, DXS10148, DXS7132, DXS10074, DXS10079, DXS10075, HPRTB, DXS10101, DXS10103, DXS10134, DXS7423, DXS10146, DXS8377, DXS10147, DXS9895, DXS7424, DXS7133 и GATA172D05. Определены частоты встречаемости аллелей, приведены таблицы частот аллелей для суммарного смешанного массива образцов.

*Ключевые слова:* X-хромосома, микросателлитные локусы, полиморфизм, криминалистическая идентификация.

S. A. KOTOVA<sup>1</sup>, V. I. RYBAKOVA<sup>1</sup>, T. V. ZABAUSKAYA<sup>1</sup>, A. A. SHYLA<sup>1</sup>, E. A. SPIVAK<sup>1</sup>,  
I. S. TSYBOVSKY<sup>1</sup>, K. REBALA<sup>2</sup>, Z. SZCZERKOWSKA<sup>2</sup>

**POLYMORPHISM OF X-CHROMOSOME MICROSATELLITE LOCI OF ETHNIC BELARUSIANS  
IN THE CONTEXT OF THE FORENSIC PERSONALITY IDENTIFICATION**

<sup>1</sup>Scientific and Practical Center of the State Committee of the Forensic Examinations of Belarus, Minsk, Belarus  
svetlkotova@mail.ru; Fishveronika@gmail.com; zabava\_t@mail.ru; alena.shyla@gmail.com; spivak\_e@inbox.ru;  
tsybovsky@yahoo.com

<sup>2</sup>Department of Forensic Medicine, Medical University of Gdansk, Gdansk, Poland  
k.rebala@gumed.edu.pl; szczerko@gumed.edu.pl

This is the first extensive study of the X-chromosome polymorphism of ethnic Belarusians in a set of 360 male and 423 female samples (783 samples, 1206 chromosomes in total) from 11 regions of Belarus. The study involved 19 STR-loci: DXS10135, DXS8378, DXS10148, DXS7132, DXS10074, DXS10079, DXS10075, HPRTB, DXS10101, DXS10103, DXS10134, DXS7423, DXS10146, DXS8377, DXS10147, DXS9895, DXS7424, DXS7133, and GATA172D05. The frequencies of the alleles have been determined, and the tables of allele frequencies for the pooled Belarusian population sample have been composed.

*Keywords:* X-chromosome, microsatellites, polymorphism, forensic identification.

**Введение.** Микросателлитные локусы X-хромосомы были предложены для ДНК-типирования в 1991 г., однако только один из них использовался для идентификации личности в общем ряду с локусами аутосомных хромосом (тест-система HFv, корпорация Promega) [1]. Как ДНК-маркеры половой X-хромосомы они нашли практическое приложение в технологиях ДНК-анализа следовой картины преступлений только с 2003 г. [2]. Особенностью X-хромосом является одновременное наличие независимо наследуемых локусов и локусов, входящих в группы сцепления (выделяют 4 группы сцепления). Локусы, входящие в отдельную группу сцепления, на-

следуются всей неизменной совокупностью признаков (гаплотипически). Кроме того, у мужчин все локусы X-хромосомы находятся в гемизиготном состоянии (1 непарный аллель) и передаются дочерям в виде гаплотипа, в то время как у женщин гомо- и/или гетерозиготное состояние локусов X-хромосомы (парные аллели). В мейозе у мужчин рекомбинация между X- и Y-хромосомами происходит в небольших субтеломерных регионах, называемых псевдоаутосомальными регионами. Эти области являются гомологичными, а гены и маркеры в этих регионах не выявляют сцепления с полом. В процессе кроссинговера у женщин две X-хромосомы могут обмениваться ДНК-маркерами, что делает их похожими на аутосомные локусы.

Указанные особенности наследования ДНК-маркеров X-хромосомы открывают новые возможности в криминалистической идентификации личности, поскольку позволяют решать ранее невозможные экспертные задачи, связанные главным образом с установлением биологического родства в отношении детей женского пола при отсутствии биологического образца предполагаемого отца.

Вместе с тем данные по ДНК-маркерам X-хромосомы носят разрозненный и несистемный характер. В различных лабораториях используются различные наборы ДНК-маркеров [3]. Небольшая выборка образцов из Беларуси исследовалась ранее с использованием только 4 локусов [4]. В мировом масштабе остается неизученной этно-расовая вариабельность ДНК-маркеров X-хромосомы, что также не способствует широкому их применению в судебно-экспертной работе.

**Материалы и методы исследования.** В работе исследован массив из 783 неродственных белорусов (360 мужчин и 423 женщины) из 11 регионов Беларуси. Биологические образцы собраны Институтом искусствоведения, этнографии и фольклора НАН Беларуси на основе добровольного информированного анкетирования.

Геномную ДНК выделяли из периферической крови, используя стандартную процедуру выщелачивания [5].

Для генотипирования 19 микросателлитных локусов X-хромосомы использовали 4 мультиплексные ПЦР-системы: мультиплексную систему X6 – для амплификации локусов GA-TA172D05, DXS10135, DXS7133, DXS7423, DXS7132, DXS10074; мультиплексную систему X8 – для амплификации локусов DXS8378, DXS10148, HPRTB, DXS7424, DXS8377, DXS9895, DXS10103, DXS10075; мультиплексную систему X3 – для амплификации локусов DXS10147, DXS10134, DXS10146; мультиплексную систему X2 – для амплификации локусов DXS10101, DXS10079. Реакционная смесь (конечный объем 10 мкл) включала ПЦР буфер (10 mM Трис-НСl pH 8,6, 50 mM KCl, 0,1 % Tween-20), 0,2 mM смесь дезоксинуклеозидтрифосфатов (dNTP), 1,5-2,0 mM MgCl<sub>2</sub> (1,5 mM MgCl<sub>2</sub> для мультиплексных наборов X2 и X3; 2,0 mM MgCl<sub>2</sub> для мультиплексных наборов X6 и X8), 0,75 ед. акт. Таq-полимеразы, ДНК от 0,08 до 8 нг, праймеры в концентрации от 0,07 до 0,5 мкМ. Дополнительно, ПЦР-буфер для амплификации с использованием мультиплексных наборов X2 и X3 содержал 1 M бетаин. Использовали следующие условия для амплификации: начальная денатурация в течение 3 мин при 95 °С; 5 циклов – 30 с при 96 °С; 120 с при 63 °С, 75 с при 72 °С; 25 циклов – 30 с при 94 °С; 120 с при 60 °С, 75 с при 72 °С; терминальная элонгация – 1 ч при 68 °С.

Характерное для каждого из образцов сочетание аллелей (вариантов строения молекул ДНК) выявляли путем электрофоретического разделения продуктов ПЦР в генетическом анализаторе 3500xL GeneticAnalyzer (Applied Biosystems, США). Определение размеров выявленных аллелей и соответствующих генотипов ДНК в исследуемых локусах проводили с использованием внутренних стандартов размера GeneScan-600 LIZ SizeStandard v.2.0 и специализированной программы GeneMapper ID-X.

Расчет частот встречаемости аллелей примененных маркеров, частот групп сцепления I–IV и оценка гомогенности региональных выборок методом анализа молекулярных вариаций (AMOVA) производились с использованием инструментария программных пакетов Arlequin v.3.5.1.3 (Population Genetics CPMG Lab, Швейцария) [6] и PowerStatsV12 v.2 (Promega, США).

**Результаты и их обсуждение.** Необходимость расширения панели локусов и выработки единого подхода к криминалистическому использованию ДНК-маркеров X-хромосомы очевидна. Некоторая стандартизация работы криминалистических исследований стала возможна с появлением

Т а б л и ц а 1. Частоты встречаемости аллелей микросателлитных локусов DXS8378, DXS7132, DXS10074, DXS10079, DXS10075, HPRTB, DXS10103, DXS7423, DXS10147, DXS9895, DXS7424, DXS7133, GATA172D05 в смешанном массиве этнических белорусов

Аллель	Локус													
	DXS8378	DXS7132	DXS10074	DXS10079	DXS10075	HPRTB	DXS10103	DXS7423	DXS10147	DXS9895	DXS7424	DXS7133	GATA172D05	
6			0,06645						0,21096				0,14784	
7			0,13372						0,02243			0,00415	0,00083	
8			0,00914			0,00332			0,31645			0,00083	0,18272	
9	0,02326		0,00914			0,02741			0,43937		0,00498	0,44352	0,02409	
10	0,36047		0,00166			0,00581			0,01080		0,00914	0,14120	0,28571	
11	0,34468	0,00249	0,00083			0,11130					0,00083	0,34801	0,25748	
11.2	—	—	—			0,00332*					—	—	—	
12	0,23837	0,07807	—			0,35465				0,00166	0,03073	0,05066	0,09801	
13	0,03322	0,28821	0,00581		0,05233	0,29983	0,00166	0,10299		0,30648	0,08970	0,01163	0,00332	
14		0,37542	0,01744		0,01163	0,14037	—	0,33140		0,34551	0,23339			
15		0,20432	0,06811	0,02658	0,00083	0,04651	0,01661	0,40033		0,22259	0,24086			
16		0,04236	0,18272	0,03738	0,15615	0,00748	0,11130	0,15365		0,10050	0,26329			
16.2		—	—	—	0,00083		—	0,01163		0,00831	—			
17		0,00914	0,28571	0,08887	0,45847		0,09884			0,01329	0,09635			
18			0,15116	0,13206	0,29319		0,21013			0,00166	0,02492			
18.2			—	—	—		0,00083				—			
19			0,06562	0,23505	0,02160		0,38870				0,00498			
19.2			—	—	—		0,00083				—			
20			0,00997	0,25166	0,00498		0,14950				0,00083			
21			0,00166	0,15532			0,02160							
22				0,05482										
23				0,01329										
24				0,00498										

Пр и м е ч а н и я. \* – наличие аллеля обусловлено делецией в 2 п.н. вне тандемной области; в наборе Investigator Argus X-12 не выявляется, поскольку изменена структура праймеров.

нием коммерческих наборов реагентов: набор Mentype Argus X-UL (Biotype AG, Германия, 2003) для одновременного генотипирования 4 локусов и локуса определения пола амелогенин; Mentype Argus X-8 (8 STR-локусов, 2005) и Investigator Argus X-12 (2009–2010). Однако даже набор Argus X-12 включает всего 12 локусов, что не всегда обеспечивает достаточный уровень достоверности экспертного вывода.

Нами проведено первое исследование полиморфизма 19 STR-локусов X-хромосомы: **DXS10135, DXS8378, DXS10148 – DXS7132, DXS10074, DXS10079, DXS10075 – HPRTB, DXS10101, DXS10103 – DXS10134, DXS7423, DXS10146, DXS8377, DXS10147 – DXS9895, DXS7424, DXS7133** и *GATA172D05* у населения Беларуси.

Из 19 исследованных локусов 12 входят в состав коммерческой тест-системы Investigator Argus X-12 (выделены жирным шрифтом); 15 локусов входят в группы сцепления (ГС I–IV, разделены знаком «→»), 4 локуса в группы сцепления не включаются (выделены курсивом).

Расчет частот аллелей 19 локусов X-хромосомы произведен для трех массивов образцов: массива женских образцов ( $n = 423$ , хромосом 846), массива мужских образцов ( $n = 360$ , хромосом 360) и суммарного массива образцов (1206 хромосом) этнических белорусов. Расчет частот встречаемости гаплотипов групп сцепления проведен для массива мужских генотипов.

Частоты встречаемости аллелей для суммарного (смешанного) массива образцов приведены в табл. 1, 2. Генотипы исследованного массива мужских образцов содержатся в приложениях к статье [10].

Т а б л и ц а 2. Частоты встречаемости аллелей микросателлитных локусов **DXS10148, DXS10135, DXS10101, DXS10134, DXS10146, DXS8377** в смешанном массиве этнических белорусов

Аллель	Лocus					
	DXS10148	DXS10135	DXS10101	DXS10134	DXS10146	DXS8377
13.3	0,00332					
16	–	0,00166				
17	0,00083	0,01246				
17.1	–	0,00166				
18	0,12375	0,03571				
18.1	–	0,00581				
19	0,03239	0,05482				
19.1	–	0,01827				
20	0,00831	0,05482				
20.1	0,00083	0,01993				
20.3	–	0,00083				
21	0,00083	0,08721				
21.1	0,00083	0,01910				
21.2	–	0,00083	0,00083			
21.3	–	0,00166	–			
22	0,00581	0,09967	–			
22.1	0,01163	0,01744	–			
23	0,04070	0,07309	–		0,00083	
23.1	0,06146	0,00664	–		–	
24	0,03239	0,09801	–		0,01329	
24.1	0,15532	0,00249	–		–	
24.2	–	–	0,00083		0,00083	
24.3	–	0,00083	–		–	
25	0,00166	0,08721	–		0,05980	
25.1	0,18522	0,00083	–		–	
25.2	0,00083	–	0,00831		–	
25.3	–	–	0,00083		–	
26	–	0,08721	–		0,12043	
26.1	0,15033	0,00166	–		–	
26.2	0,00083	–	0,02492		–	

Аллеель	Локус					
	DXS10148	DXS10135	DXS10101	DXS10134	DXS10146	DXS8377
27	–	0,06146	0,01080		0,14784	
27.1	0,08389	–	–		–	
27.2	–	–	0,04983		–	
28	–	0,04734	0,01578		0,17110	
28.1	0,06229	–	–		–	
28.2	–	–	0,12542		0,00083	
29	–	0,02492	0,04236	0,00083	0,17525	
29.1	0,02658	–	–	–	–	
29.2	–	–	0,13289	–	0,00083	
30	–	0,02326	0,05233	0,00083	0,07973	
30.1	0,00748	–	–	–	–	
30.2	–	–	0,15615	–	–	
31	0,00249	0,02658	0,07724	0,00332	0,04485	
31.2	–	–	0,11296	–	0,00083	
32	–	0,01329	0,07143	0,01578	0,00498	
32.2	–	–	0,04236	–	0,00332	
33	–	0,00664	0,03987	0,03405	0,00083	
33.2	–	–	0,01495	0,00083	0,00083	
34	–	0,00332	0,01661	0,10880	0,00083	
34.2	–	–	0,00166	–	0,00083	
35	–	0,00083	0,00083	0,19020	–	
36	–	0,00166	–	0,26661	–	
36.1	–	–	–	0,00083	–	
36.2	–	–	–	0,00249	–	
36.3	–	–	–	0,00498	–	
37	–	0,00083	–	0,15698	–	
37.2	–	–	–	0,00249	0,00166	
37.3	–	–	–	0,00581	–	
38	–	–	–	0,06977	0,00083	
38.2	–	–	–	0,00166	0,00166	
38.3	–	–	–	0,00664	–	
39				0,01578	0,00083	0,00166
39.2			0,00083	0,00083	0,04817	–
39.3				0,05897	–	–
40				0,00166	0,00083	0,00249
40.2				–	0,01412	–
40.3				0,02492	–	–
41					–	0,00914
41.2					0,00831	
42						0,02990
43						0,04983
44						0,03821
45						0,06977
46						0,06728
47						0,08638
48						0,11960
49						0,11130
50						0,09884
51						0,09136
52						0,09219
53						0,05233
54						0,02990
55						0,02076
56						0,01329
57						0,01080
58						0,00498



Наиболее полиморфными из 19 исследуемых X-STR локусов являются локусы DXS10146 (32 аллельных варианта) и DXS10135 (31 аллель). Далее, в порядке уменьшения аллельного разнообразия, располагаются локусы DXS10134 (27 аллелей), DXS10101 (24 аллеля), DXS10148 (23 аллеля), DXS8377 (20 аллелей). Для остальных 13 X-STR локусов число аллелей варьирует от 5 (DXS8378, DXS7423, DXS10147) до 14 (DXS10074).

Наиболее гетерозиготным маркером является локус DXS10135, за ним следуют локусы DXS8377, DXS10101, DXS10146, DXS10148 и DXS10134. Схожие характеристики были получены для локусов DXS10135, DXS8377, DXS10101 и DXS10134 при исследовании польской [7], хорватской [8] и немецкой популяций [9].

Аллельное распределение для 13 из 19 исследованных полиморфных локусов X-хромосомы соответствует равновесию Харди–Вайнберга (HWE, Hardy–Weinberg equilibrium): значение  $P$  превышает уровень значимости, равный 0,05. Локусы DXS7424, DXS8377, DXS10103, DXS10134, DXS10146 и GATA172D05 демонстрируют отклонение от равновесия ( $P \leq 0,05$ ), однако значения становятся статистически незначимыми после введения поправки Бонферрони.

Значения дискриминирующего потенциала PD (power of discrimination, вероятность того, что два случайно выбранных индивидуума будут иметь различные генотипы) у диплоидных и гаплоидных носителей ( $PD_f$  и  $PD_m$ ) максимальны для локуса DXS10135, в котором выявлен 31 аллель. Для менее полиморфных локусов DXS10147 (5 аллелей), DXS7133 (7 аллелей) определены минимальные значения  $PD_f$  и  $PD_m$  соответственно. Суммарное значение дискриминирующего потенциала для исследованных локусов составляет 0,9999999999999996 и 0,99999997 для женских (две X-хромосомы) и мужских (одна X-хромосома) соответственно.

Оценка эффективности по ряду других «криминалистических» показателей также выявила достаточную информативность всех 19 локусов в решении широкого спектра экспертных задач, связанных с идентификацией личности или с установлением биологического родства.

Анализ гомогенности региональных субпопуляций (AMOVA) выявил статистически значимую дифференциацию северо-западных выборок, обусловленную локусами DXS7132, DXS7133, DXS8378 и DXS10147. Для выяснения природы данной дифференциации необходимы дополнительные исследования с расширением состава территориальных выборок. Сравнительное исследование полиморфизма X-STR-маркеров (8 локусов) в группе славянских этносов (белорусы, поляки, чехи, хорваты) не выявило каких-либо указаний на существование лингвистической и/или географической дифференциации [10], что на нынешнем этапе дает возможность использовать полученные значения частот аллелей локусов X-хромосомы в судебно-экспертном анализе биологических образцов лиц славянского происхождения.

**Заключение.** В результате проведенной работы впервые определены частоты встречаемости аллелей 19 STR-локусов X-хромосомы у населения Беларуси и создана экспериментальная возможность использования расширенной панели локусов X-хромосомы при проведении экспертных исследований. Полученные научные сведения создают возможность расчета вероятности случайного совпадения искомого генотипа в криминалистических исследованиях, а также могут быть использованы в мониторинге генетической структуры населения, сравнительной оценке генофондов, этногеографических и других исследованиях.

### Список использованной литературы

1. DNA Typing and genetic mapping with trimeric and tetrameric tandem repeats / A. Edwards [et al.] // *Am. J. Hum. Genet.* – 1991. – Vol. 49. – P. 746–756.
2. Use of X-linked markers for forensic purposes / R. Szibor [et al.] // *Intern. J. of Legal Medicine.* – 2003. – Vol. 117. – P. 67–74.
3. Szibor, R. Forensic ChrX Research / R. Szibor, J. Edelmann, S. Hering. – 2012. [Electronic resource]. – Mode of access: <http://xdb.qualitytype.de/xdb/calculate.jsf>. – Date of access: 29.10.2013.
4. Polymorphism of four X-chromosomal STR loci in Belarusians and Slovaks / L. Cybulska [et al.] // *Forensic Sci. Int. Genet. (Supp. Ser. 1)*. – 2008. – P. 145–146.
5. A simple salting out procedure for extracting DNA from human nucleated cells / S. A. Miller [et al.] // *Nucleic Acids Res.* – 1988. – Vol. 16. – P. 1215.
6. Arlequin (version 3.0): an integrated software package for population genetics data analysis / L. Excoffier [et al.] // *Evolutionary bioinformatics online.* – 2005. – Vol. 1. – P. 47–50.

7. Diversity of 15 human X chromosome microsatellite loci in Polish population / S. Łuczak [et al.] // Forensic Sci. Int. Genet. – 2011. – Vol. 5. – P. e71–e77.
8. Analysis of 8 X-chromosomal markers in the population of central Croatia / B. Gršković [et al.] // Croat Med. J. – 2013. – Vol. 54. – P. 238–247.
9. Population genetic evaluation of eight X-chromosomal short tandem repeat loci using Mentype Argus X-8 PCR amplification kit / D. Becker [et al.] // Forensic Sci. Int. Genet. – 2008. – Vol. 2. – P. 69–74.
10. Variation of X-STR marker in Belarus within the context of their genetic diversity in Europe / K. Rębała [et al.] // Forensic Sci. Int. Genet. – 2015. – Vol. 16. – P. 105–111.

*Поступило в редакцию 09.11.2015*

УДК 577.21:635.523:635.21

А. В. КОНДРАТЮК<sup>1</sup>, Л. Н. КОЗЛОВА<sup>2</sup>, В. А. КОЗЛОВ<sup>2</sup>,  
член-корреспондент А. В. КИЛЬЧЕВСКИЙ<sup>1</sup>

## ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ДНК-МАРКЕРОВ В СЕЛЕКЦИИ ПО БИОХИМИЧЕСКИМ ПРИЗНАКАМ КАЧЕСТВА КЛУБНЕЙ КАРТОФЕЛЯ

<sup>1</sup>Институт генетики и цитологии НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
aliaks.k@mail.ru; kilchev@presidium.bas-net.by

<sup>2</sup>Научно-практический центр НАН Беларуси по картофелеводству и плодоовощеводству, Самохваловичи, Беларусь  
l-kozlova@tut.by; wiko@mail.ru

На примере тетраплоидных межвидовых гибридов белорусской селекции рассмотрена возможность применения восьми ДНК-маркеров в селекции картофеля по биохимическим признакам качества (содержанию крахмала и качеству хрустящего картофеля). Показана возможность отбора ценных генотипов на основе применения ДНК-маркеров, ассоциированных с высокой крахмалистостью и качеством хрустящего картофеля.

*Ключевые слова:* картофель, ДНК-маркеры, инвертаза, фосфорилаза крахмала, крахмалистость, качество чипсов.

A. V. KONDRATIUK<sup>1</sup>, L. N. KOZLOVA<sup>2</sup>, V. A. KOZLOV<sup>2</sup>, A. V. KILCHEVSKY<sup>1</sup>

## VALIDATION OF THE DNA MARKERS EFFICIENCY IN POTATO BREEDING FOR TUBER QUALITY TRAITS

<sup>1</sup>Institute of Genetics and Cytology of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
aliaks.k@mail.ru; kilchev@presidium.bas-net.by

<sup>2</sup>Research and Practical centre of the National Academy of Sciences of Belarus for potato, fruit and vegetable growing,  
Samohvalovichi, Belarus  
l-kozlova@tut.by; wiko@mail.ru

Validation of 8 allele-specific markers associated with potato tuber quality traits (starch content and chip quality) was performed in tetraploid breeding populations of the Belarusian selection. The possibility of the DNA-based marker application for selection of genotypes with better tuber quality traits is shown.

*Keywords:* potato, DNA markers, invertase, starch phosphorylase, starch content, chip quality.

**Введение.** Одним из приоритетных направлений селекции картофеля является создание сортов с определенным биохимическим составом клубней. Необходимость получения таких сортов связана с тем, что выход и качество продуктов переработки во многом зависит от качества исходного сырья. На степень пригодности картофеля к переработке из числа биохимических признаков наибольшее влияние оказывает содержание крахмала и редуцирующих сахаров [1–3].

В настоящее время в качестве одного из перспективных путей повышения эффективности отбора по биохимическим признакам качества клубней картофеля рассматривается внедрение в селекционную практику методов молекулярно-генетического анализа. Маркер-ассоциированная селекция (МАС) – интенсивно развивающееся направление селекции, основывающееся на использовании полиморфизма молекул ДНК для проведения отбора [4–10].

Результатом исследований полиморфизма генов метаболизма углеводов (инвертазы сахарозы, фосфорилазы крахмала, сахарозосинтазы и др.) и его взаимосвязи с фенотипом стала разработка ДНК-маркеров по таким признакам, как содержание крахмала и качество хрустящего картофеля [4; 10].

Основным препятствием на пути более широкого применения ДНК-маркеров является значительная подверженность количественных признаков воздействию условий окружающей сре-

ды. В результате установленные закономерности между полиморфизмом ДНК и фенотипом в одних условиях эксперимента (набор генотипов, условия их выращивания и хранения) могут оказаться частным случаем и не могут быть экстраполированы на другие совокупности генотипов. В связи с этим нам представляется важным изучить эффективность описанных в литературе ДНК-маркеров на примере межвидовых гибридов картофеля белорусской селекции. В случае если установленные ранее закономерности верны, они должны находить подтверждение на любых других достаточно объемных совокупностях генотипов.

**Материалы и методы исследования.** В качестве объекта исследования выступили межвидовые гибриды картофеля, полученные в лаборатории исходного материала Научно-практического центра НАН Беларуси по картофелеводству и плодоовощеводству, в количестве 89 образцов. Предметом исследования являлся полиморфизм по генам инвертазы и фосфорилазы крахмала, а также его взаимосвязь с содержанием крахмала и баллом качества хрустящего картофеля.

Биохимический анализ выполнен в лаборатории биохимической оценки картофеля Научно-практического центра НАН Беларуси по картофелеводству и плодоовощеводству после трех месяцев хранения (в нерегулируемых условиях). Содержание крахмала определяли по удельному весу. Качество хрустящего картофеля определяли согласно методическим рекомендациям по специализированной оценке сортов картофеля [11].

Выделение ДНК из клубней картофеля осуществляли с помощью набора «Нуклеосорб» (Праймтех, Беларусь), согласно протоколу производителя. В исходный протокол были внесены следующие изменения:

1. Объем лизирующего раствора увеличен до 600 мкл/образец;

2. Инкубирование гомогенизированной растительной ткани проводилось при 25 °С вместо рекомендованных 65 °С в течение 2 ч.

Количество и качество ДНК было проверено на спектрофотометре, с последующим разведением до конечной концентрации 50 нг/мкл.

Полимеразную цепную реакцию проводили в объеме 15 мкл при следующем составе реакционной смеси: 1X буфер для Tornado Taq-полимеразы, 0,2 мМ каждого из dNTP, 0,2 мкМ каждого из праймеров, 100 нг ДНК и 0,6 U Tornado Taq-полимеразы (Праймтех, Беларусь). В работе использовали олигонуклеотиды, приведенные в [4; 10]. Полимеразную цепную реакцию проводили при следующих температурных условиях: 1 цикл: 95 °С – 15 мин; 30 циклов: 99 °С – 3 с,  $T_{отж}$  – 20 с, 72 °С – 30 с; 1 цикл: 72 °С – 2 мин.

Электрофорез ПЦР-продуктов проводили в агарозном геле 1 %-ной концентрации в трис-боратном буфере (2 мМ ЭДТА, 89 мМ борной кислоты, 89 мМ Трис, pH 8,3) при напряжении 3 В/см. В агарозный гель перед полимеризацией добавляли бромистый этидий в концентрации 0,5 мкг/мл.

Статистический анализ выполнен с использованием программы SPSS17. Статистическая значимость отличий средних значений содержания крахмала выполнена по *t*-критерию Стьюдента, в случае с балльным выражением качества хрустящего картофеля использован критерий Манна–Уитни.

**Результаты и их обсуждение.** По результатам генотипирования все селекционные образцы были разделены на группы по наличию или отсутствию отдельных ДНК-маркеров (InvGF4d, InvGF4b, Pain1-8c, Pain1<sub>prom</sub>-d/e, Stp23-8b, StpL-3e, StpL-3b, AGPsS-10a). Поскольку приведенные выше маркеры доминантны, по каждому из них сформировано по 2 группы. Результаты сравнения усредненных показателей содержания крахмала и балла качества хрустящего картофеля в пределах выделенных групп представлены в табл. 1, 2.

Из восьми ДНК-маркеров только два (StpL-3b и Stp23-8b) позволили разграничить анализируемую выборку на группы со статистически значимыми отличиями в содержании крахмала. В среднем селекционные образцы, для которых свойственно присутствие в геноме маркеров StpL-3b и Stp23-8b, содержали соответственно 20,3 и 20,2 % крахмала, что более чем на 2 % выше показателя альтернативных групп. Для наиболее информативных ДНК-маркеров наблюдалась невысокая частота встречаемости (менее 20 %).

По баллу качества хрустящего картофеля наиболее эффективными оказались маркеры AGPsS-10a и StpL-3e.

Т а б л и ц а 1. Результаты сравнения содержания крахмала в контрастных по ДНК-маркерам группах селекционных образцов картофеля

Группа	Число генотипов	Частота встречаемости маркера	Среднее содержание крахмала, %	Разница средних, %	Оценка значимости <i>P</i>
1	2	3	4	5	6
InvGF4d (+)	49	0,55	18,5	+0,1	0,819
InvGF 4d (-)	40		18,4		
StpL-3b (+)	16	0,18	20,3	+2,2	0,006
StpL-3b (-)	73		18,1		
InvGF4b (+)	65	0,73	18,4	-0,4	0,602
InvGF4b (-)	24		18,8		
AGPsS-10a (+)	52	0,58	18,7	+0,6	0,241
AGPsS-10a (-)	37		18,1		
StpL-3e (+)	28	0,32	17,9	-0,8	0,117
StpL-3e (-)	61		18,7		
Pain1-8c (+)	33	0,37	18,7	+0,4	0,547
Pain1-8c (-)	56		18,3		
Pain1 <sub>prom</sub> -d/e (+)	52	0,58	18,8	+0,8	0,102
Pain1 <sub>prom</sub> -d/e (-)	37		18,0		
Stp23-8b (+)	17	0,19	20,2	+2,1	0,008
Stp23-8b (-)	72		18,1		

Т а б л и ц а 2. Результаты сравнения балльного выражения качества хрустящего картофеля в контрастных по ДНК-маркерам группах селекционных образцов картофеля

Группа	Число генотипов	Частота встречаемости маркера	Средний балл	Разница в баллах	Оценка значимости <i>P</i>
1	2	3	4	5	6
InvGF4d (+)	47	0,53	6,4	-0,3	0,473
InvGF 4d (-)	42		6,7		
StpL-3b (+)	17	0,19	7,3	+0,9	0,077
StpL-3b (-)	72		6,4		
InvGF4b (+)	63	0,71	6,4	-0,5	0,322
InvGF4b (-)	26		6,9		
AGPsS-10a (+)	52	0,58	6,2	-1,1	0,033
AGPsS-10a (-)	37		7,1		
StpL-3e (+)	59	0,66	7,2	+1,0	0,016
StpL-3e (-)	30		6,2		
Pain1-8c (+)	36	0,41	6,5	-0,1	0,943
Pain1-8c (-)	53		6,6		
Pain1 <sub>prom</sub> -d/e (+)	52	0,58	6,5	-0,1	0,903
Pain1 <sub>prom</sub> -d/e (-)	37		6,6		
Stp23-8b (+)	19	0,21	7,1	+0,7	0,161
Stp23-8b (-)	70		6,4		

Кроме оценки взаимосвязи отдельных ДНК-маркеров с фенотипом, таким же образом проанализированы и комбинации маркеров (табл. 3). Нами были рассмотрены не все возможные сочетания маркеров, а лишь тех из них, для которых установлена статистическая значимость отличий фенотипов альтернативных групп при индивидуальной оценке (StpL-3b / Stp23-8b и AGPsS-10a / StpL-3e).

Переход в анализе от отдельных маркеров к их сочетаниям (StpL-3b / Stp23-8b и AGPsS-10a / StpL-3e) привел к более сильной дифференциации селекционных образцов по целевым признакам. Наблюдаемая разница по содержанию крахмала между формируемыми группами по StpL-3b / Stp23-8b составила 4 %. В среднем на 2 балла оказался выше балл качества хрустящего картофеля в группе образцов AGPsS-10a(-) / StpL-3e (+), в сравнении с AGPsS-10a (+) / StpL-3e (-). Отбор по двум маркерам оказался более строгой формой отбора. Из общего числа анализируемых генотипов менее 8 % отличались наличием комбинации маркеров.

Т а б л и ц а 3. Результат сравнения содержания крахмала и балльного выражения качества хрустящего картофеля в контрастных по комбинации ДНК-маркеров группах селекционных образцов

Группа	Число генотипов	Среднее содержание крахмала, %	Оценка значимости <i>P</i>	Число генотипов	Средний балл хрустящего картофеля	Оценка значимости <i>P</i>
StpL-3b (+) / Stp23-8b (+)	6	21,9	0,011	–	–	–
StpL-3b (–) / Stp23-8b (–)	62	17,9		–	–	
AGPsS-10a(–) / StpL-3e (+)	–	–	–	7	8,0	0,016
AGPsS-10a (+) / StpL-3e (–)	–	–		42	6,0	

Результаты сравнения эффектов ДНК-маркеров, установленных в данном эксперименте и описанных ранее, представлены в табл. 4. Под «эффектом маркера» понимается знак разницы средних значений признака в альтернативных по наличию маркера группах (столбец 5 в табл. 1 и 2).

Т а б л и ц а 4. Сравнение эффектов ДНК-маркеров

Маркер	Эффект в данном эксперименте		Эффект по [4; 10]	
	Крахмал, %	Балл хрустящего картофеля	Крахмал, %	Балл хрустящего картофеля
InvGF4d	ns	ns	↓	↑
StpL-3b	↑	ns	↓	↓
InvGF4b	ns	ns	↓	ns
AGPsS-10a	ns	↓	↓	↓
StpL-3e	ns	↑	↑	ns
Pain1-8c	ns	ns	ns	↑
Pain1 <sub>prom</sub> -d/e	ns	ns	ns	↑
Stp23-8b	↑	ns	↑	ns

П р и м е ч а н и е: ns – эффект статистически незначим.

Для ДНК-маркеров Stp23-8b (содержание крахмала) и AGPsS-10a (балл качества хрустящего картофеля) был подтвержден установленный ранее эффект. Отрицательный эффект маркера AGPsS-10a по признаку «содержание крахмала» на анализируемой выборке не подтвержден. Не удалось установить эффекты маркеров InvGF4b, InvGF4d, Pain1-8c, Pain1<sub>prom</sub>-d/e. Маркер StpL-3b на данной выборке положительно ассоциирован с содержанием крахмала, что не согласуется с результатами, представленными ранее [10].

Недостаточная эффективность отдельных ДНК-маркеров говорит о значительном влиянии на данные признаки факторов внешней среды. Как мы полагаем, в рамках маркер-ассоциированной селекции картофеля на пригодность к промышленной переработке и повышение содержания крахмала целесообразно использовать те ДНК-маркеры, для которых взаимосвязь с селективируемым признаком находит подтверждение на примере различных выборочных совокупностей генотипов в как можно большем числе сред испытания. К числу таковых маркеров можно отнести Stp23-8b, AGPsS-10a и StpL-3e. Поскольку эффекты данных маркеров не нивелируются генотип-средовым взаимодействием, можно предположить, что они представляют собой несколько более существенные в функциональном отношении структурные особенности генов метаболизма углеводов. Применение подходов маркер-ассоциированной селекции в отношении биохимических признаков качества следует рассматривать не как альтернативу традиционной оценке по фенотипу, а как дополнительный способ получения информации о селективируемой популяции.

**З а к л ю ч е н и е.** Подтверждение взаимосвязи между полиморфизмом по генам метаболизма углеводов и значениями селективируемых признаков позволяет прийти к выводу о целесообразности использования ДНК-маркеров для проведения отбора на повышение содержания крахмала и качества хрустящего картофеля. По результатам проведенных исследований подтверждена эффективность маркеров Stp23-8b (содержание крахмала), AGPsS-10a и StpL-3e (балл качества хрустящего картофеля), а также их комбинаций.



### Список использованной литературы

1. Симаков, Е. А. Генетические основы селекции картофеля на улучшение питательной ценности / Е. А. Симаков, И. М. Яшина // Защита картофеля. – 2011. – № 1. – С. 2–5.
2. Незаконова, Л. В. Повышение результативности отбора генотипов картофеля по пригодности к переработке на хрустящий картофель на ранних этапах селекции / Л. В. Незаконова, А. П. Пинголь // Защита картофеля. – 2011. – № 1. – С. 8–13.
3. Козлова, Л. Н. Оценка картофеля по биохимическим и технологическим показателям качества клубней в селекции сортов, пригодных для промышленной переработки: дис. ... канд. с/х наук: 06.01.05 / Л. Н. Козлова. – Минск, 2005. – 134 л.
4. DNA variation at the invertase locus *InvGE/GF* is associated with tuber quality traits in populations of potato breeding clones / Li Li [et al.] // Genetics. – 2005. – Vol. 170. – P. 813–821.
5. Natural DNA variation at candidate loci is associated with potato chip color, tuber starch content, yield and starch yield / Li Li [et al.] // Theor. Appl. Genet. – 2008. – Vol. 116. – P. 1167–1181.
6. From QTL to candidate gene: Genetical genomics of simple and complex traits in potato using a pooling strategy / B. Kloosterman [et al.] // BMC Genomics. – 2010. – Vol. 10. – P. 158–173.
7. Novel candidate genes influencing natural variation in potato tuber cold sweetening identified by comparative proteomics and association mapping / M. Fischer [et al.] // BMC Plant Biology. – 2010. – Vol. 13. – P. 113–127.
8. Natural diversity of potato (*Solanum tuberosum*) invertases / A. Draffehn [et al.] // BMC Plant Biology. – 2010. – Vol. 10. – P. 271–285.
9. Systematic analysis of potato acid invertase genes reveals that a cold-responsive member, *Stvac1NV1*, regulates cold-induced sweetening of tubers / X. Liu [et al.] // Mol. Genet. Genomics. – 2011. – Vol. 286. – P. 109–118.
10. Validation of candidate gene markers for marker-assisted selection of potato cultivars with improved tuber quality / Li Li [et al.] // Theor. Appl. Genet. – 2013. – Vol. 126, N 4. – P. 1039–1052.
11. Методические рекомендации по специализированной оценке сортов картофеля: утв. М-вом с/х и продов. Респ. Беларусь, 31.01.03. – Минск: Респ. науч.-практ. центр по картофелеводству и плодоовощеводству, 2003. – 70 с.

*Поступило в редакцию 03.02.2016*

## НАУКИ О ЗЕМЛЕ

УДК 504.3.054

С. В. КАКАРЕКА, Ю. Г. КОКОШ

ОЦЕНКА ВОЗДЕЙСТВИЯ ДЕРЕВООБРАБАТЫВАЮЩИХ ПРЕДПРИЯТИЙ  
НА УРОВНИ СОДЕРЖАНИЯ ФОРМАЛЬДЕГИДА В АТМОСФЕРНОМ ВОЗДУХЕ

(Представлено академиком В. Ф. Логиновым)

Институт природопользования НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
sk001@yandex.ru; y-kokosh@mail.ru

Приведены новые результаты изучения содержания формальдегида в воздухе у источников выделения и в атмосферном воздухе в зоне воздействия предприятий Беларуси, производящих древесные слоистые материалы и формальдегидные смолы. Установлено, что уровни содержания формальдегида в атмосферном воздухе в зоне воздействия предприятий по производству древесностружечных плит (ДСП) и карбомидоформальдегидных смол выше по сравнению с заводами по производству фанеры, древесноволокнистых плит (ДВП и МДФ). Установлена устойчивая зависимость содержания формальдегида в атмосферном воздухе в зоне от объема выбросов. Оценена связь содержания формальдегида в атмосферном воздухе с расстоянием от источников выбросов и условиями рассеяния.

*Ключевые слова:* формальдегид, измерение, выбросы, атмосферный воздух, рассеяние, деревообрабатывающая промышленность.

S. V. KAKAREKA, Y. G. KOKOSH

IMPACT ASSESSMENT OF WOOD-PROCESSING FACILITIES  
ON FORMALDEHYDE CONCENTRATIONS IN ATMOSPHERIC AIRInstitute for Nature Management of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
sk001@yandex.ru; y-kokosh@mail.ru

In the paper new results of investigation of formaldehyde in the air at the sources of release and in the ambient air at the impact zones of wood-processing facilities of Belarus producing laminated wood materials and formaldehyde resins are given. It is shown that highest average concentrations of formaldehyde at sources of release are typical for particleboard and resins production at out of date equipment. It is revealed that levels of formaldehyde content in atmospheric air near particleboard and resins production facilities are higher compared to plywood, fiberboard and MDF production. Stable relation of formaldehyde content in atmospheric air with release rate was established. Relation of content of formaldehyde in atmospheric air with the distance from the source of release and dispersion conditions was estimated.

*Keywords:* formaldehyde, measurement, emission, air, dispersion, wood-processing industry.

**Введение.** Формальдегид относится к приоритетным веществам, загрязняющим атмосферный воздух городов, и оказывает разнообразное токсическое воздействие на живые организмы. Помимо общетоксического действия, у него выявлено наличие канцерогенных свойств [1–4].

Содержание формальдегида в атмосфере формируется в результате динамического равновесия между источниками и стоками. Формальдегид является сильно реакционноспособным веществом с периодом полувыведения из атмосферы от 1,5 часов до нескольких суток [1; 5]. Период полураспада формальдегида зависит от уровня ультрафиолета, концентрации других загрязнителей.

К важным промышленным источникам формальдегида относится деревообрабатывающая промышленность. В настоящее время от деревообрабатывающего производства в атмосферный воздух поступает около 40 % валовых выбросов формальдегида от стационарных источников. Формальдегид в данной отрасли выделяется при производстве прессованных и слоистых мате-

© Какарека С. В., Кокосх Ю. Г., 2016.

риалов (фанеры, ДСП, ДВП, МДФ) как следствие применения связующих смол (фенолоформальдегидных, карбамидоформальдегидных и др.). Основными источниками выделения формальдегида при изготовлении смол являются реакторы варки смолы, усреднители смолы, при производстве продукции деревообработки – гидравлические прессы, клеевые вальцы [5].

В связи с увеличением мощностей предприятий после начавшейся в 2007 г. модернизации деревообрабатывающего производства отмечается рост выбросов формальдегида от деревообрабатывающей промышленности с 40 т в 2007 г. до 75 т в 2014 г.

На территории Беларуси регулярные наблюдения за содержанием формальдегида в атмосферном воздухе осуществляются в рамках Национальной системы мониторинга окружающей среды. В настоящее время наблюдения за концентрациями формальдегида проводятся на 52 стационарных станциях в 17 городах Беларуси. Однако станции расположены без привязки к источникам и позволяют оценить только общегородской уровень загрязнения атмосферного воздуха формальдегидом. По данным стационарных наблюдений, практически во всех городах фиксируются концентрации формальдегида, превышающие установленные нормативы ПДК. Средняя концентрация формальдегида в Беларуси по данным мониторинга в 2012 г. составила 7,2 мкг/м<sup>3</sup> [6].

В Европе измерения содержания формальдегида осуществляются в основном на фоновых территориях. В рамках Программы ЕМЕП с 1999 г. концентрация формальдегида (в составе других ЛОС) замеряется на 10 станциях, расположенных в Чехии, Финляндии, Франции, Германии. Средние фоновые концентрации за период с 1999 по 2010 г. составили 1,2 мкг/м<sup>3</sup> [5; 7]. Наибольшее число опубликованных результатов измерений формальдегида относится к городам США (Детройт, Сиэтл, Батон-Руж, Майами, Чикаго, Кливленд, Хьюстон и др.) [2; 8].

В литературе большое внимание уделено исследованиям содержания формальдегида в воздухе рабочей зоны и вреда здоровью работников. По данным [9–12], концентрации формальдегида в воздухе на предприятиях по производству продукции деревообработки могут достигать 3,2 мг/м<sup>3</sup>. Много исследований также посвящено выявлению уровней содержания формальдегида внутри помещений, особенно новых зданий, содержащих материалы, выделяющие формальдегид [12]. Однако вопросы оценки уровней содержания формальдегида в атмосферном воздухе в районе воздействия промышленных предприятий, в том числе деревообрабатывающих, являются мало изученными. Указывается [12], что в промышленной зоне в Китае средние концентрации формальдегида составляли 14,1 мкг/м<sup>3</sup>. Концентрации формальдегида в атмосферном воздухе Южной Кореи в промышленной зоне составили 23,7 мкг/м<sup>3</sup> с диапазоном значений от 2,6 до 51,9 мкг/м<sup>3</sup> [11]. По данным ряда исследований, средние концентрации формальдегида в атмосферном воздухе в зоне воздействия предприятий по производству строительных древесных материалов достигали 42 мкг/м<sup>3</sup> [9].

Это определило следующие задачи для проведения экспериментальных исследований:

оценка уровней содержания формальдегида у источников его выделения и в атмосферном воздухе на различном удалении от источников выбросов предприятиями по производству карбамидоформальдегидных синтетических смол и древесных слоистых материалов (ДСП, ДВП, МДФ, фанера);

оценка связей уровней концентраций формальдегида в атмосферном воздухе с мощностью предприятий и условиями рассеяния.

**Материалы и методы исследования.** Всего в Беларуси производство карбамидоформальдегидных синтетических смол и слоистых древесных материалов осуществляется на 11 предприятиях. В качестве объектов исследования выбраны 8 производств на 5 предприятиях, расположенных в Минской, Могилевской и Брестской областях. Из них на двух предприятиях осуществляется производство фанеры суммарной годовой мощностью 40 тыс. м<sup>3</sup> в год, на двух – ДСП мощностью 260 тыс. усл. м<sup>3</sup>, на двух – производство синтетических смол, на одном – производство МДФ мощностью 60 тыс. м<sup>3</sup>, на одном – ДВП мощностью 25 млн усл. м<sup>2</sup>. Из указанных 8 производств, 5 относились к старым или не модернизированным (обновление оборудования до 2000 г.) и 3 – к новым и прошедшим модернизацию. Суммарные выбросы формальдегида от указанных объектов в 2013 г. составили 33 т (от 0,05 до 8,4 т), что составило более 80 % выбросов формальдегида от деревообрабатывающих предприятий Беларуси.

Исследованные предприятия характеризуются высотой источников выбросов формальдегида от 2,5 до 46,2 м. Преобладают низкие источники (до 17 м). На их долю приходится более 60 % суммарных выбросов формальдегида от предприятий, на источники высотой более 35 м – 32 %. Максимальная интенсивность выбросов формальдегида – 0,59 г/с, в период проведения измерений интенсивность выбросов составляла от 0,02 до 0,53 г/с.

Экспериментальные работы включали:

отбор проб воздуха аспиратором на выходе из источника выделения, на промышленной площадке и за ее пределами;

замеры метеорологических параметров: температуры воздуха, влажности, атмосферного давления, скорости и направления ветра;

сбор информации о производственном процессе, параметрах источников выбросов, ландшафтно-географических условиях местности.

Отбор проб воздуха осуществлялся на расстоянии до 600 м от источников выбросов преимущественно с подветренной стороны. При выборе точек опробования учитывались направление ветра и условия рассеивания.

Для выбора точек измерений содержания формальдегида в атмосферном воздухе зоны воздействия деревообрабатывающих предприятий использованы функции горизонтальной и вертикальной дисперсии примесей Паскуилла–Гиффорда [13]. Горизонтальная и вертикальная дисперсия примеси Паскуилла–Гиффорда определялась как функция расстояния от источника для каждого из классов стабильности Паскуилла. Измерения выполнялись под факелом рассеивания с учетом нахождения расчетной зоны максимальных расчетных концентраций насколько возможно, учитывая доступность той или иной точки.

Определение массовой концентрации формальдегида в отобранных пробах проводилось фотокориметрическим методом с использованием стандартной методики с фенилгидразином [14].

Экспериментальные исследования содержания формальдегида в зоне воздействия источников выбросов формальдегида выполнялись в период с 2011 по 2014 г. в теплый период года (апрель–октябрь). Всего отобрано и проанализировано 688 проб, из них 225 – непосредственно у источников выделения формальдегида, 183 пробы – на промышленных площадках предприятий, 280 – за пределами промплощадок предприятий.

Исследования содержания формальдегида непосредственно у источников выделения внутри зданий цехов проводилось на 6 из 8 рассмотренных объектов: 1 – по производству фанеры, 2 – по производству ДСП, 2 – по производству карбомидоформальдегидных смол, 1 – по производству МДФ. На фанерном заводе измерения проводились на этапе нанесения карбомидоформальдегидной смолы на листы шпона вальцами и на этапе прессования фанеры. При производстве МДФ и ДСП исследования проводились в трех местах производственной линии: на складе компонентов связующего, на этапе пропитывания древесного волокна и стружки связующим и этапе формирования ковра и прессования. При производстве карбомидоформальдегидных смол экспериментальные исследования проводились возле реакторов варки смолы и отстойников.

**Результаты и их обсуждение.** Результаты исследований содержания формальдегида у источников выделения на исследованных объектах приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1. Содержание формальдегида в воздухе у источников выделения на деревообрабатывающих предприятиях, мкг/м<sup>3</sup>

Производство	Количество проб	Диапазон	Средняя
Производство фанеры, Минская обл.	43	8,2–107,8	31,7
Производство МДФ, Минская обл.	30	5,8–240,8	77,1
Производство карбомидоформальдегидных смол, Минская обл.	64	8,2–1078,8	197,1
Производство карбомидоформальдегидных смол, Брестская обл.	32	51,8–715,4	285,4
Производство ДСП, Брестская обл.	36	23,9–828,3	295,3
Производство широкоформатной ДСП, Брестская обл.	20	63,7–269,5	140,7
Всего	225	5,8–1078,8	182,9

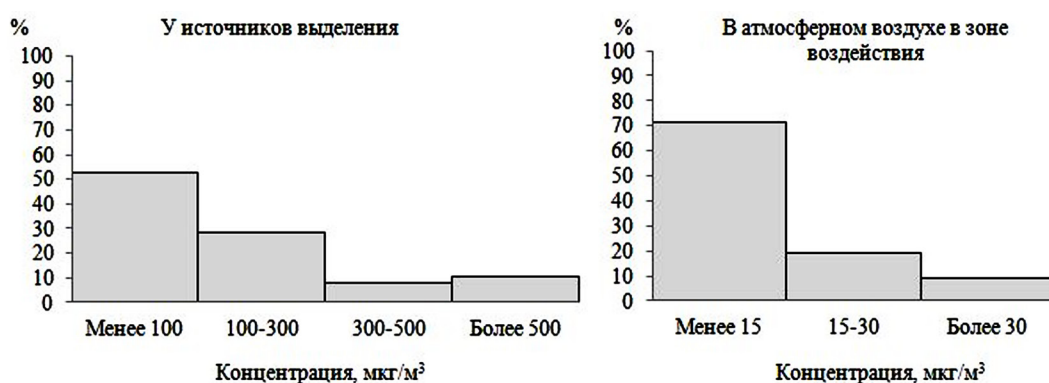


Рис. 1. Распределение проб по содержанию формальдегида в воздухе у источников выделения и в атмосферном воздухе в зоне воздействия деревообрабатывающих предприятий

Наибольшие средние концентрации получены для предприятий по производству ДСП и варке синтетических смол на устаревшем оборудовании.

Среднее содержание формальдегида у источников выделения составило 183 мкг/м³ с диапазоном замеренных значений от 5,8 до 1078,8 мкг/м³. В более чем половине отобранных проб (52,9 %) содержание формальдегида находилось в диапазоне 0–100 мкг/м³, в 28,4 % – 100–300 мкг/м³, в 8,0 % – 300–500 мкг/м³, в 10,7 % – более 500 мкг/м³ (рис. 1).

В табл. 2 в сводном виде представлены результаты экспериментальных исследований содержания формальдегида в атмосферном воздухе в зоне воздействия источников выбросов. Средние концентрации формальдегида по производствам составили 5,8–40,8 мкг/м³.

Т а б л и ц а 2. Концентрации формальдегида в атмосферном воздухе в зоне воздействия деревообрабатывающих предприятий по результатам экспериментальных исследований

Предприятие	Максимальный выброс формальдегида, г/с	Количество проб	Концентрация, мкг/м³	
			Диапазон	Средняя
Производство фанеры, Минская обл.	0,40	159	2,5–98,5	11,1
Производство МДФ, Минская обл.	0,26	29	2,2–10,2	5,8
Производство ДВП, Минская обл.	0,08	75	0–28,1	11,5
Производство карбомидоформальдегидных смол, Минская обл.	0,05	80	2,3–39,6	10,2
Производство ДСП, Брестская обл.	0,37	63	4,8–183,0	40,8
Производство широкоформатной ДСП, Брестская обл.	0,59	20	8,3–81,6	34,4
Производство фанеры, Могилевская обл.	0,27	37	2,7–36,5	16,3
Всего		463	0–183,0	16,0

Наиболее высокие уровни максимально разовых концентраций формальдегида получены на старых предприятиях. Даже с увеличением мощностей предприятий, концентрации формальдегида на новых заводах в среднем на 40 % ниже, чем на старых.

Выполненные исследования показали, что содержание формальдегида в зоне воздействия источников выбросов наблюдалось от значений ниже пределов обнаружения метода до 183,0 мкг/м³. В среднем содержание формальдегида в атмосферном воздухе составило 16,0 мкг/м³. Содержание формальдегида в 71,4 % отобранных проб воздуха находилось в диапазоне 0–15 мкг/м³, в 19,2 % – 15–30 мкг/м³, в 9,4 % – более 30 мкг/м³ (рис. 1).

Наиболее высокие средние концентрации формальдегида получены у источников при производстве ДСП (289 мкг/м³) и карбомидоформальдегидных смол (227 мкг/м³). Аналогично и в атмосферном воздухе, наиболее высокие средние концентрации формальдегида получены в районе воздействия производств ДСП (32,3 мкг/м³) и синтетических смол (20,1 мкг/м³) (рис. 2).

Проведены сопряженные во времени исследования связи уровня содержания формальдегида внутри производственных помещений у источников его выделения с уровнем содержания формальдегида в атмосферном воздухе в зоне воздействия его источников. Выявлена довольно тес-



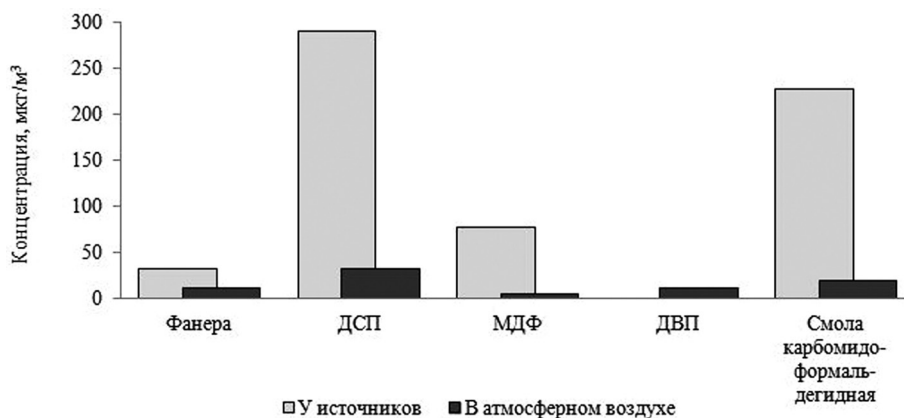


Рис. 2. Сравнение средних концентраций формальдегида у источников и в атмосферном воздухе для различных производств

ная связь (коэффициент корреляции равен  $R = 0,64$ ), что обусловлено преобладанием низких источников выбросов, а также наличием неорганизованных источников выделения формальдегида (открытые окна, ворота цехов и др.) (рис. 3, а).

*Зависимость концентраций формальдегида в атмосферном воздухе от объема выбросов.* Объем выбросов формальдегида от источников в деревообрабатывающей промышленности зависит от типа используемой синтетической смолы и ее расхода (т. е. объема производимой продукции). Выявлена прямая линейная зависимость полученных в результате экспериментов средних концентраций формальдегида в атмосферном воздухе в зоне воздействия источников выбросов от величины выбросов формальдегида (коэффициент корреляции равен  $R = 0,75$ ) (рис. 3, б).

*Зависимость концентраций формальдегида в атмосферном воздухе от расстояния и направления ветра.* Для оценки влияния направления ветра на концентрации формальдегида при исследованиях учитывалось направление ветра относительно источников выбросов формальдегида. Полученные концентрации формальдегида с подветренной стороны источников выбросов в среднем составили  $21,1 \text{ мкг/м}^3$ , что в 1,7–2,6 раз выше, чем с наветренной (рис. 4, табл. 3).

Наиболее высокие концентрации формальдегида получены на небольшом (200 м) расстоянии от основных его источников (рис. 4).

В основном измерения выполнялись при нестабильном состоянии приземного слоя атмосферы – более 70 % проб относятся к классам стабильности А и В Паскуилла (невысокая скорость ветра и достаточно высокая интенсивность солнечного излучения). Это означает, что в период отбора проб условия рассеивания были хорошими, при которых максимальные концентрации достигаются на небольшом удалении от источников.

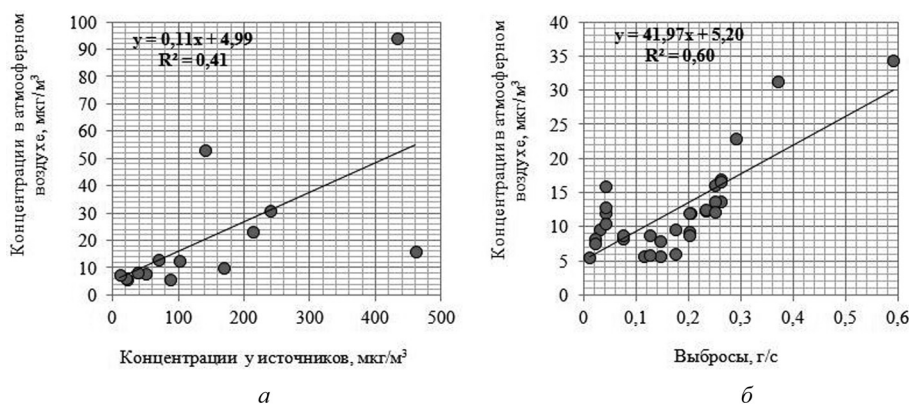


Рис. 3. Зависимость среднего содержания формальдегида в атмосферном воздухе от его уровня возле источников выделения (а) и от величины выбросов формальдегида (б)



Т а б л и ц а 3. Средние концентрации формальдегида в зоне воздействия источников выбросов формальдегида

Производство	Средние концентрации, мкг/м <sup>3</sup>		Соотношение
	подветренная сторона	наветренная сторона	
Фанерный завод, Минская обл.	14,5	7,1	2,0
Производство МДФ, Минская обл.	7,9	4,8	1,7
Производство ДВП, Минская обл.	14,1	6,2	2,3
Производство карбомидоформальдегидных смол, Минская обл.	15,1	7,4	2,0
Производство ДСП, Брестская обл.	42,3	16,4	2,6
Производство широкоформатной ДСП, Брестская обл.	45,8	20,5	2,2
Производство фанеры, Могилевская обл.	20,5	11,4	1,8
Среднее	21,1	8,2	2,6

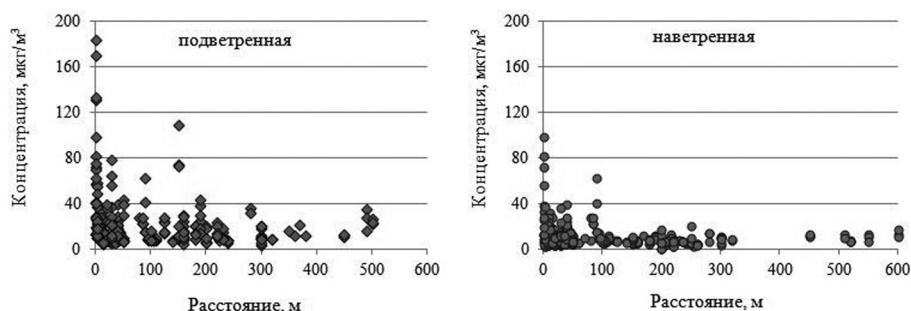


Рис. 4. Зависимость концентраций формальдегида в атмосферном воздухе в зоне воздействия источников выбросов от расстояния до источника выбросов

Согласно полученным результатам, в целом по всем рассмотренным объектам наиболее высокие концентрации формальдегида в атмосферном воздухе в зоне воздействия источников выбросов деревообрабатывающих производств получены при нестабильных условиях (средние концентрации от 20,9 мкг/м<sup>3</sup> – для класса А до 4,1 мкг/м<sup>3</sup> – для класса D).

Полученные результаты были сопоставлены с величинами расчетных концентраций формальдегида, аппроксимированных простой гауссовой моделью рассеяния примеси [13] на основании данных о высоте источника, мощности выброса и условий рассеяния. Максимальная расчетная приземная концентрация формальдегида составила для первых четырех классов стабильности (А–D) соответственно 122,2, 183,3, 217,9, 364,4 мкг/м<sup>3</sup> (без учета наложения факелов рассеяния источников). С учетом мощности источника и возможного наложения факелов рассеяния концентрации до 380 мкг/м<sup>3</sup> при указанных условиях рассеяния могут наблюдаться для ряда производств на расстояниях до 140 м, до 244 мкг/м<sup>3</sup> – на расстояниях до 300 м.

Замеренные концентрации имеют достаточно высокую сходимость с ориентировочными расчетными данными для предприятий по производству ДСП, МДФ и смол; в то же время замеренные концентрации формальдегида в атмосферном воздухе в районе воздействия предприятий по производству фанеры существенно ниже расчетных, что может быть обусловлено большой погрешностью расчетов рассеяния для низких (2,5–12 м) источников выбросов на предприятиях по производству фанеры.

**Закключение.** В ходе проведенных исследований установлено, что наибольшие средние концентрации формальдегида у источников выделения получены при производстве ДСП и варке карбомидоформальдегидных смол на устаревшем оборудовании. Проведенные исследования показали, что уровни содержания формальдегида в атмосферном воздухе в зоне влияния предприятий по производству ДСП и карбомидоформальдегидных смол выше по сравнению с заводами по производству фанеры, МДФ и ДВП. Выявлены устойчивые связи содержания формальдегида в атмосферном воздухе с мощностью выбросов.

Выявлено значительное влияние на фиксируемые концентрации формальдегида в зоне воздействия условий рассеяния.

Замеренные концентрации в целом укладываются в диапазон концентраций, полученных приближенно-расчетными по простой гауссовой модели, с учетом сложности «попадания» точки измерения на ось факела рассеяния.

### Список использованной литературы

1. *Воробьева, И. А.* Исследование причин формирования повышенных концентраций формальдегида в атмосфере городов / И. А. Воробьева // Тр. ГГО им. А. И. Воейкова. – Спб., 2008. – Вып. 557. – С. 206–216.
2. ATSDR. 1999. Toxicological Profile for Formaldehyde (Final Report). NTIS Accession №. PB99-166654. – Atlanta, GA: Agency for Toxic Substances and Disease Registry.
3. Environmental Health Criteria 89. Formaldehyde. – Geneva. WHO, 1989. – 182 p.
4. Final Report on the Identification of Formaldehyde as a Toxic Air Contaminant / Prepared by the Staffs of the Air Resources Board and the Office of Environmental Health Hazard Assessment July 1992. – 17 p.
5. *Какарека, С. В.* Анализ и оценка источников выбросов формальдегида в атмосферный воздух на территории Беларуси / С. В. Какарека, Ю. Г. Ашурко // Природопользование. – 2012. – Вып. 21. – С. 75–82.
6. Состояние природной среды Беларуси. Экологический бюллетень. 2013 год / под общ. ред. акад. В. Ф. Логинова. – Минск, 2014. – 362 с.
7. VOC measurements 2012–2013 EMEP/CCC-Report 4/2015 / S. Solberg, C. Hörger, A. Claude, C. Plass-Dülmer, S. Reimann, S. Sauvage.
8. *Williamson, J.* Seattle Air Toxics Studies. Air Toxics Monitoring and Data Analysis / J. Williamson, H. Westberg // Workshop October 29–30. – Chicago, IL, 2001. – 39 p.
9. *Жук, П. М.* Исследование загрязнения окружающей среды формальдегидом на предприятиях строительных материалов / П. М. Жук // Вестн. МГСУ. – 2013. – № 4. – С. 102–112.
10. Investigation of carbonyl compounds in air from various industrial emissions sources / K.-H. Kim [et al.] // Chemosphere. – 2008. – Vol. 70. – P. 807–820.
11. The Pollution Status of Atmospheric Carbonyls in a Highly Industrialized Area / R. Pal [et al.] // J. Hazard. Mater. – 2008. – 153. – P. 1122–1135.
12. Formaldehyde in China: Production, consumption, exposure levels, and health effects / X. Tang [et al.] // Environment International. – 2009. – N 35. – P. 1210–1224.
13. *Turner, D.* Workbook of atmospheric dispersion estimates / D. Turner. – CRC Pres LLC, 1994.
14. Сборник методик выполнения измерений, допущенных к применению при выполнении измерений в области охраны окружающей среды: в 3 ч. Ч. 3 / Министерство природных ресурсов и охраны окружающей среды Республики Беларусь, РУП «БелНИЦ «Экология»; ред. В. В. Анцукевич [и др.]. – 4-е изд., перераб. и доп. – Минск: Бел НИЦ «Экология», 2011. – С. 26–31.

Поступило в редакцию 28.03.2016

## ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 622.285;622.861.213.24

Член-корреспондент В. Я. ПРУШАК

## ДЕФОРМАЦИЯ КОНТУРА ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК СТАРОБИНСКОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ КАЛИЙНЫХ СОЛЕЙ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ГЛУБИНАХ ЗАЛОЖЕНИЯ

*Солигорский Институт проблем ресурсосбережения с Опытным производством, Солигорск, Беларусь  
ipr@sipr.by*

Изучено влияние глубины заложения подготовительных и капитальных выработок на характер и интенсивность деформирования их контура в условиях второго и третьего горизонтов Старобинского месторождения калийных солей. Показано, что при прогнозе устойчивости выработок необходимо учитывать не только глубину их заложения, но и агрегатную прочность пород, вмещающих выработки, размеры поперечного сечения выработок и наличие в них мер охраны в виде компенсационных щелей. Разработаны формулы для расчета времени устойчивого состояния выработок с учетом указанных выше факторов.

*Ключевые слова:* горный массив, глубина заложения, горная выработка, контур, соляная порода, прочность, горное давление.

V. Ya. PRUSHAK

## DEFORMATION OF THE EDGE OF THE WORKINGS OF THE STAROBIN DEPOSIT OF POTASH SALTS AT DIFFERENT LOCATION DEPTHS

*Soligorsk Institute of Problems of Resources's Saving with Experienced Production, Soligorsk, Belarus  
ipr@sipr.by*

The article deals with the study of the influence of the location depth of development and main workings on the behavior and deformation intensity of their edge in the conditions of the second and third horizons of the Starobin deposit of potash salts. It is shown that while forecasting the stability of workings, it is necessary to consider not only the location depth, but also the aggregate rock strength, the cross-section size of workings and the availability of compensation slots as the ways of protection. Formulas have been developed to calculate the time of the steady state of workings taking into account the above-mentioned factors.

*Keywords:* mountain massif, the depth of laying, mine working, outline, salt rock, strength, mountain pressure.

**Введение.** Основными формами проявления горного давления в выработках Старобинского месторождения калийных солей являются ползучесть вмещающих их приконтурных пород, а также расслоение и отслоение по глинистым прослойкам. Опыт разработки месторождения свидетельствует, что одним из основных факторов, влияющих на указанные проявления горного давления, является глубина заложения выработок.

В настоящем сообщении рассматриваются результаты исследования влияния указанного фактора на деформирование контура выработок, расположенных на различных глубинах второго и третьего горизонтов Старобинского месторождения калийных солей.

**Материалы и методы исследования.** Для определения влияния на характер деформирования пород фактора глубины наблюдения проводились преимущественно в одиночных выработках с пролетом 3 м (рис. 1), охраняемых и не охраняемых компенсационными щелями.

Инструментальные наблюдения в таких выработках организовывали сразу после их проходки, продолжительность этих наблюдений зависела от применения в них мер охраны и проходки влияющих выработок. Как правило, время таких наблюдений составляло 40–60 суток, а в отдельных выработках – до 360 суток. Замеры и обработку результатов выполняли с использованием методик, изложенных в работах [1–3], используя следующие исходные расчетные формулы:

комплексный агрегат вида  $\delta K_{\text{в}}$ :

$$\delta K_{\text{в}} = \frac{0,3U_{\text{об}}}{3R(t_2^{0,3} - t_1^{0,3})} \frac{E}{\gamma H}, \quad (1)$$

где  $U_{\text{об}}$  – конвергенция стенок выработки за интервал времени  $[t_2 - t_1]$ , м;  $E$  – модуль упругости пород, МПа;  $H$  – глубина заложения выработки, м;  $\gamma$  – средняя плотность вышележащих по-



Рис. 1. Горная выработка с пролетом 3 м

род,  $\text{МН/м}^3$ ;  $R$  – усредненный радиус выработки, м;  $\delta$  – размерный параметр ядра ползучести,  $\text{с}^{\alpha-1}$ ;  $\alpha$  – безразмерный параметр ядра ползучести ( $\alpha = 0,7$ );  $K_{\text{в}}$  – коэффициент взаимовлияния выработки;

конвергенция стенок для установившегося режима деформирования, за который принимаем 2-й год существования выработки:

$$U_{\text{бб } 2\text{Г}} = V_{\text{бб уст}} = 0,574\delta R H K_{\text{в}}, \text{ мм}; \quad (2)$$

конвергенция кровли с почвой за первый год:

$$U_{\text{КП } 1\text{Г}} = U_{\text{бб } 1\text{Г}} 0,5 K_{\text{КП}} = 1,24\delta R H K_{\text{в}} K_{\text{КП}}, \text{ мм}, \quad (3)$$

где  $K_{\text{КП}}$  – коэффициент неравномерности смещения контура;

конвергенция кровли с почвой для установившегося режима:

$$V_{\text{КП уст}} = U_{\text{бб } 2\text{Г}} K_{\text{КП}} = 0,574\delta R H K_{\text{в}} K_{\text{КП}}, \text{ мм}; \quad (4)$$

время устойчивого состояния незакрепленной выработки:

$$t = (U_{\text{КП доп}} - U_{\text{КП } 1\text{Г}}) / V_{\text{КП уст}}, \text{ лет}, \quad (5)$$

где  $U_{\text{КП доп}}$  – величина допустимой конвергенции кровли с почвой, мм.

**Результаты и их обсуждение.** Проявления свойств ползучести соляных пород вокруг выработок происходят в виде смещения этих пород внутрь выработки. Как известно, ползучесть соляных пород в зависимости от уровня нагрузки и их прочностных свойств может протекать в трех стадиях: затухающей, линейной и незатухающей, т. е. прогрессирующей ползучести. При первой стадии ползучесть соляных пород происходит без нарушения их сплошности. При второй и третьей стадиях ползучести происходит разрыхление, увеличение объема (разуплотнение), нарушение сплошности соляных пород, вследствие чего в окрестности контура выработок особенно быстро на третьей стадии образуются заколы и вывалы. Поэтому для прогноза устойчивости выработок крайне важно знать, на какой стадии ползучести происходит деформирование выработок в текущий момент времени, при каких условиях ползучесть вмещающих их пород переходит в прогрессирующую стадию.

При испытании на длительную прочность образцов В. С. Ливенским установлено [4; 5], что переход из стадий затухающей или линейной в стадию прогрессирующей ползучести осуществляется при достижении предела длительной прочности  $\sigma_{\text{сж}}^{\infty} = 0,68\sigma_{\text{сж}}$  (где  $\sigma_{\text{сж}}$  – «мгновенная» прочность образца на одноосное сжатие). Если не принимать во внимание образование на контуре выработки концентрации напряжений (а с течением времени напряжения на контуре выработки, заложенной в соляных породах, существенно уменьшаются) и в качестве нагрузки принять  $\sigma_{\text{сж}} = \gamma H$  (где  $\gamma$  – усредненный объемный вес вышележащих пород,  $\gamma = 21 \text{ кН/м}^3$ ), можно ориентировочно определить глубину  $H^{\infty}$ , при которой будет достигнут предел длительной прочности приконтурных пород на сжатие. При агрегатной прочности соляных пород  $\sigma_{\text{сж}} = 28 \text{ МПа}$  приконтурные породы перейдут в стадию прогрессирующей ползучести на глубине  $H^{\infty} = 0,68\sigma_{\text{сж}} / \gamma = 0,68 \cdot 28 / 0,021 = 906 \text{ м}$ . При агрегатной прочности соляных пород  $\sigma_{\text{сж}} = 26 \text{ МПа}$  приконтурные породы перейдут в стадию прогрессирующей ползучести на глубине  $H^{\infty} = 840 \text{ м}$ .

Однако переносить результаты лабораторных исследований в натурные условия без дополнительных исследований прочностных свойств пород в массиве неправомерно, кроме того, определить в натуральных условиях уровень концентрации напряжений в приконтурных породах выработок довольно сложно. Поэтому граница начала прогрессирующей ползучести пород нами определялась в натуральных условиях, по изменению характера деформирования контура в одиночных выработках, находящихся вне зоны влияния очистных работ.

Проявлениями горного давления при расслоении и отслоении пород по глинистым прослойкам являются прогиб кровли, пучение почвы. Эти проявления горного давления могут быть зафиксированы на основании сравнения результатов натуральных замеров смещения кровли  $\Delta U_{\text{к}}$  кон-



вергенции кровли с почвой  $\Delta U_{кп}$  и стенок выработок  $\Delta U_{\sigma\sigma}$ . В случае, если величина конвергенции кровли с почвой или смещения кровли выработок превышает аналогичные показатели для стенок более, чем в 2 раза (т. е.  $\Delta U_{кп} / \Delta U_{\sigma\sigma} \geq 2$ ,  $2\Delta U_{к} / \Delta U_{\sigma\sigma} \geq 2$ ) [6], можно говорить о наличии этих проявлений горного давления, а при превышении в 5 раз можно утверждать об их существенной роли в разрушении выработки [7].

Для определения влияния на характер деформирования пород фактора глубины наблюдения проводились преимущественно в одиночных выработках с пролетом 3 м и не охраняемых компенсационными щелями. В качестве примера на рис. 2 приведены результаты наблюдений за деформированием контура транспортной сбойки № 6, пройденной на глубине 790 м. Данная выработка в период наблюдений охранялась лишь щелью в почве, замеры в ней осуществлялись с момента проходки в течение 350 суток. Кровля данной выработки располагалась под 0,25 м защитной пачки верхнего сильвинитового слоя.

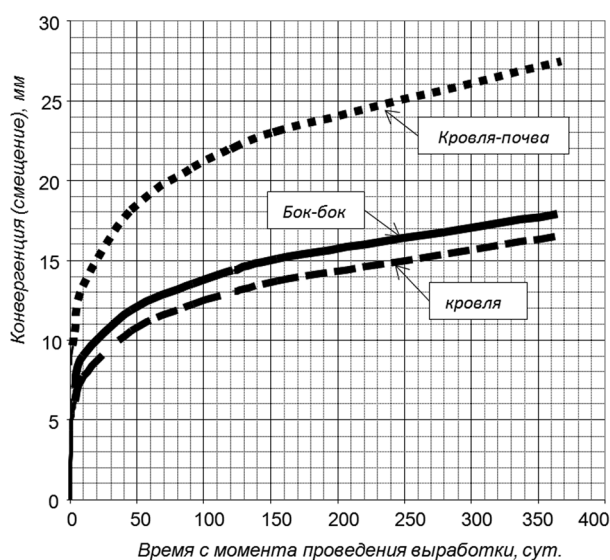


Рис. 2. Характер деформирования контура выработки транспортной сбойки № 6 во времени в районе станции 71 (глубина  $H = 790$  м)

Как видно на рис. 2, для данной выработки характерно превышение скорости деформирования контура в вертикальном направлении по сравнению с горизонтальным в 1,5 раза, коэффициенты, характеризующие неравномерность смещения контура, составят  $K_{кп} = 3$ ;  $K_{к} = 2,2$ , что позволяет сделать вывод о наличии существенных расслоений в почве и незначительных расслоений, отслоений пород в кровле. Характер деформирования кровли и стенок – затухающий во времени, что позволяет сделать вывод о деформировании пород контура выработки в стадии затухающей ползучести. Уровень нагруженности приконтурных пород в данной выработке без учета концентрации напряжений составит:  $\gamma H / \sigma_{сж} = 0,021 \text{ МН/м}^3 \cdot 790 \text{ м} / 28 \text{ МПа} = 0,59$ .

Агрегат  $\delta\gamma HE^{-1}$ , включающий в себя параметр ползучести  $\delta$  и рассчитанный по конвергенции стенок с помощью (1), составит  $\delta\gamma HE^{-1} = 3,09 \cdot 10^{-6} c^{\alpha-1}$ . Параметр ползучести  $\delta$  при  $\alpha = 0,7$  для пород на контуре этой выработки для глубины  $H = 790$  м составляет  $\delta = 0,00279 c^{\alpha-1}$ .

Расчетное время устойчивого состояния данной выработки, не охраняемой щелями и не попадающей в зону влияния очистных работ и соседних выработок, определенное с помощью формул (2), (4), (5), составляет 7,7 лет.

Аналогичное исследование было выполнено в отношении выработки, заложенной в более слабых породах (агрегатная прочность пород  $\sigma_{сж} = 26 \text{ МПа}$ ), выше верхнего сильвинитового слоя на 0,55–0,65 м. Агрегат  $\delta\gamma HE^{-1}$ , рассчитанный по конвергенции стенок с помощью (1), составит  $\delta\gamma HE^{-1} = 4,03 \cdot 10^{-6} c^{\alpha-1}$ . Параметр ползучести  $\delta$  при  $\alpha = 0,7$  для пород на контуре этой выработки для глубины  $H = 800$  м составляет  $\delta = 0,0036 c^{\alpha-1}$ . Расчетное время устойчивого состояния данной выработки вне зоны влияния очистных работ, соседних выработок и без охраны щелями, определенное с помощью (2), (4), (5), составит 7 лет. Как показали расчеты, параметр ползучести одиночной выработки  $\delta$ , расположенной частично выше сильвинитового пласта, т. е. в более слабых породах, на 30 % больше, чем у выработки, заложенной в пласте. Уровень нагруженности приконтурных пород  $\gamma H / \sigma_{сж}$  при этом вырастает на 8 %.

Приведенные примеры иллюстрируют, что даже при достижении глубины 800 м ползучесть контура выработок находится на затухающей стадии.

Аналогичным образом определяли параметры ползучести  $\delta\gamma HE^{-1}$ ,  $\delta$  и уровень нагружения приконтурных пород  $\gamma H / \sigma_{сж}$  для других выработок, заложенных на 2 и 3 горизонтах. Значения этих параметров приведены на рис. 3.

По полученным данным получена эмпирическая зависимость (корреляционное отношение составляет  $\eta = 0,85$ ), которая имеет вид

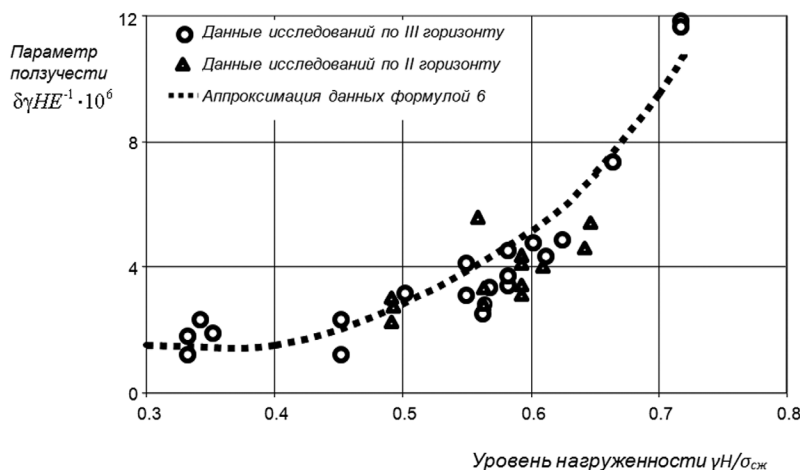


Рис. 3. Графики зависимости деформационно-реологического показателя  $\delta\gamma HE^{-1}$  от уровня нагруженности  $\gamma H / \sigma_{сж}$

$$\delta\gamma HE^{-1} \cdot 10^6 = \begin{cases} 1,5c^{\alpha-1} & \text{при } 0,3 < \gamma H / \sigma_{сж} \leq 0,4, \\ 1,5 \exp(5,95(\gamma H / \sigma_{сж} - 0,4))c^{\alpha-1} & \text{при } \gamma H / \sigma_{сж} > 0,4. \end{cases} \quad (6)$$

Так, согласно этой зависимости, с увеличением глубины  $H$  от 400 до 750 м и агрегатной прочности пород  $\sigma_{сж} = 28$  МПа (при этом уровень нагрузки  $\gamma H / \sigma_{сж} \in [0,30; 0,56]$ ), комплексный агрегат  $\delta\gamma HE^{-1}$  изменяется в пределах  $1,5 \cdot 10^{-6} - 4 \cdot 10^{-6} c^{\alpha-1}$ , а параметр ползучести на контуре одиночной выработки при  $E = 1,5 \cdot 10^4$  МПа изменяется в узких пределах:  $\delta \in [0,0024; 0,0038] c^{\alpha-1}$ . Средние значения параметра ползучести составляют  $\delta' = 0,0031 c^{\alpha-1}$ . Эта величина соответствует параметру ползучести для одиночных выработок, расположенных на глубине 680 м. Именно это обстоятельство позволяет сделать вывод о том, что с ростом глубины в интервале  $H \in [400; 750]$  м происходит незначительный рост скорости деформирования контура, вызванный изменением ползучести.

С достижением глубин  $H_1 = 800$  м и  $H_2 = 950$  м при неизменной агрегатной прочности пород  $\sigma_{сж} = 28$  МПа параметр ползучести соответственно составит  $\delta_1 = 0,0035 c^{\alpha-1}$ ,  $\delta_2 = 0,0092 c^{\alpha-1}$ , что выше  $\delta'$  соответственно в 1,4 и в 2,5 раза и указывает на развитие нелинейных деформаций ползучести контура. Скорости деформирования контура выработок на этих глубинах по сравнению с глубиной 680 м вырастут в 2 и 6 раз соответственно. Время устойчивого состояния выработок без охраны их щелями уменьшится с 20 лет соответственно до 8 и 3 лет.

На основании зависимости (6) сделан вывод: при условии, если агрегатная прочность пород  $\sigma_{сж}$  с увеличением глубины  $H$  останется неизменной и для выработок, пройденных в пласте, составит  $\sigma_{сж} = 28$  МПа, то к критическим будут относиться глубины  $H \geq 900$  м. При этом уже на глубине 900 м скорость деформирования контура будет выше в 1,4 раза по сравнению с глубиной 800 м, а при достижении глубины 950 м она возрастет в 2 раза. Время устойчивого состояния этих выработок без охраны их щелями на глубинах 950 м не превысит 1,4 года. При охране данных выработок щелями время их устойчивого состояния вне влияния других выработок и очистных работ уменьшится с 17 лет (при  $H = 800$  м) соответственно до 8 (при  $H = 900$  м) и 4 (при  $H = 950$  м) лет.

При расположении выработки выше пласта при  $\sigma_{сж} = 26$  МПа критическими будут являться глубины  $H \geq 840$  м. В этих выработках даже при охране их щелями время устойчивого состояния с учетом влияния соседних выработок, но без учета влияния очистных работ по сравнению с достигнутой глубиной 800 м уменьшится с 17 лет (при  $H = 800$  м) до 9 (при  $H = 900$  м) лет и 6 (при  $H = 950$  м) лет соответственно.

Таким образом, очевидно, что фактор ползучести пород на глубинах 840–900 м для выработок может стать определяющим в их разрушении.

Для использования полученной ранее зависимости (6) в практических целях с помощью (4) и (6) ее преобразовали в скорость конвергенции «кровля–почва» в установившийся период дефор-



мирования. Результаты этого преобразования приведены в виде графиков зависимости скорости конвергенции «кровля–почва» в установившемся период деформирования от уровня нагруженности приконтурных пород  $\gamma H / \sigma_{сж}$ . При этом нами рассматривались выработки, заложенные под защитной пачкой 0,15–0,25 м верхнего сильвинитового слоя, как охраняемые компенсационными щелями, нарезаемыми в кровле, так и неохраняемые.

Как видно на рис. 4, с увеличением уровня нагруженности пород до  $0,75\gamma H / \sigma_{сж}$  (что соответствует глубине 1000 м при  $\sigma_{сж} = 28$  МПа) скорость конвергенции возрастает довольно существенно для выработок без охраны, и в 1,4 раза медленнее – с охраной их щелями. Очевидно, что при охране выработок на больших глубинах роль компенсационных щелей существенно возрастает. Скорость конвергенции кровли с почвой  $V_0$  для выработок без охраны описываются зависимостью вида

$$V_0 = 0,158 \exp(5,95 \gamma H / \sigma_{сж}). \quad (7)$$

Для выработок, охраняемых компенсационной щелью в кровле, уравнение  $V_0 = f(\gamma H / \sigma_{сж})$  будет иметь следующий вид:

$$V_0 = 0,1 \exp(5,95 \gamma H / \sigma_{сж}). \quad (8)$$

**Закключение.** Анализ деформирования контура выработки показал, что при прогнозе устойчивости выработок необходимо учитывать не только глубину их заложения  $H$ , а также агрегатную прочность пород, вмещающих выработки  $\sigma_{сж}$ , размеры поперечного сечения выработок и наличие в них мер охраны в виде компенсационных щелей. При этом первые два фактора удобно представлять в виде комплексного показателя уровня нагруженности пласта  $\gamma H / \sigma_{сж}$ . Все эти факторы можно учесть с помощью (3), (6)–(8).

В результате анализа результатов исследований установлено, что при уровне нагруженности  $\gamma H / \sigma_{сж} \geq 0,4$  деформирование пород из затухающей стадии переходит в стадию линейной, а при  $\gamma H / \sigma_{сж} \geq 0,65–0,7$  в стадию прогрессирующей ползучести. При агрегатной прочности пород, вмещающих выработку  $\sigma_{сж} = 28$  МПа (т. е. при заложении выработки под 0,25 м верхнего сильвинитового слоя) границы перехода между стадиями соответствуют глубинам 550 и 900 м. При  $\sigma_{сж} = 26$  МПа (т. е. при заложении кровли выработки выше верхнего сильвинитового слоя на 0,55 м) границы перехода между стадиями соответственно равны глубинам 500 и 840 м.

### Список использованной литературы

1. Ержанов, Ж. С. Ползучесть соляных пород / Ж. С. Ержанов, Э. И. Бергман. – Алма-Ата: Наука, 1977. – 110 с.
2. Константинова, С. А. Методика определения натуральных параметров ползучести горных пород / С. А. Константинова, В. А. Москвин // Изв. вузов. Горный журнал. – 1978. – № 5.
3. Мисников, В. А. Прогноз и обеспечение устойчивости капитальных выработок калийных рудников в мелко-слоистых породах на больших глубинах: автореф. дис. ... канд. техн. наук / В. А. Мисников. – Солигорск, 1991. – 17 с.
4. Результаты исследования реологических свойств соляных пород при одноосном сжатии и изгибе / В. С. Ливенский [и др.] // Изв. вузов. Горн. журнал. – 1973. – № 9. – С. 70–72.
5. Ливенский, В. С. Исследование реологических свойств соляных пород для оценки устойчивости обнажений кровли на примере Старобинского месторождения калийных солей: дис. ... канд. техн. наук / В. С. Ливенский. – Л., 1973. – 185 с.
6. Мисников, В. А. Совершенствование разработки калийных месторождений / В. А. Мисников. – Пермь, 1987. – С. 48–54.
7. Ногин, П. П. Закономерности процесса деформирования горных выработок на Солигорских калийных рудниках и инженерный метод расчета срока их службы вне зоны влияния очистных работ / П. П. Ногин, Б. И. Петровский, В. А. Губанов // Горная механика. – 2003. – № 1. – С. 48–54.

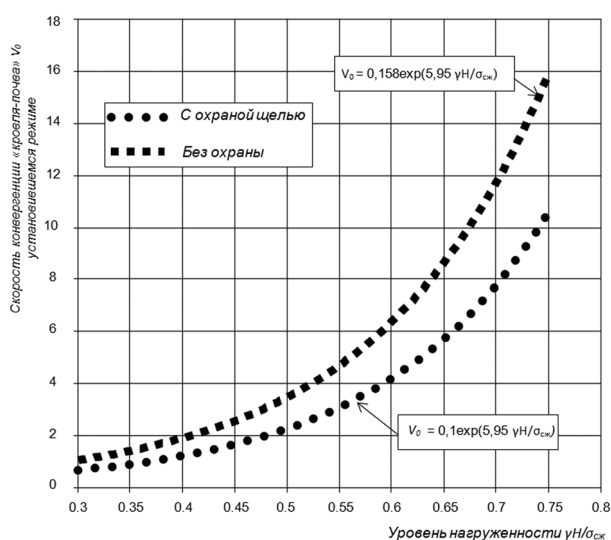


Рис. 4. Графики зависимости скорости конвергенции «кровля–почва» в установившемся период деформирования от уровня нагруженности пород  $\gamma H / \sigma_{сж}$

УДК 621.9.048.7

Н. Н. ЧЕРЕНДА<sup>1</sup>, А. В. БАСАЛАЙ<sup>2</sup>, В. И. ШИМАНСКИЙ<sup>1</sup>, В. В. УГЛОВ<sup>1</sup>,  
член-корреспондент В. М. АСТАШИНСКИЙ<sup>3</sup>

### МОДИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТИ СПЛАВА Ti-6Al-4V ПРИ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ ПЛАЗМЕННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
cherenda@bsu.by; shyanskiv@mail.ru; uglov@bsu.by

<sup>2</sup>Физико-технический институт НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
anna.basalay@mail.ru

<sup>3</sup>Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
ast@hmti.ac.by

В работе представлены результаты исследований фазового и элементного состава, структуры, микротвердости и коэффициента трения поверхностного слоя сплава Ti-6Al-4V, подвергнутого воздействию компрессионных плазменных потоков (КПП). Установлено, что воздействие КПП приводит к формированию модифицированного слоя толщиной до 24 мкм, содержащего фазы  $\delta$ -TiN<sub>x</sub>,  $\alpha'$ -Ti(N),  $\alpha$ -Ti и  $\beta$ -Ti. Обработка КПП приводит к более равномерному распределению легирующих элементов и снижению концентрации алюминия в поверхностном слое. Плазменная модификация поверхности позволяет повысить микротвердость поверхностного слоя в 1,5 раза и снизить коэффициент трения в 2 раза по сравнению с исходным образцом.

*Ключевые слова:* компрессионные плазменные потоки, титановый сплав, фазовый состав, структура, микротвердость, коэффициент трения.

N. N. CHERENDA<sup>1</sup>, A. V. BASALAY<sup>2</sup>, V. I. SHYMANSKI<sup>1</sup>, V. V. UGLOV<sup>1</sup>, V. M. ASTASHYNSKI<sup>3</sup>

### SURFACE MODIFICATION OF THE Ti-6Al-4V ALLOY UNDER THE ACTION OF HIGH-ENERGY PLASMA

<sup>1</sup>Belarusian State University, Minsk, Belarus,  
cherenda@bsu.by; shyanskiv@mail.ru; uglov@bsu.by

<sup>2</sup>Physical Technical Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
anna.basalay@mail.ru

<sup>3</sup>A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
ast@hmti.ac.by

The results of investigation of elemental and phase composition, structure, microhardness, and friction coefficient of the Ti-6Al-4V alloy surface layer treated by compression plasma flows are presented. The findings showed that the plasma impact resulted in forming a modified layer with the thickness of up to 24  $\mu$ m containing  $\delta$ -TiN<sub>x</sub>,  $\alpha'$ -Ti(N),  $\alpha$ -Ti and  $\beta$ -Ti phases. The treatment of the Ti-6Al-4V alloy by compression plasma flows led to a more uniform alloying element distribution in the modified layer and to a decrease of the aluminium concentration. The plasma surface modification allows the surface layer microhardness to be increased by a factor of 1.5 and the friction coefficient to be decreased by a factor of 2 in comparison with the initial sample.

*Keywords:* compression plasma flows, titanium alloy, phase composition, structure, microhardness, friction coefficient.

**Введение.** Титановый сплав Ti-6Al-4V (российским аналогом является сплав ВТ-6) находит широкое применение как в авиационной, космической, кораблестроительной сферах производства, так и в медицине [1; 2]. Такое широкое распространение этого сплава объясняется сочетанием свойств, достигаемых оптимальным его легированием. Алюминий в сплавах системы Ti-Al-V повышает прочностные свойства, а ванадий относится к легирующим элементам в титане, которые повышают не только прочностные свойства, но и пластичность. В то же время алюминий и, особенно, ванадий в некоторой степени становятся препятствием применению сплава Ti-6Al-4V в медицине, так как существует опасность поступления в смежные ткани этих элемен-

тов. В ряде исследовательских работ отмечается накопление токсичного ванадия в тканях органов человека [3; 4] при имплантации эндопротезов из данного сплава. Кроме того, известно [2], что титан обладает неудовлетворительными трибологическими свойствами в парах трения. Данные недостатки могут быть устранены применением новых методов модификации поверхности готовых изделий медицинского назначения [5; 6].

Одним из перспективных методов модификации поверхностных слоев металлов и сплавов является обработка компрессионными плазменными потоками (КПП) [5]. Взаимодействие плазменного потока с поверхностью материала характеризуется протеканием процессов сверхбыстрого нагрева до температуры, превышающей температуру плавления, и охлаждения, приводящих к изменению (диспергированию) структуры поверхностного слоя толщиной порядка нескольких десятков микрометров, образованию метастабильных пересыщенных твердых растворов и промежуточных фаз [6]. Кроме того, при воздействии КПП, плазмообразующим веществом которых является азот, происходит дополнительное легирование поверхностного слоя азотом и образование нитридных фаз. Все это приводит к улучшению механических свойств поверхностных слоев обрабатываемого материала [6].

Цель работы – исследование элементного и фазового состава, структуры и механических свойств поверхности сплава Ti-6Al-4V до и после воздействия КПП с различной плотностью поглощенной энергии.

**Материалы и методы исследования.** Объектом исследования являлись образцы сплава титана Ti-6Al-4V (состав в мас. %: 5,5–6,75 – Al; 3,5–4,5 – V; 0,05 – N; 0,08 – C; 0,3 – Fe; 0,015 – H; 0,2 – O [7]).

Обработка образцов сплава Ti-6Al-4V тремя импульсами КПП осуществлялась в газоразрядном магнитоплазменном компрессоре компактной геометрии в атмосфере азота. Образцы в камере располагались на расстоянии 8 и 14 см от среза внутреннего электрода. Увеличение расстояния приводит к уменьшению плотности энергии, поглощаемой поверхностью образца, значения которой, согласно данным калориметрических измерений, составляют 23 и 10 Дж/см<sup>2</sup> соответственно.

С целью выявления микроструктуры образцов проводилось химическое травление поперечных шлифов электролитом следующего состава: HF – 0,5 мл, HNO<sub>3</sub> – 2,5 мл, HCl – 1,5 мл, H<sub>2</sub>O – 2,5 мл. Время травления – 20 с. Металлографические исследования осуществлялись на оптическом микроскопе МИКРО-200. Элементный состав образцов определялся методом рентгено-спектрального микроанализа (РСМА) с помощью детектора Röntec, сопряженного с растровым электронным микроскопом (РЭМ) LEO1455VP. Фазовый состав исследовался методом рентгено-структурного анализа с помощью дифрактометра RIGAKU Ultima IV в Cu K<sub>α</sub>-излучении. Микротвердость исследуемых образцов измерялась на приборе ПМТ-3 при нагрузке 1 Н. Трибологические испытания проводились на установке ТАУ-1М (по схеме «палец–плоскость») при возвратно-поступательном движении индентора, изготовленного из твердого сплава ВК8, со скоростью 4 мм/с в условиях сухого трения в течение 30 мин. Нагрузка на индентор составляла 0,5 Н.

**Результаты и их обсуждение.** Обработка КПП сплава Ti-6Al-4V ведет к плавлению поверхностного слоя материала и последующему сверхбыстрому охлаждению. На рис. 1 представлено распределение элементов по поверхности образцов до и после воздействия КПП на расстоянии 8 см от внутреннего среза катода. Как видно, в результате воздействия поверхностный слой после кристаллизации характеризуется равномерным распределением атомов Ti, Al и V (рис. 1, б) в отличие от распределения данных элементов на поверхности исходного образца (рис. 1, а). Гомогенизация элементного состава происходит в результате протекания процесса конвективного массопереноса в расплаве, обусловленного возникновением гидродинамических неустойчивостей на границе плазма–расплав.

По данным РСМА, воздействие КПП на исследуемый сплав сопровождается изменением элементного состава в поверхностном слое (таблица). Известно, что обработка высокоэнергетическими плазменными потоками может приводить не только к нагреванию, плавлению, но и испарению и кипению металлов [8]. Поэтому учитывая, что температура кипения алюминия зна-

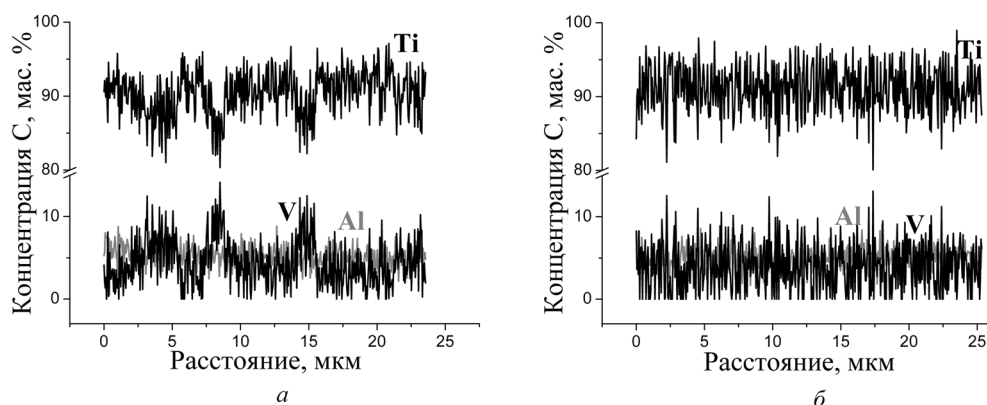


Рис. 1. Распределение элементов Ti, Al и V вдоль произвольной линии на поверхности исходного (а) и обработанного КПП (б) образцов

чительно меньше температуры кипения титана и ванадия ( $T_{\text{кипAl}} = 2520 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_{\text{кипV}} = 3392 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_{\text{кипTi}} = 3287 \text{ }^\circ\text{C}$  [9]), уменьшение концентрации алюминия может быть связано с его испарением. С увеличением плотности поглощенной энергии содержание алюминия в сплаве снижается.

**Концентрация элементов до и после воздействия КПП, мас. %**

Элемент	Исходный	После воздействия КПП при различных расстояниях между образцом и электродом	
		14 см	8 см
Ti	89,8 ( $\pm 0,2$ )	91,4 ( $\pm 0,2$ )	91,6 ( $\pm 0,2$ )
Al	6,4 ( $\pm 0,1$ )	5,0 ( $\pm 0,1$ )	4,8 ( $\pm 0,1$ )
V	3,3 ( $\pm 0,2$ )	3,6 ( $\pm 0,2$ )	3,6 ( $\pm 0,2$ )

На рис. 2 представлена морфология поперечного сечения (а) и распределение элементов Ti, Al и V (б) вдоль отмеченной линии образца сплава Ti-6Al-4V, подвергнутого воздействию КПП на расстоянии 14 см от электрода. Как видно на рис. 2, б, по всей толщине расплавленного слоя наблюдается равномерное распределение атомов Ti, Al и V в отличие от распределения этих элементов за пределами расплавленного слоя, что хорошо согласуется с данными, представленными на рис. 1.

С целью выявления микроструктуры было проведено травление поперечных шлифов. На рис. 3 представлена микроструктура поперечного шлифа образцов сплава Ti-6Al-4V до и после

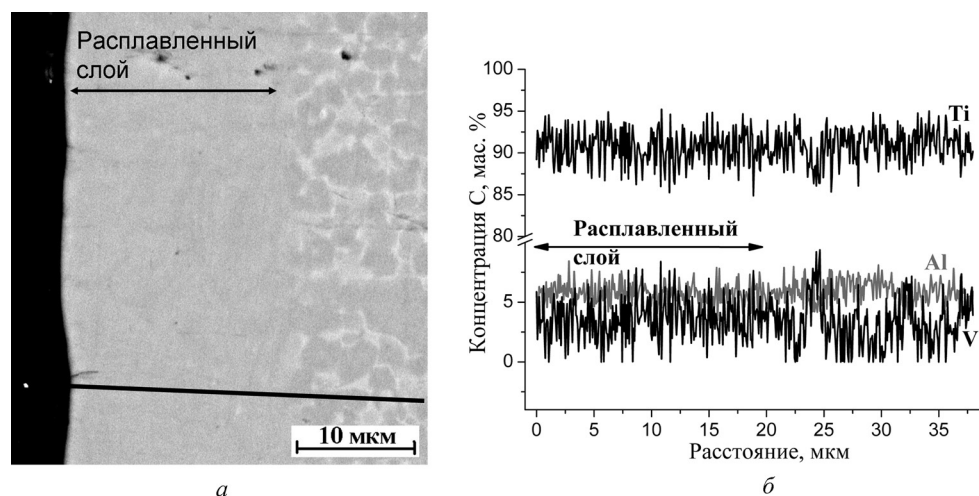


Рис. 2. Морфология поперечного сечения (а) и распределение элементов Ti, Al и V вдоль отмеченной линии (б) образца сплава Ti-6Al-4V, подвергнутого воздействию КПП на расстоянии 14 см от электрода



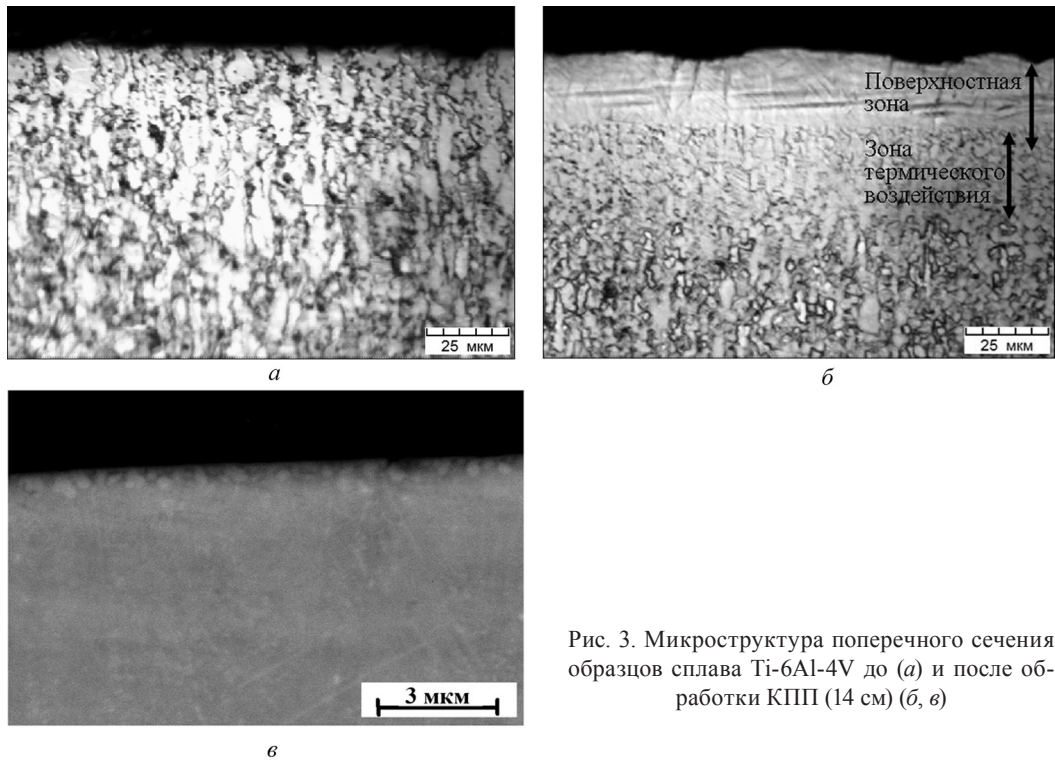


Рис. 3. Микроструктура поперечного сечения образцов сплава Ti-6Al-4V до (а) и после обработки КПП (14 см) (б, в)

воздействия КПП на расстоянии 14 см от внутреннего среза катода. Как видно на микрофотографии (рис. 3, б), полученной с помощью оптической микроскопии, поверхностный слой состоит из двух зон: поверхностной зоны, в которой произошло плавление материала, и зоны термического воздействия.

Структура, сформированная в условиях скоростного охлаждения, происходящего в поверхностной зоне, характеризуется наличием разориентированных пластинок (рис. 3, б). В условиях скоростного охлаждения высокотемпературной кубической  $\beta$ -фазы титана, происходящего в поверхностном слое титана после воздействия КПП, трансформация решетки титана осуществляется по мартенситному механизму, связанному с кооперативным движением атомов, которое приводит к микроскопически однородному превращению одной кристаллической решетки в другую. Подобная структура при переходе из  $\beta$ - в  $\alpha$ -фазу при быстрой закалке ранее была получена при воздействии КПП на технически чистый титан марки VT1-0 [10]. При изучении морфологии поперечных шлифов при большем увеличении (рис. 3, в) с помощью растрового электронного микроскопа в поверхностном слое перекристаллизованного слоя выявлено образование ячеистой микроструктуры. Средний размер ячеек составляет  $\sim 200$ – $400$  нм. Такая глобулярная структура может быть связана с формированием азот-содержащих фаз. Ранее проведенные исследования по обработке сплава VT1-0 КПП в атмосфере азота показали, что азот проникает на глубину до 1,5 мкм [5], которая соответствует толщине слоя с глобулярной структурой в данном эксперименте. Толщина переплавленного слоя составила 19–24 мкм.

Вторая зона (рис. 3, б), зона термического воздействия, формируется в результате отвода тепла в объем образца и характеризуется более дисперсной структурой по сравнению со структурой основного металла. Толщина этой зоны составляет  $\sim 25$  мкм.

На рис. 4 представлены участки дифрактограмм образцов сплава Ti-6Al-4V до и после обработки КПП. Анализ дифрактограммы исходного образца показал наличие дифракционных линий  $\alpha$ -Ti, а при математическом выделении дифракционных линий из экспериментального спектра в области углов  $2\theta = 38$ – $41^\circ$  (рис. 4, б) и наличие линий слабой интенсивности, относящихся к фазе  $\beta$ -Ti. Наличие остаточной  $\beta$ -фазы титана в исследуемых образцах, как в исходном состоянии, так и после воздействия КПП может быть обусловлено присутствием атомов ванадия, являющегося  $\beta$ -стабилизирующим элементом. Из анализа углового положения дифракционной ли-

нии, соответствующей  $\beta$ -фазе титана, можно предположить, что в результате плазменного воздействия происходит снижение параметра кубической решетки фазы  $\beta$ -Ti за счет возможного повышения в нем растворенного ванадия. Так как согласно проведенному анализу элементного состава (таблица) концентрация ванадия практически не изменяется в процессе обработки КПП, то повышение его содержания в фазе  $\beta$ -Ti может происходить вследствие частичного растворения свободного ванадия, присутствие которого в образцах подтверждается наличием дифракционной линии ванадия (100) при угле дифракции  $2\theta = 41,9^\circ$  (рис. 4, а). Вместе с тем изменение содержания объемной доли  $\beta$ -Ti после воздействия КПП достоверно проследить невозможно из-за перекрытия линий  $\alpha$ - и  $\beta$ -фазы в области углов  $2\theta = 38\text{--}41^\circ$  (рис. 4, б).

Воздействие КПП на сплав Ti-6Al-4V приводит к уменьшению параметров кристаллической решетки с 0,2952 нм (исходный образец) до 0,2922 нм – для параметра  $a$ , и от 0,4721 нм (исходный образец) до 0,4658 нм – для параметра  $c$ , что проявляется в смещении дифракционных линий  $\alpha$ -Ti в сторону больших углов. Наличие в исходном образце атомов ванадия и алюминия, растворенных в кристаллической решетке  $\alpha$ -Ti, должно способствовать уменьшению его параметров решетки, несмотря на это, зафиксированные значения параметров решетки оказались выше табличных значений, характерных для равновесного состояния, что может являться результатом предварительной механической обработки образцов. Снижение параметров решетки титана после воздействия КПП обусловлено присутствием атомов алюминия и ванадия в виде твердого раствора  $\alpha$ -Ti(Al, V), формирующегося по типу замещения (атомные радиусы:  $r_{\text{Ti}} = 0,146$  нм,  $r_{\text{Al}} = 0,143$  нм,  $r_{\text{V}} = 0,134$  нм [11]).

Рост поглощенной поверхностью энергии при воздействии КПП ведет к уменьшению концентрации алюминия в твердом растворе на основе  $\alpha$ -Ti. В этом случае при условии неизменной концентрации ванадия в кристаллической решетке  $\alpha$ -Ti, соответствующей его максимальной растворимости, повышается его доля по сравнению с концентрацией алюминия. Ввиду наименьшего атомного радиуса ванадия такое изменение элементного состава приводит к смещению дифракционных линий твердого раствора  $\alpha$ -Ti(Al, V) в область больших углов, обусловленное снижением параметров решетки. Таким образом, наличие атомов ванадия в твердом растворе является преобладающим фактором, определяющим уменьшение параметров решетки  $\alpha$ -Ti. Подтверждением этому также может служить уменьшение относительной интенсивности дифракционной линии ванадия после воздействия КПП (при максимальной энергии плазменного потока).

Воздействие КПП на исследуемые образцы сплава приводит к формированию кубического нитрида титана  $\delta$ -TiN<sub>x</sub> в поверхностном слое в результате взаимодействия с атомами плазмообразующего газа. С увеличением плотности поглощенной энергии наблюдается увеличение относительной интенсивности линий  $\delta$ -TiN<sub>x</sub>. После воздействия КПП на дифрактограммах также наблюдается появление дифракционных линий мартенситной  $\alpha'$ -Ti фазы (рис. 4), интенсивность которой увеличивается с ростом плотности поглощенной энергии. Согласно [5], она может быть

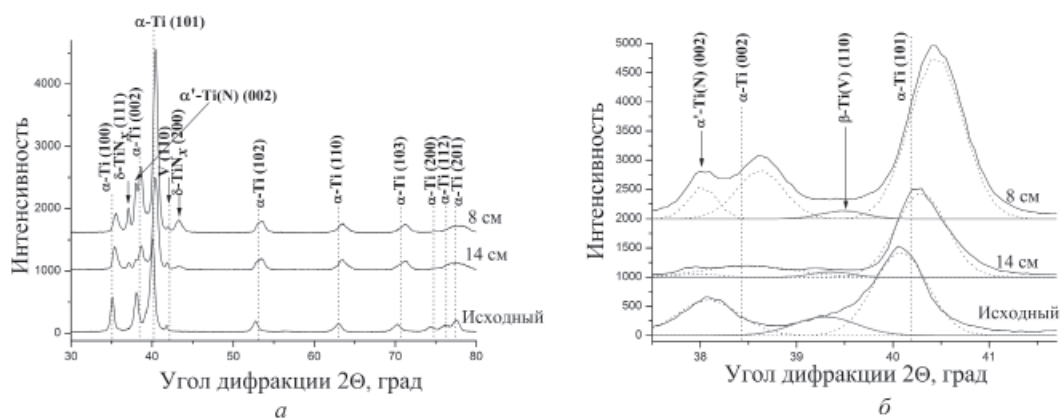


Рис. 4. Участки дифрактограмм (а) и результаты математического разложения дифракционных линий (б) образцов сплава Ti-6Al-4V до и после воздействия КПП при разной плотности поглощенной энергии



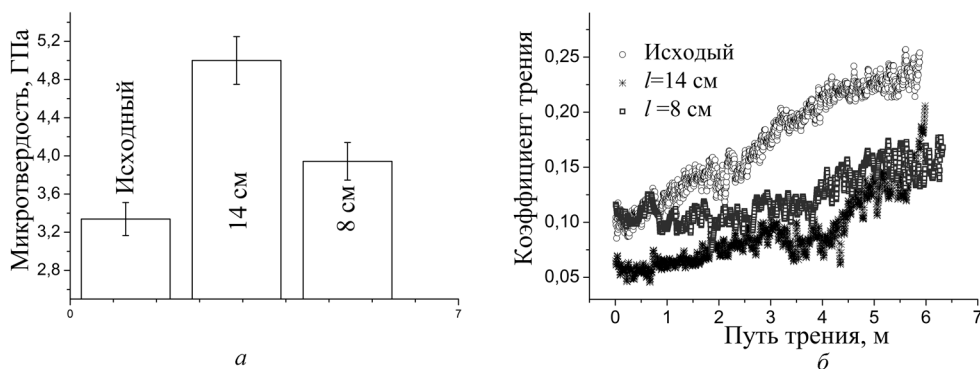


Рис. 5. Значение микротвердости образцов до и после воздействия КПП (а) и зависимость коэффициента трения от длины пути трения в исходном образце и образцах, обработанных КПП (б)

отнесена к твердому раствору внедрения азота  $\alpha'$ -Ti(N), формирующемуся в результате сверх-скоростного остывания из  $\beta$ -области при недостатке атомов азота для формирования нитрида титана.

Описанные выше изменения структуры, фазового и элементного состава сплава Ti-6Al-4V после воздействия КПП приводят к изменению микротвердости и коэффициента трения.

Модификация поверхности сплава Ti-6Al-4V под действием КПП приводит к увеличению микротвердости (рис. 5, а). Это может быть обусловлено вкладом нескольких факторов: формированием нитрида титана и мартенситной  $\alpha'$ -Ti(N) фазы, а также диспергированием структуры поверхностного слоя. С увеличением плотности поглощенной энергии микротвердость поверхностного слоя исследуемых образцов уменьшается, несмотря на увеличение концентрации нитридных фаз на поверхности. Этот эффект коррелирует с уменьшением концентрации алюминия в поверхностном слое (таблица), которое может приводить к обеднению твердого раствора  $\alpha$ -Ti(Al, V) алюминием и, как следствие, снижению микротвердости в поверхностном слое. Вместе с тем это предположение нуждается в дальнейших исследованиях.

Проведенные трибологические испытания показали (рис. 5, б), что обработка КПП приводит к уменьшению коэффициента трения по сравнению с исходным образцом и не зависит от режима обработки в выбранном диапазоне. Возможной причиной уменьшения коэффициента трения может являться повышение микротвердости [12]. Однако величина коэффициента трения не определяется только величиной твердости, так как на процесс трения оказывают влияние одновременно несколько факторов, что требует дальнейшего детального изучения механизмов износа.

**Заключение.** Таким образом, обработка КПП образцов титанового сплава Ti-6Al-4V приводит к изменению фазового и элементного состава, микротвердости и трибологических свойств поверхностного слоя. Установлено, что воздействие КПП на поверхность исследуемых образцов приводит к гомогенизации элементного состава перекристаллизовавшегося поверхностного слоя. В результате воздействия происходит формирование нитрида титана  $\delta$ -TiN<sub>x</sub> и мартенситной фазы  $\alpha'$ -Ti(N), объемная доля которых определяется плотностью поглощенной энергии. Плазменная модификация поверхности позволяет увеличить микротвердость в 1,5 раза и уменьшить коэффициент трения в 2 раза по сравнению с исходным образцом. Варьирование параметров обработки компрессионными плазменными потоками позволяет контролировать элементный и фазовый состав, а также механические свойства поверхностного слоя сплава Ti-6Al-4V.

#### Список использованных источников

1. Liu, X. Surface modification of titanium, titanium alloys and related materials for biomedical applications / X. Liu, P. K. Chu, Ch. Ding // Mater. Sci. and Eng. R. – 2004. – Vol. 47. – P. 49–121.
2. Перспективные технологии легких и специальных сплавов / А. А. Ильин [и др.] // Применение титана и его сплавов в медицине. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – С. 399–408.
3. Okazaki, Y. Corrosion resistance, mechanical properties, corrosion fatigue strength and biocompatibility of new Ti alloys without V for medical implants / Y. Okazaki, E. Shimura // Proc. World conf. on titanium, 9th. – St. Petersburg, 1999. – P. 1135–1150.

4. *Gotman, I.* Characteristics of metals used in implants / I. Gotman // J. of Endourology. – 1997. – Vol. 11, N 6. – P. 383–388.
5. Азотирование поверхностного слоя стали и титана компрессионными плазменными потоками / Н. Н. Черенда [и др.] // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2012. – № 4. – С. 35–42.
6. Структурно-фазовые превращения в титане, легированном атомами хрома и молибдена при воздействии компрессионных плазменных потоков / В. В. Углов [и др.] // Перспективные материалы. – 2010. – № 1 – С. 24–32.
7. *Колачев, Б. А.* Титановые сплавы разных стран: справочник / Б. А. Колачев, И. С. Польшкин, В. Д. Талалаев. – М.: ВИЛС, 2000 – 316 с.
8. Перспективные радиационно-пучковые технологии обработки материалов / В. А. Грибков [и др.]; под ред. Б. А. Калина. – М.: Круглый год, 2001. – 528 с.
9. Физические величины: справочник / А. П. Бабичев [и др.]; под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.
10. *Шиманский, В. И.* Структурно-фазовое состояние титана, легированного атомами Mo, Cr, Ni, Zr и Al при воздействии компрессионными плазменными потоками и сильноточными электронными пучками: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.07 / В. И. Шиманский. – Минск, 2013. – 175 с.
11. Краткий справочник по химии / под общ. ред. О. Д. Куриленко. – Киев: Наукова думка, 1974. – 991 с.
12. *Беркович, И. И.* Трибология. Физические основы, механика и технические приложения: учебник для вузов / И. И. Беркович, Д. Г. Громаковский. – Самара: Изд-во Самар. гос. техн. ун-та, 2000. – 268 с.

*Поступило в редакцию 21.10.2015*

УДК 620.22:678.6

*В. В. ШЕВЧЕНКО, член-корреспондент С. С. ПЕСЕЦКИЙ***СТРУКТУРА И СВОЙСТВА СМЕСЕЙ ПОЛИБУТИЛЕНТЕРЕФТАЛАТА И ПОЛИБУТИЛЕНТЕРЕФТАЛАТ-ПОЛИТЕТРАМЕТИЛЕНОКСИДНОГО БЛОК-СОПОЛИМЕРА, СОДЕРЖАЩИХ ДОБАВКИ УДЛИНИТЕЛЯ ЦЕПИ***Институт механики металлополимерных систем им. В. А. Белого НАН Беларуси, Гомель, Беларусь  
otdel5mpri@tut.by*

Исследовано влияние добавок диизоцианатного удлинителя цепи (УЦ) на изменение молекулярно-структурных характеристик, реологических и механических свойств смесей полибутилентерефталата (ПБТ) с полиэфирным термоэластопластом (ПТЭП), имеющих различную фазовую структуру.

Показано, что введение добавок УЦ в количестве от 0,2 до 1,25 мас. % приводит к росту вязкости расплавов и растворов полиэфиров вследствие протекания в расплавах реакций удлинения цепи и межмолекулярного сшивания макроцепей. УЦ оказывает сильное влияние на характер деформационных кривых при растяжении как исходных полиэфиров, так и их смесей независимо от соотношения компонентов в них (фазовой структуры материалов). При увеличении его концентрации повышаются значения верхнего и нижнего пределов текучести и снижается различие в значениях данных показателей, т. е. зуб текучести постепенно вырождается. УЦ влияет также на кристаллизуемость как отдельных полиэфирных компонентов, так и их смесей. Общей тенденцией независимо от типа полиэфира и фазовой структуры смеси является снижение температуры кристаллизации, что обусловлено ограничением молекулярной подвижности вследствие роста молекулярной массы полиэфиров и интенсификации межцепных взаимодействий.

*Ключевые слова:* удлинитель цепи, полибутилентерефталат, полиэфирный термоэластопласт, молекулярный вес.

*V. V. SHEVCHENKO, S. S. PESETSKII***STRUCTURE AND PROPERTIES OF POLY(BUTYLENE TEREPHTHALATE) AND POLY(BUTYLENE TEREPHTHALATE)-POLY(TETRA METHYLENE OXIDE) BLOCK COPOLYMER BLENDS WITH CHAIN EXTENDER ADDITIVES***V. A. Belyi Metal-Polymer Research Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Gomel, Belarus  
otdel5mpri@mail.ru*

The effect of diisocyanate chain extender (CE) on the rheological, and relaxation properties, as well as on the molecular weight and crystallizability, of poly(butylene terephthalate) (PBT) and thermoplastic polyester elastomer (TPEE) blends with the different-phase structure has been studied. It has been showed that CE in the amount of 0.2 up to 1.25 % leads to an increase in polyesters melt and solutions viscosity because of chain extending and cross-linking reactions. Values of high and low flow limits increase with increasing the CE concentration regardless of the phase structure of blends. It is revealed that CE decreases the polyesters melt-crystallization temperature; the crystallinity reduces simultaneously, which is indicative of the crystallization deceleration owing to a growth of the molecular weight.

*Keywords:* chain extender, poly(butylene terephthalate), thermoplastic polyester elastomer, molecular weight.

**Введение.** Частично-кристаллический полибутилентерефталат (ПБТ) относится к числу важнейших термопластов конструкционного назначения. Это типичный насыщенный полиэфир с относительно низкой температурой стеклования ( $T_g \approx 50\text{ }^\circ\text{C}$ ), высокими механической прочностью, модулем упругости и стойкостью к углеводородам [1]. Его недостатками, ограничивающими области применения, являются низкая ударная вязкость при нанесении надреза, а также высокая текучесть расплава (кроме специальных высокомолекулярных модификаций ПБТ). Поэтому в чистом виде ПБТ не применим для изготовления изделий, испытывающих в процессе эксплуатации воздействие ударных нагрузок, а его переработка из расплава осуществляется преимущественно литьем под давлением.

Одним из путей устранения упомянутых недостатков является приготовление разнообразных смесевых композитов на базе ПБТ. К числу полимеров, обладающих удовлетворительной совместимостью с данным полиэфиром, относятся полиэфирные и, в частности, полибутилентерефталат-политетраметилоксидные блок-сополимеры [2; 3]. Данные блок-сополимеры являются полиэфирными термоэластопластами (ПТЭП), имеющими полиблочное строение и состоящими из чередующихся жестких олигомерных блоков ПБТ и мягких блоков политетраметилоксида [2]. В работе [3] установлена возможность повышения ударной вязкости ПБТ за счет смешения с эластомерными ПТЭП. Однако в смесях ПБТ/ПТЭП реологические характеристики расплавов изменяются несущественно. Данный результат – следствие близких значений вязкости расплавов отдельных компонентов упомянутых смесей.

Известно, что молекулярную массу насыщенных полиэфиров, имеющих концевые гидроксильные и карбоксильные группы, можно изменять введением в расплав удлинителей цепи (УЦ) [4–7]. К числу последних относятся ди- или полиизоцианаты [8]. В ряде работ показана высокая эффективность изоцианатных УЦ при модифицировании насыщенных полиэфиров: полиэтилентерефталата [9; 10], ПБТ [11], поликарбоната [12], ПТЭП [13], компатибилизированных смесей полиэтилентерефталата с поликарбонатом [14]. Можно предполагать, что добавки изоцианатных УЦ будут оказывать сильное влияние на реологические и механические свойства смесей ПБТ/ПТЭП.

Цель работы – установление важнейших закономерностей, характеризующих влияние добавок изоцианатного УЦ на изменение молекулярно-структурных характеристик смесей ПБТ/ПТЭП различной фазовой структуры.

**Материалы и методы исследования.** В экспериментах использовали полиэфиры, изготовленные в ОАО «Могилевхимволокно» по ТУ РБ 700117487.171–2000: ПБТ марки Б-0 (характеристическая вязкость раствора в дихлоруксусной кислоте  $[\eta] = 0,912$  дл/г, концентрация концевых карбоксильных групп 29,4 ммоль/кг, температура плавления 222 °С, температура кристаллизации из расплава  $\approx 189$  °С, температура стеклования 48 °С), а также ПТЭП общей структурной формулы  $(AB)_n$ , где  $A$  – жесткий блок из олигомерного ПБТ,  $B$  – мягкий блок политетраметилоксида с молекулярной массой 2000, марки беласт Б-4М ( $[\eta] \approx 1,4$  дл/г,  $T_{пл} = 172$  °С,  $T_{кр} = 134$  °С).

УЦ служил жидкофазный диизоцианатный продукт марки МГТ-Ж (ТУ ВУ 400084698.265–2014), содержащий в своем составе смесевой стабилизатор термоокислительной деструкции насыщенных полиэфиров марки В-561 производства фирмы BASF, ФРГ (смесь термостабилизатора Irgafos 168 и антиоксиданта Irganox 1010 в массовом соотношении 4 : 1). Его концентрацию, в расчете на чистый диизоцианат, варьировали в пределах от 0,2 до 1,25 % (здесь и далее значения концентраций приводятся в мас. %). В состав всех материалов вводили 0,3 % стабилизатора В-561. Технология компаундирования материалов состояла в следующем. Вначале приготавливали механическую смесь предварительно высушенных в вакууме до остаточной влажности не более 0,05 % гранулятов полиэфирных компонентов. Затем в нее вводили жидкофазный УЦ и тщательно перемешивали компоненты в высокоскоростном двухлопастном смесителе. Далее полученную смесь подвергали компаундированию на экструзионно-грануляционной линии, смонтированной на базе двухшнекового экструдера TSSK-35/40 (производство КНР, диаметр шнеков 35 мм,  $L/D = 40$ , 10 секций материального цилиндра с независимым нагревом и точным поддержанием температуры). В серии выполненных экспериментов тепловые режимы работы материального цилиндра экструдера при компаундировании материалов на основе чистого ПБТ и его смесей с ПТЭП были идентичными (температура в основных смесительных секциях 4–8 материального цилиндра была постоянной и составляла 245 °С). Для ПТЭП, содержащего различные количества УЦ, температуру в этих зонах принимали равной 230 °С. Частоту вращения шнеков устанавливали равной 300 об/мин. Длительность пребывания полимерного расплава в материальном цилиндре при этом составляла  $\approx 0,5$  мин.

После прохождения через материальный цилиндр экструдера расплав выдавливался из него через фильеру в виде четырех стренг, которые подвергали водяному охлаждению и гранулированию. Далее полученный гранулят высушивали в вакууме до остаточной влажности  $\leq 0,05$  % и использовали для анализа показателя текучести расплава (ПТР) и получения эксперименталь-

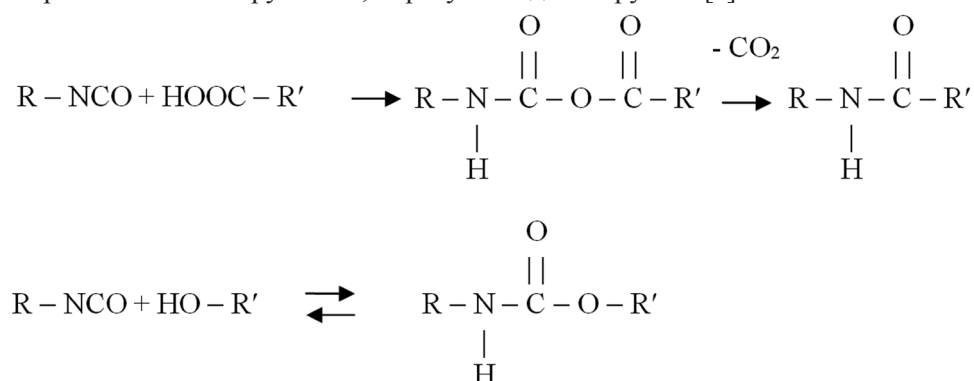
ных образцов литьем под давлением на термопластавтомате EN-30 (Тайвань, объем впрыска 30 см<sup>3</sup>). Температура литья для ПБТ и смесевых композитов ПТБ/ПТЭП составляла 235 °С, а для чистого и содержащего УЦ термоэластопласта – 190 °С.

Изготавливали лопатки (тип 5, размер рабочей части 45 × 5 × 3 мм) для испытаний методом растяжения (ГОСТ 11262–80), а также бруски размером 80 × 10 × 4 мм для определения ударной вязкости по ГОСТ 4647–80. Показатели механических свойств материалов при растяжении определяли на машине Instron 5657 (Великобритания), ударную вязкость по Шарпи на образцах с острым надрезом – на маятниковом копре PIT550J (фирма Shenzhen Wance Testing Machine Co., Ltd, Китай).

О реологическом поведении расплавов анализируемых материалов судили по значениям показателя текучести, определяемым на приборе RAY-RAN TEST EQUIPMENT Ltd (Великобритания) в соответствии с ГОСТ 11645–73 при температуре 240 °С и нагрузке 21,6 Н (диаметр капилляра 2,095 мм, длительность выдержки расплава в плавильном цилиндре прибора – 4 мин). Характеристическую вязкость растворов ( $[\eta]$ ) исходных полиэфиров и их смесей определяли вискозиметрическим методом при использовании вискозиметра Убеллоде с диаметром капилляра 0,73 мм и дихлоруксусной кислоты в качестве растворителя по ГОСТ 18249–72.

О кристаллической структуре материалов судили по данным дифференциальной сканирующей калориметрии (ДСК). Анализируемую пробу получали в виде поперечных срезов, взятых из средней части брусков, для определения ударной вязкости. Исследования выполняли на микрокалориметре Diamond DSC (фирма Perkin Elmer, США) при навеске 6,5 мг, скоростях нагрева и охлаждения в токе азота 15 °С/мин.

**Результаты и их обсуждение.** *Реологические свойства.* Одним из важных следствий реакций удлинения цепи полиэфиров, протекающих в расплавах, является повышение их молекулярной массы, в результате чего происходит снижение значений показателя текучести расплава и рост характеристической вязкости раствора [4–7]. Изоцианаты потенциально могут относительно легко химически взаимодействовать в расплаве с концевыми гидроксильными (преимущественно) и карбоксильными группами, образуя амидные группы [8]:



Протекание данных реакций в присутствии ди- или полиизоцианатов неизбежно должно приводить к удлинению молекулярной цепи (росту молекулярной массы). Поскольку в структуре макромолекул ПБТ и ПТЭП имеются однотипные концевые группы (–ОН и –СООН), то можно ожидать, что в расплавах смесей ПБТ/ПТЭП могут протекать реакции удлинения цепи не только между макромолекулами гомополиэфиров, но и перекрестные реакции с участием концевых групп разнородных макромолекул. Сведения о структуре и свойствах подобных продуктов в доступной литературе отсутствуют.

Экспериментальные данные о влиянии использованного нами диизоцианатного УЦ на реологические свойства гомополиэфиров и их смесей приведены в табл. 1 и на рис. 1.

Полученные данные свидетельствуют о сильном влиянии сравнительно малых добавок используемого УЦ на реологические свойства как расплавов, так и растворов полиэфирных материалов. Расплавы исходных ПБТ и ПТЭП обладают высокой текучестью (значения ПТР составляют соответственно 17 и 21 г/10 мин). При введении 0,9–1,25 % УЦ наблюдается резкое (в 30–90 раз) снижение значений ПТР, наиболее низкие значения которого, равные 0,2–0,3 г/10 мин, характер-



Т а б л и ц а 1. Влияние концентрации УЦ на значения ПТР гомополиэфиров и смесей ПБТ/ПТЭП

[УЦ], мас. %	Значения ПТР, г/10 мин, для полиэфирных материалов				
	ПБТ	ПБТ/ПТЭП-25 %	ПБТ/ПТЭП-50 %	ПБТ/ПТЭП-75 %	ПТЭП
0	17,0	19,0	23,0	25,0	21,0
0,2	10,0	8,7	8,1	9,7	12,0
0,5	3,1	2,6	2,5	3,7	4,6
0,9	0,5	0,3	0,6	1,0	1,6
1,25	0,4	0,2	0,5	0,6	0,5

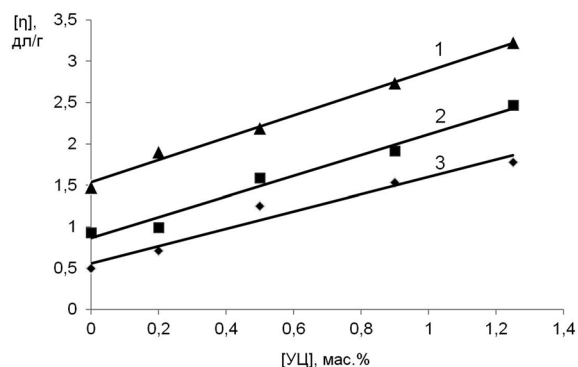
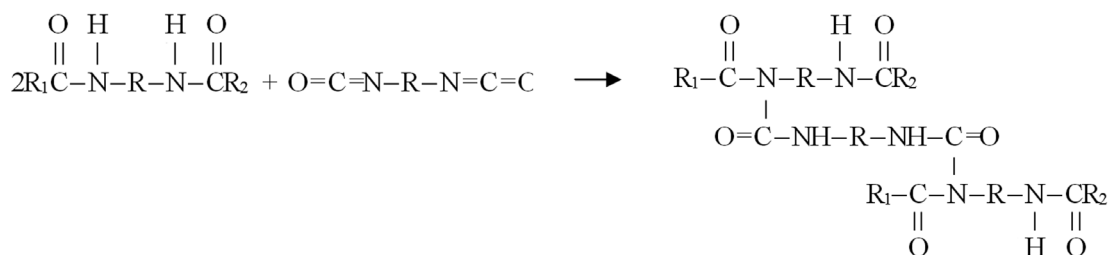


Рис. 1. Влияние концентрации УЦ на характеристическую вязкость материалов на основе ПТЭП (1), ПБТ (2), ПБТ/ПТЭП-50 % (3)

ны для смесей ПБТ/ПТЭП-25 %, в которых ПБТ образует непрерывную среду, а ПТЭП является дисперсной фазой. Данный результат крайне важен для технологии высоковязких полиэфирных композитов, потенциально пригодных для переработки по экструзионным технологиям, которые должны обладать высокой вязкостью и прочностью расплава (для экструзионных материалов значения ПТР обычно не превышают 1 г/10 мин). Как видно из рис. 1, увеличение [УЦ] в пределах от 0,2 до 1,25 % сопровождается практически линейным ростом значений [η], что однозначно указывает на увеличение молекулярного веса макромолекул полиэфира. Данный результат – несомненное следствие протекания реакций удлинения цепи в полиэфирных расплавах в условиях настоящего эксперимента. Судя по характеру концентрационных зависимостей ПТР, более эффективное влияние добавки УЦ оказывают на чистый ПБТ и смеси ПБТ/ПТЭП, в которых концентрация термоэластопласта не превышает 50 %. При изменении фазовой структуры смесей (преобладании в них эластомерной фазы) и в случае чистого ПТЭП рост вязкости расплава (снижение ПТР) при увеличении концентрации УЦ несколько менее существенен.

Для более полной интерпретации вышеприведенных и нижеследующих экспериментальных данных следует отметить, что диизоцианатные УЦ потенциально могут взаимодействовать не только с концевыми группами полиэфира, но и с вновь образовавшимися при протекании реакций удлинения цепи амидными группами, приводя к межмолекулярному сшиванию. О возможности протекания данных реакций указано, в частности, в работе [10] на примере взаимодействия полиэтилентерефталата с диизоцианатами. Применительно к смесям ПБТ/ПТЭП эти реакции можно представить следующим образом:



где R<sub>1</sub> и R<sub>2</sub> – фрагменты макроцепей ПБТ и ПТЭП; R – радикал, входящий в структуру диизоцианата.

Таким образом, причиной роста вязкости расплавов и растворов полиэфира могут быть реакции не только удлинения цепи, но и межмолекулярного сшивания макроцепей. Поскольку все полученные материалы обладают текучестью в расплаве, то очевидно, что образующиеся сшивки относительно редкие и не препятствуют компаундированию и переработке материалов в расплавах.



*Механические свойства материалов.* Как видно из табл. 2, 3 и рис. 2 добавки УЦ оказывают сильное влияние на характер деформационных кривых при растяжении как исходных полиэфиров, так и их смесей независимо от соотношения компонентов в них (фазовой структуры смесей).

Т а б л и ц а 2. Влияние концентрации УЦ на значения верхнего ( $\sigma_{\text{тв}}$ ) и нижнего ( $\sigma_{\text{тн}}$ ) пределов текучести при растяжении полиэфирных материалов

[УЦ], мас. %	Значения $\sigma_{\text{тн}}$ ( $\sigma_{\text{тв}}$ ), МПа, для полиэфирных материалов				
	ПБТ	ПБТ/ПТЭП-25 %	ПБТ/ПТЭП-50 %	ПБТ/ПТЭП-75 %*	ПТЭП*
0	53,0 (33,0)	37,2 (26,2)	25,3 (20,5)	17,2	8,6
0,2	56,8 (33,2)	37,3 (27,6)	25,3 (22,1)	16,7	8,7
0,5	57,1 (35,6)	37,7 (30,5)	25,9 (24,1)	15,0	9,3
0,9	58,7 (41,5)	38,5 (33,9)	26,6 (26,3)	16,9	11,2
1,25	58,3 (42,0)	40,4 (34,3)	27,8 (27,4)	17,0	13,5

П р и м е ч а н и е: \* – в связи с отсутствием зуба текучести значение соответствует величине напряжения в точке перегиба на деформационной кривой.

Т а б л и ц а 3. Значения относительного удлинения при растяжении и ударной вязкости по Шарпи на образцах с острым надрезом ( $a_{\text{он}}$ ) полиэфирных материалов

[УЦ], мас. %	Значение $\epsilon_p$ , % ( $a_{\text{он}}$ , кДж/м <sup>2</sup> ), для полиэфирных материалов				
	ПБТ	ПБТ/ПТЭП-25 %	ПБТ/ПТЭП-50 %	ПБТ/ПТЭП-75 %	ПТЭП
0	80 (6,5)	352 (9,1)	379 (16,8)	464 (нр)	788 (нр)
0,2	96 (7,2)	364 (9,3)	391 (нр)	440 (нр)	724 (нр)
0,5	230 (7,1)	329 (10,2)	270 (нр)	280 (нр)	393 (нр)
0,9	238 (7,7)	174 (12,1)	239 (нр)	219 (нр)	347 (нр)
1,25	263 (7,9)	79 (12,1)	228 (нр)	217 (нр)	318 (нр)

П р и м е ч а н и е: нр – образцы не разрушаются при ударном нагружении.

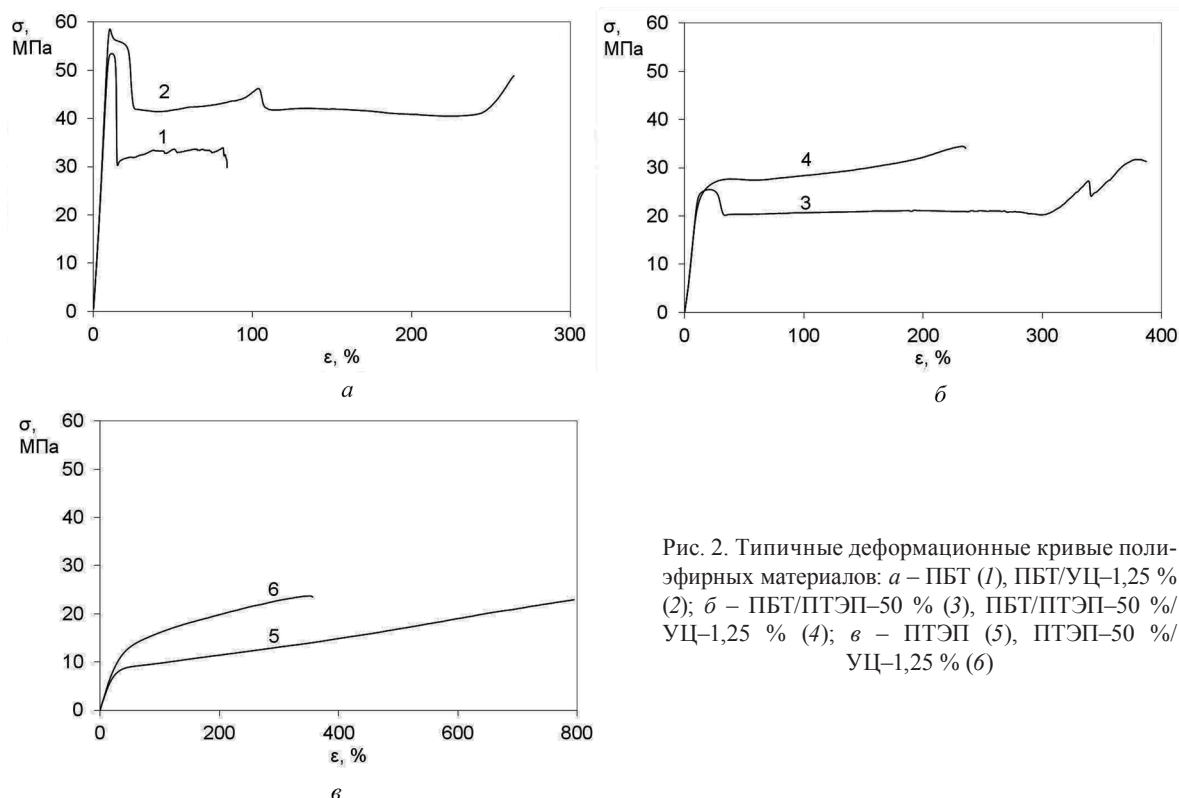


Рис. 2. Типичные деформационные кривые полиэфирных материалов: а – ПБТ (1), ПБТ/УЦ-1,25 % (2); б – ПБТ/ПТЭП-50 % (3), ПБТ/ПТЭП-50 %/УЦ-1,25 % (4); в – ПТЭП (5), ПТЭП-50 %/УЦ-1,25 % (6)

Для чистого ПБТ при увеличении [УЦ] наблюдается заметное повышение верхнего и нижнего пределов текучести при одновременно резком до 3,3 раз повышении относительного удлинения при растяжении (табл. 2, 3). Для смесей с преобладанием фазы ПБТ (содержат 25 % ПТЭП), а также смесей с сосуществующими непрерывными фазами обоих компонентов (содержат 50 % второго компонента) при увеличении [УЦ] снижается различие в значениях  $\sigma_{\text{TB}}$  и  $\sigma_{\text{TH}}$  (табл. 2, рис. 2), т. е. зуб текучести постепенно вырождается при увеличении концентрации УЦ. Очевидной причиной этого является интенсификация межмолекулярного и межфазного взаимодействия при введении УЦ.

Рост значений  $\sigma_{\text{TH}}$ , при достижении значений которого в процессе растяжения образцов образуется шейка, может обуславливаться как повышением молекулярного веса, так и интенсификацией межмолекулярного взаимодействия, обусловленного ростом полярности макромолекул и образованием частично сшитых структур. Следствием этого является заметное снижение относительного удлинения при растяжении ( $\epsilon_p$ ) для всех смесевых составов и чистого ПТЭП при повышенных концентрациях (0,9 и 1,25 %) УЦ (табл. 2, 3). Наличие химических межмолекулярных сшивок, способствуя повышению прочности полиэфирных материалов, неизбежно приводит к ухудшению их деформационной способности [1; 3].

Как видно из табл. 3, смеси ПБТ/ПТЭП обладают существенно более высокой ударной вязкостью по сравнению с чистым ПБТ. Смесей с превалированием фазы ПТЭП вообще не разрушаются при ударном нагружении образцов с острым надрезом. При повышении [УЦ] наблюдается рост значений ударной вязкости как чистого ПБТ, так и его смесей. Причиной этого является, видимо, прежде всего рост интенсивности межмолекулярного взаимодействия в присутствии добавок УЦ, что должно приводить к повышению энергии сдвигового течения при ударном нагружении и препятствовать зарождению трещин [15].

В целом, очевидно, что введение относительно малых добавок УЦ в ПБТ и его смеси с ПТЭП является эффективным приемом управления их ударной вязкостью и деформационно-прочностными характеристиками.

*Влияние УЦ на кристаллизацию полиэфиров по данным ДСК.* По данным дифференциальной сканирующей калориметрии, добавки УЦ оказывают сильное влияние на кристаллизуемость как исходных полиэфирных материалов, так и их смесей (табл. 4). Общей тенденцией независимо от типа полиэфира и фазовой структуры смеси является снижение температуры кристаллизации компонентов. В меньшей степени данный эффект выражен для чистого ПБТ и смеси ПБТ/ПТЭП–25 %, в которой ПБТ образует дисперсионную среду. При преобладании ПТЭП в смеси или при равных концентрациях компонентов смещение значений  $T_{\text{кр}}$  в низкотемпературную область при увеличении концентрации УЦ более существенно и, например, для смеси ПБТ/ПТЭП–25 % достигает 10 °С при [УЦ] = 1,25 % (табл. 4). Очевидной причиной этого является ограничение молекулярной подвижности вследствие роста молекулярного веса полиэфиров и интенсификации межцепных взаимодействий.

Т а б л и ц а 4. Влияние УЦ на кристаллизацию и плавление полиэфиров

[УЦ], мас. %	$T_{\text{пл}} (T_{\text{кр}})$ , °С, полиэфирных компонентов				
	ПБТ	ПБТ/ПТЭП–25 %	ПБТ/ПТЭП–50 %	ПБТ/ПТЭП–75 %	ПТЭП
0	222,6 (189,2)	222,9; 226,9 (185,9)	220; 231,2 (188,2)	180; 220; 233 (185,3)	172,0 (133,8)
0,2	222,3 (187,9)	225,8; 230,6 (184,6)	224,3 (184,4)	179,2; 218; 223 (180,9; 168,7; 114,5)	176,5 (131,5)
0,5	227,0 (186,2)	221,6; 226 (182,4)	218,0; 225,8 (183,1)	178,5; 220,7 (181,7; 168,4; 144,4)	177,0 (129,1)
0,9	218,7; 227,5 (184,1)	215,1; 219,1; 226,4 (180,9)	218,2; 237,4 (180,8)	175; 223,3 (179,8)	177,0 (125,4)
1,25	221,2 (182,7)	218,9; 223 (178,7)	223,7; 229,2 (179,2)	221,6 (175,3)	176,7

Важной особенностью влияния добавок УЦ на процессы плавления (кристаллизации) полиэфиров является появление мультиплетных пиков на кривых плавления ПБТ и кристаллизации смесей ПБТ/ПТЭП–75 % (табл. 4). Данные эффекты обусловлены, видимо, влиянием добавок УЦ на степень гетерогенности материалов, что может быть вызвано как спецификой межфазных взаимодействий, так и отсутствием полной термодинамической совместимости компонентов в смесях.

Представленные экспериментальные данные свидетельствуют о существенном влиянии относительно малых добавок диизоцианатного УЦ на молекулярную структуру, реологические свойства расплавов и деформационно-прочностные характеристики как исходных полиэфиров, так и их смесей с различной фазовой структурой. Модифицирование смесей ПБТ/ПТЭП добавками УЦ может использоваться как эффективный прием управления показателями механических и технологических свойств полиэфирных материалов, что позволяет на стадии компаундирования в расплаве создавать широкий ассортимент технически ценных смесевых композитов.

### Список использованной литературы

1. Gallucci, R. R. Poly (Butylene Terephthalate) / R. R. Gallucci, B. R. Patel // *Modern Polyesters: Chemistry and Technology of Polyesters and Copolyesters* / ed. J. Scheirs, T. E. Long. – Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2003.
2. Adams, R. K. Thermoplastic polyester elastomers / R. K. Adams, G. K. Hoescheble // *Thermoplastic elastomers* / ed. N. R. Legge, G. Holden, Schroeder. – Vienna; New York: Hanser Publishers, 1987. – P. 163–196.
3. Можейко, Ю. М. Полиэфирные термоэластопласты и конструкционные материалы на их основе: получение, структура, свойства, применение: автореф. дис. ... канд. техн. наук / Ю. М. Можейко. – Минск, 2005.
4. Inata, H. Chain extenders for polyesters. I. Addition type chain extenders reactive with carboxyl end groups of polyesters / H. Inata, S. Matsumura // *J. Appl. Polym. Sci.* – 1986. – Vol. 30, N 8. – P. 3325–3337.
5. Inata, H. Chain extenders for polyester. II. Reactivities of carboxyladdition-type chain extenders; bicyclic-imino-ethers / H. Inata, S. Matsumura // *J. Appl. Polym. Sci.* – 1986. – Vol. 32, N 5. – P. 5193–5202.
6. Inata, H. Chain extenders for polyesters. III. Addition-type nitrogen-containing chain extenders reactive with hydroxyl end groups of polyesters / H. Inata, S. Matsumura // *J. Appl. Polym. Sci.* – 1986. – Vol. 32, N 4. – P. 4581–4594.
7. Inata, H. Chain extenders for polyesters. IV. Properties of the polyesters chain-extended by 2,2'-bis(2-oxazoline) / H. Inata, S. Matsumura // *J. Appl. Polym. Sci.* – 1986. – Vol. 33, N 8. – P. 3069–3079.
8. Песецкий, С. С. Макромолекулярные превращения в расплавах полиалкилтерефталатов и реакционная компатибилизация полиэфирных материалов (обзор) / С. С. Песецкий, В. В. Шевченко, В. В. Дубровский // *Материалы. Технологии. Инструменты.* – 2013. – Т. 18, № 3. – С. 51–80.
9. Chain extension of poly(ethylene terephthalate) with bisphenol-A dicyanate / Y. Zhang [et al.] // *J. Appl. Polym. Sci.* – 2010. – Vol. 117, N 4. – P. 2003–2008.
10. Agabekov, V. V. Effect of nanodisperse carbon fillers, and isocyanate chain extender on structure and properties of poly(ethylene terephthalate) / V. V. Agabekov, V. V. Golubovich, S. S. Pesetskii // *J. of Nanomaterials.* – 2012. – Vol. 2012. – Article ID 870307.
11. Guo, B. Chain extension of poly(butylene terephthalate) by reactive extrusion / B. Guo, C. Chan // *J. Appl. Polym. Sci.* – 1999. – Vol. 71, N 11. – P. 1827–1834.
12. Reactive extrusion of recycled poly(ethylene terephthalate) with polycarbonate by addition of chain extender / X. Tang [et al.] // *J. Appl. Polym. Sci.* – 2007. – Vol. 104, N 4. – P. 2602–2607.
13. Enhancement of physical properties of thermoplastic polyether-ester elastomer by reactive extrusion with chain extender / T. Lee [et al.] // *Polym. Bull.* – 2011. – Vol. 66, N 7. – P. 979–990.
14. PET/PC blends: effect of chain extender and impact strength modifier on their structure and properties / S. S. Pesetskii [et al.] // *J. Appl. Polym. Sci.* – 2011. – Vol. 119, N 1. – P. 225–234.
15. Pesetskii, S. S. Compatibility, adhesional interaction of components, impact strength, and rheological behavior of polycarbonate/polycarbonate-siloxane block copolymer / S. S. Pesetskii, B. Jurkowski, V. N. Koval // *J. Appl. Polym. Sci.* – 2000. – Vol. 78, N 4. – P. 858–869.

Поступило в редакцию 20.04.2015

**СОЦИАЛЬНО-ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ**

УДК 81'255.2:81'246.2=161.3=161.1

Н. В. ЯКОВЕНКА

**СПЕЦИФИКА МАСТАЦКАГА ПЕРАКЛАДУ З БЛІЗКАРОДНАСНЫХ МОЎ:  
ТЭАРЭТЫЧНЫ АСПЕКТ***(Прадстаўлена акадэмікам У. В. Гніламёдавым)**Цэнтр даследаванняў беларускай культуры, мовы і літаратуры НАН Беларусі, Мінск, Беларусь  
natayakavenka@tut.by*

В статье на основе концепций западноевропейских ученых Антона Поповича, Катарини Райс, Ханса Фермеера, Эдмунда Гуссерля, Романа Ингардена и других теоретически осмысливаются трудноразрешимые проблемы художественного перевода с близкородственных языков, который является результатом своеобразной работы переводчика над воспроизведением оригинала на языке другой национальности и для другой социокультурной среды, показателем определенного переводческого мировоззрения и эстетической позиции.

*Ключевые слова:* художественный перевод, автор, переводчик, близкородственные языки, А. Попович, К. Райс, Х. Фермеер, Э. Гуссерль, Р. Ингарден.

N. V. YAKOVENKO

**THE SPECIFICS OF LITERARY TRANSLATION FROM RELATED LANGUAGES:  
THEORETICAL ASPECT***Center for the Belarusian Culture, Language and Literature Researches of the National Academy of Sciences of Belarus,  
Minsk, Belarus  
natayakavenka@tut.by*

On the basis of the concepts of Western scientists Anton Popovich, Katarina Rice, Hans Fermeer, Edmund Husserl, Roman Ingarden et al., hard-to solve problems of literary translation from related languages are comprehended theoretically. The translation is a result of an original work of a translator who reproduces the original in the language of another nationality and for different social and cultural environment and is an indication of certain translation outlook and aesthetic position.

*Keywords:* literary translation, author, translator, close languages, A. Popovich, K. Rice, H. Vermeer, E. Gusserl, R. Ingarden.

Пераклад з'яўляецца адным з найбольш старажытных і складаных відаў моўнай камунікацыі і разам з тым адной з самых старажытных прафесій, якая бярэ свой пачатак ад шумерскай цывілізацыі канца IV тыс. да н. э. і ад ранніх этапаў існавання егіпецкай цывілізацыі – Старажытнага Царства і перыяду XXVIII ст. да н. э. [1, с. 13].

У сярэдзіне XX ст. перакладчыцкая дзейнасць набыла велізарны размах, асаблівую актуальнасць і сусветную значнасць, дзякуючы інтэнсіўнасці і шырыні міжнародных стасункаў.

Ад пачатку XXI ст. папулярнасць усіх відаў перакладу (грамадска-палітычнага, літаратурна-мастацкага, навуковага, тэхнічнага, ваеннага) не толькі не згасае, а няўхільна расце, што пацвярджаецца існаваннем і далейшай распрацоўкай разнастайных электронных перакладчыцкіх праграм і слоўнікаў, большасць з якіх даступныя для бясплатнага карыстання ў інтэрнэце, і стварэннем розных перакладчыцкіх аб'яднанняў, арганізацый і навучальных устаноў, такіх як заснаваны ў Маскве ў 2011 г. Інстытут Перакладу, Вышэйшая школа перакладу (факультэт) Маскоўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя М. В. Ламаносава, беларускі інтэрнэт-часопіс перакладной літаратуры «ПрайдзіСвет» і Перакладчыцкая майстэрня, якой кіруе старшыня Беларускага ПЭН-Цэнтра А. Хадановіч.

© Яковенка Н. В., 2016.

Літаратурна-мастацкі (або проста мастацкі) пераклад, якому прысвечаны прадстаўлены артыкул, гэта «1) від літаратурна-мастацкай творчасці, узнаўленне твора, напісанага на адной мове, выяўленчымі сродкамі другой мовы; 2) літаратурны твор, што з'яўляецца семантычна-стылістычным адпаведнікам ідэяна-вобразнай структуры якога-небудзь іншамоўнага твора (арыгінала)» [2, с. 239].

XXI ст. азначылася ўздымам беларускага мастацкага перакладу. У 2008 г. маладыя перакладчыкі аб'ядналіся вакол згаданага вышэй інтэрнэт-часопіса «ПрайдзіСвет» з тым, «каб пашырыць прастору беларускай культуры за кошт увядзення ў яе кантэкст новых перакладаў замежных аўтараў, а таксама знаёмства з новымі імёнамі сусветнай літаратуры... Часопіс «ПрайдзіСвет» адрасаваны ўсім, хто любіць замежную літаратуру і цікавіцца справай мастацкага перакладу на беларускую мову. На сённяшні дзень гэта адзінае ў Беларусі выданне, цалкам прысвечанае перакладной літаратуры... Заснавальнікі выдання адначасова ставяць сабе за мэту падвышэнне прафэсійнага ўзроўню перакладу на беларускую мову... Дзеля гэтага ў часопісе змяшчаюцца конкурсы; раней зробленыя, але маладаступныя пераклады; а таксама карысныя парады знаных майстроў і карысныя спасылкі на шматлікія рэсурсы ў інтэрнэце» [3].

Пры тым вельмі паказальна, што сярод лепшых узораў перакладчыцкага майстэрства пачатку XXI ст. можна назваць мастацкія пераклады з блізкароднасных моў, а менавіта кнігі перакладаў з украінскай на беларускую мову твораў аднаго з найбольш выдатных лірыкаў XX ст. Б.-І. Антоныча («Зялёнае Евангелле» – Львів, 2011 г.; укладанне зборніка Р. Лубкіўскага і В. Рагойшы, перакладчыкі – Р. Барадулін, С. Панізнік, В. Рагойша, В. Зуёнак, С. Законнікаў, Г. Бураўкін, Э. Акулін) і з беларускай ды іншых моў на ўкраінскую, створаных Г. Кірпа («Місяць у колісці» – Тернопіль, 2012 г.). Паэт, празаік і перакладчык Г. Кірпа перастварае на ўкраінскую мову творы для дзяцей аўтараў з Беларусі, Германіі, Даніі, Нарвегіі, Швецыі. У зборніку «Місяць у колісці» Беларусь прадстаўлена перакладамі вершаў і казак для маленькіх чытачоў, створаных У. Караткевічам, С. Шушкевічам, С. Грахоўскім, А. Лойкам, Н. Мацяш, М. Маляўкам, К. Камейшам, Н. Галіноўскаю, С. Панізнікам, С. Тарасавым [4].

Да таго ж перакладамі ўзаемна ўзбагаціліся польская і беларуская літаратуры. У 2004 г. С. Мінскевіч пераклаў «Крымскія санеты» А. Міцкевіча, а яшчэ раней – у 1994–1998 гг. – стварыў першы поўны пераклад яго паэмы «Дзяды» (выдадзена ў 1999 г.). Раней няпоўныя пераклады гэтага твора стварылі П. Бітэль і К. Цвірка. Таксама С. Мінскевічу належаць пераклады з польскай мовы твораў Ю. Славацкага, Я. Івашкевіча, К.-І. Галчынскага, Д. Маслоўскай.

У 2012 г. у польскім выдавецтве «Офісуна 21» у перакладзе М. Бухалік выйшаў раман У. Караткевіча «Хрыстос прызямліўся ў Гародні». Дагэтуль раман быў выдадзены на рускай мове ў аўтарызаваным перакладзе Н. Кісліка («Нёман», 1966, № 11–12) і па-чэшску ў перакладзе В. Жыдліцкага (Прага, 1979 г.). Першы пераклад гэтага твора на польскую мову стварыў каля 25 гадоў назад Ч. Сэнюх, але кніга так і не ўбачыла свет.

Нягледзячы на пашыранасць і запатрабаванасць мастацкага перакладу з блізкароднасных моў, сучасная перакладазнаўчая навука надае яму вельмі мала ўвагі, пры тым, што гэты від перакладу мае сваю адметную спецыфіку і высокі ўзровень складанасці. Блізкасць моў часта стварае падманлівае ўражанне лёгкасці і прастаты перастварэння, але на практыцы ў перакладчыкаў узнікаюць нечаканыя цяжкасці з пераадоленнем шматлікіх бар'ераў: міжмоўнай аманіміі і полісеміі, канфрантацыі камунікатыўных пазіцый, кагнітыўнага дысанансу і інш.

Разглядаючы спецыфіку мастацкага перакладу з блізкароднасных моў, варта мець на ўвазе рэлевантнасць мастацкага перакладу (адпаведнасць перакладнога тэксту арыгінальнаму, якая разам са стылістычнай і сэнсавай эквівалентнасцю дае практычную і сацыяльную прымяняльнасць, запатрабаванасць перакладу ў іншамоўным і іншакультурным асяроддзі, і можа быць фармальнай – выяўляцца на мікрастылістычным узроўні (на ўзроўні слова), змястоўнай – закранаць макрастылістыку (змест, ідэю твора) і мастацкай – уплываць на мастацкія асаблівасці перакладу (аўтарскі стыль, вобразна-выяўленчыя сродкі)) і звяртацца да некаторых паняццяў рэцэптыўнай эстэтыкі, асноўныя ідэі якой базіруюцца на тэзісе йенскіх рамантыкаў пра «жывога» чытача, што ідзе насустрач пісьменніку і актыўна «ўдзельнічае» ў творчасці.



«Сярод крыніц рэцэптыўнай эстэтыкі... – герменеўтыка, якая абаяваецца на «філасофію жыцця» В. Дзільтэя і феноменалогію Э. Гусэрыя, пражскі структуралізм, руская фармальная школа 10–20-х гадоў ХХ ст., сацыялогія літаратуры, што вывучае ўздзеянне літаратуры на чытацкую аўдыторыю. Імкнучыся да дакладна выражанага функцыянальнага вывучэння твора, рэцэптыўная эстэтыка развівалася ў рэчышчы агульнага для заходняй і рускай навукі аб мове і літаратуры працэсу, які вёў даследчыкаў ад успрыняцця мастацтва як аўтаномнага, самадастатковага феномена да праблемы яго «разумення» і «прачытання» (гэта лінія, напоўніўшыся ідэямі В. Дзільтэя, дала пачатак сённяшнім герменеўтычным падыходам), і далей да асэнсавання працэсу ўзаемадзеяння і камунікацыі сацыяльна-эстэтычных структур, што ўтвараюць дыялектычна супрацьлеглую і адкрытую сістэму «мастацтва – грамадства» [5, с. 118–119].

Згодна з рэцэптыўнай эстэтыкай, літаратурна-мастацкі твор «узнікае» і «рэалізуецца» толькі ў працэсе «сустрэчы», кантакту тэксту з чытачом, які, дзякуючы «зваротнай сувязі», у сваю чаргу, уздзейнічае на твор і вызначае тым самым канкрэтна-гістарычны характар яго ўспрымання і бытавання. Такім чынам, асноўным прадметам вывучэння рэцэптыўнай эстэтыкі з’яўляецца рэцэпцыя – успрыманне літаратурнага твора чытачом [5, с. 118–128].

У дачыненні да перакладных мастацкіх твораў мэтазгодна выкарыстоўваць такія тэрміны рэцэптыўнай эстэтыкі, як «гарызонт чакання» і «эстэтычная дыстанцыя».

Пад гарызонтам чакання разумеецца комплекс эстэтычных, сацыяльна-гістарычных, псіхалагічных ды іншых уяўленняў, што фарміруюць адносіны аўтара (або перакладчыка) і яго твора (перакладу) да грамадства, найперш да чытача, а таксама стаўленне чытача да твора, якое рэалізуецца адпаведна ў выглядзе яго асабістага эстэтычнага і жыццёва-практычнага досведу [5, с. 27–29].

Мастацкая (эстэтычная) каштоўнасць твора (перакладу) грунтуецца на той рознасці, што існуе паміж гарызонтам чакання твора і гарызонтам чакання чытача. І менавіта гэтая рознасць даволі часта становіцца кропкай сутыкнення, а часам выклікае непрымірымую барацьбу дзвюх эстэтычных канцэпцый, дзвюх суб’ектыўнасцей, бо гарызонт чакання – з’ява глыбока асабістая, а значыць суб’ектыўная.

Пры сутыкненні чытацкага і аўтарскага (або ў нашым выпадку перакладчыцкага) гарызонтаў чакання ўнікае эстэтычная дыстанцыя, што вызначае ступень нечаканасці твора для чытача і яго мастацкую каштоўнасць. Дыстанцыя паміж гарызонтам чакання чытача і гарызонтам чакання твора гэта дыстанцыя паміж даўно вядомым, знаёмым, звыклым і неабходнасцю новага ўспрымання, прасцей кажучы, гэта дыстанцыя паміж старым і новым эстэтычным досведам [5, с. 157–158].

Арыгінальны твор заўсёды фарміруе ў чытача пэўны гарызонт чакання, несупадзенне якога з гарызонтам чакання перакладчыка стварае эстэтычную дыстанцыю паміж чытачом і перакладным творам. Пры ўсім тым, калі мець на ўвазе рэлевантнасць мастацкага перакладу, неабходна закрануць яшчэ два важных, асабліва ў сітуацыі блізкароднаснага двухмоўя, пытання. Гэта пытанні функцый і феномена перакладу.

Думка «Навошта трэба было перакладаць?» наўрад ці ўзнікне ў расійскага чытача, калі размова будзе ісці пра пераклад з беларускай, англійскай ці любой іншай мовы на рускую, бо зразумела, што гэта неабходна для азнаямлення з іншамоўным творам. Але «для Беларусі характэрны білінгвізм, пры якім мова дзесяцімільённай нацыі, у параўнанні з рускай, аб’ектыўна мае несупастаўляльна меншыя магчымасці функцыянавання, часткова ці поўнасцю страчвае шэраг сфер. У выніку гэтага праяўляецца і двухкультур’е» [6, с. 66]. У беларускім бікультурным грамадстве, пры жорсткай кан’юнктуры кніжнага рынку, літаратура на рускай мове мае большую перавагу, тыражы беларускамоўных выданняў далёка адстаюць ад рускамоўных, што таксама ў пэўнай ступені аказвае ўплыў на ўспрыманне мастацкага перакладу. Да таго ж з рускай і сусветнай класікай беларусы знаёмыя праз рускую мову, а жаданне прачытаць тыя ж творы па-беларуску, на вялікі жаль, будуць мець нямногія. Ці значыць гэта, што англа-беларускі, руска-беларускі і г. д. пераклад не надта патрэбны? Не, нягледзячы на істотнае зніжэнне азнаямляльнай функцыі перакладу ў сітуацыі блізкароднаснага двухмоўя.

Па меры зніжэння азнаямляльнай функцыі павялічваецца роля ўсіх астатніх функцый перакладу. «Асабліва важна тое, што мастацкі пераклад узбагачае літаратуру, у якую ўваходзіць,



садзеінічае развіццю нацыянальнай мовы, яго разнастайных стылістычных сродкаў... Таму што наўрад ці трэба зводзіць усё значэнне таленавітага перакладу... толькі да вырашэння сацыякультурных і пазнавальных задач... Што ж датычыць чытача (а менавіта дзеля яго ў першую чаргу і робіцца пераклад), то ў не меншай ступені выйграе і ён. Як дакладна падмеціў англійскі вучоны Тэадор Савары, «два пераклады аднаго і таго ж твора даюць для яго разумення нават не ўдвая, а ўчацвёрта болей» [7, с. 47–49].

Такім чынам, у беларускім бікультурным грамадстве мастацкі пераклад на беларускую мову разлічаны ў першую чаргу на «эрудыраванага чытача» [8, с. 196], які ведае арыгінал у подлінніку ці ў перакладзе на рускую мову, здольны супастаўляць тэксты і сачыць за стратэгіяй перакладчыка на аснове арыгінала, г. зн. на чытача, для якога пераклад з’яўляецца метатэкстам.

Пераклад з беларускай на любую іншую, у тым ліку і блізкароднасную мову, разлічаны перш за ўсё на «неэрудыраванага чытача» [8, с. 196], які, няведаючы беларускай мовы, вымушаны мець справу толькі з перакладам на сваю нацыянальную мову, г. зн. на чытача, для якога пераклад з’яўляецца протатэкстам. Так, зыходзячы менавіта з «неэрудыраванасці чытача», сучасная перакладчыца з рускай на французскую мову, прафесар Сарбонанн Кальдэфі-Факар вызначыла галоўную, на яе думку, функцыю перакладу: «...навошта патрэбны пераклад? Каб дазволіць людзям, якія не разумеюць чужую мову, чытаць кнігу, мець пэўнае, правільнае ці няправільнае, уяўленне пра пісьменніка, творчасць аўтара, недаступную ім на мове арыгінала» [9].

Нягледзячы на ступень «эрудыраванасці» чытача, функцыі мастацкага перакладу застаюцца нязменнымі, змяняецца толькі ступень іх значнасці для пэўнай чытацкай аўдыторыі. Гэтыя функцыі, паводле спосабу рэалізацыі перакладу, славацкі перакладазнаўца Антон Паповіч вызначыў наступным чынам:

пераклад як адукацыйны фактар – замена, якая дае ўяўленне аб арыгінале ў прымаючым асяродку (адукацыйная, або азнаямляльная, функцыя. – *Н. Я.*);

пераклад як рэцэптурнае ўказанне (рэцэпцыйная функцыя, або функцыя ўспрымання. – *Н. Я.*);

пераклад як фактар літаратурнай адукаванасці (культурна-эстэтычная функцыя. – *Н. Я.*);

пераклад як літаратурная рэклама арыгінала (прапагандысцкая функцыя. – *Н. Я.*);

пераклад як фактар камунікацыі паміж рознымі краінамі (грамадска-культурная функцыя);

пераклад як праяўленне міжлітаратурных стасункаў з улікам запатрабаванняў прымаючай літаратуры (літаратурная функцыя) [8, с. 196].

Вылучэнне на першы план адной-дзвюх функцый не адмаўляе існавання іншых функцый перакладу. Не можа быць культурна-эстэтычнага эфекту перакладу без папярэдняга чытацкага азнаямлення і ўспрымання, таксама як без далейшага грамадска-культурнага і літаратурнага значэння перакладу мастацкага твора. Разам з тым відавочна, што вылучэнне асноўнай функцыі пэўнага перакладу залежыць ад пастаўленых перакладчыкам мэт і задач, бо «ўсялякае ўзаемадзеянне паміж людзьмі (у тым ліку і пераклад) вызначаецца яго мэтай...» [10]. Гэта базавы тэзіс распрацаванай у 1970–1980-х гадах амерыканскім лінгвістам Катарынай Райс і нямецкім перакладазнаўцам Хансам Фермеерам тэорыі скопасу (ад грэч. *skopos* – мэта, задача).

Сутнасць тэорыі скопасу ў тым, што пры перакладзе асноўная ўвага павінна надавацца функцыі як зыходнага (арыгінальнага), так і мэтавага (перакладзенага) тэксту. Галоўны прадмет увагі тэорыі скопасу – пераклад як від дзейнасці, які мае сваю мэту (задачу) і меркаваную чытацкую аўдыторыю, чым і вызначаецца выбар стратэгіі і метадаў перакладу.

Перакладаць, паводле К. Райс і Х. Фермеера, значыць ствараць мэтавы тэкст у мэтавай абстаноўцы для вырашэння мэтавай задачы ў мэтавых абставінах. У тэорыі скопасу арыгінальны тэкст мае больш нізкі статус, чым у тэорыях перакладу, заснаваных на эквівалентнасці (адэкватнасці). Арыгінал уяўляе з сябе своеасаблівую «інфармацыйную прапанову», якую перакладчык адаптуе пад запыты мэтавай аўдыторыі.

Любы від перакладу можа разглядацца як «мэтанакіраваная дзейнасць», якая падпарадкоўваецца «правілу скопасу»: форма мэтавага тэксту, уключаючы выбраныя стратэгіі і метады перакладу, у першую чаргу павінна вызначацца мэтай (скопасам), якую перакладзены тэкст павінен выконваць у мэтавым кантэксце.

Адметна, што аўтары тэорыі скопасу абмяжоўваліся немастацкімі тэкстамі, бо лічылі мастацкія творы занадта складанымі з функцыянальнага і стылістычнага пунктаў гледжання [11].

Згодна з меркаваннем К. Райс, пры перакладзе твораў мастацкай літаратуры задача перакладчыка заключаецца ў першую чаргу ў перадачы іх эстэтычнага ўздзеяння. Такія тэксты паведамляюць пэўны змест, але яны губляюць свой спецыфічны характар, калі ў перакладзе не захоўваецца іх знешняя і ўнутраная форма, вызначаная нормамі паэтыкі, стылем або мастацкімі памкненнямі аўтара. Інварыянтнасць зместу саступае галоўнае месца аналогіі формы, якая патрабуе эквівалентнасці эстэтычнага ўздзеяння.

Але звернемся да феноменалагічнай прыроды мастацкага перакладу. Феномен (ад грэч. *φαινόμενον* – з’ява) у агульным сэнсе – незвычайная з’ява, рэдкі факт, тое, што цяжка спасцігнуць.

Мастацкі пераклад ёсць самаспасціжэнне і адкрыццё. «Перакладзены з іншай мовы твор – перадусім носьбіт іншага жыцця, іншага спосабу мыслення, іншых параметраў разумення свету. Чым вышэй мастацкая вартасць перакладу, тым большая магчымасць міжвольнага параўнання, якое непасрэдна ўплывае на нацыянальную свядомасць.

Тут варта сказаць, што ў дадзеным выпадку нацыянальная свядомасць выступае як шмат-аблічная катэгорыя, якая ахоплівае ўсе бакі жыцця, самыя розныя адносіны чалавека з прыроднымі з’явамі і рэчамі, а таксама чалавека з чалавекам, з грамадой чалавечай» [12, с. 80]. Да таго ж, пераствараючы іншамовны твор сродкамі сваёй мовы, праз сінтэз моўна-стылёвых і культурна-эстэтычных асаблівасцей перакладчык кожны раз наноў спазнае самога сябе – сваё светаадчуванне, светаразуменне, выпрабоўвае мастацкія прыёмы, выяўляе нацыянальную адметнасць уласнай творчасці, а часам робіць пэўнае адкрыццё для сябе, для чытачоў [4].

Такім чынам, мастацкі пераклад мае настолькі складаную прыроду і з’яўляецца настолькі выключным відам літаратурна-мастацкай творчасці, што гаварыць пра яго як пра феномен абсалютна правамерна, нягледзячы на тое, што некаторыя перакладчыкі і перакладазнаўцы адмаўляюць яму ў выключнасці.

Напрыклад, згаданая вышэй Анн Кальдэфі-Факар адзначае: «Чым больш працую ў гэтым кірунку, тым больш пераконваюся, што літаратура не паддаецца перакладу. Чаму? Таму што тут важныя не толькі словы, атмасфера, персанажы, дзеянні, гісторыя, інтрыга, а існуе цэлы комплекс, ансамбль розных рэчаў, якія іншы чалавек не можа ўзнавіць, асабліва на іншай мове... Гэта не значыць, што трэба перакладаць літаратуру вельмі кепска. Наадварот. Ад таго, што гэта немагчыма, трэба старацца яшчэ больш. Праца перакладчыка вельмі складаная і няўдзячная» [9].

З гэтымі высновамі варта пагадзіцца за выключэннем думкі пра тое, што «літаратура не паддаецца перакладу». Паддаецца, але рэдка, калі гаварыць пра высокакасны мастацкі пераклад, таму ёсць падставы такія выпадкі лічыць феноменальнымі. Чым далей адна ад адной моўныя сістэмы, як руская і французская, тым складаней стварыць феномен перакладу, і тут можна зразумець А. Кальдэфі-Факар, а чым бліжэй мовы, тым больш шансаў на з’яўленне феномена, для вызначэння якога літаратуразнаўства распалагае метадыкай феноменалагічнага аналізу, што распрацоўвалася не адно дзесяцігоддзе.

Феноменалагічны метада нямецкага філосафа Эдмунда Гусэрля, прыняты заходнееўрапейскім літаратуразнаўствам яшчэ на пачатку ХХ ст., заключаецца ў разглядзе феномена па-за кантэкстам, зыходзячы з яго самога. Складаныя феномены падзяляюцца на часткі, узроўні і пласты, што выяўляе структуру феномена. Метада выяўлення слаёў і быў выкарыстаны Э. Гусэрлем, які пабудаваў «мадэль» паслойнай структуры аб’екта. Сутнасць гэтай «мадэлі» заключаецца ў тым, што яе слаі, які кожны паасобку з’яўляецца незалежнай адзінкай, разам ствараюць цэласную структуру.

Паслядоўнік Э. Гусэрля польскі навуковец Раман Ингардэн першым выкарыстаў адзначаны прынцып у дачыненні да літаратурнага твора. Раскрыццё структуры з’яўляецца асновай феноменалагічнай метадалогіі даследавання ў літаратуразнаўстве. (Менавіта феноменалагі першымі падыйшлі да аналізу структуры мастацкага твора і такім чынам прымянілі метадалогію, якую пасля выкарыстоўваў структуралізм.) Пры тым галоўнай асаблівасцю феноменалагічнага падыходу было анталагічнае даследаванне феномена, які спыняе спасціжэнне на самым сабе. Усё, што можна даведацца пра твор, знаходзіцца ў ім самім, ён мае сваю самастойную каштоўнасць, аўтаномнае існаванне і пабудаваны паводле ўласных законаў. Р. Ингардэн імкнуўся паказаць, што структура літаратурнага твора гэта адначасова спосаб яго існавання і яго сутнасць.

Дарэчы, Раман Ингардэн стаў адным з заснавальнікаў рэцэптыўнай эстэтыкі, асноўныя прыцыпы якой разглядаліся вышэй. «У сваёй тэорыі структуры мастацкага твора Ингардэн зведаў моцны ўплыў феноменалогіі Э. Гусэрля. Гэта, перш за ўсё, выразілася ў ідэі інтэнцыянальнасці, якая стала асновастваральнай для ўсіх наступных паслядоўнікаў рэцэптыўнай эстэтыкі. Менавіта гэта ідэя з’явілася філасофскім абаснаваннем камунікатыўнай сутнасці мастацтва, што тлумачыць актыўны, творчы характар чытацкага ўспрымання. Як вядома, інтэнцыянальнасць – гэта скіраванасць свядомасці на прадмет, якая дазваляе асобе ствараць, а не толькі пасіўна ўспрымаць акаляючае матэрыяльнае асяроддзе, напаўняючы яго «сваім» зместам, сэнсам і значэннем» [5, с. 119].

Пазней, у 70-х гадах ХХ ст., у рамках феноменалагічнага падыходу да літаратуры мастацкі твор перастаў разглядацца як аб’ект, які існуе аўтаномна, і ўвага стала надавацца комплексу праблем, звязаных з суадносінамі «аўтар–твор–чытач» [5, с. 268–272], якія ў дачыненні да мастацкага перакладу можна сфармуляваць як «аўтар–перакладчык–твор–чытач».

Блізкароднасны характар моў можа садзейнічаць рэлевантнасці, якая ў сваю чаргу абумоўлівае стварэнне феномена мастацкага перакладу, г. зн. перакладу як культурна-эстэтычнай з’явы, якая па змястоўнасці і мастацкіх характарыстыках (стылістыцы, вобразна-выяўленчых сродках) не саступае арыгінальнаму твору.

Між тым трэба адзначыць, што пры мастацкім перакладзе з блізкароднасных моў гэта самая моўная блізкасць, з аднаго боку, дапамагае пры перакладзе, таму што за ёю стаіць блізкасць культур, этнасу, гісторыі, сацыяльна-эканамічнага ўкладу жыцця і г. д., а з другога – можа ствараць перашкоды для адэкватнага перакладу, бо тая ж этнічная і моўная блізкасць у пэўныя гістарычныя перыяды адчуваецца народамі па-рознаму, што адбываецца і на ступені моўнага разумення, і на эмацыйным стаўленні да мовы і культуры адзін аднаго.

Перакладчык падчас сваёй працы знаходзіцца ў сітуацыі двухмоўя (білінгвізму), а калі двухмоўе ўласцівае і чытачам перакладу, як гэта адбываецца ў Беларусі дзякуючы беларуска-рускаму білінгвізму, узровень складанасці перакладчыцкай працы значна павышаецца за кошт чытацкага кантролю – узмаценай увагі чытачоў да перакладу, якія ўважліва сочаць за яго якасцю і тым самым уплываюць на гэту якасць, а разам з тым і на адпаведнасць пераклада арыгіналу. Чытацкі кантроль бывае яўным – адкрыта выражаным, калі чытач нейкім чынам выказвае перакладчыку свае думкі і пажаданні наконт перакладу, і меркаваным, які перакладчык можа прадугледжваць як магчымы і ў адпаведнасці з гэтым працаваць над тэкстам.

Паколькі рэлевантнасць мастацкага перакладу выяўляецца праз яго практычную і сацыяльную прымяняльнасць, чытацкі кантроль уплывае, асабліва ў сітуацыі блізкароднаснага двухмоўя, на функцыі перакладу (азнаямляльную, рэцэпцыйную, культурна-эстэтычную, прапагандыскую, грамадска-культурную і літаратурную). У пэўным перакладзе, створаным для пэўнай чытацкай аўдыторыі, адна ці дзве функцыі могуць дамінаваць, але яны не выключаюць наяўнасці ўсіх астатніх функцый. Пры гэтым асноўныя функцыі мастацкага перакладу напрамую залежаць ад пастаўленых перакладчыкам мэт і задач перастварэння згодна з яўным або меркаваным чытацкім кантролем.

У сваю чаргу з чытацкім кантролем звязана эстэтычная дыстанцыя, што, як ужо адзначалася, вызначае ступень нечаканасці твора для чытача і яго мастацкую каштоўнасць. Арыгінальны твор заўсёды фарміруе ў чытача пэўны гарызонт чакання, несупадзенне якога з гарызонтам чакання перакладчыка стварае эстэтычную дыстанцыю паміж чытачом і перакладным творам.

Вядома, што мастацкі пераклад мае свае цяжкасці. Перакладчык павінен адчуць і з максімальнай дакладнасцю «ўзнавіць рытм арыгінала, інтанацыю, манеру перадачы думкі, зразумець сувязь усіх гэтых кампанентаў з фэбулай, сюжэтам, кампазіцыяй твора» [13, с. 52], да таго ж сапраўдная мастацкая творчасць вымагае ад перакладчыка свежасці, арыгінальнасці слова. І толькі з улікам усіх пералічаных складнікаў з’явіцца феномен мастацкага перакладу, бо ён можа ўзнікнуць толькі тады, калі перакладчык адчувае феноменальную сутнасць арыгінала і знаходзіць адпаведныя сродкі перастварэння.

## Спіс выкарыстанай літаратуры

1. *Новикова, М. Г.* Мера смысла, актуальное членение и адекватность перевода / М. Г. Новикова. – М.: ФЛИНТА: Наука, 2012. – 208 с.
2. *Рагойша, В.* Тэорыя літаратуры ў тэрмінах / В. Рагойша. – Мінск: Беларус. энцыкл., 2001. – 384 с.
3. ПрайдзіСвет: Часопіс перакладной літаратуры [Электронны рэсурс]. – Рэжым доступу: <http://prajdzisvet.org/> – Дата доступу: 29.01.2015.
4. *Якавенка, Н.* Nosce te ipsum (Спазнай самога сябе) / Н. Якавенка // Новы час: Літаратурная Беларусь. – 2012. – 27 крас. – С. 23 (15).
5. Современное зарубежное литературоведение: энциклопедич. справ. / РАН, Ин-т науч. информ. по обществ. наукам. – М.: Intrada, 1999. – 319 с.
6. *Чарота, И.* Перевод в условиях двуязычия / И. Чарота // Литература и перевод: проблемы теории: Междунар. встреча ученых и писателей, Москва, 27 февр. – 1 мар. 1991 г. / сост. П. М. Топер, В. Х. Ганиев. – М.: Изд-я гр. «Прогресс». «Литера», 1992. – С. 65–69.
7. *Рагойша, В. П.* Проблемы перевода с близкородственных языков: Белорусско-русско-украинский поэтический взаимоперевод / В. П. Рагойша. – Минск: БГУ, 1980. – 183 с.
8. *Попович, А.* Проблемы художественного перевода / А. Попович. – М.: Высш. шк., 1980. – 198 с.
9. *Весялуха, М.* З рускай – на французскую / М. Весялуха // ЛіМ. – 2014. – 11 крас. – С. 9.
10. *Самков, М.* Влияние коммуникативной функции перевода на реализацию переводческой стратегии / М. Самков // Богослов.ru: научный богословский портал [Электронный ресурс]. – 2015. – Режим доступа: <http://www.bogoslov.ru/text/4418156.html>. – Дата доступа: 17.02.2015.
11. Теория скопоса. – Trans Europe: бюро переводов [Электронный ресурс]. – 2015. – Режим доступа: <http://transeurope.ru/publications/teoriya-skoposa.html>. – Дата доступа: 17.02.2015.
12. *Шэрман, К.* Мастацкі пераклад і нацыянальная свядомасць / К. Шэрман // Таямніцы почырку. – Мінск, 1995. – С. 80–83.
13. *Гачечиладзе, Г.* Художественный перевод и литературные взаимосвязи / Г. Гачечиладзе; 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Сов. писатель, 1980. – 255 с.

Паступіла ў рэдакцыю 20.07.2015

**АГРАРНЫЕ НАУКИ**

УДК 636.4.082.2

*Академик И. П. ШЕЙКО, Н. А. ЛОБАН, Р. И. ШЕЙКО***ПОВЫШЕНИЕ ПРОДУКТИВНЫХ, ОТКОРМОЧНЫХ  
И МЯСНЫХ КАЧЕСТВ СВИНЕЙ МАТЕРИНСКИХ ПОРОД  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СЕЛЕКЦИОННЫХ ИНДЕКСОВ***НПЦ НАН Беларуси по животноводству, Жодино, Беларусь  
belniig@tut.by; nikolay\_loban@mail.ru; belniig@tut.by*

Исследования посвящены изучению и всестороннему анализу использования индексной селекции в свиноводстве, позволяющей существенно (1,3–1,5 раза) повысить эффективность отбора при улучшении репродуктивных, откормочных и мясных качеств.

*Ключевые слова:* генотип, свиньи, репродуктивные, откормочные и мясные качества, индексная селекция.

*I. P. SHEYKO, N. A. LOBAN, R. I. SHEYKO***IMPROVEMENT OF REPRODUCTIVE, FATTENING  
AND MEAT TRAITS OF MATERNAL BREEDS OF PIGS USING SELECTION INDICES***Scientific and Practical Center of the National Academy of Sciences of Belarus on Animal Husbandry, Zhodino, Belarus  
belniig@tut.by; nikolay\_loban@mail.ru; belniig@tut.by*

The researches are devoted to the study and a comprehensive analysis of use of the index selection in pig breeding, allowing significantly (1.3–1.5 times) the increase in the selection efficiency to be increased significantly (1.3–1.5 times) when improving reproductive, fattening, and meat traits.

*Keywords:* genotype, pigs, reproductive, fattening and meat traits, index selection.

**Введение.** В селекционной работе отбор и подбор являются основными зоотехническими приемами совершенствования стад и пород в целом. Отбор свиноматок по продуктивности осуществляется на основе оценки отдельных признаков продуктивности: многоплодия, молочности, массы гнезда при отъеме, на основе которых выводится общий оценочный балл [1; 2].

Основными генетическими предпосылками отбора и подбора являются изменчивость и наследуемость селекционируемых признаков в популяции. Существует достаточно большое количество селекционных индексов, разработанных различными авторами [3–6]. Однако они не всегда учитывают особенности наследования и разнообразия селекционных признаков отбора.

Установлено, что приоритетными признаками отбора, оказывающими максимальное влияние на товарную массу гнезда, являются многоплодие, число поросят и масса гнезда при отъеме. Выявлено, что наследуемость селекционных индексов отбора значительно выше, чем отдельных признаков воспроизводительных качеств, включенных в его состав по отдельности. Индексная селекция позволяет повысить эффект отбора в 1,3–1,5 раза. Одним из индексов, наиболее полно охватывающим весь комплекс признаков продуктивности свиноматок, является предложенный Н. В. Михайловым [1; 2] комплексный показатель воспроизводительных качеств, который в настоящее время широко используется в селекционной работе.

**Материалы и методы исследований.** Исследования проводились в 2010–2015 гг. в РУСП свинокомплекс «Борисовский» и РУП «ЖодиноАгроПлемЭлита» на свиньях крупной белой и белорусской мясной пород.



Оценку репродуктивных качеств свиноматок осуществляли на основании отбора животных по многоплодию, молочности, количеству поросят при отъеме, массе гнезда при отъеме.

На основе оценочных данных по хозяйству с учетом каждого составлялись сводные таблицы этих показателей по линиям и родственным группам хряков и свиноматок.

Исходя из сводных таблиц по многоплодию ( $x_1$ ), молочности ( $x_2$ ), количеству поросят при отъеме ( $x_3$ ) и массе гнезда при отъеме ( $x_4$ ), рассчитывали индекс воспроизводительных качеств (ИВК) по формуле

$$\text{ИВК} = 1,1x_1 + 0,3x_2 + 3,3x_3 + 0,67x_4.$$

Кроме того, уровень значений отклонений изучаемых вариантов кроссов линий (положительный, нейтральный и отрицательный) по формуле

$$\text{УС (уровень сочетаемости)} = Mn - Mo,$$

где  $Mn$  – среднее значение ИВК, баллов;  $Mo$  – индивидуальное значение ИВК, баллов.

Индивидуальный или групповой подбор осуществляли только по разработанным схемам на основании критерия «плюс-вариантности». Эффект уровня положительных сочетаний определяли в % по формуле

$$\text{ЭС (эффект сочетаемости)} = (M_0 / M_n)100\%,$$

где  $M_0$  – индивидуальное значение ИМОК (баллов);  $M_n$  – среднее значение ИМОК (баллов).

Исходя из данных формулы ЭС, составляли схемы подбора, которые позволяют получать эффект гетерозиса.

Ставилась задача с использованием ИВК и формул уровня сочетаемости и эффекта сочетаемости выявить сочетания животных, позволяющие получить гетерозисный эффект по воспроизводительным качествам, т. е. имеющий положительный уровень, определить его значение и разработать схемы «плюс-вариантного» группового подбора (закрепления) животных различных линий. При этом изучались следующие показатели продуктивности: количество родившихся поросят на 1 опорос (многоплодие), голов; масса гнезда в 21 день (молочность), кг; количество поросят при отъеме в 36 дней, голов; масса гнезда при отъеме в 36 дней, кг.

**Результаты и их обсуждение.** Анализ полученных результатов по количеству всех родившихся поросят показывает, что в сравнении со средним значением по линиям и родственным группам достоверно более высокие результаты ( $P < 0,05$ ) получены при сочетании маток линии Самсона 1441 с хряками родственной группы Свата 17385 и линии Секрета 5783. Отрицательные результаты ( $P < 0,05$ ) получены при кроссировании маток родственной группы Снежка 38225 с хряками родственной группы Сталактита 10799; маток линии Самсона 1441 с хряками родственной группы Снежка 8119.

Показатель количества поросят в 21 день (молочность) отражает выбытие молодняка за первый период подсоса. В сравнении со средним по линиям этот показатель был выше ( $P < 0,05$ ;  $P < 0,01$ ) при сочетаниях маток родственной группы Снежка 38225 с хряками родственной группы Драчуна 18329 – на 5,6 кг; маток родственной группы Снежка 28320 с хряками родственной группы Свата 17385 – на 5,4 кг; маток линии Дельфина 4589 с хряками родственной группы Дельфина 15247 – на 9,4 кг; маток родственной группы Дельфина 15247 с хряками родственной группы Снежка 38225 – на 3,6 кг; маток родственной группы Сталактита 10799 с хряками родственной группы Снежка 38225 – на 2,7 кг. Достоверно более низкие показатели молочности получены при кроссировании маток родственной группы Снежка 38225 с хряками линии Секрета 5783 – на 5,1 кг и маток линии Дельфина 4589 с хряками родственной группы Снежка 8119 – на 7,6 кг.

Количество отнятых поросят в 36-дневном возрасте было больше по сравнению со средним по линии при сочетании маток родственной группы Снежка 38225 с хряками родственной группы Снежка 8119; маток родственной группы Дельфина 4589 и линии Самсона 1441 с хряками линии Секрета 5783. Более низкие показатели ( $P < 0,05$ ) получены при спаривании маток родствен-



ной группы Снежка 38225 с хряками родственной группы Сталактита 10799 и маток родственной группы Дельфина 15247 с хряками линии Секрета 5783.

Масса гнезда к отъему является одним из важнейших показателей репродуктивных качеств свиноматок. В сравнении со средним по линиям и родственным группам этот показатель был выше ( $P < 0,05$ ;  $P < 0,01$ ) при сочетаниях маток родственной группы Снежка 28320 с хряками родственной группы Снежка 38225 – на 8,4 кг; маток линии Самсона 1441 с хряками родственной группы Снежка 38225 – на 11 кг и родственной группы Снежка 8119 – на 8,5 кг; маток родственной группы Дельфина 15247 с хряками родственной группы Снежка 28320 и 8119 – на 8,8 и 12,6 кг соответственно. Отрицательные результаты ( $P < 0,05$ ) получены при кроссировании маток родственной группы Снежка 28320 с хряками родственной группы Драчуна 18329 – на 12,4 кг; маток линии Дельфина 4589 с хряками родственной группы Снежка 8119 – на 10,2 кг; маток линии Самсона 1441 с хряками родственной группы Дельфина 4586 – на 21 кг; маток родственной группы Дельфина 15247 с хряками родственной группы Сталактита 10799 – на 11,3 кг и маток родственной группы Сталактита 10799 с хряками линии Самсона 1441 – на 25 кг.

Поскольку из-за большого массива представленного материала проведение подбора родительских пар затруднено, использовался разработанный индекс ИВК (индекс воспроизводительных качеств) и УС (уровень сочетаемости).

На основе этих формул рассчитали эффект сочетаемости линий в процентах, а также выявили сочетания, позволяющие получать гетерозисный эффект (табл. 1).

Т а б л и ц а 1. Показатели эффекта сочетаемости на линейном уровне

Линия хряков	Линейная принадлежность маток								
	Заводской тип «Минский», %					Заводской тип «Витебский», %			
	Снежок 38225	Снежок 28320	Дельфин 4513	Сват 17385	Самсон 1441	Дельфин 15247	Сталактит 10799	Секрет 5783	Лафет 6187
Снежок 38225	101,6	107,4***	104,1**	102,5	110,2***	101,7	109,5***		
Снежок 28320			103,0	106,2***		106,6***		105,4**	
Самсон 1441	103,7	103,8				101,3		101,2	
Дельфин 4513			103,4				103,7		
Драчун 18329	110,7***					104,1*			
Сват 17385	106,1**	102,8	102,6		108,6***				105,4***
Дельфин 15247	103,9		103,4	101,0	102,5	106,0***	110,8***		
Снежок 8119					101,4	108,7***			
Сталактит 10799		112,3***		101,8					
Секрет 5783			102,7	102,3	110,3***		100,8	104,3*	104,2**

Примечания. \* –  $P \leq 0,05$ ; \*\* –  $P \leq 0,01$ ; \*\*\* –  $P \leq 0,001$ .

На основании показателей эффекта сочетаемости на линейном уровне маток и хряков были определены оптимальные варианты межлинейного подбора (табл. 2).

Т а б л и ц а 2. Оптимальные варианты межпородного подбора

Линии, родственные группы маток	Линии, родственные группы хряков
Снежок 38225	Драчуна 18329
Снежок 28320	Сталактита 10799
Дельфин 4513	Снежка 38225
Сват 17385	Снежка 28320
Самсона 1441	Снежка 38225; Секрета 5783
Дельфин 15247	Снежка 8119
Сталактит 10799	Дельфина 15247
Секрет 5783	Снежка 28320
Лафет 6187	Свата 17385

С использованием данных схемы подбора, обеспечивающей эффект гетерозиса по воспроизводительным качествам, были рассчитаны теоретические показатели производства свинины, позволяющие получить дополнительно на 1 свиноматку в год 2–2,5 поросенка с более высокой (на 3,5–7,7 кг) отъемной массой гнезда, что с учетом стоимости молодняка в данной группе составит (2,5 гол. · 9 кг)10,7 тыс. руб. = 240,7 тыс. руб.

На свиноводческом комплексе мощностью 24 тыс. голов свиней в год можно дополнительно получить (900 свиноматок · 2,5 гол.) = 2250 отъемных поросят стоимостью (2250 гол. · 9 кг) 10,7 тыс. руб. = 216,7 млн. руб., или 102,2 тыс. у. е. При откорме этого дополнительного количества молодняка можно получить (2250 гол. · 0,9)107 кг = 216,7 т привеса стоимостью (216,7 · 6 млн руб.) = 1300,2 млн руб., или 613,3 тыс. условных единиц.

Разработанная методика позволяет объективно и быстро проводить оценку и подбор исходных родительских пар и сочетающихся линий для повышения продуктивности маток и получения потомства, а следовательно, без дополнительных затрат повышать эффективность производства свинины. На данную научную разработку получено два патента, выданных Федеральным институтом промышленной собственности Российской Федерации (ФГУ ФИПС РФ):

1. «Способ прогнозирования эффекта гетерозиса» (№ 234078);
2. «Способ комплексной оценки репродуктивных качеств свиноматок» (№ 234079) [7–10].

В настоящее время в странах с развитым свиноводством создание и улучшение генотипов свиней основывается исключительно на применении индексной селекции, что позволяет достичь высоких показателей продуктивности. Известен разработанный В. И. Степановым и соавт. [11] способ оценки откормочной и мясной продуктивности. Однако продуктивность пород изменилась и данная методика не предусматривает оценки эффективности сочетаемости отдельных животных и конкретных линий для получения эффекта гетерозиса.

Нами разработана методика, позволяющая объективно и быстро проводить оценку и подбор исходных родительских пар и сочетающихся линий, семейств, родственных групп, направленная на повышение откормочных и мясных качеств свиней. Сущность исследований состоит в разработке способа комплексной оценки откормочных и мясных качеств свиней и схем межлинейного подбора на получение гетерозиса. Анализировалось потомство (620 голов), полученное от скрещивания свиноматок (6 семейств) и хряков (8 линий). Основные показатели откормочных и мясных качеств молодняка свиней определяли по результатам контрольного откорма. На основе данных оценки свиней по РСУП «СГЦ «Заднепровский» были составлены сводные таблицы этих показателей по линиям, родственным группам хряков и семействам свиноматок.

Исходя из сводных таблиц по возрасту достижения живой массы 100 кг ( $x_1$ ), среднесуточному приросту ( $x_2$ ), расходу корма на 1 кг прироста ( $x_3$ ), длине туши ( $x_4$ ), толщине шпика ( $x_5$ ) с учетом весового коэффициента для каждого признака животного рассчитывался индекс мясо-откормочных качеств (ИМОК) по формуле

$$\text{ИМОК} = 1,24(192 - x_1) + 0,1(x_2 - 733) + 78(3,52 - x_3) + 2,1(x_4 - 97,4) + 3,2(26,7 - x_5) + 10(x_6 - 11,0).$$

Анализируя полученные результаты, следует отметить, что показатели откормочных и мясных качеств в значительной степени зависели от сочетаний исходных генотипов. Вариация признаков в зависимости от генотипов была значительной: возраст достижения живой массы 100 кг – 174,6–179,5 дней; среднесуточный прирост живой массы – 741–801 г; затраты корма на 1 кг прироста – 3,36–3,51 к. ед.; длина туши – 97,2–98,6 см; толщина шпика – 26,4–28,0 мм; масса задней трети полутуши – 11,0–11,3 кг.

Наиболее высокий индекс ИМОК был отмечен у потомства, полученного при скрещивании свиноматок семейства Сои с хряками линии Сталактита (54,4 балла) и Секрета 8549 (52,6 балла), а также семейства Тайги с родственной группой Скарба 50007 (53,3 балла).

Исходя из полученных данных, были составлены схемы подбора, позволяющие получить эффект гетерозиса. На данную научную разработку получен патент Республики Беларусь № 17677 «Способ оценки сочетаемости родительских пар свиней по мясо-откормочным качествам потомков» [12].

На основе полученных показателей ИМОК определялся уровень сочетаемости (УС). При этом определялись варианты отклонений показателей по отношению к средним значениям по популяции (положительный, отрицательный). Наиболее высокие положительные значения УС отмечались при скрещивании свиноматок семейства Палитры с хряками линии Сталактита 8387 (94,7 баллов), Сои – линии Секрета 8549 (17,3 балла), Беатрисы – линии Драчуна 90685 (13,6 баллов). На основании плюсовых вариантов сочетаний животных рассчитывался эффект сочетаемости (ЭС) (табл. 3).

Т а б л и ц а 3. Схема оптимальных вариантов группового подбора хряков и маток по откормочным и мясным качествам

Семейство свиноматок	Линия, родственная группа хряков
Беатриса	Драчун 90685 (163,2)*, Секрет 8549(130,0)*, Сват 3487 (124,6), Скарб 5007 (100,2)
Тайга	Скарб 5007 (128,7)*, Смык 308 (116,0), Свитанак 3884 (105,6), Сват 3487 9104,7), Секрет 8549 (102,5)
Химера	Свитанак 3884 (145,0)*, Сват 3487 (138,1)
Соя	Секрет 8549 (149,0)*
Волшебница	Сябр 202065 (133,1)*, Смык 308 (127,5)
Палитра	Сталактит 8387 (194,7)*

Примечания. \* –  $P \leq 0,05$ .

Наиболее высокий эффект сочетаемости был отмечен при скрещивании свиноматок семейства Палитры с линией Сталактита 8387 (194,7 %), Беатрисы с линией Драчуна 90685 (163,2 %), Химеры с родственной группой Свитанка (145,0 %), Сои с линией Секрета 8549 (149,0 %). При ведении селекционной работы в первую очередь следует работать с животными этих линий. Основным результатом наших исследований является разработка способа комплексной оценки откормочных и мясных качеств свиней белорусской крупной белой породы.

Предложена оптимальная схема группового подбора хряков и свиноматок породы по откормочным и мясным качествам с учетом эффекта сочетаемости (гетерозиса).

Использование разработанной методики, включающей тестирование животных по величине ИМОК и подбор свиноматок и хряков по ЭС, позволяет в условиях промышленного производства объективно и быстро, без дополнительных затрат, повысить эффективность производства свинины на 3,5–5,0 %.

#### Выводы.

1. Разработаны новые методы по определению эффекта гетерозиса и расчета индекса воспроизводительных качеств свиноматок, позволяющие повысить их многоплодие на 1–1,5 гол. ( $P < 0,05; 0,01$ ) и отъемную массу гнезда на 3,5–7,5 кг ( $P < 0,05; 0,01$ ).

2. Разработаны схемы подбора свиней материнских пород Беларуси на линейном и породно-линейном уровнях, обеспечивающие повышение продуктивности свиноматок на 3,5–15 % ( $P < 0,01; 0,001$ ).

3. Разработан метод комплексной оценки мясо-откормочной продуктивности свиней и эффективных сочетаний линий, что обеспечивает рост продуктивности откормочного молодняка на 3,5–7,5 % ( $P < 0,05; 0,01$ ) в условиях промышленного производства без дополнительных затрат.

#### Список использованной литературы

1. Михайлов, Н. В. Конструирование и использование селекционных индексов в свиноводстве: рекомендации / Н. В. Михайлов, В. А. Коваленко. – Персиановский: Рассвет, 1989. – 19 с.
2. Михайлов, Н. В. Селекционно-генетические аспекты оценки наследственных качеств животных / Н. В. Михайлов, В. Д. Кабанов, Г. А. Каратунов. – Новочеркасск, 1996. – 63 с.
3. Овсянников, А. И. Итоги и перспективы создания высокопродуктивных пород свиней / А. И. Овсянников // Породы свиней в СССР. – М., 1970. – С. 3–25.
4. Овсянников, А. И. Методы выведения пород сельскохозяйственных животных / А. И. Овсянников // Генетические основы селекции животных. – М.: Наука, 1969. – С. 295–307.
5. Рыбалко, В. Прижизненное определение толщины шпика / В. Рыбалко // Свиноводство. – 2010. – № 4. – С. 46–47.

6. Теория и методы выведения скороспелой мясной породы свиней / В. Д. Кабанов [и др.]. – М., 1998. – 261 с.
7. Способ комплексной оценки репродуктивных качеств свиноматок: пат. 2340178 Рос. Федерация, МПК6 А 01 К 67/02 / И. П. Шейко, Н. А. Лобан, О. Я. Василюк, И. С. Петрушко, А. С. Чернов, Р. И. Шейко; заяв. Респ. унит. предпр. «Научно-практ центр Нац. акад. наук Беларуси по животноводству». – № 2006118083/13; заявл. 26.05.06; опубл. 10.12.08 // Реестр изобретений Российской Федерации [Электронный ресурс]. – 2015.
8. Способ прогнозирования эффекта гетерозиса в свиноводстве: пат. 2340179 Рос. Федерация, МПК6 А 01 К 67/02 / И. П. Шейко, Н. А. Лобан, О. Я. Василюк, И. С. Петрушко, А. С. Чернов; заявитель Респ. унит. предпр. «Научно-практ центр Нац. акад. наук Беларуси по животноводству». – № 2006118084/13; заявл. 26.05.06; опубл. 10.12.08 // Реестр изобретений Российской Федерации [Электронный ресурс]. – 2015.
9. *Степанов, В. И.* Оценка воспроизводительных качеств свиней / В. И. Степанов, Н. В. Михайлов, Э. В. Костылев // Зоотехния. – 2001. – № 12. – С. 22–24.
10. Эффективность отбора свиноматок / А. И. Рудь [и др.] // Свиноводство. – 2010. – № 4. – С. 12–15.
11. *Степанов, В.* Регрессионный анализ прогнозирования хозяйственно полезных качеств свиней / В. Степанов, В. Федоров, А. Тариченко // Свиноводство. – 2001. – № 6. – С. 7–8.
12. Способ оценки сочетаемости родительских пар свиней по мясо-откормочным качествам потомков: пат. 17677 Респ. Беларусь, МПК6 А 01 К 67/02 / И. П. Шейко, Н. А. Лобан, О. Я. Василюк, И. С. Маликов; заяв. Респ. унит. предпр. «Научно-практ. центр Нац. акад. наук Беларуси по животноводству». – № а 20100713; заявл. 11.05.10; опубл. 30.10.13// Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2013. – № 5. – С. 63–64.

*Поступило в редакцию 27.01.2016*