

ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

Выходит шесть номеров в год

Журнал основан в июле 1957 года

МИНСК, БЕЛОРУССКАЯ НАУКА, 2015, ТОМ 59, № 4

Учредитель – Национальная академия наук Беларуси

Редакционная коллегия:

В. Г. Гусаков (главный редактор),
А. В. Кильчевский (заместитель главного редактора),
С. Я. Килин (заместитель главного редактора),
С. А. Чижик (заместитель главного редактора),
И. М. Богдевич, Н. А. Борисевич, П. А. Витязь,
И. Д. Волоотовский, И. В. Гайшун, С. В. Гапоненко, А. Е. Дайнеко, И. В. Залуцкий,
О. А. Ивашкевич, Н. А. Изобов, Н. С. Казак, А. А. Коваленя,
Ф. Ф. Комаров, И. В. Котляров, В. А. Лабунов, А. П. Ласковнев, О. Н. Левко,
А. И. Лесникович, В. Ф. Логинов, А. А. Махнач, А. А. Михалевич,
М. Е. Никифоров, В. А. Орлович, О. Г. Пенязьков, Ю. М. Плескачевский,
Н. С. Сердюченко, А. Ф. Смянович, Л. М. Томильчик, С. А. Усанов,
Л. В. Хотылева, В. А. Хрипач, И. П. Шейко,
ведущий редактор **Т. П. Петрович**

Адрес редакции:

220072, Минск, ул. Академическая, 1, к. 119,
тел. 284-19-19

csl.bas-net.by/Web/Pages/magNAS.asp

E-mail: doklady_nanb@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Забрейко П. П., Михайлов А. В. Сходимость последовательных приближений для уравнений с нормальными операторами	5
Гётце Ф., Гусакова А. Г. Алгебраические числа в коротких интервалах	11
Янович Л. А., Игнатенко М. В. О некоторых аналогах формул сплайн-интерполирования для функций матричной переменной.	17
Лиходед Н. А., Полещук М. А. Метод ранжирования параметров размера блоков вычислений параллельного алгоритма	25
Садовский А. П., Щеглова Т. В. Многообразия комплексного и вещественного центра двумерных автономных полиномиальных дифференциальных систем	34

ФИЗИКА

Пилипович В. А., Залесский В. Б., Конойко А. И., Кравченко В. М. Амплитудная модуляция света путем электрооптического управления многолучевой интерференцией в интерферометре Фабри–Перо	41
---	----

Суходола А. А. Влияние эффектов красного края на интеркомбинационную конверсию индола в этаноле при 77 К	46
Троянчук И. О., Чобот А. Н., Мантыцкая О. С., Терешко Н. В., Лобановский Л. С., Добрянский В. М., Чобот Г. М., Никитин А. В. Колоссальный магниторезистивный эффект в кобальтитах со структурой перовскита	52
Ластовский С. Б., Маркевич В. П., Коршунов Ф. П., Якушевич А. С., Мурин Л. И., Макаренко Л. Ф. Бистабильные центры с глубокими уровнями в облученных кристаллах кремния <i>p</i> -типа	57
<i>ХИМИЯ</i>	
Ковганко В. Н., Ковганко Н. Н., Дорожук Д. С. Новый подход к синтезу пиразолсодержащих жидкокристаллических соединений	63
Барабошина А. А., Свиридова Т. В., Цыбульская Л. С., Кокорин А. И., Свиридов Д. В. Неорганические фоторезисты на основе смешанных оксидов молибдена и ванадия	68
Воробьева Е. В., Крутько Н. П., Воробьев П. Д., Чердиченко Д. В., Матрунчик Ю. В. Количественное определение органических реагентов в образцах хлорида калия методом ИК спектроскопии	72
<i>БИОЛОГИЯ</i>	
Вежновец В. В., Литвинова А. Г. Размерно-возрастная характеристика <i>Eurytemora lacustris</i> в озерах Беларуси	78
Ризевский В. К., Ермолаева И. А., Лещенко А. В., Кудрицкая А. П. Бычок-песочник <i>Neogobius fluviatilis</i> – понто-каспийский чужеродный вид рыб в бассейне р. Неман	83
Гетко Н. В., Поболовец Т. А., Титок В. В. Функциональная анатомия листа тропических и субтропических древесных видов в оранжерейной культуре	88
Аверина Н. Г., Бейзаи З., Щербаков Р. А. Молекулярные механизмы регуляции нитратредуктазы экзогенной 5-аминолевулиновой кислотой в проростках ячменя, выращенных в условиях засоления хлоридом натрия	95
<i>МЕДИЦИНА</i>	
Кузнецова И. В. Реакция окружающих тканей в отдаленный послеоперационный период на имплантацию композиционных материалов	102
<i>НАУКИ О ЗЕМЛЕ</i>	
Матвеев А. В. Особенности распределения «местного» (грунтового) радона в почвенном воздухе покровных отложений Беларуси	107
<i>ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ</i>	
Комаров А. И., Витязь П. А., Комарова В. И. Структура и трибомеханические свойства керамического покрытия, модифицированного в процессе его формирования наноразмерным TiN	113
<i>СОЦИАЛЬНО-ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ</i>	
Богдан А. И. «Автобиография» Богуслава Радзивилла как авторская исповедь-оправдание перед обществом Речи Посполитой (на бел. яз.)	117
<i>АГРАРНЫЕ НАУКИ</i>	
Гануш Г. И., Грибодова И. А. Обоснование развития экспортоориентированного промышленного грибоводства в Республике Беларусь	123

ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ. 2015. Т. 59, № 4

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,
свидетельство о регистрации № 387 от 18.05.2009.

Редактор Т. П. Петрович
Компьютерная верстка Н. И. Кашуба

Сдано в набор 04.08.2015. Выпуск в свет 26.08.2015. Формат 60×84¹/₈. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 16,4. Тираж 126 экз. Заказ 139.

Цена номера: индивидуальная подписка – 83 600 руб.; ведомственная подписка – 203 287 руб.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/18 от 02.08.2013. ЛП № 02330/455 от 30.12.2013. Ул. Ф. Скорины, 40, 220141, г. Минск.

© «Издательский дом «Беларуская навука».
Доклады НАН Беларуси, 2015

DOKLADY OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

Published bimonthly

The journal has been published since July, 1957

MINSK, BELORUSSKAYA NAUKA, 2015, Vol. 59, N 4

Founder – National Academy of Sciences of Belarus

Editorial Board:

V. G. Gusakov (Editor-in-Chief),
S. Ya. Kilin (Associate Editor-in-Chief),
A. V. Kilchevsky (Associate Editor-in-Chief),
S. A. Chizhik (Associate Editor-in-Chief),
I. M. Bogdevich, N. A. Borisevich, A. Ye. Daineko, I. V. Gaishun, S. V. Gaponenko,
O. A. Ivashkevich, N. A. Izobov, N. S. Kazak, L. V. Khotyleva, V. A. Khripach,
A. A. Kovalenya, F. F. Komarov, I. V. Kotlyarov, V. A. Labunov, A. P. Laskovnev,
O. N. Levko, A. I. Lesnikovich, V. F. Loginov, A. A. Makhnach, A. A. Mikhalevich,
M. Ye. Nikiforov, V. A. Orlovich, O. G. Penyazkov, Yu. M. Pleskachevsky,
N. S. Serduchenko, I. P. Sheiko, A. F. Smeyanovich, L. M. Tomilchik,
S. A. Usanov, P. A. Vitiaz, I. D. Volotovskii, I. V. Zalutsky,
lead editor **T. P. Petrovich**

Address of the Editorial Office:

220072, Minsk, 1 Akademicheskaya Str., room 119

telephone: 284-19-19

csl.bas-net.by/Web/Pages/magNAS.asp

E-mail: doklady_nanb@mail.ru

CONTENTS

MATHEMATICS

Zabreiko P. P., Mikhailov A. V. Convergence of successive approximations for equations with normal operator	5
Goetze F., Husakova H. G. Algebraic numbers in short intervals.	11
Yanovich L. A., Ignatenko M. V. Some analogs of spline-interpolation formulas for functions of matrix variable	17
Likhoded N. A., Paliashchuk M. A. Method of ranking tiles size parameters of a parallel algorithm	25
Sadovskii A. P., Shcheglova T. V. Center varieties of complex and real two-dimensional autonomous polynomial differential systems.	34

PHYSICS

Pilipovich V. A., Zalessky V. B., Konoiko A. I., Kravchenko V. M. Light amplitude modulation by electrooptical control of multibeam interference in the Fabry–Perot interferometer	41
---	----

Sukhodola A. A. Red – edge excitation effect on the intersystem crossing of the indole solution in ethanol at 77 K	46
Troyanchuk I. O., Chobot A. N., Mantytskaya O. S., Tereshko N. V., Lobanovsky L. S., Dobryansky V. M., Chobot G. M., Nikitin A. V. Colossal magnetoresistive effect in the cobaltites with perovskite structure	52
Lastovskii S. B., Markevich V. P., Korshunov F. P., Yakushevich H. S., Murin L. I., Makarenko L. F. Bistable deep level centers in irradiated <i>p</i> -type silicon crystals	57
<i>CHEMISTRY</i>	
Kauhanka U. M., Kauhanka M. M., Darashchuk D. S. New approach to the synthesis of pyrazole-containing liquid crystal	63
Baraboshina A. A., Sviridova T. V., Tsybulskaja L. S., Kokorin A. I., Sviridov D. V. Inorganic photoresists based on mixed oxides of molybdenum and vanadium	68
Vorobiova E. V., Krutko N. P., Vorobiov P. D., Cherednichenko D. V., Matrunchik J. V. Quantitative determination of the organic reactants in the samples of potassium chloride by IR spectroscopy.	72
<i>BIOLOGY</i>	
Vezhnavets V. V., Litvinova A. G. Size and age characteristics of <i>Eurytemora lacustris</i> in the lakes of Belarus	78
Rizevsky V. K., Ermolaeva I. A., Leschenko A. V., Kudritskaya A. P. Monkey goby <i>Neogobius fluviatilis</i> – the alien ponto-caspian fish species in the Neman river basin	83
Hetko N. V., Pobolovetz T. A., Titok V. V. Functional anatomy of the leaves of tropical and subtropical woody species in the greenhouse cultivation.	88
Averina N. G., Beyzaei Z., Sherbakov R. A. Molecular mechanisms of regulation of nitrate reductase with exogenous 5-aminolevulinic acid in barley seedlings grown under salinization with NaCl	95
<i>MEDICINE</i>	
Kuznetsova I. V. Reaction of the surrounding tissues on the implantation of composite materials in the late postoperative period	102
<i>EARTH SCIENCES</i>	
Matveyev A. V. Some features of the «local» (earth) radon distribution in the soil air of the cover deposits of Belarus.	107
<i>TECHNICAL SCIENCES</i>	
Komarov A. I., Vityaz P. A., Komarova V. I. Structure and tribo-mechanical properties of the ceramic coating modified by nanosized TiN during its shaping	113
<i>SOCIAL SCIENCES AND HUMANITIES</i>	
Bohdan A. I. «Autobiography» by Bogyslaw Radzivill as the author’s confession and excuse towards the society of the Polish-Lithuanian Commonwealth	117
<i>AGRARIAN SCIENCES</i>	
Ganush G. I., Hrybayedava I. A. Conceptual ground for the development of export-oriented industrial-type mushroom production in the Republic of Belarus	123

МАТЕМАТИКА

УДК 517.983

П. П. ЗАБРЕЙКО, А. В. МИХАЙЛОВ

СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ
ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С НОРМАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
zabreiko@mail.ru; artostby@mail.ru

В сообщении изучаются действующие в гильбертовом пространстве X нормальные линейные операторы B с единичным спектральным радиусом, для которых, однако, последовательные приближения $x_{n+1} = Bx_n + f$ сходятся при любом начальном приближении x_0 к одному из решений уравнения $x = Bx + f$ при условии, что такие решения существуют. Получены достаточные условия сходимости последовательных приближений на подпространствах истокообразно представимых функций и сходимость приближений в более слабой, чем исходная, норме гильбертова пространства. Исследовано поведение невязок и поправок. Изучено также поведение последовательных приближений при вычислениях с малыми ошибками.

Ключевые слова: последовательные приближения, последовательные приближения с ошибками, нормальные операторы в гильбертовом пространстве, спектральный радиус, спектральная теорема для нормальных операторов, корректные и некорректные задачи, теорема Красносельского.

P. P. ZABREIKO, A. V. MIKHAILOV

CONVERGENCE OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS FOR EQUATIONS WITH NORMAL OPERATOR

Belarusian State University, Minsk, Belarus
zabreiko@mail.ru; artostby@mail.ru

The article deals with normal linear operators B with a unit spectral radius in Hilbert spaces, for which the successive approximations $x_{n+1} = Bx_n + f$ with an arbitrarily initial approximation x_0 converge to a solution of the equation $x = Bx + f$ (under condition that these solutions exist). Sufficient conditions for the convergence of successive approximations on subspaces of source-wise represented functions and in weakened norms are established. The behavior of residuals and corrections of these approximations is studied, too. Moreover, the behavior of “approximate” successive approximations is also investigated.

Keywords: successive approximations, successive approximations with errors, normal operators in Hilbert spaces, spectral radius, spectral theorem for normal operators, well-posed and ill-posed problems, Krasnosel'skii's theorem.

В работе М. А. Красносельского [1] было показано, что решение уравнения

$$x = Bx + f, \quad (1)$$

с самосопряжённым оператором B , спектральный радиус которого равен 1, может быть получено методом последовательных приближений

$$x_{n+1} = Bx_n + f \quad (x_0 \in X, n = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

с любым начальным условием, если такие решения существуют.

Так как спектральный радиус оператора B равен 1, то в случае, когда последовательные приближения вычисляются приближённо, эти приближённые последовательные приближения к точному решению уже не сходятся. Однако, как показано в работах [2; 3], в случае, когда по-

следовательные приближения вычисляются с малыми ошибками, не превышающими достаточно малого числа δ , эти приближённые последовательные приближения, вообще говоря, при больших, но не очень больших, номерах n сколь угодно близко подходят к точному решению.

В работе [4] была получена модификация теоремы М. А. Красносельского [1] (см. также [5]) о сходимости последовательных приближений для случая, когда оператор B является нормальным. Одновременно в работах [2; 3] был получен ряд новых, связанных с теоремой М. А. Красносельского, утверждений для уравнений с самосопряжёнными операторами (сходимость невязок к нулю, ряд уточнений о скорости сходимости последовательных приближений к решению, поведение последовательных приближений при вычислениях с ошибками и др.). Естественно возникает вопрос о переносе результатов статей [2; 3] на случай, когда оператор B является нормальным. Настоящая работа посвящена этому вопросу. Используемые в работе общие теоремы о линейных операторах и уравнениях см. в [6; 7].

Как показано в [4], условия сходимости последовательных приближений (2) к соответствующему решению уравнения (1) могут формулироваться различными (эквивалентными друг другу) способами. Все они гарантируют корректность оператора B , т. е. сильную сходимость последовательности B^n итераций оператора B . В настоящем сообщении в качестве основного условия, гарантирующего эту сходимость, выбрано равенство $\text{Fix } B^* B = \text{Fix } B$.

Приведём точную формулировку теоремы из [4] о сходимости последовательных приближений (2) к решению уравнения (1) в случае, когда B – нормальный оператор с $\rho(B) = 1$. Как и в [2; 3], через P будем обозначать ортопроектор на подпространство собственных векторов оператора B , удовлетворяющего собственному значению 1.

Т е о р е м а 1. Пусть B – нормальный оператор с $\rho(B) = 1$ в гильбертовом пространстве X , и пусть $\text{Fix } B^* B = \text{Fix } B$. Пусть уравнение (1) разрешимо.

Тогда последовательные приближения (2) при любом начальном условии $x_0 \in X$ сходятся к одному из решений уравнения (1). Более точно, приближения (2) сходятся к решению x^* уравнения (1), для которого $Px^* = Px_0$.

Рассмотрим вопрос о поведении невязок $x_n - Bx_n - f$ для приближений (2). Так как

$$x_n - Bx_n - f = x_n - x_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

(поправки $x_{n+1} - x_n$ совпадают с невязками $x_n - Bx_n - f$, взятыми с обратным знаком), то из (2) следует

$$x_n - Bx_n - f = B^n((I - B)x_0 - f).$$

Из этого равенства вытекает [6; 8], что

$$\|x_n - Bx_n - f\| = \|B^n((I - B)x_0 - f)\| = \|B^n(x_0 - Bx_0 - f)\|.$$

Из спектральной теоремы для нормальных операторов [9] вытекает неравенство

$$\|x_n - Bx_n - f\|^2 \leq \int_{\text{sp } A} |\lambda|^{2n} (dE_\lambda(x_0 - Bx_0 - f), x_0 - Bx_0 - f)$$

(E_λ – спектральная мера для оператора B). К этому неравенству можно применить теоремы Лебега о предельном переходе. В результате получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. Пусть B – нормальный оператор с $\rho(B) = 1$ в гильбертовом пространстве X , и пусть $\text{Fix } B^* B = \text{Fix } B$. Пусть $Pf = 0$.

Тогда невязки $x_n - Bx_n - f$ для последовательных приближений (2) при любом начальном условии $x_0 \in X$ сходятся к нулю.

Отметим, что условие $Pf = 0$ в этой теореме необходимо, но в общем случае не достаточно для разрешимости уравнения (1). Таким образом, невязки для последовательных приближений могут сходиться к нулю и в том случае, когда исходное уравнение вообще не имеет решений.

Скорость сходимости последовательных приближений (2) к соответствующему решению уравнения (1) и скорость сходимости невязок к нулю для этих последовательных приближений в условиях теорем 1 и 2 существенно зависит от свойств «гладкости» самого решения x^* (если

оно существует) и от выбора начального приближения x_0 . При дополнительных предположениях о решении x^* и начальном приближении x_0 скорости соответствующих сходимостей могут быть уточнены. Ограничимся здесь двумя утверждениями, аналогичными теореме 3 из [2]; их доказательства дословно повторяют доказательство теоремы 3 из [2] и потому не приводятся.

Напомним (см. [2]), что через $\theta(B)X$ обозначается подпространство элементов $x \in X$ вида

$$x = \int_{\text{sp } A} \theta(\lambda) dE_\lambda h \quad (h \in X),$$

где $\theta(\lambda)$ – некоторая непрерывная функция из $\text{sp } B \rightarrow \mathbf{R}$, причём числа $\lambda \in \text{sp } B : \theta(\lambda) = 0$ не являются собственными значениями оператора B . С нормой

$$\|x\|_{\theta(B)X} = \inf \left\{ \|h\| : x = \int_{\text{sp } A} \theta(\lambda) dE_\lambda h, \quad h \in X \right\}$$

пространство $\theta(B)X$ является банаховым. Пространство $\theta(B)X$ непрерывно вложено в пространство $X : \theta(B)X \subset X$, но не обязательно в X замкнуто.

Для заданной функции $\theta(\lambda) : \text{sp } B \rightarrow \mathbf{R}$ положим

$$\gamma_n = \max \left\{ |\lambda|^n |\theta(\lambda)| : \lambda \in \text{sp } B \right\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Повторяя рассуждения из [2] можно показать, что последовательность γ_n стремится к нулю в том и только том случае, когда $\theta(\lambda)$ обращается в нуль на всех отличных от 1 точках $\lambda \in \text{sp } B$ с $|\lambda| = 1$. Функции $\theta(\lambda)$, для которых $\gamma \rightarrow 0$ ниже называются *S-функциями*.

Т е о р е м а 3. Пусть B – нормальный оператор с $\rho(B) = 1$ в гильбертовом пространстве X , и пусть $\text{Fix } B^* B = \text{Fix } B$. Пусть, кроме того, уравнение (1) разрешимо, $x_0 - x^* \in \theta(B)X$. Тогда для любой S-функции $\theta(\lambda)$ при $x_0 - x^* \in \theta(B)X$ справедливы неравенства

$$\|x_n - x^*\| \leq \gamma_n \|x_0 - x^*\|_{\theta(B)X} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где x^* – решение уравнения (1), для которого $Px^* = Px_0$.

Предположение $x_0 - x^* \in \theta(B)X$ этой теоремы практически не слишком удобно – решение x^* , как правило, неизвестно. Поэтому условие $x_0 - x^* \in \theta(B)X$ удобнее заменить на предположение $x_0 \in \theta(B)X$ и предположение $y \in \tilde{\theta}(B)X$, где функции $\theta(\lambda)$ и $\tilde{\theta}(\lambda)$ связаны равенством $\tilde{\theta}(\lambda) = (1 - \lambda)\theta(\lambda)$.

Т е о р е м а 4. Пусть B – нормальный оператор с $\rho(B) = 1$ в гильбертовом пространстве X , и пусть $\text{Fix } B^* B = \text{Fix } B$. Пусть $Pf = 0$. Тогда для любой S-функции $\theta(\lambda)$ при $x_0 - Bx_0 - f \in \theta(B)X$ справедливы неравенства

$$\|x_n - Bx_n - f\| \leq \gamma_n \|x_0 - Bx_0 - f\|_{\theta(B)X} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

В ряде задач при исследовании последовательных приближений достаточно установить их сходимость в норме, более слабой, чем исходная норма гильбертова пространства X . Примером таких норм может служить норма

$$\|x\|_0 = \|Tx\|, \quad (3)$$

где T – некоторый оператор с $\ker T = 0$. При этом наиболее простым оказывается случай, когда оператор T перестановочен с оператором B ($TB = BT$). Среди таких операторов наиболее простыми являются операторы вида

$$T = \pi(B), \quad (4)$$

где π – некоторая функция, нули которой, отличные от 1, не являются собственными значениями оператора B . В этом случае (3) является нормой, так как из $Tx = 0$ очевидным образом следует, что $x = 0$.

Напомним, что для последовательных приближений x_n ($x_{n+1} = Bx_n + f$) справедливы равенства

$$x_n = B^n x_0 + (I + B + \dots + B^{n-1})f \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

и так как

$$x_* = B^n x_* + (I + B + \dots + B^{n-1})f \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

то $x_n - x_* = B^n(x_0 - x_*)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Отсюда (см. [6; 8]) для нормы (3) (с T , определённым равенством (4)) следует, что

$$\|x_n - x_*\|_{\pi(B)X} = \|\pi(B)B^n(x_0 - x_*)\|,$$

и, далее,

$$\|x_n - x_*\|_{\pi(B)X}^2 = \int_{sp B} |\pi(\lambda)|^2 |\lambda^n|^2 (dE_\lambda(x_0 - x_*), x_0 - x_*),$$

в частности,

$$\|x_n - x_*\|_{\pi(B)X} \leq \gamma_n \|x_0 - x_*\|, \quad (5)$$

где $\gamma_n = \max_{\lambda \in sp B} |\pi(\lambda)\lambda^n|$. Функцию $\pi(\lambda)$ теперь будем называть W -функцией, если $\gamma_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Нетрудно показать, что эффективность функции $\pi(\lambda)$ равносильна предположению, что $\pi(\lambda) = 0$ для всех $\lambda \in sp B$ с $|\lambda| = 1$.

Повторяя рассуждения из [2] приходим к следующему утверждению, обобщающему теорему М. А. Красносельского.

Т е о р е м а 5. Пусть B – нормальный оператор с $\rho(B) = 1$ в гильбертовом пространстве X , и пусть $\text{Fix } B^* B = \text{Fix } B$. Пусть, кроме того, уравнение (1) разрешимо, x_* – решение уравнения (1), для которого $Px_* = Px_0$, $x_0 - x_* \in \pi(B)X$.

Тогда для любой W -функции $\pi(B)$ справедливы неравенства (5).

Аналогично, для невязок $\|x_n - Bx_n - f\|$ последовательных приближений x_n ($x_{n+1} = Bx_n + f$) справедливы равенства $x_n - Bx_n - f = B^n(x_0 - Bx_0 - f)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) и потому

$$\|x_n - Bx_n - f\|_{\pi(B)X} = \|\pi(B)B^n(x_0 - Bx_0 - f)\|.$$

Отсюда

$$\|x_n - Bx_n - f\|_{\pi(B)X}^2 = \int_{sp B} |\pi(\lambda)|^2 |\lambda^n|^2 (dE_\lambda(x_0 - Bx_0 - f), x_0 - Bx_0 - f),$$

и, значит,

$$\|x_n - Bx_n - f\|_{\pi(B)X} \leq \gamma_n \|x_0 - Bx_0 - f\|, \quad (6)$$

где снова $\gamma_n = \max_{\lambda \in sp B} |\pi(\lambda)\lambda^n|$.

Т е о р е м а 6. Пусть B – нормальный оператор с $\rho(B) = 1$ в гильбертовом пространстве X , и пусть $\text{Fix } B^* B = \text{Fix } B$. Пусть, кроме того, $Pf = 0$, $x_n - Bx_n - f \in \pi(B)X$.

Тогда для любой W -функции $\pi(B)$ справедливы неравенства (6).

Нас теперь будет интересовать поведение последовательных приближений

$$\tilde{x}_{n+1} = B\tilde{x}_n + f_n, \quad (7)$$

где $f_n = f + e_n$, e_n – ошибка на n -ном шаге при вычислении последовательных приближений. Будем предполагать, что $\|f_n - f\|_{e_n} < \delta$, δ – фиксированное положительное число.

Из равенств (2) и (7) вытекают формулы

$$\tilde{x}_n - x_n = B^{n-1}(f_0 - f) + B^{n-2}(f_1 - f) + \dots + B(f_{n-2} - f) + (f_{n-1} - f), \quad \tilde{x}_0 = x_0,$$

откуда

$$\|\tilde{x}_n - x_n\| \leq (\|B^{n-1}\| + \|B^{n-2}\| + \dots + \|B\| + 1)\delta, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (8)$$

Так как $\rho(B) = 1$ и B – нормальный оператор, то $\|B\| = 1$, и, далее,

$$\|B\| = \|B^2\| = \dots = \|B^{n-1}\| = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

то неравенство (8) влечёт неравенство

$$\|\tilde{x}_n - x_n\| \leq n\delta \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Из него очевидным образом вытекает, что

$$\|\tilde{x}_n - x^*\| \leq \|\tilde{x}_n - x_n\| + \|x_n - x_0\| \leq \mu_n + n\delta \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (9)$$

где (μ_n) – последовательность, для которой $\|x_n - x^*\| \leq \mu_n$ (в [4] доказано, что $\mu_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$), δ – фиксированное выше число. Полученная оценка для $\|\tilde{x}_n - x^*\|$ даёт возможность провести стандартные в теории некорректных задач рассуждения, позволяющие увидеть, что приближения \tilde{x}_n при малых δ сколь угодно близко подходят к точному решению x^* .

В самом деле, неравенство (9) показывает, что ошибка n -го «приближённого» последовательного приближения \tilde{x}_n не превышает числа $\mu_n + n\delta$, и, тем самым, оценка (9) не позволяет сделать вывод о сходимости «приближённых» последовательных приближений \tilde{x}_n к точному решению, так как при $n \rightarrow \infty$ правая часть в этой оценке стремится к бесконечности. Однако если последовательность μ_n достаточно быстро стремится к нулю, то при малых $\delta > 0$ элементы последовательности $(\mu_n + n\delta)$ сначала убывают и начинают возрастать лишь при достаточно больших n . Этот факт позволяет оценить близость приближённых последовательных приближений к точному решению x^* при небольших n .

Будем говорить, что последовательность $(\mu_n + n\delta)$ является V -последовательностью, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\eta \in N$ при достаточно малых $\delta > 0$ среди членов последовательности с номерами $n > \eta$ существуют члены меньше ε . Очевидно, что при $\mu_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) последовательность (μ_n) является V -последовательностью.

Действительно, для заданного $\varepsilon > 0$ выберем такие μ_n , что при $n > \eta$ верно неравенство $\mu_n < \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмём произвольное $n > \eta$ и выберем $\delta_0 < \frac{\varepsilon}{2n}$. Тогда при $\delta \leq \delta_0$

$$\mu_n + n\delta \leq \frac{\varepsilon}{2} + n \frac{\varepsilon}{2n} = \varepsilon.$$

Напомним, что элемент $\mu_n + n\delta$ последовательности $(\mu_n + n\delta)$ оценивает ошибку $\|\tilde{x}_n - x^*\|$, тем самым для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\eta \in N$ существуют приближения \tilde{x}_n с $n > \eta$ и при достаточно малого δ , отстающие от точного решения на расстоянии не больше ε .

Проведённые рассуждения легко иллюстрируются последовательностью $(\mu_n + n\delta)$ с $\mu_n = \frac{c}{n^\theta}$ ($\theta > 0$).

Эта последовательность будет V -последовательностью, если при любом $\varepsilon > 0$ при достаточно малых $\delta > 0$ справедливо неравенство

$$\min_{v \leq n \leq \infty} \left(\frac{c}{n^\theta} + n\delta \right) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in N.$$

Функция $f(t) = \frac{c}{t^\theta} + t\delta$ на промежутке $[0, \infty)$ принимает наименьшее значение при

$$t^* = \left(\frac{\theta c}{\delta} \right)^{\frac{1}{\theta+1}};$$

при этом $t^* \geq v$, если δ достаточно мало. Отсюда следует, что при малых δ на промежутке $[v, \infty)$ эта функция принимает наименьшее значение

$$f(t^*) = c^{\frac{1}{1+\theta}} \theta^{-\frac{\theta}{1+\theta}} (1+\theta) \delta^{\frac{\theta}{1+\theta}}.$$

Её наименьшее значение при натуральных n из промежутка $[v, \infty)$ достигается либо в точке $t^{**} = [t^*]$, либо в точке $t^{**} = [t^*] + 1$; при этом $|t^{**} - t^*| \leq 1$. Но тогда $f(t^{**}) \leq f(t^*) + f'(\tau)$, где τ – некоторое число между t^* и t^{**} . Очевидно

$$|f'(\tau)| = \left| -\frac{\theta c}{t^{1+\theta}} \right| \leq \delta + \frac{c\theta}{v^{1+\theta}}.$$

Тем самым,

$$\max_{v \leq n \leq \infty} f(t) = f(t^{**}) \leq c \frac{1}{1+\theta} \frac{\theta}{1+\theta} (1+\theta) \delta^{1+\theta} + \delta + \frac{c\theta}{v^{1+\theta}}.$$

Правая часть этого неравенства при больших v и малых δ становится меньше наперёд заданного положительного числа ε . Тем самым, рассматриваемая последовательность является V -последовательностью.

Тот факт, что последовательность $(\mu_n + n\delta)$ оказывается V -последовательностью в теории некорректных задач обычно трактуется как сходимость итерационного метода. В действительности, эта сходимость не является сходимостью в общепринятом смысле; её наличие позволяет лишь установить, что при малых δ приближения \tilde{x}_n для некоторого n достаточно близко подходят к точному решению. Описанный факт часто записывается в виде равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n\delta \rightarrow 0} \|\tilde{x}_n - x^*\| = 0. \quad (10)$$

Иногда используется другое условие

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\eta \leq n < \infty} \|\tilde{x}_n - x^*\| = 0 \quad (0 \leq \eta < \infty). \quad (11)$$

Ниже будем говорить, что приближённый итерационный метод (7) при выполнении соотношений (10) и (11) квазисходится к точному решению.

Проведённые рассуждения показывают, что верна

Т е о р е м а 7. Пусть B – нормальный оператор в гильбертовом пространстве X , $\rho(B) = 1$ и пусть уравнение (1) разрешимо. Тогда «приближённые» последовательные приближения (7) квазисходятся к точному решению x^* , для которого $Rx^* = Rx_0$; иными словами для этих «приближённых» последовательных приближений справедливы равенства (10) и (11).

Список использованной литературы

1. Красносельский, М. А. О решении методом последовательных приближений уравнений с самосопряжёнными операторами / М. А. Красносельский // Успехи мат. наук. – 1960. – Т. XV, вып. 3(93). – С. 161–165.
2. Забрейко, П. П. Теорема М. А. Красносельского и некорректные линейные задачи с самосопряжённым оператором / П. П. Забрейко, О. В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 5. – С. 12–17.
3. Забрейко, П. П. Теорема М. А. Красносельского и итерационные процедуры решения некорректных задач с самосопряжёнными операторами / П. П. Забрейко, О. В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 6. – С. 9–14.
4. Забрейко, П. П. Об обобщении теоремы М. А. Красносельского на несамосопряжённые операторы / П. П. Забрейко, А. В. Михайлов // Докл. НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 2. – С. 16–21.
5. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.]. – М.: Наука: Глав. ред. физ.-матем. лит., 1969. – С. 455.
6. Рисс, Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. – М.: Мир, 1979. – С. 587.
7. Данфорд, Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Д. Т. Шварц. – М.: Изд. иностр. лит., 1962. – С. 896.
8. Халмош, П. Гильбертово пространство в задачах / П. Халмош. – М.: Мир, 1970. – С. 352.
9. Данфорд, Н. Линейные операторы. Спектральная теория / Н. Данфорд, Д. Т. Шварц. – М.: Мир, 1966. – С. 1064.

Поступило в редакцию 22.04.2015

УДК 511.42

Ф. ГЁТЦЕ¹, А. Г. ГУСАКОВА²

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА В КОРОТКИХ ИНТЕРВАЛАХ

*(Представлено членом-корреспондентом Ю. С. Хариным)*¹Университет г. Билефельда, Германия
goetze@math.uni-bielefeld.de²Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
gusakova.anna.0@gmail.com

В работе рассмотрено распределение алгебраических чисел ограниченной степени и высоты. В частности, найдены оценки снизу для количества алгебраических чисел α степени, не превосходящей n , и высоты, не превосходящей Q , в интервалах I длины порядка $Q^{-3/2}$ при фиксированном n и Q , стремящемся к бесконечности.

Ключевые слова: алгебраические числа, многочлен с целыми коэффициентами, результант, мера Лебега.

F. GOETZE, H. G. HUSAKOVA

ALGEBRAIC NUMBERS IN SHORT INTERVALS

¹Bielefeld University, Germany
goetze@math.uni-bielefeld.de²Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
gusakova.anna.0@gmail.com

In this article we consider the distribution of algebraic numbers in very short intervals. The concept of a type of a short intervals is introduced. Depending on the type of the interval the estimations for the number of algebraic numbers within the interval are found.

Keywords: algebraic numbers, polynomial with integer coefficients, resultant, Lebesgue measure.

В течение последних лет было получено несколько новых результатов, связанных с распределением алгебраических чисел и некоторых функций от алгебраических чисел (таких как дискриминант, результант, расстояние между сопряжёнными алгебраическими числами). Результаты, представленные в данном сообщении, относятся к распределению алгебраических чисел.

Введём некоторые обозначения. Пусть имеется многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, $\deg P = n$, где $a_j \in \mathbb{Z}$. Величину $H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$ назовём высотой многочлена $P(x)$. Определим класс многочленов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x], \deg P \leq n, H(P) \leq Q\}.$$

Высотой алгебраического числа α будем называть высоту его минимального многочлена $H(\alpha) = H(P)$.

Пусть задано некоторое число $Q > Q_0(n)$, где $Q_0(n)$ – достаточно большая величина, зависящая только от n , и некоторая величина $0 < \gamma \leq 1$. Будем рассматривать интервалы $I \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

длины $|I| = Q^{-1-\gamma}$. Выбор интервала $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ несущественен и сделан для упрощения получения оценок.

В 2014 г. В. И. Берником и Ф. Гётце были доказаны следующие теоремы.

Т е о р е м а 1. Для любого Q существует промежуток I длины $|I| = \frac{1}{2}Q^{-1}$, внутри которого нет действительных алгебраических чисел α степени $\deg \alpha = n \geq 1$ и $H(\alpha) \leq Q$.

Теорему 1 нетрудно доказать различными способами. В работе [1] предложен один из них.

Т е о р е м а 2. Множество действительных алгебраических чисел α , $\deg \alpha = n$ с функцией $N(\alpha) = (H(\alpha))^{n+1}$ образует регулярную систему на интервале I при любом $T \geq T_0(A_n, N, I) = c_1(n)|I|^{-n-1}$, если $N(\alpha) \leq T$.

Из теоремы 2, в частности, следует [1], что при достаточно большой величине $c_2(n)$ любой интервал I длины $|I| \geq c_2(n)Q^{-1}$ содержит не менее, чем $c_3(n)Q^{n+1}|I|$ действительных алгебраических чисел α степени $\deg \alpha \leq n$ и высоты $H(\alpha) \leq Q$.

С другой стороны известно [2; 3], что количество действительных алгебраических чисел α степени $\deg \alpha \leq n$ и высоты $H(\alpha) \leq Q$ не менее, чем $c_4(n)Q^{n+1}$.

В данном сообщении мы исследуем распределение действительных алгебраических чисел в интервалах I при $\gamma \geq 0$. Из вышесказанного следует, что необходимо наложить некоторые дополнительные условия на интервал I .

О п р е д е л е н и е. Назовём интервал I длины $|I| = c_5(n)Q^{-1-\gamma}$ интервалом типа (Q, γ) , $0 \leq \gamma < 1$, если для всех рациональных чисел $\frac{p}{q}$, $|q| \leq 2Q^\gamma$, выполняется неравенство

$$|qd - p| > c_5(n)Q^{-1}, \quad (1)$$

где d – центр интервала I .

Неравенство (1), в частности, означает, что интервал I , $|I| = c_5(n)Q^{-1-\gamma}$, не содержит рациональных чисел $\frac{p}{q}$ с условием $|q| \leq 2Q^\gamma$.

Т е о р е м а 3. Для любых натуральных Q и n , и любого $\gamma_1 < \frac{1}{n}$ интервал I , $|I| = 2^{-2n+1}(n+1)^{-1}Q^{-1-\gamma_1^n}$, с центром в рациональной точке $\frac{p}{q}$ такой, что $|p| \leq |q|$ и $1 \leq q \leq Q^{\gamma_1}$, не содержит действительных алгебраических чисел α степени $2 \leq \deg \alpha \leq n$ и высоты $H(\alpha) \leq Q$.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется следующая лемма [4].

Л е м м а 1. Для любого множества различных корней $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s}$, $1 \leq s \leq n$, многочлена $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ справедливо неравенство $\prod_{j=1}^s |\alpha_{i_j}| \leq (n+1)2^n H(P) |a_n|^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Рассмотрим интервал I , удовлетворяющий условию теоремы, и пусть он содержит некоторое алгебраическое число $\alpha \in I$ высоты $H(\alpha) \leq Q$ с минимальным многочленом $P_1(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$, $k \leq n$. Рассмотрим результат многочленов P_1 и $P_2 = qx - p$. Так как данные многочлены не имеют общих корней, то

$$1 \leq |R(P_1, P_2)| = q^k a_k |\alpha_1 - p/q| \prod_{j=2}^k |\alpha_j - p/q|, \quad (2)$$

$$\prod_{j=2}^k |\alpha_j - p/q| \leq \prod_{j=2}^k (|\alpha_j| + |p/q|).$$

Используя лемму 1 оценим данное произведение следующим образом:

$$\prod_{j=2}^k (|\alpha_j| + |p/q|) \leq \sum_{i=0}^{k-1} (k+1)2^k H(P) |a_k|^{-1} C_{k-1}^i |p/q|^i = (k+1)2^k \frac{H(P)}{|a_k|} \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i |p/q|^i.$$

Откуда имеем

$$\prod_{j=2}^k |\alpha_j - p/q| \leq (k+1)2^k \frac{H(P)}{|a_k|} (1 + |p/q|)^{k-1} < (k+1)2^{2k-1} \frac{H(P)}{|a_k|}.$$

Таким образом, используя полученную оценку, равенство $|I| = 2^{-2n+1}(n+1)^{-1}Q^{-1-\gamma_1^n}$ и $k \leq n$, из (2) имеем

$$\begin{aligned}
1 &\leq 0,5q^k |a_k| 2^{-2n+1}(n+1)^{-1} Q^{-1-\gamma_1 n} \prod_{j=2}^k |\alpha_j - p/q|, \\
1 &< 0,5q^k |a_k| 2^{-2n+1}(n+1)^{-1} Q^{-1-\gamma_1 n} (k+1) 2^{2k-1} \frac{H(P)}{|a_k|} \leq 0,5q^k Q^{-1-\gamma_1 n} H(P), \\
1 &< 0,5q^k Q^{-1-\gamma_1 n} H(P) \leq 0,5Q^{\gamma_1 k} Q^{-1-\gamma_1 n} Q \leq 0,5.
\end{aligned}$$

Данное неравенство противоречиво. Следовательно, интервал I не содержит алгебраических чисел α высоты $H(\alpha) \leq Q$ и степени $\deg \alpha \leq n$. \square

Теорема 3, в частности, показывает, что при $\gamma_1 n = 0,5$ существует интервал I , $|I| = c_6(n)Q^{-3/2}$, который не содержит алгебраических чисел степени, не превосходящей n , и высоты, не превосходящей Q . Но что происходит в интервалах I , $|I| > c_6(n)Q^{-3/2}$? Ответ на этот вопрос даёт теорема 4.

Т е о р е м а 4. При любых натуральных n и $Q > Q_0(n)$ и некоторой величине $c_7(n)$ любой интервал I типа $(Q, 0,5)$, $|I| \geq c_7(n)Q^{-3/2}$, содержит не менее, чем $c_8(n)Q^{n+1}|I|$ действительных алгебраических чисел α степени $\deg \alpha \leq n$ и высоты $H(\alpha) \leq Q$.

Доказательство теоремы 4 основывается на следующей теореме 5.

Т е о р е м а 5. Обозначим через $L_n = L_n(Q, \delta_0(n), I)$ множество точек x интервала I , $|I| \geq c_7(n)Q^{-3/2}$ типа $(Q, 0,5)$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < 4Q^{-n}, \\ |P'(x)| < \delta_0(n)Q \end{cases} \quad (3)$$

имеет решение в многочленах $P \in \mathcal{P}_n(Q)$. Тогда при достаточно малом $\delta_0(n)$ и некоторой $c_7(n)$ имеем $\mu L_n(Q, \delta_0(n), I) < \frac{1}{4}|I|$.

Перед доказательством теоремы 5 сформулируем вспомогательную лемму. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – корни многочлена $P(x)$. С каждым корнем α_i будем связывать множество

$$S(\alpha_i) = \{x \in \mathbb{R} : |x - \alpha_i| = \min_{1 \leq j \leq n} |x - \alpha_j|\}.$$

Более того, мы будем полагать, что $i=1$ и

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |\alpha_1 - \alpha_3| \leq \dots \leq |\alpha_1 - \alpha_n|.$$

Л е м м а 2. Пусть $x \in S(\alpha_1)$, тогда

$$|x - \alpha_1| \leq 2^{n-1} \frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_1)|}.$$

Доказательство леммы 2 можно найти в [5; 6].

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 5. Для доказательства теоремы 5 будем разбивать интервал изменения модуля производной на меньшие интервалы и рассматривать систему (3) на каждом из них. Количество таких интервалов равно некоторой величине $s = s(n)$, зависящей лишь от степени многочлена.

Несложно убедиться, что при $2n^{3/2}Q^{-(n-1)/2} < |P'(x)| < \delta_0 Q$ величины $|P'(x)|$ и $|P'(\alpha_1)|$ имеют один порядок малости, а именно, $\frac{1}{2}|P'(x)| > |P'(\alpha_1)|$ и $|P'(\alpha_1)| < 2|P'(x)|$. В связи с этим в системе (3) будем рассматривать $|P'(\alpha_1)|$ вместо $|P'(x)|$.

П р е д л о ж е н и е 1. Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < 4Q^{-n}, \\ \delta_1(n)Q^{1/2} < |P'(\alpha_1)| < 2\delta_0(n)Q. \end{cases} \quad (4)$$

Обозначим через $L_{n,1}$ множество $x \in I$, для которых система неравенств (4) имеет решение в полиномах $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, тогда при достаточно малой величине $\delta_0(n)$, любом $Q > Q_0(n)$ и $\delta_0(n) > \delta_1(n)$ имеем $\mu L_{n,1} < \frac{1}{4s} |I|$.

До к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим интервалы

$$\begin{aligned}\sigma(P) &:= \{x \in I : |x - \alpha_1| < 2^{n+1} Q^{-n} |P'(\alpha_1)|^{-1}\}, \\ \sigma_1(P) &:= \{x \in I : |x - \alpha_1| < c_9(n) Q^{-1} |P'(\alpha_1)|^{-1}, c_9(n) > 1\}.\end{aligned}\quad (5)$$

По лемме 2 множество решений системы неравенств (4) содержится в объединении интервалов $\bigcup_{P \in \mathcal{P}_n(Q)} \sigma(P)$. Длины интервалов $\sigma(P)$ и $\sigma_1(P)$ связаны следующим соотношением:

$$\mu\sigma(P) \leq 2^{n+1} c_9^{-1}(n) Q^{-n+1} \mu\sigma_1(P). \quad (6)$$

Зафиксируем вектор $\mathbf{b}_1 = (a_n, \dots, a_2)$, и обозначим через $\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_1)$ подкласс многочленов $\mathcal{P}_n(Q)$ с одним и тем же вектором коэффициентов \mathbf{b}_1 . Количество различных векторов \mathbf{b}_1 может быть оценено как

$$\#\mathbf{b}_1 = (2Q+1)^{n-1} \leq 2^n Q^{n-1}. \quad (7)$$

Используем метод существенных и несущественных областей, который ввёл Спринджук [5]. Интервал $\sigma_1(P_1)$ назовем существенным, если для любого $P_2 \in \mathcal{P}_n(Q)$ выполняется

$$\mu(\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)) < \frac{1}{2} \mu\sigma_1(P_1).$$

В противном случае интервал $\sigma_1(P)$ назовём несущественным.

В случае существенных интервалов $\sigma_1(P)$ справедлива оценка $\sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_1)} \mu\sigma_1(P) \leq 2|I|$, тогда из (6) и (7) следует, что при $c_9(n) = 2^{2n+4} s$

$$\sum_{\mathbf{b}_1} \sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_1)} \mu\sigma(P) < 2^{n+1} c_9^{-1}(n) Q^{-n+1} 2^n Q^{n-1} |I| = 2^{2n+1} c_9^{-1}(n) |I| = \frac{1}{8s} |I|. \quad (8)$$

В случае несущественных интервалов рассмотрим два многочлена $P_1(x), P_2(x) \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_1)$ таких, что $\mu(\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)) \geq \frac{1}{2} \mu\sigma_1(P_1)$. Так как коэффициенты a_n, \dots, a_2 у многочленов $P_1(x), P_2(x)$ совпадают, то их разность $S(x) = P_1(x) - P_2(x) = ax + b$ является линейным многочленом и $S'(x) = P_1'(x) - P_2'(x) = a$. Оценим $|S(x)|$ и $|S'(x)|$. Разложим многочлены $P_i(x), i = 1, 2$, по формуле Тэйлора с остаточным членом в форме Лагранжа на интервале $\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)$:

$$P_i(x) = P_i'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \frac{1}{2} P_i''(\xi_1)(x - \alpha_1)^2, \quad \xi_1 \in (x, \alpha_1).$$

Используя (4) и (5) получим, что

$$|P_i(x)| < c_9(n) Q^{-1} + \frac{1}{2} \cdot 2n^2 Q c_9^2(n) Q^{-2} |P_i'(\alpha_1)|^{-2} < 2c_9(n) Q^{-1}.$$

Разложим многочлены $P_i'(x), i = 1, 2$, по формуле Тэйлора с остаточным членом в форме Лагранжа на интервале $\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)$:

$$P_i'(x) = P_i'(\alpha_1) + P_i''(\xi_2)(x - \alpha_1), \quad \xi_2 \in (x, \alpha_1).$$

Используя (4) и (5) получим, что

$$|P_i'(x)| < |P_i'(\alpha_1)| + \frac{1}{2} n^2 Q c_9(n) Q^{-1} |P_i'(\alpha_1)|^{-1} < 2|P_i'(\alpha_1)| < 4\delta_0(n) Q.$$

Используя данные оценки, имеем систему неравенств

$$\begin{cases} |ax + b| < 4c_9(n) Q^{-1}, \\ |a| < 8\delta_0(n) Q. \end{cases} \quad (9)$$

По лемме 2 мера множества тех $x \in I$, для которых система неравенств (9) выполняется при фиксированных a и b может быть оценена как

$$J(a, b) = \{x \in I, |x - a/b| < 4c_9(n)Q^{-1}|a|^{-1}\},$$

$$|J(a, b)| < 8c_9(n)Q^{-1}|a|^{-1}.$$

Из определения следует, что $|a| > Q^{1/2}$, и тогда $|J(a, b)| < |I|$. Рассмотрим интервалы

$$J(a_i, b_i, c_{10}(n)) = \{x \in I : |x - b_i/a_i| < c_{10}(n)Q^{-1}|a_i|^{-1}\}, i = 1, 2,$$

и найдём значение $c_{10}(n) > 8c_9(n)$, при котором данные интервалы не пересекаются. Пусть существует точка $x_0 \in J(a_1, b_1, c_{10}(n)) \cap J(a_2, b_2, c_{10}(n))$. В таком случае,

$$\frac{1}{|a_1||a_2|} \leq |b_1/a_1 - b_2/a_2| \leq |x_0 - b_1/a_1| + |x_0 - b_2/a_2| < c_{10}(n)Q^{-1}(|a_1|^{-1} + |a_2|^{-1}).$$

При $c_{10}(n) = 2^{-4}\delta_0^{-1}(n)$ данное неравенство не выполняется и справедливо

$$\sum_{a, b} J(a, b, c_{10}(n)) < |I|. \quad (10)$$

Оценим меру множества решений системы (9). Так как меры множеств $J(a, b)$ и $J(a, b, c_{10}(n))$ связаны соотношением $|J(a, b)| = 4c_9(n)c_{10}^{-1}(n)|J(a, b, c_{10}(n))|$, то из (10) следует, что при $\delta_0(n) = 2^{-2n-16}s^{-2}$ справедливо

$$\sum_{a, b} |J(a, b)| \leq 2^3 c_9(n) 2^{-1} c_{10}^{-1}(n) \sum_{a, b} |J(a, b, c_{10}(n))| < \frac{1}{8s} |I|. \quad (11)$$

Таким образом, из (8) и (11) имеем $\mu L_{n,1} < \frac{1}{8s}|I| + \frac{1}{8s}|I| = \frac{1}{4s}|I|$. \square

Аналогичное утверждение справедливо и в случае

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-n}, \\ Q^{-1/2} < |P'(\alpha_1)| < \delta_1(n)Q^{1/2}, \end{cases}$$

где $\delta_1(n)$ – некоторая достаточно малая величина. Рассмотрение данной системы сводится к рассмотрению системы неравенств для многочлена $S(x)$, $\deg S \leq 2$:

$$\begin{cases} |S(x)| < 4n^2 c_{11}^2(n) Q^{-n}, \\ |S'(x)| < 8n^2 c_{11}(n) \delta_1 Q^{1/2}. \end{cases} \quad (12)$$

Рассмотрим более общее утверждение и докажем его с помощью метода математической индукции. Индукцию будем проводить по степени многочлена k и в качестве базы индукции используем системы (9) и (12) для многочленов первой и второй степени.

П р е д л о ж е н и е 2. *Рассмотрим систему неравенств*

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-n}, \\ Q^{-(k-1)/2} < |P'(\alpha_1)| < Q^{-(k-2)/2}, \end{cases} \quad (13)$$

где $2 < k < n$. Обозначим через $L_{n,k}$ множество $x \in I$, для которых система неравенств (13) имеет решение в многочленах $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, тогда при $Q > Q_0(n)$ имеем $\mu L_{n,k} < \frac{1}{4s}|I|$.

Случай $k = n$ необходимо рассматривать при помощи другого метода.

П р е д л о ж е н и е 3. *Рассмотрим систему неравенств*

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-n}, \\ n^{3/2} Q^{-(n-1)/2} < |P'(\alpha_1)| < Q^{-(n-2)/2}. \end{cases} \quad (14)$$

Обозначим через $L_{n,n}$ множество $x \in I$, для которых система неравенств (14) имеет решение в многочленах $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, тогда при $Q > Q_0(n)$ имеем $\mu L_{n,n} < \frac{1}{4s}|I|$.

Доказательство предложения 3 представляет собой часть доказательства проблемы Малера (классы второго рода) [5]. По аналогичной схеме рассматривается случай $|P'(x)| < n^{3/2}Q^{-(n-1)/2}$.

Таким образом, меру множества решений системы (3) оценим как

$$\mu L_n \leq \bigcup_{i=0}^{s(n)} \mu L_{n,i} < \frac{1}{4} |I|. \square$$

Доказательство теоремы 4. Доказательство теоремы 4 проведём с использованием результатов теоремы 5. Рассмотрим множество $B_1 = I \setminus L_n$. Из теоремы 5 следует, что

$$\mu B_1 \geq \frac{3}{4} |I|$$

при $Q > Q_0(n)$. Рассмотрим точку $x_1 \in B_1$. Существует многочлен $P_1(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, удовлетворяющий системе неравенств

$$\begin{cases} |P_1(x_1)| < Q^{-n}, \\ |P_1'(x_1)| \geq \delta_0(n)Q. \end{cases} \quad (15)$$

Существует действительный корень β_1 многочлена $P_1(x)$, такой что $x_1 \in S(\beta_1)$ и

$$|x_1 - \beta_1| < n\delta_0^{-1}(n)Q^{-n-1}. \quad (16)$$

Обозначим через I_1 множество тех $x \in B_1$, которые удовлетворяют неравенству (16). В таком случае

$$|I_1| = 2n\delta_0^{-1}(n)Q^{-n-1}.$$

Аналогично рассмотрим точку $x_2 \in B_2 = B_1 \setminus I_1$. Существует многочлен $P_2(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, удовлетворяющий системе неравенств (15). Определим множество

$$I_2 = \{x \in B_2 \cap S(\beta_2) : |x - \beta_2| < n\delta_0^{-1}(n)Q^{-n-1}\},$$

тогда $|I_2| = 2n\delta_0^{-1}(n)Q^{-n-1}$.

Построение точек $\beta_i, 1 \leq i \leq t$, можно продолжать до тех пор, пока интервалы I_i не покроют всё множество B_1 . Поэтому

$$\sum_{i=1}^t |I_i| = 2tn\delta_0^{-1}(n)Q^{-n-1} \geq \mu B_1 \geq \frac{3}{4} |I|,$$

и

$$t \geq c_8(n)Q^{n+1} |I|. \square$$

Работа А. Г. Гусаковой выполнена при поддержке БРФФИ (грант Ф13К-155).

Список использованной литературы

1. Берник, В. И. Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах / В. И. Берник, Ф. Гётце // Изв. РАН. Сер. матем. – 2014. – Т. 79, № 1. – С. 21–42.
2. Beresnevich, V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. Beresnevich // Acta Arith. – 1999. Vol. 90, N 2. – P. 97–112.
3. Baker, A. Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker, W. Schmidt // Proc. London Math. Soc. – 1970. – Vol. 21, N 3. – P. 1–11.
4. Фельдман, Н. И. Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел. I. Аппроксимация логарифмов алгебраических чисел / Н. И. Фельдман // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1951. – Т. 15, № 1. – С. 53–74.
5. Спринджук, В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск, 1967.
6. Берник, В. И. Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник // Acta Arith. – 1983. – Т. 42, N 3. – P. 219–253.

Поступило в редакцию 27.04.2015

УДК 517.548.5 + 519.65

Член-корреспондент Л. А. ЯНОВИЧ¹, М. В. ИГНАТЕНКО²О НЕКОТОРЫХ АНАЛОГАХ ФОРМУЛ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ
ДЛЯ ФУНКЦИЙ МАТРИЧНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ¹Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
yanovich@im.bas-net.by²Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
ignatenkomv@bsu.by

Построены аналоги интерполяционных сплайнов для функций матричной переменной на множествах матриц с обычным, йордановым, адамаровым умножением и умножением по Фробениусу. Некоторые из полученных формул содержат дифференциалы Гато интерполируемой функции.

Ключевые слова: интерполирование, функции от матриц, йорданово и адамарово умножение матриц, интерполяционные формулы.

L. A. YANOVICH¹, M. V. IGNATENKO²

SOME ANALOGS OF SPLINE-INTERPOLATION FORMULAS FOR FUNCTIONS OF MATRIX VARIABLE

¹Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
yanovich@im.bas-net.by²Belarusian State University, Minsk, Belarus
ignatenkomv@bsu.by

Analogs of interpolation splines for functions of matrix variable, defined on sets of matrices with the ordinary, Jordan, Hadamard and Frobenius multiplication, has been constructed. Some of the obtained formulas contain Gateaux differentials of the interpolated function.

Keywords: interpolation, functions of matrix, Jordan and Hadamard multiplication matrix, interpolation formulas.

Введение. Сплайн-функции, заданные на отрезке $[a, b]$, по определению – это функции, которые на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ разбиения $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$ являются многочленами некоторых фиксированных степеней относительно алгебраической или другой системы функций и имеют на $[a, b]$ заданный порядок гладкости. К этому классу функций иногда относятся множество кусочно-постоянных и кусочно-непрерывных на $[a, b]$ функций с точками разрыва первого рода. Сплайны обладают хорошими аппроксимативными свойствами. Они – не только удобное средство приближения сложных кривых, но и важный инструмент решения разнообразных задач вычислительной математики [1–3].

В работе приведены формулы, которые являются некоторым матричным аналогом классических интерполяционных сплайнов. Построен ряд матричных вариантов интерполяционных сплайнов для функций, определённых на множествах матриц с обычным, йордановым, адамаровым умножением и умножением по Фробениусу. Некоторые из полученных формул содержат дифференциалы Гато интерполируемой функции. Применение отдельных формул рассмотрено на примерах.

Пусть $X = \{A\}$ – множество квадратных матриц фиксированной размерности, $X = \bigcup_{i=0}^n \mathfrak{M}_i$ – некоторое его разбиение, $A_i, A_{i+1} \in \mathfrak{M}_i$ – узлы интерполирования, следующая пара узлов A_{i+1}, A_{i+2} принадлежит множеству \mathfrak{M}_{i+1} (точка A_{i+1} является предельной для множеств \mathfrak{M}_i и \mathfrak{M}_{i+1}) и матрицы $A_{i+1} - A_i$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) обратимы.

Об одном варианте сплайнов третьей степени. Будем считать, что для оператора $F(A)$ существует дифференциал Гато $\delta F[A; h]$ в узлах A_i и A_{i+1} ($A_i, A_{i+1}, h \in \mathfrak{M}_i$). Введём обозначения

$$\begin{aligned}\Phi_{0i}(A) &= (I-t)^2(I+2t) = I - 3t^2 + 2t^3, \quad \Phi_{1i}(A) = t^2(3I-2t) = 3t^2 - 2t^3, \\ \Phi_{2i}(A) &= (A_{i+1} - A_i)t(I-t)^2 = (A_{i+1} - A_i)[t - 2t^2 + t^3], \\ \Phi_{3i}(A) &= (A_{i+1} - A_i)t^2(t-I) = (A_{i+1} - A_i)(t^3 - t^2),\end{aligned}$$

где $t \equiv t(A) = (A - A_i)(A_{i+1} - A_i)^{-1}$. Заметим, что $t(A_i) = 0$, $t(A_{i+1}) = I$.

Рассмотрим на множестве \mathfrak{M}_i матричный многочлен

$$S_{3i}(A) \equiv S_i(A) = \Phi_{0i}(A)F(A_i) + \Phi_{1i}(A)F(A_{i+1}) + \delta F[A_i; \Phi_{2i}(A)] + \delta F[A_{i+1}; \Phi_{3i}(A)]. \quad (1)$$

Нетрудно проверить, что $\Phi_{0i}(A_i) = \Phi_{1i}(A_{i+1}) = I$; $\Phi_{0i}(A_{i+1}) = \Phi_{1i}(A_i) = \Phi_{2i}(A_i) = \Phi_{2i}(A_{i+1}) = \Phi_{3i}(A_i) = \Phi_{3i}(A_{i+1}) = 0$.

Дифференциал Гато от $F(A) = t^m(A)$ по направлению h для $m = 1, 2, 3$ вычисляется по формулам: если $m = 1$, то $\delta F[A; h] = h[A_{i+1} - A_i]^{-1}$; если $m = 2$, то $\delta F[A; h] = th(A_{i+1} - A_i)^{-1} + h(A_{i+1} - A_i)^{-1}t$; при $m = 3$ имеем $\delta F[A; h] = t^2h(A_{i+1} - A_i)^{-1} + th(A_{i+1} - A_i)^{-1}t + h(A_{i+1} - A_i)^{-1}t^2$.

Далее нам понадобятся также значения дифференциала Гато фундаментальных многочленов $\Phi_{vi}(A)$ для $v = 0, 1, 2, 3$ в точках A_i и A_{i+1} . Для их вычисления применим формулы, приведённые выше для функций $t^m(A)$ ($m = 1, 2, 3$).

В случае $\Phi_{0i}(A)$ дифференциал $\delta \Phi_{0i}[A; h] = -3[th(A_{i+1} - A_i)^{-1} + h(A_{i+1} - A_i)^{-1}t] + 2[t^2h(A_{i+1} - A_i)^{-1} + th(A_{i+1} - A_i)^{-1}t + h(A_{i+1} - A_i)^{-1}t^2]$. Откуда, учитывая, что $t(A_i) = 0$ и $t(A_{i+1}) = 1$, получаем равенства $\delta \Phi_{0i}[A_i; h] = 0$ и $\delta \Phi_{0i}[A_{i+1}; h] = 0$.

Для фундаментального многочлена $\Phi_{1i}(A)$ имеет место соотношение $\delta \Phi_{1i}[A; h] = 3[th(A_{i+1} - A_i)^{-1} + h(A_{i+1} - A_i)^{-1}t] - 2t^2h(A_{i+1} - A_i)^{-1} - 2th(A_{i+1} - A_i)^{-1}t - 2h(A_{i+1} - A_i)^{-1}t^2$. Откуда следует, что $\delta \Phi_{1i}(A_i) = 0$, $\delta \Phi_{1i}(A_{i+1}) = 0$.

Для многочлена $\Phi_{2i}(A)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}\delta \Phi_{2i}[A; h] &= (A_{i+1} - A_i)\{h(A_{i+1} - A_i)^{-1} - 2th(A_{i+1} - A_i)^{-1} - \\ & 2h(A_{i+1} - A_i)^{-1}t + t^2h(A_{i+1} - A_i)^{-1} + th(A_{i+1} - A_i)^{-1}t + h(A_{i+1} - A_i)^{-1}t^2\}, \\ \delta \Phi_{2i}[A_i; h] &= (A_{i+1} - A_i)h(A_{i+1} - A_i)^{-1}, \quad \delta \Phi_{2i}[A_{i+1}; h] = 0.\end{aligned}$$

Аналогично для многочлена $\Phi_{3i}(A)$ будут иметь место соотношения

$$\begin{aligned}\delta \Phi_{3i}[A; h] &= (A_{i+1} - A_i) \times \\ & \{-th(A_{i+1} - A_i)^{-1} - h(A_{i+1} - A_i)^{-1}t + t^2h(A_{i+1} - A_i)^{-1} + th(A_{i+1} - A_i)^{-1}t + h(A_{i+1} - A_i)^{-1}t^2\}, \\ \delta \Phi_{3i}[A_i; h] &= 0, \quad \delta \Phi_{3i}[A_{i+1}; h] = (A_{i+1} - A_i)h(A_{i+1} - A_i)^{-1}.\end{aligned}$$

Когда матрицы h и $(A_{i+1} - A_i)$ коммутируют, тогда для матричного многочлена третьей степени (1) выполняются интерполяционные условия $S_{3i}(A_i) = F(A_i)$, $S_{3i}(A_{i+1}) = F(A_{i+1})$, $\delta S_{3i}[A_i; h] = \delta F[A_i; h]$, $\delta S_{3i}[A_{i+1}; h] = \delta F[A_{i+1}; h]$.

При $h = I$ имеем $\delta \Phi_{2i}[A_i; I] = \Phi_{2i}'(A_i) = I$, а также $\delta \Phi_{3i}[A_{i+1}; I] = \Phi_{3i}'(A_{i+1}) = I$, и, следовательно, для многочлена (1) будут выполняться следующие интерполяционные условия:

$$S_i(A_i) = F(A_i), \quad S_i(A_{i+1}) = F(A_{i+1}), \quad S_i'(A_i) = F'(A_i), \quad S_i'(A_{i+1}) = F'(A_{i+1}),$$

где $S'(A) = \delta S[A; I]$, $F'(A) = \delta F[A; I]$. С учетом этого, формулу (1) для данного случая перепишем в виде

$$S_{3i}(A) = \Phi_{0i}(A)F(A_i) + \Phi_{1i}(A)F(A_{i+1}) + \Phi_{2i}(A)F'(A_i) + \Phi_{3i}(A)F'(A_{i+1}). \quad (2)$$

Интерполяционная формула (2) точна для матричных многочленов вида

$$P_3(A) = \Phi_{0i}(A)B + \Phi_{1i}(A)C + \Phi_{2i}(A)D + \Phi_{3i}(A)G,$$

где B, C, D и G – произвольные матрицы, так как имеют место равенства $P_3(A_i) = B$, $P_3(A_{i+1}) = C$, $P_3'(A_i) = D$, $P_3'(A_{i+1}) = G$.

Пусть выбирается несколько пар узлов вида $(A_i, A_{i+1}), (A_{i+1}, A_{i+2}), (A_{i+2}, A_{i+3})$ соответственно из множеств $\mathfrak{M}_i, \mathfrak{M}_{i+1}, \mathfrak{M}_{i+2}$ и т. д. Тогда $S_i(A_{i+1}) = S_{i+1}(A_{i+1}), S'_i(A_{i+1}) = S'_{i+1}(A_{i+1})$ для $i = 0, 1, \dots, m-1$.

Рассмотрим ещё одну аналогичную (1) формулу, являющуюся в указанном выше смысле матричным аналогом кубических сплайнов:

$$S_{3i}(F; A) \equiv S_i(A) = \Phi_{0i}(A)F(A_i) + \Phi_{1i}(A)F(A_{i+1}) + \delta F[A_i, \tilde{\Phi}_{2i}(A)] + \delta F[A_{i+1}, \tilde{\Phi}_{3i}(A)], \quad (3)$$

где $\Phi_{0i}(A) = I - 3t^2 + 2t^3, \Phi_{1i}(A) = 3t^2 - 2t^3, \tilde{\Phi}_{2i}(A) = (t - 2t^2 + t^3)(A_{i+1} - A_i), \tilde{\Phi}_{3i}(A) = (t^3 - t^2)(A_{i+1} - A_i)$. Здесь функции $\Phi_{0i}(A)$ и $\Phi_{1i}(A)$ те же, что и в формуле (1), а функции $\tilde{\Phi}_{2i}(A)$ и $\tilde{\Phi}_{3i}(A)$ отличаются от ранее используемых $\Phi_{2i}(A)$ и $\Phi_{3i}(A)$ только перестановкой сомножителей. Но в этом случае, как видно из дальнейшего, уже не требуется перестановочности матриц h и $A_{i+1} - A_i$.

В (3), как и раньше, $t = (A - A_i)(A_{i+1} - A_i)^{-1}$, а для дифференциалов фундаментальных многочленов $\tilde{\Phi}_{2i}(A)$ и $\tilde{\Phi}_{3i}(A)$ в узлах A_i и A_{i+1} имеют место равенства $\delta \tilde{\Phi}_{2i}[A_i; h] = h, \delta \tilde{\Phi}_{2i}[A_{i+1}; h] = 0, \delta \tilde{\Phi}_{3i}[A_i; h] = 0, \delta \tilde{\Phi}_{3i}[A_{i+1}; h] = h$.

Итак, $S_i(A_i) = F(A_i), S_i(A_{i+1}) = F(A_{i+1}); \delta S_i[A_i; h] = \delta F[A_i; h], \delta S_i[A_{i+1}; h] = \delta F[A_{i+1}; h]$. Если взять следующую пару узлов A_{i+1}, A_{i+2} из \mathfrak{M}_{i+1} , тогда для матричных многочленов $S_i(A)$ и $S_{i+1}(A)$ имеют место соотношения $S_i(F; A_{i+1}) = S_{i+1}(F; A_{i+1}), \delta S_i(A_{i+1}; h) = \delta S_{i+1}(A_{i+1}; h)$ ($i = 0, 1, \dots, m-1$).

Формулы (1)–(3) в соответствии с выполнением для них указанных выше интерполяционных условий и принятой здесь гладкостью оператора $F(A)$ являются матричными аналогами кубических эрмитовых сплайнов дефекта 2 на множестве X .

Приведём варианты интерполяционных сплайнов для матричнозначных функций скалярного аргумента вида $F(x) = A[a_{ij}(x)]$, где $A[a_{ij}(x)]$ – функциональная квадратная матрица, заданная на отрезке $[a, b]$. Пусть узлы интерполирования x_k совпадают с точками разбиения $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$.

Рассмотрим матричный вариант эрмитова кубического сплайна $S_{3,2}(A; x) = S_{3i}(x)$, где $x_i \leq x < x_{i+1}, h_i = x_{i+1} - x_i, i = 0, 1, \dots, n-1$. В этом случае на промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ сплайн $S_{3i}(x)$ является алгебраическим многочленом третьей степени относительно переменной x с матричными коэффициентами.

В явном виде сплайн $S_{3i}(x)$ задаётся следующей формулой:

$$S_{3i}(x) = \frac{1}{h_i^3}(x_{i+1} - x)^2[h_i + 2(x - x_i)]A(x_i) + \frac{1}{h_i^3}(x - x_i)^2[3h_i - 2(x - x_i)]A(x_{i+1}) + \frac{1}{h_i^2}(x - x_i)(x - x_{i+1})^2 A'(x_i) + \frac{1}{h_i^2}(x - x_i)^2(x - x_{i+1})A'(x_{i+1}) \quad (x \in [x_i, x_{i+1}], i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Для него выполняются интерполяционные условия $S_{3i}(x_i) = A(x_i), S'_{3i}(x_i) = A'(x_i), S_{3i}(x_{i+1}) = A(x_{i+1}), S'_{3i}(x_{i+1}) = A'(x_{i+1})$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$). Таким образом, $S_{3,2}(A; x)$ является для матрицы $A(x)$ эрмитовым кубическим матричным сплайном дефекта 2.

Непрерывные кусочно-линейные алгебраические и кусочно-тригонометрические сплайны для функциональных матриц. Рассмотрим далее кусочно-линейные на X матричные функции. Пусть A_i и A_{i+1} – матрицы из множества \mathfrak{M}_i . Для формулы линейной интерполяции

$$L_{li}(F; A) = F(A_i) + \int_0^1 \delta F[A_i + \tau(A_{i+1} - A_i); A - A_i]d\tau,$$

как известно, справедливы равенства $L_{li}(F; A_i) = F(A_i), L_{li}(F; A_{i+1}) = F(A_{i+1})$. Аналогично для следующей пары узлов A_{i+1} и A_{i+2} , принадлежащих множеству \mathfrak{M}_{i+1} , будем иметь $L_{li+1}(F; A) = F(A_{i+1}) + \int_0^1 \delta F[A_{i+1} + \tau(A_{i+2} - A_{i+1}); A - A_{i+1}]d\tau$. Так как $L_{li+1}(F; A_{i+1}) = F(A_{i+1}), L_{li+1}(F; A_{i+2}) = F(A_{i+2})$, то приходим к соотношениям $L_{li}(F; A_{i+1}) = L_{li+1}(F; A_{i+1}) = F(A_{i+1})$.

Тогда кусочно-линейная интерполяционная формула $L_1(A) = \sum_{i=0}^n \chi_{\mathfrak{M}_i}(A) L_{1i}(F; A)$, где $\chi_{\mathfrak{M}}(A) = \begin{cases} I, & A \in \mathfrak{M}; \\ 0, & A \notin \mathfrak{M}, \end{cases}$ задает функцию, непрерывную на $X = \bigcup_{i=0}^n \mathfrak{M}_i$.

Для формулы линейной интерполяции

$$\tilde{L}_{1i}(F; A) = F(A_i) + [A(a) - A_i(a)][A_{i+1}(a) - A_i(a)]^{-1} [F(\sigma_i) - F(A_i)] + \int_0^1 \delta F[\sigma_{0i} + \tau(A_{i+1} - \sigma_{0i}); H] d\tau,$$

где $\sigma_{0i} \equiv \sigma_{0i}(t) = A_i(t) + A_{i+1}(a) - A_i(a)$, $H = H(t) = A(t) - A_i(t) - A(a) + A_i(a)$, также выполняются интерполяционные условия $\tilde{L}_{1i}(F; A_i) = F(A_i)$, $\tilde{L}_{1i}(F; A_{i+1}) = F(A_{i+1})$. Следовательно, $\tilde{L}_1(A) = \sum_{i=0}^n \chi_{\mathfrak{M}_i}(A) \tilde{L}_{1i}(F; A)$, где, как и ранее, $\chi_{\mathfrak{M}}(A) = \begin{cases} I, & A \in \mathfrak{M}; \\ 0, & A \notin \mathfrak{M}, \end{cases}$ является непрерывной алгебраической кусочно-линейной интерполяционной на $X = \bigcup_{i=0}^n \mathfrak{M}_i$ функцией.

Рассмотрим далее тригонометрический многочлен первой степени

$$S_{1i}(x) = \frac{\sin \frac{1}{2}(x - \tilde{x}_i) \sin \frac{1}{2}(x - x_{i+1})}{\sin \frac{1}{2}(x_i - \tilde{x}_i) \sin \frac{1}{2}(x_i - x_{i+1})} A(x_i) + \frac{\sin \frac{1}{2}(x - x_i) \sin \frac{1}{2}(x - x_{i+1})}{\sin \frac{1}{2}(\tilde{x}_i - x_i) \sin \frac{1}{2}(\tilde{x}_i - x_{i+1})} A(\tilde{x}_i) + \frac{\sin \frac{1}{2}(x - x_i) \sin \frac{1}{2}(x - \tilde{x}_i)}{\sin \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i) \sin \frac{1}{2}(x_{i+1} - \tilde{x}_i)} A(x_{i+1}),$$

где x_i – точки разбиения $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq 2\pi$ отрезка $[0, 2\pi]$ на интервалы $[x_i, x_{i+1}]$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, \tilde{x}_i – любая внутренняя точка из $[x_i, x_{i+1}]$, $A(x)$ – заданная на $[0, 2\pi]$ матрица. В этом случае функциональная матрица $S_{1,1}(A; x) = S_{1i}(x)$ ($x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$), определённая на всем отрезке $[0, 2\pi]$, является непрерывной, и для неё выполняются интерполяционные условия $S_{1,1}(A; x_i) = A(x_i)$, $S_{1,1}(A; \tilde{x}_i) = A(\tilde{x}_i)$ и $S_{1,1}(A; x_{i+1}) = A(x_{i+1})$.

Рассмотрим далее тригонометрический многочлен для функции $F(x)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, вида

$$T_{2i}(x) = l_{i0}(x)F(x_i) + l_{i1}(x)F(x_{i+1}) + l_{i2}(x)F'(x_i) + l_{i3}(x)F'(x_{i+1}), \quad (4)$$

$$\text{где } l_{i0}(x) = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(x - x_{i+1}) \sin^2 \frac{1}{2}(x - 2x_i + x_{i+1})}{\sin^4 \frac{1}{2}(x_i - x_{i+1})}, \quad l_{i1}(x) = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(x - x_i) \sin^2 \frac{1}{2}(x - 2x_{i+1} + x_i)}{\sin^4 \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)},$$

$$l_{i2}(x) = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(x - x_i) \sin^2 \frac{1}{2}(x - x_{i+1})}{\sin^2 \frac{1}{2}(x_i - x_{i+1})}, \quad l_{i3}(x) = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}(x - x_i) \sin \frac{1}{2}(x - x_{i+1})}{\sin^2 \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)}, \quad x_i \neq x_{i+1},$$

для которого выполняются интерполяционные условия $T_{2i}(x_i) = F(x_i)$, $T_{2i}(x_{i+1}) = F(x_{i+1})$, $T'_{2i}(x_i) = F'(x_i)$ и $T'_{2i}(x_{i+1}) = F'(x_{i+1})$.

Пусть узлы $A_i = x_i I$, $A_{i+1} = x_{i+1} I$ – скалярные матрицы. Тогда матричный вариант тригонометрического многочлена (4) имеет вид

$$T_{2i}(A) = l_{i0}(A)F(A_i) + l_{i1}(A)F(A_{i+1}) + l_{i2}(A)F'(A_i) + l_{i3}(A)F'(A_{i+1}), \quad (5)$$

где фундаментальные многочлены задаются равенствами

$$l_{i0}(A) = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(A - x_{i+1}I) \sin^2 \frac{1}{2}(A - (2x_i - x_{i+1})I)}{\sin^4 \frac{1}{2}(x_i - x_{i+1})}, \quad l_{i2}(A) = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(A - x_i I) \sin^2 \frac{1}{2}(A - x_{i+1}I)}{\sin^2 \frac{1}{2}(x_i - x_{i+1})}, \quad (6)$$

$$l_{i1}(A) = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(A - x_i I) \sin^2 \frac{1}{2}(A - (2x_{i+1} - x_i)I)}{\sin^4 \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)}, \quad l_{i3}(A) = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}(A - x_i I) \sin \frac{1}{2}(A - x_{i+1}I)}{\sin^2 \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)}. \quad (7)$$

Здесь, как обычно, полагаем, что $l'_{ik}(A) = l'_{ik}(z)|_{z=A}$ ($k=0, 1, 2, 3$) и производная $F'(A) = F'(z)|_{z=A}$. Интерполяционные условия $T_{2i}(A_j) = F(A_j)$ и $T_{2i}'(A_j) = F'(A_j)$ ($j = i, i+1$), естественно, выполняются.

Например, для матричной функции $F(A) = \sin A$ получим, что

$$T_{i2}(A) = l_{i0}(A) \sin x_i + l_{i1}(A) \sin x_{i+1} + l_{i2}(A) \cos x_i + l_{i3}(A) \cos x_{i+1},$$

где фундаментальные многочлены $l_{i0}(A)$, $l_{i1}(A)$, $l_{i2}(A)$ и $l_{i3}(A)$ задаются формулами (6) и (7).

Формулы сплайн-интерполирования на множествах матриц с обычным и йордановым умножением. Пусть, как и ранее, X – некоторое множество квадратных матриц, $X = \bigcup_{i=0}^m \mathfrak{M}_i$ – его разбиение, матрицы A_i и A_{i+1} принадлежат множеству \mathfrak{M}_i ($i = 0, 1, \dots, m-1$) и известны значения функции $F(A)$ в точках A_i . Тогда для многочлена

$$L_{m1}(F; A) = \sum_{i=0}^m L_{li}(A) \chi_{\mathfrak{M}_i}(A), \quad (8)$$

где $L_{li}(A) = F(A_i) + [F(A_{i+1}) - F(A_i)] \circ \{(A_{i+1} - A_i)^{-1}(A - A_i)\}$, $\chi_{\mathfrak{M}_i}(A_j) = \delta_{ij}I$, выполняются интерполяционные условия $L_{m1}(F; A_i) = F(A_i)$, ($i = 0, 1, \dots, m$). В формуле $L_{li}(A)$ сначала вычисляется матрица в фигурных скобках.

Эти условия выполняются и для формулы (8), где

$$L_{li}(A) = F(A_i) + (A - A_i) \circ B + [F(A_{i+1}) - F(A_i) - (A_{i+1} - A_i) \circ B] \circ \{(A_{i+1} - A_i)^{-1} \circ (A - A_i)\},$$

символ « \circ » означает произведение матриц по Йордану, т. е. $A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA)$; в выше написанном выражении матрица B – произвольно заданная. Здесь сначала вычисляются матрицы в квадратных и фигурных скобках, а потом их йорданово произведение.

Приведём далее несколько интерполяционных формул для заданной на X функции $F(A)$, которые на каждом подмножестве \mathfrak{M}_i будут матричными многочленами степени n_i . Пусть на \mathfrak{M}_i выбраны узлы $A_j^{(i)}$ ($j = 0, 1, \dots, n_i$) такие, что матрицы $A_{j+1}^{(i)} - A_j^{(i)}$ обратимы. Обозначим через $l_{ki}(A)$ произведение вида

$$l_{ki}(A) = (A - A_0^{(i)})(A - A_1^{(i)}) \cdots (A - A_{k-1}^{(i)})(A - A_{k+1}^{(i)}) \cdots (A - A_{n_i}^{(i)}),$$

где $0 \leq k \leq n_i$, и умножение матриц может пониматься как обычное или как йорданово. В последнем случае в силу неассоциативности умножения по Йордану следует определить порядок выполнения этой операции.

Для матричного многочлена $S_{n_i}(A) = \sum_{k=0}^{n_i} F(A_k^{(i)}) \circ \{I_{k+1}^{-1}(A_k^{(i)}) \circ l_{ki}(A)\}$ имеют место соотношения $S_{n_i}(A_v^{(i)}) = F(A_v^{(i)})$ ($v = 0, 1, \dots, n_i$) и, соответственно, для

$$L_n(A) = \sum_{i=0}^m S_{n_i}(A) \chi_{\mathfrak{M}_i}(A) \quad (9)$$

будут справедливы равенства

$$L_n(A_j^{(i)}) = F(A_j^{(i)}) \quad (j = 0, 1, \dots, n_i; i = 0, 1, \dots, m). \quad (10)$$

Так как матричный алгебраический многочлен $\tilde{S}_{n_i}(A) = \sum_{k=0}^{n_i} F(A_k^{(i)}) \circ l_{ki}(A)$, где $l_{ki}(A) = \prod_{j=0, j \neq k}^{n_i} \{(A - A_j^{(i)}) \circ (A_k^{(i)} - A_j^{(i)})^{-1}\}$, удовлетворяет также условиям $\tilde{S}_{n_i}(A_v^{(i)}) = F(A_v^{(i)})$ ($v=0, 1, \dots, n_i$), причём произведение матриц, указанных в фигурных скобках, может пониматься как обычное, так и йорданово, то в этом случае для аналогичной (9) функции $\tilde{L}_n(A) = \sum_{i=0}^m \tilde{S}_{n_i}(A) \chi_{\mathfrak{M}_i}(A)$ будут выполняться интерполяционные условия (10).

При тех же узлах интерполирования $A_j^{(i)}$ и таком же разбиении множества X на основе формулы (1) получим, что для функции $L_n(A) = \sum_{i=0}^m S_i(A) \chi_{\mathfrak{M}_i}(A)$, где $S_i(A)$ задаётся равенством (1), будут справедливы соотношения $L_n(A_j^{(i)}) = F(A_j^{(i)})$, $\delta L_n[A_j^{(i)}; h] = \delta F[A_j^{(i)}; h]$ ($j=0, 1, \dots, n_i$; $i=0, 1, \dots, m$).

Рассмотрим аналог формулы (2) на множестве матриц с использованием йорданова умножения. Пусть $\tau \equiv \tau(A) = (A - A_i) \circ (A_{i+1} - A_i)^{-1}$, где, как и ранее, \circ – обозначение йорданова умножения квадратных матриц. Введём обозначения

$$\tilde{\Phi}_{0i}(A) = I - 3\tau^2(A) + 2\tau^3(A), \quad \tilde{\Phi}_{1i}(A) = 3\tau^2(A) - 2\tau^3(A),$$

$$\tilde{\Phi}_{2i}(A) = (A_{i+1} - A_i) \circ [\tau(A) - 2\tau^2(A) + \tau^3(A)], \quad \tilde{\Phi}_{3i}(A) = (A_{i+1} - A_i) \circ [\tau^3(A) - \tau^2(A)].$$

Так как $\tau(A_i) = 0$ и $\tau(A_{i+1}) = 1$, то $\tilde{\Phi}_{1i}(A_i) = \tilde{\Phi}_{2i}(A_i) = \tilde{\Phi}_{3i}(A_i) = \tilde{\Phi}_{0i}(A_{i+1}) = \tilde{\Phi}_{2i}(A_{i+1}) = \tilde{\Phi}_{3i}(A_{i+1}) = 0$, а $\tilde{\Phi}_{0i}(A_i) = \tilde{\Phi}_{1i}(A_{i+1}) = I$.

Дифференциалы Гато функций $\tau(A)$, $\tau^2(A)$ и $\tau^3(A)$ задаются соответственно формулами $\delta\tau[A; h] = (A_{i+1} - A_i)^{-1} \circ h$, $\delta\tau^2[A; h] = \tau[h \circ (A_{i+1} - A_i)^{-1}] + [h \circ (A_{i+1} - A_i)^{-1}] \tau$, $\delta\tau^3[A; h] = \tau^2[h \circ (A_{i+1} - A_i)^{-1}] + \tau[h \circ (A_{i+1} - A_i)^{-1}] \tau + [h \circ (A_{i+1} - A_i)^{-1}] \tau^2$.

Заметим, что умножение сомножителей в равенствах (6) и (7) для матричных фундаментальных многочленов формулы (5) может быть также и йордановым.

Матричные аналоги сплайнов на множествах матриц с адамаровым умножением. Умножение по Адамару матриц $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ одинаковой размерности выполняется по правилу $AB = [a_{ij}b_{ij}]$. Роль единичной матрицы играет матрица той же размерности, все элементы которой равны единице. В связи с этим одним из подклассов матриц, на котором естественно рассмотреть задачу интерполяции функций от матриц, является множество матриц с ненулевыми элементами и, соответственно, для каждой матрицы $A = [a_{ij}]$ из этого множества обратная к ней по Адамару A^{-1} будет $A^{-1} = \left[\frac{1}{a_{ij}} \right]$.

Для квадратных матриц $A = [a_{ij}]$ с ненулевыми элементами на главной диагонали будем рассматривать ещё один аналог обратной матрицы, обозначаемой, как $A^{(-1)}$ и имеющей вид $A^{(-1)} = \text{diag} \left[\frac{1}{a_{ii}} \right]$. Очевидно, что в этом случае $AA^{(-1)} = I$, где I – обычная единичная матрица.

Пусть оператор $F: X \rightarrow X$, где X – множество матриц фиксированной размерности. В качестве узлов $A_i = \left[a_{vk}^{(i)} \right]$ и $A_{i+1} = \left[a_{vk}^{(i+1)} \right]$, принадлежащих множеству \mathfrak{M}_i , выбираются такие матрицы, что $a_{vk}^{(i+1)} - a_{vk}^{(i)} \neq 0$ для $v=0, 1, \dots, p$; $k=0, 1, \dots, q$, в случае, когда узлы A_i , A_{i+1} , как и матрицы $A = [a_{vk}]$, являются $p \times q$ -матрицами из X . Тогда для формулы линейной интерполяции

$$L_{li}(A) = F(A_i) \cdot \left[\frac{a_{vk} - a_{vk}^{(i+1)}}{a_{vk}^{(i)} - a_{vk}^{(i+1)}} \right] + F(A_{i+1}) \cdot \left[\frac{a_{vk} - a_{vk}^{(i)}}{a_{vk}^{(i+1)} - a_{vk}^{(i)}} \right], \quad (11)$$

где символ « \cdot » означает операцию умножения по Адамару, выполняются равенства $L_{li}(A_i) = F(A_i)$, $L_{li}(A_{i+1}) = F(A_{i+1})$.

Формула (11) в другом варианте может быть записана в матричном виде $L_{li}(A) = F(A_i) \cdot (A_i - A_{i+1})^{-1} \cdot (A - A_{i+1}) + F(A_{i+1}) \cdot (A_{i+1} - A_i)^{-1} \cdot (A - A_i)$, при этом $A, A_i, A_{i+1} \in \mathfrak{M}_i$ ($i = 0, 1, \dots, m$).

Имеет смысл привести также формулу линейной интерполяции

$$L_{li}(A) = F(A_i)[(A_i - A_{i+1})^{(-1)} \cdot (A - A_{i+1})] + F(A_{i+1})[(A_{i+1} - A_i)^{(-1)} \cdot (A - A_i)]$$

или в случае квадратных матриц в варианте

$$L_{li}(A) = F(A_i) \text{diag} \left[\frac{a_{vv} - a_{vv}^{(i+1)}}{a_{vv}^{(i)} - a_{vv}^{(i+1)}} \right] + F(A_{i+1}) \text{diag} \left[\frac{a_{vv} - a_{vv}^{(i)}}{a_{vv}^{(i+1)} - a_{vv}^{(i)}} \right]. \quad (12)$$

Рассмотрим интерполяционные алгебраические многочлены произвольной степени. Обозначим через $Z_{ki}(A)$ выражение вида

$$Z_{ki}(A) = (A - A_i) \cdot (A - A_{i+1}) \cdot \dots \cdot (A - A_{k-1}) \cdot (A - A_{k+1}) \cdot \dots \cdot (A - A_{n_i})$$

и предположим, что матрица $Z_{ki}(A_k)$ ($k = 0, 1, \dots, n_i$) не имеет нулевых элементов. Тогда для многочлена n_i -степени $L_{in_i}(A) = \sum_{k=0}^{n_i} F(A_k) \cdot Z_{ki}^{-1}(A_k) \cdot Z_{ki}(A)$ выполняются равенства $L_{in_i}(A_j) = F(A_j)$ для $j = 0, 1, \dots, n_i$. В случае $n_i = 2$ эта формула интерполирования примет вид

$$L_{i2}(A) = F(A_i) \cdot \left[\frac{(a_{vk} - a_{vk}^{(i+1)})(a_{vk} - a_{vk}^{(i+2)})}{(a_{vk}^{(i)} - a_{vk}^{(i+1)})(a_{vk}^{(i)} - a_{vk}^{(i+2)})} \right] + F(A_{i+1}) \cdot \left[\frac{(a_{vk} - a_{vk}^{(i)})(a_{vk} - a_{vk}^{(i+2)})}{(a_{vk}^{(i+1)} - a_{vk}^{(i)})(a_{vk}^{(i+1)} - a_{vk}^{(i+2)})} \right] + F(A_{i+2}) \cdot \left[\frac{(a_{vk} - a_{vk}^{(i)})(a_{vk} - a_{vk}^{(i+1)})}{(a_{vk}^{(i+2)} - a_{vk}^{(i)})(a_{vk}^{(i+2)} - a_{vk}^{(i+1)})} \right].$$

Для неё справедливы равенства $L_{i2}(A_{i+j}) = F(A_{i+j})$ для $j = 0, 1, 2$.

Эти же равенства выполняются и для формулы

$$L_{2i}(A) = F(A_i) \text{diag} \left[\frac{(a_{vv} - a_{vv}^{(i+1)})(a_{vv} - a_{vv}^{(i+2)})}{(a_{vv}^{(i)} - a_{vv}^{(i+1)})(a_{vv}^{(i)} - a_{vv}^{(i+2)})} \right] + F(A_{i+1}) \text{diag} \left[\frac{(a_{vv} - a_{vv}^{(i)})(a_{vv} - a_{vv}^{(i+2)})}{(a_{vv}^{(i+1)} - a_{vv}^{(i)})(a_{vv}^{(i+1)} - a_{vv}^{(i+2)})} \right] + F(A_{i+2}) \text{diag} \left[\frac{(a_{vv} - a_{vv}^{(i)})(a_{vv} - a_{vv}^{(i+1)})}{(a_{vv}^{(i+2)} - a_{vv}^{(i)})(a_{vv}^{(i+2)} - a_{vv}^{(i+1)})} \right].$$

В последнем случае требуется, чтобы диагональные элементы матриц A_i, A_{i+1} и A_{i+2} были различны.

В формулах (11) и (12) узлы интерполирования берутся из подмножества \mathfrak{M}_i . С учётом структуры этих формул получаем, что функция от A вида $L_m(F; A) = \sum_{i=0}^m \tilde{L}_{li}(A) \chi_{\mathfrak{M}_i}(A)$, где, как и ранее, $\chi_{\mathfrak{M}_i}(A_j) = \delta_{ij} I$, а $\tilde{L}_{li}(A)$ – один из матричных многочленов (11) или (12), заданных на \mathfrak{M}_i , будет непрерывной на всём множестве X .

Об интерполяционных формулах, основанных на умножении матриц по Фробениусу. Пусть матрицы $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ с действительными элементами имеют одинаковую размерность. Их произведение по Фробениусу определяется как $A \diamond B = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$. Эта операция коммутативна, а её результатом является скаляр. Тогда для формулы

$$L_n(A) = \sum_{k=0}^n \frac{l_{nk}(A)}{l_{nk}(A_k)} F(A_k), \quad (13)$$

где

$$l_{nk}(A) = [(A - A_0) \diamond (A_k - A_0)] \dots [(A - A_{k-1}) \diamond (A_k - A_{k-1})] \times \\ [(A - A_{k+1}) \diamond (A_k - A_{k+1})] \dots [(A - A_n) \diamond (A_k - A_n)],$$

имеют место равенства $L_n(A_i) = F(A_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) при различных узлах интерполирования A_k . Функция $F(A)$ в точках A_k может принимать матричные или другие значения. В частности, матрицы $F(A_k)$ могут быть произвольной размерности, в том числе и отличной от размерностей матриц A и A_k .

Рассмотрим линейный случай формулы (13):

$$L_{1,i}(A) = \frac{(A - A_{i+1}) \diamond (A_i - A_{i+1})}{(A_i - A_{i+1}) \diamond (A_i - A_{i+1})} F(A_i) + \frac{(A - A_i) \diamond (A_{i+1} - A_i)}{(A_{i+1} - A_i) \diamond (A_{i+1} - A_i)} F(A_{i+1}),$$

где узлы A_i, A_{i+1} принадлежат множеству \mathfrak{M}_i . Для узлов A_{i+1}, A_{i+2} из \mathfrak{M}_{i+1} и соответствующего матричного многочлена первой степени $L_{1,i+1}(A)$ будут выполняться равенства $L_{1,i}(A_{i+1}) = L_{1,i+1}(A_{i+1}) = F(A_{i+1})$.

Таким образом, $L_{1,i}(A)$ ($A \in \mathfrak{M}_i, i = 0, 1, \dots, n-1$) определяет на X непрерывную функцию, которая на каждом подмножестве \mathfrak{M}_i разбиения X является матричным многочленом алгебраического типа первой степени.

В заключение отметим, что ряд интерполяционных формул других видов для функций от матриц получен также в [4–9].

Список использованной литературы

1. Стечкин, С. Б. Сплайны в вычислительной математике / С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин. – М., 1976.
2. Завьялов, Ю. С. Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. – М., 1980.
3. Макаров, В. Л. Сплайн-аппроксимация функций / В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов. – М., 1983.
4. Makarov, V. L. Methods of operator interpolation / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, L. A. Yanovich. – Kyiv, 2010.
5. Yanovich, L. A. On matrix function interpolation / L. A. Yanovich, I. V. Romanovski // J. Numer. Appl. Math. – 2009. – N 1(97). – P. 122–131.
6. Худяков, А. П. Обобщенные интерполяционные эрмитова типа многочлены для функций матричной переменной / А. П. Худяков, Л. А. Янович // Тр. Ин-та матем. НАН Беларуси. – 2011. – Т. 19, № 2. – С. 103–114.
7. Yanovich, L. A. On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables / L. A. Yanovich, A. P. Hudyakov // J. of Computational and Applied Mathematics. – 2011. – Vol. 105, N 2. – P. 136–147.
8. Янович, Л. А. Интерполяционные формулы первых и вторых порядков для функций матричного аргумента / Л. А. Янович, А. П. Худяков // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 16–22.
9. Янович, Л. А. Формулы интерполяции с произвольным числом матричных узлов и произвольными входными параметрами / Л. А. Янович, А. П. Худяков // Докл. НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 4. – С. 11–16.

Поступило в редакцию 27.04.2015

УДК 519.6

*Н. А. ЛИХОДЕД, М. А. ПОЛЕЩУК***МЕТОД РАНЖИРОВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ РАЗМЕРА БЛОКОВ ВЫЧИСЛЕНИЙ
ПАРАЛЛЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА***(Представлено членом-корреспондентом Л. А. Яновичем)**Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь**likhoded@bsu.by; poleschuma@bsu.by*

Исследуется задача получения макроопераций параллельного алгоритма, приводящих к меньшему числу обращений к глобальной памяти. Сформулированы и доказаны утверждения, позволяющие оценить объем коммуникационных операций, порождаемых разбиением множества итераций.

Ключевые слова: параллельные вычисления, распараллеливание алгоритмов, графический процессор, минимизация объема коммуникационных операций.

*N. A. LIKHODED, M. A. PALIASHCHUK***METHOD OF RANKING TILES SIZE PARAMETERS OF A PARALLEL ALGORITHM***Belarusian State University, Minsk, Belarus**likhoded@bsu.by; poleschuma@bsu.by*

A method for obtaining tiles of operations of a parallel algorithm is developed. Propositions for ranking tiles size parameters are stated and proved. Statements to assess the amount of communication operations generated by the partition of the set of iterations are stated and proved.

Keywords: parallel computing, parallelization of algorithms, GPU, minimization of communications.

Введение. Время решения задачи на современном компьютере во многом определяется степенью использования памяти с быстрым доступом. В качестве целевого компьютера, т. е. компьютера, на котором требуется реализовать параллельную версию алгоритма, будем рассматривать графические процессоры (GPU). При многопроцессорной обработке на GPU быстрым является процесс обращения к разделяемой памяти мультипроцессора, оперирующего некоторыми данными алгоритма, но не обращение к глобальной памяти GPU. Чем меньше число обращений к глобальной памяти, тем быстрее выполняется алгоритм.

Для реализации алгоритма на графическом процессоре множество операций алгоритма должно быть разбито на блоки, а блоки – на потоки (нити) вычислений. Множество операций алгоритма разбить на блоки можно путем тайлинга (тайлинг первого уровня), затем разбить блоки вычислений на потоки вычислений можно путем повторного применения тайлинга (тайлинг второго уровня) [1]. Тайлинг (tiling) – это преобразование алгоритма для получения макроопераций-тайлов [2; 3]; операции одного тайла выполняются атомарно, как одна единица вычислений, а обмен данными происходит массивами.

В данной работе предлагается метод, позволяющий получать тайлы вычислений с меньшим числом обращений к глобальной памяти. Используется анализ информационных зависимостей, порождающих коммуникационные операции. Сформулированы и доказаны утверждения, позволяющие ранжировать параметры размера тайлов. Предлагаемый метод можно также применять после некоторых предварительных оптимизирующих преобразований алгоритма. В частности, ранжировать параметры размера тайлов предлагаемым способом можно после преобразо-

ваний для улучшения параллелизма вычислений уровня тайлов и обеспечения одновременного начала шаблонных вычислений процессорами [4; 5]. Результаты исследований этой работы могут быть использованы для минимизации объема коммуникационных операций между параллельными вычислительными процессами, реализуемыми на суперкомпьютерах с распределенной памятью.

Предварительные сведения. Приведем необходимые для дальнейшего изложения сведения о формальном описании алгоритма и о тайлинге.

Будем считать, что алгоритм задан последовательной программой линейного класса [6]. Основную вычислительную часть такой программы составляют циклические конструкции; границы изменения параметров циклов задаются неоднородными формами, линейными по совокупности параметров циклов и внешних переменных. Предполагается, что в гнезде циклов имеется K выполняемых операторов S_β и используется L массивов a_l размерностей v_l . Область изменения параметров циклов (область итераций) для оператора S_β и размерность этой области обозначим соответственно V_β и n_β .

Выполнение оператора S_β при конкретных значениях β вектора параметров цикла J будем называть операцией и обозначать $S_\beta(J)$. Зависимости (информационные связи) между операциями задаются функциями вида

$$\bar{\Phi}_{\alpha,\beta}(J) = \Phi_{\alpha,\beta}J + \Psi_{\alpha,\beta}N - \varphi^{\alpha,\beta}, \quad (1)$$

$$J \in V_{\alpha,\beta}, N \in \mathbb{Z}^s, \Phi_{\alpha,\beta} \in \mathbb{Z}^{n_\alpha \times n_\beta}, \Psi_{\alpha,\beta} \in \mathbb{Z}^{n_\alpha \times s}, \varphi^{\alpha,\beta} \in \mathbb{Z}^{n_\alpha},$$

где $N \in \mathbb{Z}^s$ – вектор внешних переменных алгоритма; s – число внешних переменных. Функция зависимостей $\bar{\Phi}_{\alpha,\beta}(J)$ позволяет для операции $S_\beta(J)$ найти операцию $S_\alpha(I)$, от которой $S_\beta(J)$ зависит. Функции зависимостей являются удобным математическим аппаратом для описания информационных связей между операциями алгоритма (другие названия этих функций: покрывающие функции графа алгоритма [6], h -преобразования [7; 8]).

Вхождением (l, β, q) будем называть q -е вхождение массива a_l в оператор S_β . Индексы элементов l -го массива, связанных с вхождением (l, β, q) , выражаются функцией $\bar{F}_{l,\beta,q}$ вида

$$\bar{F}_{l,\beta,q}(J) = F_{l,\beta,q}J + G_{l,\beta,q}N + f^{l,\beta,q},$$

$$J(j_1, \dots, j_{n_\beta}) \in V_\beta, N \in \mathbb{Z}^s, F_{l,\beta,q} \in \mathbb{Z}^{v_l \times n_\beta}, G_{l,\beta,q} \in \mathbb{Z}^{v_l \times s}, f^{l,\beta,q} \in \mathbb{Z}^{v_l}.$$

Пара вхождений $(l, \alpha, 1)$ и (l, β, q) порождает истинную зависимость $S_\alpha(I) \rightarrow S_\beta(J)$, если $S_\alpha(I)$ выполняется раньше $S_\beta(J)$; $S_\alpha(I)$ переопределяет (изменяет) элемент массива a_l , а $S_\beta(J)$ использует в качестве аргумента тот же элемент массива; между операциями $S_\alpha(I)$ и $S_\beta(J)$ этот элемент не переопределяется.

Пусть в гнезде циклов имеется Θ наборов выполняемых операторов. Под набором операторов будем понимать один или несколько операторов, окруженных одним и тем же множеством циклов. Операторы и наборы операторов линейно упорядочены расположением их в записи алгоритма. Обозначим: $V^\vartheta, 1 \leq \vartheta \leq \Theta$, – области изменения параметров циклов, окружающих наборы операторов, n^ϑ – размерность области V^ϑ , число циклов, окружающих ϑ -й набор операторов. Заметим, что если оператор S_β , принадлежит набору операторов с номером ϑ^β , то область V_β может быть уже области V^{ϑ^β} .

Как уже отмечалось, тайлинг – это преобразование алгоритма для получения макроопераций, называемых зерном вычислений, или тайлами. При тайлинге каждый цикл разбивается на два цикла: глобальный, параметр которого определяет на данном уровне вложенности порядок вычисления тайлов, и локальный, в котором параметр исходного цикла изменяется в границах одного тайла. Допускается вырожденное разбиение цикла, при котором все итерации относятся к глобальному циклу или все итерации относятся к локальному циклу.

Следующие величины и множества используются для формализации тайлинга.

$m_\zeta^\vartheta = \min_{J(j_1, j_2, \dots, j_{n^\vartheta}) \in V^\vartheta} j_\zeta, M_\zeta^\vartheta = \max_{J(j_1, j_2, \dots, j_{n^\vartheta}) \in V^\vartheta} j_\zeta, 1 \leq \zeta \leq n^\vartheta$, – предельные значения изменения параметров циклов;

$r_1^{\vartheta}, \dots, r_{n^{\vartheta}}^{\vartheta}$ – заданные натуральные числа, определяющие размеры тайла; r_{ζ}^{ϑ} обозначает число значений параметра j_{ζ} , приходящихся на один тайл ϑ -го набора операторов; r_{ζ}^{ϑ} может принимать фиксированное значение в пределах от 1 до $r_{\zeta}^{\vartheta, \max}$ включительно, где $r_{\zeta}^{\vartheta, \max} = M_{\zeta}^{\vartheta} - m_{\zeta}^{\vartheta} + 1$; если $r_{\zeta}^{\vartheta} = 1$, то цикл с параметром j_{ζ} является глобальным не разбиваемым; если $r_{\zeta}^{\vartheta} = r_{\zeta}^{\vartheta, \max}$, то цикл с параметром j_{ζ} является локальным не разбиваемым; если два набора операторов имеют общий цикл с параметром j_{ζ} , то $r_{\zeta}^{\vartheta 1} = r_{\zeta}^{\vartheta 2}$;

$Q_{\zeta}^{\vartheta} = \left\lceil (M_{\zeta}^{\vartheta} - m_{\zeta}^{\vartheta} + 1) / r_{\zeta}^{\vartheta} \right\rceil$, $1 \leq \zeta \leq n^{\vartheta}$, – число частей, на которые при формировании тайлов разбивается область значений параметра j_{ζ} цикла, окружающего ϑ -й набор операторов;

$V^{\vartheta, \text{gl}} = \{J^{\text{gl}}(j_1^{\text{gl}}, \dots, j_{n^{\vartheta}}^{\text{gl}}) \mid 0 \leq j_{\zeta}^{\text{gl}} \leq Q_{\zeta}^{\vartheta} - 1, 1 \leq \zeta \leq n^{\vartheta}\}$ – области изменения параметров глобальных, т. е. уровня тайлов, циклов;

$V_{J^{\text{gl}}}^{\vartheta} = \{J(j_1, \dots, j_{n^{\vartheta}}) \in V^{\vartheta} \mid m_{\zeta}^{\vartheta} + j_{\zeta}^{\text{gl}} r_{\zeta}^{\vartheta} \leq j_{\zeta} \leq m_{\zeta}^{\vartheta} - 1 + (j_{\zeta}^{\text{gl}} + 1) r_{\zeta}^{\vartheta}, 1 \leq \zeta \leq n^{\vartheta}\}$, $J^{\text{gl}} \in V^{\vartheta, \text{gl}}$, – области изменения параметров локальных (уровня операций тайлов) циклов при фиксированных значениях параметров глобальных циклов. Множество операций, выполняемых на итерациях множества $V_{J^{\text{gl}}}^{\vartheta}$, будем также обозначать $V_{J^{\text{gl}}}^{\vartheta}$. Множества $V_{J^{\text{gl}}}^{\vartheta}$ называются тайлами.

Условия, характеризующие объем коммуникационных операций. Результаты, представленные в этом разделе, позволяют оценить объем коммуникационных операций между тайлами первого уровня (т. е. между блоками вычислений).

Пусть рассматривается гнездо циклов, для которого тайлинг допустим. Если заведомо известно, что $r_{\zeta}^{\vartheta} = 1$ (цикл с параметром j_{ζ} является глобальным не разбиваемым) или $r_{\zeta}^{\vartheta} = r_{\zeta}^{\vartheta, \max}$ (цикл с параметром j_{ζ} является локальным не разбиваемым), то разбиение итераций j_{ζ} не рассматривается. Обозначим через $(\Phi_{\alpha, \beta})_{\zeta}$ и $(\Psi_{\alpha, \beta})_{\zeta}$ строки матриц $\Phi_{\alpha, \beta}$ и $\Psi_{\alpha, \beta}$ с номером ζ , через $e_{\zeta}^{(n_{\beta})}$ – вектор-строку размера n_{β} , у которой координата с номером ζ равна 1, а остальные координаты нулевые; обозначим еще $\eta_{\zeta}^{\alpha, \beta} = (\Psi_{\alpha, \beta})_{\zeta} N - \Phi_{\zeta}^{\alpha, \beta}$.

Л е м м а 1. Пусть определение элемента некоторого массива a_l происходит на вхождении $(l, \alpha, 1)$ в левой части оператора S_{α} , а использование – на вхождении (l, β, q) в правой части оператора S_{β} , причем в окружении операторов S_{α} и S_{β} имеется цикл с параметром j_{ζ} , и выполняется условие

$$(\Phi_{\alpha, \beta})_{\zeta} = e_{\zeta}^{(n_{\beta})}. \quad (2)$$

Если

$$\eta_{\zeta}^{\alpha, \beta} = 0, \quad (3)$$

то определение и использование элемента массива данных происходит при одном и том же значении параметра цикла j_{ζ}^{gl} .

Если

$$0 < \left| \eta_{\zeta}^{\alpha, \beta} \right| < r_{\zeta}^{\vartheta}, \quad (4)$$

то определение и использование элемента массива данных происходит при одном и том же значении параметра цикла j_{ζ}^{gl} на $r_{\zeta}^{\vartheta} - \left| \eta_{\zeta}^{\alpha, \beta} \right|$ итерациях из каждых r_{ζ}^{ϑ} итераций j_{ζ} , а на $\left| \eta_{\zeta}^{\alpha, \beta} \right|$ итерациях из каждых r_{ζ}^{ϑ} итераций j_{ζ} определение и использование элемента массива данных происходит при разных значениях параметра цикла j_{ζ}^{gl} .

Если

$$\left| \eta_{\zeta}^{\alpha, \beta} \right| \geq r_{\zeta}^{\vartheta}, \quad (5)$$

то определение и использование элемента массива данных происходит при разных значениях параметра цикла j_{ζ}^{gl} .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем первое утверждение леммы. Функция зависимостей $I = \Phi_{\alpha, \beta}(J)$ определяет операцию $S_{\alpha}(I(i_1, \dots, i_{n_{\alpha}}))$ вычисления данного, требуемого операций $S_{\beta}(J(j_1, \dots, j_{n_{\beta}}))$ в качестве аргумента. Из равенств (1)–(3) следует $i_{\zeta} = (\Phi_{\alpha, \beta})_{\zeta} J = e_{\zeta}^{(n_{\beta})} J = j_{\zeta}$, поэтому значения параметров цикла j_{ζ}^{gl} , на которых определяется и используется элемент массива данных, совпадают.

Докажем второе утверждение леммы. Так как из определения тайлов имеем

$$j_\zeta = m_\zeta^\vartheta + j_\zeta^{\xi^1} r_\zeta^\vartheta + \alpha_\zeta^\vartheta,$$

где $0 \leq \alpha_\zeta^\vartheta < r_\zeta^\vartheta$,
то

$$i_\zeta = (\Phi_{\alpha,\beta})_\zeta J + \eta_\zeta^{\alpha,\beta} = e_\zeta^{(n\beta)} J + \eta_\zeta^{\alpha,\beta} = m_\zeta^\vartheta + j_\zeta^{\xi^1} r_\zeta^\vartheta + \alpha_\zeta^\vartheta + \eta_\zeta^{\alpha,\beta}.$$

Найдем значение параметра цикла $i_\zeta^{\xi^1}$, на котором определяется элемент массива данных ($\lfloor \cdot \rfloor$ обозначает ближайшее «снизу» целое число):

$$i_\zeta^{\xi^1} = \left\lfloor \frac{i_\zeta - m_\zeta^\vartheta}{r_\zeta^\vartheta} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{j_\zeta^{\xi^1} r_\zeta^\vartheta + \alpha_\zeta^\vartheta + \eta_\zeta^{\alpha,\beta}}{r_\zeta^\vartheta} \right\rfloor = j_\zeta^{\xi^1} + \left\lfloor \frac{\alpha_\zeta^\vartheta + \eta_\zeta^{\alpha,\beta}}{r_\zeta^\vartheta} \right\rfloor. \quad (6)$$

Последний член равен нулю при $r_\zeta^\vartheta - \eta_\zeta^{\alpha,\beta}$ значениях α_ζ^ϑ , на остальных $\eta_\zeta^{\alpha,\beta}$ значениях α_ζ^ϑ последний член не равен нулю.

Для доказательства третьего утверждения теоремы достаточно заметить, что если выполняется условие (5), то последний член в равенстве (6) не является нулевым. \square

В частном случае $\Psi = 0$ первые два утверждения теоремы 1 сформулированы в работе [9].

Л е м м а 2. Пусть определение элемента некоторого массива a_l происходит при выполнении операции $S_\alpha(I(i_1, \dots, i_{n_\alpha}))$, а использование – при выполнении операции $S_\beta(J(j_1, \dots, j_{n_\beta}))$, причем в окружении операторов S_α и S_β имеется цикл с параметром j_ζ . Если выполняется условие

$$(\Phi_{\alpha,\beta})_\zeta = \alpha_\zeta e_\zeta^{(n\beta)}, \quad (7)$$

где $\alpha_\zeta \in \mathbb{Z}$, $\alpha_\zeta \neq 1$,

то для всех итераций j_ζ , удовлетворяющих условию

$$|(\alpha_\zeta - 1)j_\zeta + \eta_\zeta^{\alpha,\beta}| \geq r_\zeta^\vartheta, \quad (8)$$

определение и использование элемента массива данных происходит при разных значениях параметра цикла $j_\zeta^{\xi^1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразуем выражение под знаком модуля в неравенстве (8):

$$\begin{aligned} (\alpha_\zeta - 1)j_\zeta + \eta_\zeta^{\alpha,\beta} &= \alpha_\zeta j_\zeta + \eta_\zeta^{\alpha,\beta} - j_\zeta = \alpha_\zeta e_\zeta^{(n\beta)} J + \eta_\zeta^{\alpha,\beta} - j_\zeta = \\ (\Phi_{\alpha,\beta})_\zeta J + \eta_\zeta^{\alpha,\beta} - j_\zeta &= (\Phi_{\alpha,\beta})_\zeta J + (\Psi_{\alpha,\beta})_\zeta N - \varphi_\zeta^{\alpha,\beta} - j_\zeta = i_\zeta - j_\zeta. \end{aligned}$$

Таким образом, если $\alpha_\zeta \neq 1$, то $|i_\zeta - j_\zeta| \geq r_\zeta^\vartheta$. Поэтому определение и использование элемента массива данных происходит при разных значениях параметра цикла $j_\zeta^{\xi^1}$. \square

З а м е ч а н и е 1. Из леммы 2 следует, что при выполнении условия (7) число итераций j_ζ , для которых определение и использование элемента массива данных происходит при одном и том же значении цикла с параметром $j_\zeta^{\xi^1}$, не может быть большим (число r_ζ^ϑ , как правило, гораздо меньше количества всех итераций j_ζ). Основная причина этого заключается в том, что модуль разности $|j_\zeta - i_\zeta|$ не ограничен небольшим (в пределах нескольких единиц) числом. В случае выполнения условия

$$(\Phi_{\alpha,\beta})_\zeta \neq \alpha_\zeta e_\zeta^{(n\beta)},$$

где $\alpha_\zeta \in \mathbb{Z}$,

модуль разности $|j_\zeta - i_\zeta|$ также не ограничен небольшим числом, так как зависит от J . Поэтому лишь для небольшого числа итераций j_ζ определение и использование элемента массива данных может происходить при одинаковых значениях цикла с параметром $j_\zeta^{\xi^1}$.

Пусть вхождение (l, β, q) в правую часть некоторого оператора порождает истинную зависимость, $\overline{\Phi}_{\alpha,\beta}$ – функция зависимостей. Обозначим

$$\rho_{l,\beta,q} = \text{rank } F_{l,\beta,q}, \rho_{l,\beta,q}^\zeta = \text{rank} \begin{pmatrix} F_{l,\beta,q} \\ e_\zeta^{(n\beta)} \end{pmatrix}, \rho_{l,\beta,q}^\Phi = \text{rank} \begin{pmatrix} F_{l,\beta,q} \\ \Phi_{\alpha,\beta} \end{pmatrix}, \rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta} = \text{rank} \begin{pmatrix} F_{l,\beta,q} \\ \Phi_{\alpha,\beta} \\ e_\zeta^{(n\beta)} \end{pmatrix}.$$

Если вхождение (l, β, q) не порождает истинную зависимость, то по определению $\rho_{l,\beta,q}^\Phi = \rho_{l,\beta,q}$, $\rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta} = \rho_{l,\beta,q}^\zeta$. Отметим, что $\rho_{l,\beta,q}^\Phi$ и $\rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta} - 1$ отличаются не более чем на 1.

Обозначим $M^\vartheta = \max_{\zeta} (M_\zeta^\vartheta - m_\zeta^\vartheta) + 1$ – наибольшее число итераций циклов, участвующих в получении тайлов. Для простоты записи будем использовать обозначение M без индекса ϑ , где будет подразумеваться набор операторов \mathfrak{G}^β при упоминании оператора S_β . Отметим, что величина $Q_\zeta^\vartheta r_\zeta^\vartheta$ имеет порядок M . Определим термин «фиксированное данное массива» как конкретное, неизмененное содержимое соответствующей ячейки памяти. Следующая лемма позволяет оценить число используемых фиксированных данных на каждом вхождении (l, β, q) при фиксированных значениях циклов с параметрами j_ζ и j_ζ^{gl} , общее число используемых фиксированных данных на вхождении (l, β, q) .

Л е м м а 3. Число фиксированных данных, используемых на вхождении (l, β, q) в правой части оператора S_β , при фиксированном значении цикла с параметром j_ζ оценивается величиной $O(M^{\rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta}-1})$.

Число фиксированных данных, используемых на вхождении (l, β, q) , оценивается величиной $O(M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi})$.

Число фиксированных данных, используемых на вхождении (l, β, q) , при фиксированном значении глобального цикла с параметром j_ζ^{gl} оценивается величиной $O(M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi})$, если $\rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta} - 1 = \rho_{l,\beta,q}^\Phi$, и величиной $O(r_\zeta^\vartheta M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi - 1})$, если $\rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta} = \rho_{l,\beta,q}^\Phi$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. На вхождении (l, β, q) фиксированное данное используется при фиксированном значении цикла с параметром j_ζ на итерациях подпространства итераций размерности $n_\beta - \rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta}$ [10; 11]. Тогда число фиксированных данных, используемых на вхождении (l, β, q) при фиксированном значении цикла с параметром j_ζ , т. е. число подпространств итераций размерности $n_\beta - \rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta}$ в пространстве размерности $n_\beta - 1$ есть $O(M^{n_\beta - 1 - (n_\beta - \rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta})}) = O(M^{\rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta} - 1})$. Аналогично, число фиксированных данных, используемых на вхождении (l, β, q) , есть число подпространств итераций размерности $n_\beta - \rho_{l,\beta,q}^\Phi$ в пространстве размерности n_β и для них справедлива асимптотическая оценка $O(M^{n_\beta - (n_\beta - \rho_{l,\beta,q}^\Phi)}) = O(M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi})$.

Если выполняется условие $\rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta} - 1 = \rho_{l,\beta,q}^\Phi$, то оценка числа используемых на вхождении (l, β, q) фиксированных данных одинакова как для одного j_ζ , так и для любого числа итераций j_ζ . Поэтому число фиксированных данных при r_ζ^ϑ значениях цикла с параметром j_ζ оценивается величиной $O(M^{\rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta}-1}) = O(M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi})$. Если выполняется условие $\rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta} = \rho_{l,\beta,q}^\Phi$, то для каждого j_ζ (всего r_ζ^ϑ значений j_ζ) используются новые фиксированные данные. Так как $Q_\zeta^\vartheta r_\zeta^\vartheta = O(M)$, то r_ζ^ϑ может быть величиной порядка M и ее следует учесть в асимптотической оценке $O(r_\zeta^\vartheta M^{\rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta}-1})$ числа фиксированных данных. \square

Оценка объема коммуникационных операций. В этом разделе для каждого вхождения (l, β, q) в правую часть оператора S_β оценивается объем коммуникационных операций чтения и соответствующих им операций записи, порождаемых разбиением итераций j_ζ при получении блоков вычислений.

Сделаем предположения, необходимые для практического использования результатов исследований: элементы матриц $\Phi_{\alpha,\beta}$, $\Psi_{\alpha,\beta}$ и векторов $\varphi^{\alpha,\beta}$ по модулю не превосходят нескольких единиц; $|\eta_\zeta^{\alpha,\beta}| = |\varphi_\zeta^{\alpha,\beta}| < r_\zeta^\vartheta$, если $(\Psi_{\alpha,\beta})_\zeta = 0$; $|\eta_\zeta^{\alpha,\beta}| \geq r_\zeta^\vartheta$, если $(\Psi_{\alpha,\beta})_\zeta \neq 0$.

Т е о р е м а. Пусть вхождение (l, β, q) порождает истинную зависимость: определение некоторого данного происходит на вхождении $(l, \alpha, 1)$ в левой части оператора S_α , а использование – на вхождении (l, β, q) в правой части оператора S_β , причем в окружении операторов S_α и S_β имеется цикл с параметром j_ζ .

Тогда при получении блоков вычислений для реализации алгоритма на графическом процессоре, разбиение итераций цикла j_ζ порождает коммуникационные операции чтения и записи, объем которых имеет следующие оценки:

1) если выполняются условия (2), (3), то не требуется ни операций чтения, ни операций записи;

2) если выполняются условия (2), (4), то требуется $O(Q_\zeta^g M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi}^{-1})$ операций чтения и операций записи;

3) если условие (2) не выполняется, выполняется условие $\rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta} = \rho_{l,\beta,q}^\Phi$, то требуется $O(M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi})$ операций чтения и операций записи;

4) если условие (2) не выполняется, выполняется условие $\rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta} - 1 = \rho_{l,\beta,q}^\Phi$, то требуется $O(Q_\zeta^g M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi})$ операций чтения и $O(M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi})$ операций записи.

В случае, когда вхождение (l, β, q) не порождает истинной зависимости (происходит обращение к входным данным) или цикл с параметром j_ζ имеется в окружении только оператора S_β , оценки следующие:

5) если выполняется условие $\rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta} = \rho_{l,\beta,q}^\Phi$, то требуется $O(M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi})$ операций чтения;

6) если выполняется условие $\rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta} - 1 = \rho_{l,\beta,q}^\Phi$, то требуется $O(Q_\zeta^g M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi})$ операций чтения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения теоремы оценивают объем коммуникационных операций, порождаемых разбиением итераций цикла j_ζ , в зависимости от возможных значений координат строки $(\Phi_{\alpha,\beta})_\zeta$ и величины $\eta_\zeta^{\alpha,\beta}$ (шесть случаев, возможных на практике). Напомним, множество итераций цикла с параметром j_ζ разбивается на Q_ζ^g частей.

Рассмотрим утверждение первого случая теоремы. Пусть вхождение (l, β, q) порождает истинную зависимость и выполняются условия (2), (3). Тогда выполняется равенство $\rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta} = \rho_{l,\beta,q}^\Phi$; из леммы 1 и леммы 3 следует, что в каждой из Q_ζ^g частей все $O(r_\zeta^g M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi}^{-1})$ фиксированных данных определяются и используются при одном и том же значении параметра цикла j_ζ^{gl} . Коммуникационных операций не требуется.

Во втором случае теоремы вхождение (l, β, q) порождает истинную зависимость, выполняются условия (2), (4). Тогда выполняется равенство $\rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta} = \rho_{l,\beta,q}^\Phi$; из леммы 1 и леммы 3 следует, что в каждой из Q_ζ^g частей $|\eta_\zeta^{\alpha,\beta}| O(M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi}^{-1})$ данных, из общего числа $O(r_\zeta^g M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi}^{-1})$ используемых в каждой части фиксированных данных, определяются и используются при разных итерациях цикла j_ζ^{gl} , причем независимо от значения r_ζ^g величина $|\eta_\zeta^{\alpha,\beta}|$ не превышает нескольких единиц. Суммарный объем коммуникационных операций чтения и операций записи по всем Q_ζ^g частям определяется оценкой $Q_\zeta^g O(M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi}^{-1}) = O(Q_\zeta^g M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi}^{-1})$.

Рассмотрим третий и четвертый случаи теоремы. В третьем случае выполняется условие $\rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta} = \rho_{l,\beta,q}^\Phi$, в четвертом – условие $\rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta} - 1 = \rho_{l,\beta,q}^\Phi$. Согласно лемме 3, число используемых фиксированных данных в каждой из Q_ζ^g частей оценивается в третьем случае величиной $O(r_\zeta^g M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi}^{-1})$, в четвертом – величиной $O(M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi})$. По условию, вхождение (l, β, q) порождает истинную зависимость, но условие (2) не выполняется. Поэтому в третьем случае нельзя утверждать, что в каждой из Q_ζ^g частей только $O(M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi}^{-1})$ данных из общего числа $O(r_\zeta^g M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi}^{-1})$ используемых (в каждой части) фиксированных данных определяются и используются при разных итерациях цикла j_ζ^{gl} (см. замечание 1); объемы коммуникационных операций чтения и операций записи по всем Q_ζ^g частям следует оценить величиной $Q_\zeta^g O(r_\zeta^g M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi}^{-1}) = O(M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi})$. Аналогично, в четвертом случае объем коммуникационных операций чтения по всем Q_ζ^g частям равен $Q_\zeta^g O(M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi}) = O(Q_\zeta^g M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi})$. Объем коммуникационных операций записи в четвертом случае оценивается величиной $O(M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi})$ – числом фиксированных данных, используемых, согласно лемме 3, на вхождении (l, β, q) как на одной части (выполняется условие $\rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta} - 1 = \rho_{l,\beta,q}^\Phi$), так и на всех Q_ζ^g частях.

В пятом и шестом случаях теоремы вхождение (l, β, q) не порождает истинной зависимости (происходит обращение к входным данным) или порождает истинную зависимость $S_\alpha(I) \rightarrow S_\beta(J)$, но цикл с параметром j_ζ имеется в окружении только оператора S_β . В пятом случае выполняется условие $\rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta} = \rho_{l,\beta,q}^\Phi$, в шестом – условие $\rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta} - 1 = \rho_{l,\beta,q}^\Phi$. Число используемых фиксированных

данных в каждой из Q_ζ^9 частей оценивается, согласно лемме 3, в пятом случае величиной $O(r_\zeta^9 M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi})$, в шестом – величиной $O(M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi})$. Тогда объем коммуникационных операций (только чтение) по всем Q_ζ^9 частям в пятом случае равен $Q_\zeta^9 O(r_\zeta^9 M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi}) = O(M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi})$, в шестом – $Q_\zeta^9 O(M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi}) = O(Q_\zeta^9 M^{\rho_{l,\beta,q}^\Phi})$. \square

З а м е ч а н и е 2. Если вхождение (l, β, q) не порождает истинной зависимости, то ранее введены обозначения $\rho_{l,\beta,q}^\Phi = \rho_{l,\beta,q}$ и $\rho_{l,\beta,q}^{\Phi,\zeta} = \rho_{l,\beta,q}^\zeta$. Поэтому предположения пунктов 5 и 6 теоремы можно записать в виде $\rho_{l,\beta,q}^\zeta = \rho_{l,\beta,q}$ и $\rho_{l,\beta,q}^\zeta - 1 = \rho_{l,\beta,q}$, а объем операций чтения в виде $O(M^{\rho_{l,\beta,q}})$ и $O(Q_\zeta^9 M^{\rho_{l,\beta,q}})$ соответственно.

Приоритеты разбиения итераций циклов. Утверждения теоремы позволяют выяснить асимптотику суммарного объема коммуникационных операций, порождаемых разбиением множества итераций j_ζ на Q_ζ^9 частей, в зависимости от возможных значений координат строки $(\Phi_{\alpha,\beta})_\zeta$ и величины $\eta_\zeta^{\alpha,\beta}$. Полученные оценки позволяют ранжировать параметры размера тайлов для минимизации объема коммуникационных операций между блоками вычислений.

Для каждого вхождения (l, β, q) в правую часть оператора S_β , окруженного циклом с параметром j_ζ , утверждения теоремы определяют объемы коммуникационных операций чтения $\omega_{l,\beta,q}^{\zeta,R}$ и операций записи $\omega_{l,\beta,q}^{\zeta,W}$. Их величины могут принимать одно из значений: нуль (первый случай теоремы); $O(Q_\zeta^9 M^\tau)$, где $\tau \in Z, \tau \geq 0$, (второй, четвертый и шестой случаи теоремы); $O(M^\tau)$ (третий, четвертый и пятый случаи теоремы). Для координаты j_ζ обозначим через ω_ζ^R и ω_ζ^W сумму объемов коммуникационных операций чтения и операций записи по всем вхождениям (l, β, q) : $\omega_\zeta^R = \sum_{(l,\beta,q)} \omega_{l,\beta,q}^{\zeta,R}$, $\omega_\zeta^W = \sum_{(l,\beta,q)} \omega_{l,\beta,q}^{\zeta,W}$. Определим также суммарный объем ω_ζ всех (чтение и запись) коммуникационных операций для координаты j_ζ : $\omega_\zeta = \omega_\zeta^R + \omega_\zeta^W$. Заметим, что каждая из величин ω_ζ^R , ω_ζ^W и ω_ζ равна нулю или оценивается величинами $O(Q_\zeta^9 M^\tau)$, $O(M^\tau)$ (вид оценки зависит от наличия членов с множителем Q_ζ^9).

Определим через z_ζ^R , z_ζ^W и z_ζ приоритеты разбиения цикла с параметром j_ζ по чтению, по записи и суммарно по чтению и записи. Положим z_ζ^R равным -1 , если $\omega_\zeta^R = 0$; равным τ , если $\omega_\zeta^R = O(M^\tau)$; равным $\tau + 0,5$, если $\omega_\zeta^R = O(Q_\zeta^9 M^\tau)$; z_ζ^W и z_ζ определяются аналогично через значения ω_ζ^W и ω_ζ . Число $0,5$ отражает зависимость Q_ζ^9 и M , что следует из равенства $M = O(r_\zeta^9 Q_\zeta^9)$. Приоритет -1 является самым высоким (разбиение координаты j_ζ не приводит к коммуникационным операциям), с ростом значения величин z_ζ^R , z_ζ^W и z_ζ приоритет убывает. Отметим, что если в реальных вычислениях на графическом процессоре скорости доступа к глобальной памяти по чтению и по записи (или их средние оценки) известны и они различаются на один или более порядок относительно M , следует вместо суммарного по чтению и записи приоритета z_ζ использовать приоритеты по чтению z_ζ^R и по записи z_ζ^W с учетом такого различия.

Приоритет (и по чтению, и по записи) разбиения цикла с параметром j_ζ определяет возможность уменьшения r_ζ^9 без увеличения оценки коммуникационных издержек. Уменьшать r_ζ^9 требуется, если блоки вычислений являются слишком большими для эффективной реализации на мультипроцессорах. Целая величина приоритета предоставляет такую возможность, а нецелая – не предоставляет. Нецелый приоритет (вида $\tau + 0,5$, где $\tau \in Z, \tau \geq 0$) отражает наличие множителя Q_ζ^9 в оценке объема коммуникаций. Уменьшение r_ζ^9 увеличит Q_ζ^9 (в силу $M = O(r_\zeta^9 Q_\zeta^9)$) и, следовательно, оценку числа коммуникационных операций. Реальное число коммуникаций также может увеличиться. Например, нарушение условия $|\eta_\zeta^{\alpha,\beta}| < r_\zeta^9$ по причине малости r_ζ^9 во втором случае теоремы приведет к коммуникациям на каждой итерации (вместо нескольких единиц) из r_ζ^9 итераций j_ζ (условие (5) леммы 1) в каждой из Q_ζ^9 частей. В случае целого приоритета Q_ζ^9 не входит в оценку объема коммуникационных операций и, следовательно, есть возможность уменьшения r_ζ^9 без роста оценки. При ранжировании (установлении соотношений размеров относительно друг друга) параметров размера блоков вычислений параллельного алгоритма, реализуемого на графическом процессоре, следует учитывать в оценках объема коммуникационных операций только слагаемые с множителем Q_ζ^9 .

Пример. Рассмотрим алгоритм прямого хода метода Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений:

```

do  $k = 1, n - 1$ 
  do  $i = k + 1, n$ 
    do  $j = k + 1, n + 1$ 
       $a(i, j) = a(i, j) - \frac{a(i, k)}{a(k, k)} a(k, j)$ 
    enddo
  enddo
enddo

```

Матрицы $\Phi_{\alpha, \beta}$ и векторы $\varphi^{\alpha, \beta}$ в функциях зависимостей будем для наглядности помечать элементами массивов, фигурирующими на порождающих зависимости вхождениях. Например, матрицу $\Phi_{\alpha, \beta}$ и вектор $\varphi^{\alpha, \beta}$ для вхождения $a(i, k)$ обозначим $\Phi_{a(i, j), a(i, k)}$ и $\varphi^{a(i, j), a(i, k)}$.

Для второго вхождения массива a в оператор $a(i, j)$ – использование прежнего значения обновляемого элемента) имеем

$$F_{1,1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_{a(i, j), a(i, j)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \varphi^{a(i, j), a(i, j)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \rho_{1,1,2}^{\Phi} = \text{rank} \begin{pmatrix} F_{1,1,2} \\ \Phi_{a(i, j), a(i, j)} \end{pmatrix} = 3.$$

Объемы коммуникационных операций $\omega_{1,1,2}^{\zeta, R}$ и $\omega_{1,1,2}^{\zeta, W}$, $\zeta = 1, 2, 3$, оцениваются величинами $\omega_{1,1,2}^{1, R} = \omega_{1,1,2}^{1, W} = O(Q_1 M^{\rho_{1,1,2}^{\Phi}}) = O(Q_1 M^2)$ (второй случай теоремы), $\omega_{1,1,2}^{2, R} = \omega_{1,1,2}^{2, W} = 0$ (первый случай), $\omega_{1,1,2}^{3, R} = \omega_{1,1,2}^{3, W} = 0$ (первый случай).

Для вхождения $a(i, k)$ (использование столбца, содержащего ведущий элемент) получим

$$F_{1,1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Phi_{a(i, j), a(i, k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \varphi^{a(i, j), a(i, k)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \rho_{1,1,3}^{\Phi} = \text{rank} \begin{pmatrix} F_{1,1,3} \\ \Phi_{a(i, j), a(i, k)} \end{pmatrix} = 2,$$

$\omega_{1,1,3}^{1, R} = \omega_{1,1,3}^{1, W} = O(Q_1 M^{\rho_{1,1,3}^{\Phi}}) = O(Q_1 M)$ (второй случай), $\omega_{1,1,3}^{2, R} = \omega_{1,1,3}^{2, W} = 0$ (первый случай), $\omega_{1,1,3}^{3, R} = O(Q_3 M^{\rho_{1,1,3}^{\Phi}}) = O(Q_3 M^2)$ и $\omega_{1,1,3}^{3, W} = O(M^{\rho_{1,1,3}^{\Phi}}) = O(M^2)$ (четвертый случай).

Для вхождения $a(k, j)$ (использование строки, содержащей ведущий элемент)

$$F_{1,1,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_{a(i, j), a(k, j)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \varphi^{a(i, j), a(k, j)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \rho_{1,1,4}^{\Phi} = \text{rank} \begin{pmatrix} F_{1,1,4} \\ \Phi_{a(i, j), a(k, j)} \end{pmatrix} = 2,$$

$\omega_{1,1,4}^{1, R} = \omega_{1,1,4}^{1, W} = O(Q_1 M^{\rho_{1,1,4}^{\Phi}}) = O(Q_1 M)$ (второй случай), $\omega_{1,1,4}^{2, R} = O(Q_2 M^{\rho_{1,1,4}^{\Phi}}) = O(Q_2 M^2)$ и $\omega_{1,1,4}^{2, W} = O(M^{\rho_{1,1,4}^{\Phi}}) = O(M^2)$ (четвертый случай), $\omega_{1,1,4}^{3, R} = \omega_{1,1,4}^{3, W} = 0$ (первый случай).

Для вхождения $a(k, k)$ (использование ведущего элемента)

$$F_{1,1,5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Phi_{a(i, j), a(k, k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \varphi^{a(i, j), a(k, k)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \rho_{1,1,5}^{\Phi} = \text{rank} \begin{pmatrix} F_{1,1,5} \\ \Phi_{a(i, j), a(k, k)} \end{pmatrix} = 1,$$

$\omega_{1,1,5}^{1, R} = \omega_{1,1,5}^{1, W} = O(Q_1 M^{\rho_{1,1,5}^{\Phi}}) = O(Q_1)$ (второй случай), $\omega_{1,1,5}^{2, R} = O(Q_2 M^{\rho_{1,1,5}^{\Phi}}) = O(Q_2 M)$, $\omega_{1,1,5}^{2, W} = O(M^{\rho_{1,1,5}^{\Phi}}) = O(M)$, $\omega_{1,1,5}^{3, R} = O(Q_3 M^{\rho_{1,1,5}^{\Phi}}) = O(Q_3 M)$ и $\omega_{1,1,5}^{3, W} = O(M^{\rho_{1,1,5}^{\Phi}}) = O(M)$ (четвертый случай).

Объемы операций чтения, операций записи и суммарный объем коммуникационных операций для первой, второй и третьей координат оцениваются величинами $\omega_1^R = O(Q_1 M^2)$, $\omega_1^W = O(Q_1 M^2)$, $\omega_2^R = O(Q_2 M^2)$, $\omega_2^W = O(M^2)$, $\omega_3^R = O(Q_3 M^2)$, $\omega_3^W = O(M^2)$, $\omega_1 = O(Q_1 M^2)$, $\omega_2 = O(Q_2 M^2)$, $\omega_3 = O(Q_3 M^2)$. Первая, вторая и третья координаты имеют приоритеты для разбиения по чтению $z_1^R = 2, 5$, $z_2^R = 2, 5$, $z_3^R = 2, 5$, по записи $z_1^W = 2, 5$, $z_2^W = 2$, $z_3^W = 2$, по чтению и записи $z_1 = 2, 5$, $z_2 = 2, 5$, $z_3 = 2, 5$.

Для ранжирования параметров r_1 , r_2 и r_3 размера блоков вычислений графического процессора найдем объемы (для различия с вычисленными выше объемами будем помечать их индексом rank) операций чтения, операций записи и суммарный объем коммуникационных операций для первой, второй и третьей координат, учитывая только слагаемые с множителем Q_i : $\omega_1^{R,\text{rank}} = O(Q_1 M^2)$, $\omega_1^{W,\text{rank}} = O(Q_1 M^2)$, $\omega_2^{R,\text{rank}} = O(Q_2 M^2)$, $\omega_2^{W,\text{rank}} = 0$, $\omega_3^{R,\text{rank}} = O(Q_3 M^2)$, $\omega_3^{W,\text{rank}} = 0$, $\omega_1^{\text{rank}} = O(Q_1 M^2)$, $\omega_2^{\text{rank}} = O(Q_2 M^2)$, $\omega_3^{\text{rank}} = O(Q_3 M^2)$. Первая, вторая и третья координаты имеют приоритеты для разбиения по чтению $z_1^{R,\text{rank}} = 2,5$, $z_2^{R,\text{rank}} = 2,5$, $z_3^{R,\text{rank}} = 2,5$, по записи $z_1^{W,\text{rank}} = 2,5$, $z_2^{W,\text{rank}} = -1$, $z_3^{W,\text{rank}} = -1$, по чтению и записи $z_1^{\text{rank}} = 2,5$, $z_2^{\text{rank}} = 2,5$, $z_3^{\text{rank}} = 2,5$. При этом отсутствует возможность уменьшения r_1 без роста оценки коммуникационных издержек и по чтению, и по записи (нецелый приоритет $z_1^{R,\text{rank}} = z_1^{W,\text{rank}} = 2,5$); имеется возможность уменьшения r_2 и r_3 без роста оценки коммуникационных операций записи (целый приоритет $z_2^{W,\text{rank}} = z_3^{W,\text{rank}} = -1$). Поэтому уменьшать блоки вычислений следует в первую очередь за счет параметров размера r_2 и r_3 .

Таким образом, в работе сформулированы и доказаны утверждения, позволяющие оценить объем коммуникационных операций, порождаемых разбиением множества итераций. Определены приоритеты параметров циклов, позволяющие ранжировать параметры размера тайлов первого уровня для минимизации объема коммуникационных операций. Приведено обоснование старшинства приоритетов на основании числа обращений к глобальной памяти графического процессора.

Список использованной литературы

1. *Baskaran, M.* Automatic C-to-CUDA code generation for affine programs / M. Baskaran, J. Ramanujam, P. Sadayappan // Proceedings of the Compiler Construction, 19th International Conference. Part of the Joint European Conferences on Theory and Practice of Software. – Paphos, Cyprus, March 2010.
2. *Xue, J.* Time-minimal tiling when rise is larger than zero / J. Xue, W. Cai // Parallel Computing. – 2002. – Vol. 28, N 5. – P. 915–939.
3. *Kim, D. G.* Parameterized tiling for imperfectly nested loops / D. G. Kim, S. Rajopadhye // Technical Report CS-09-101, Colorado State University, Department of Computer Science, February 2009. – 21 p.
4. Automatic parallelization of tiled loop nests with enhanced fine-grained parallelism on GPUs / P. Di [et al.] // 41st International Conference on Parallel Processing. – Pittsburgh, PA, USA, September 2012. IEEE Computer Society, 2012. – P. 350–359.
5. *Bandishti, V.* Tiling stencil computations to maximize parallelism / V. Bandishti, I. Pananilath, U. Bondhugula // Proceedings of Supercomputing. – Los Alamitos, CA, USA. IEEE Computer Society Press, 2012. – P. 40:1–40:11.
6. *Воеводин, В. В.* Параллельные вычисления / В. В. Воеводин, Вл. В. Воеводин. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 608 с.
7. *Feautrier, P.* Some efficient solutions to the affine scheduling problem. Part 1 / P. Feautrier // International J. of Parallel Programming. – 1992. – Vol. 21, N 5. – P. 313–348.
8. Automatic transformations for communication-minimized parallelization and locality optimization in the polyhedral model / U. Bondhugula [et al.] // Lecture notes in computer science. – 2008. – N 4959. – P. 132–146.
9. *Лиходед, Н. А.* Оценка объема коммуникационных операций параллельного зернистого алгоритма / Н. А. Лиходед, М. А. Полещук // Междунар. конгресс по информатике: информационные системы и технологии CSIST'2013, 4–7 ноября 2013 г., Минск, Беларусь. Бел. гос. ун-т. – Минск, 2013. – С. 377–381.
10. *Лиходед, Н. А.* Характеристика локальности параллельных реализаций многомерных циклов / Н. А. Лиходед // Докл. НАН Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 1. – С. 26–32.
11. *Адуцкевич, Е. В.* К распараллеливанию последовательных программ: распределение массивов между процессорами и структуризация коммуникаций / Е. В. Адуцкевич, Н. А. Лиходед, А. О. Сикорский // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – Т. 48, № 1. – С. 144–163.

Поступило в редакцию 30.03.2015

УДК 517.925/926+517.938

А. П. САДОВСКИЙ, Т. В. ЩЕГЛОВА

МНОГООБРАЗИЯ КОМПЛЕКСНОГО И ВЕЩЕСТВЕННОГО ЦЕНТРА ДВУМЕРНЫХ АВТОНОМНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

sadvskii@bsu.by; shcheglovskaya@tut.by

В работе показана связь между решением задачи получения необходимых и достаточных условий существования аналитического в окрестности начала координат первого интеграла, не зависящего от времени, для комплексной системы вида $\dot{x} = y + P(x, y)$, $\dot{y} = -x + Q(x, y)$, где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – полиномы без свободных и линейных членов, и решением проблемы различения центра и фокуса для вещественного аналога этой системы.

Ключевые слова: проблема центра и фокуса, полиномиальная система, многообразии комплексного центра, фокусные величины, нормальные формы, аналитический интеграл.

A. P. SADOVSKII, T. V. SHCHEGLOVA

CENTER VARIETIES OF COMPLEX AND REAL TWO-DIMENSIONAL AUTONOMOUS POLYNOMIAL DIFFERENTIAL SYSTEMS

Belarusian State University, Minsk, Belarus

sadvskii@bsu.by; shcheglovskaya@tut.by

In the present article we consider the interaction between the solution of the problem of obtaining necessary and sufficient conditions of existence of a time-independent first integral analytical in the neighborhood of the origin for the complex system of the form $\dot{x} = y + P(x, y)$, $\dot{y} = -x + Q(x, y)$, where $P(x, y)$, $Q(x, y)$ are polynomials without constant and linear terms, and the solution of the center-focus problem for the real system of the same form.

Keywords: center-focus problem, polynomial system, complex center variety, focal values, normal forms, analytic first integral.

Введение. Рассмотрим вещественную полиномиальную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = v + P(u, v), \quad \frac{dv}{dt} = -u + Q(u, v), \quad (1)$$

где $P(u, v)$, $Q(u, v) \in \mathbb{R}[u, v]$, а $u, v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
и комплексную полиномиальную систему

$$\frac{dx}{dt} = y + P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -x + Q(x, y), \quad (2)$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, а $x, y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

В системах (1) и (2) полиномы $P(z, w)$ и $Q(z, w)$ имеют вид $P(z, w) = \sum_{i=2}^n p_i(z, w)$ и $Q(z, w) = \sum_{j=2}^m q_j(z, w)$, где $p_i(z, w) = \sum_{k=0}^i p_{k,i-k} z^k w^{i-k}$, $q_j(z, w) = \sum_{k=0}^j q_{k,j-k} z^k w^{j-k}$.

Для системы (1) в $O(0, 0)$ возникает *проблема различения центра и фокуса*, или задача поиска необходимых и достаточных условий центра [1–5].

О п р е д е л е н и е 1 [1, с. 301]. *Особая точка $O(0, 0)$ системы (1) называется центром, если существует некоторая окрестность $O(0, 0)$, не содержащая других состояний равновесия, такая, что все траектории, пересекающие её в какой-либо точке (кроме $O(0, 0)$), – замкнуты.*

М. А. Ляпуновым впервые доказано, что наличие в начале координат системы (1) центра равносильно существованию у этой системы не зависящего от времени t действительного аналитического интеграла $U(u, v)$ вида

$$U(u, v) = u^2 + v^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} f_k(u, v), \quad (3)$$

где $f_k(u, v)$ – однородные многочлены степени k , т. е. $f_k(u, v) = \sum_{i=0}^k f_{i, k-i} u^i v^{k-i}$ [1, с. 310; 2, с. 28].

Если же $O(0, 0)$ системы (1) не является особой точкой типа центр, то интегральные кривые этой системы, расположенные в достаточно малой окрестности начала координат, будут представлять собой спирали, совершающие вокруг $O(0, 0)$ бесконечное число оборотов [1, с. 301–310; 2, с. 5–11]. В этом случае особая точка $O(0, 0)$ системы (1) называется *фокусом*.

Один из методов, позволяющих установить наличие центра в начале координат, предполагает проверку выполнения бесконечного числа достаточно сложных условий – равенства нулю *фокусных величин* G_{2k} системы (1), определяемых при построении для системы (1) формального ряда вида (3), для которого в силу (1) имеет место

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{k=2}^{+\infty} G_{2k} (u^2 + v^2)^k. \quad (4)$$

Такой ряд построить можно всегда, при этом если зафиксировать коэффициенты $f_{0,2k} \in \mathbb{R}$ в полиномах $f_{2k}(u, v)$, то фокусные величины G_{2k} и оставшиеся коэффициенты многочленов $f_k(u, v)$ будут определяться однозначно из соотношения (4) и будут являться полиномами с вещественными коэффициентами от переменных $p_{i,j}, q_{i,j}$ из системы (1) [2, с. 14].

Благодаря теореме Гильберта о базисе [6, с. 104] оказалось, что в случае полиномиальных систем дифференциальных уравнений система бесконечного числа уравнений

$$G_{2k} = 0, k = \overline{2, +\infty},$$

эквивалентна некоторой конечной системе условий. Более того, эта конечная система условий может быть выписана при помощи первых фокусных величин системы (1). Таким образом, одним из основных вопросов качественной теории в рамках проблемы различения центра и фокуса стал вопрос о том, сколько (минимальное число N_{\min}) первых фокусных величин должно обращаться в ноль, чтобы точка $O(0, 0)$ системы (1) являлась точкой типа центр.

Используя фокусные величины системы (1), задачу поиска необходимых и достаточных условий наличия центра в $O(0, 0)$ для системы (1) можно сформулировать в терминах аффинных многообразий и полиномиальных идеалов.

Равенство нулю фокусных величин является необходимым и достаточным условием существования центра в $O(0, 0)$ [2, с. 11–15]. Тогда множество решений системы $G_{2k} = 0, k = \overline{2, +\infty}$, назовем *многообразием центра* системы (1) [3, с. 109; 5, с. 90].

Ввиду того, что число коэффициентов $p_{i,j}, q_{i,j}$ в системе (1) конечно, многообразие центра системы (1) является аффинным многообразием, т. е. может быть определено при помощи конечного числа порождающих его полиномов [3, с. 27; 6, с. 104]. Соответственно, если удаётся получить конечное число полиномов, не обязательно являющихся фокусными величинами, порождающих многообразие центра системы (1), то для каждой конкретной системы такого вида всегда можно проверить, является ли $O(0, 0)$ особой точкой типа центр или типа фокус, т. е. решить проблему различения центра и фокуса без определения величины N_{\min} .

В теории аффинных многообразий и полиномиальных идеалов разработан мощный аппарат, позволяющий определять конечный базис полиномов, порождающих аффинное многообразие V , при условии, что $V \subset k^s$, где k – алгебраически замкнутое поле, например, \mathbb{C} . Но многообразие центра системы (1) является подпространством аффинного пространства \mathbb{R}^s , так как $p_{i,j}, q_{i,j} \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим тогда систему (1) при $p_{i,j}, q_{i,j} \in \mathbb{C}$ и $u, v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. В этом случае она принимает вид (2).

О п р е д е л е н и е 2 [3, с. 108]. *Особая точка $O(0, 0)$ системы (2) называется комплексным центром, если система (2) имеет аналитический в окрестности $x = y = 0$ интеграл $U(x, y)$ вида (3), где $f_k(x, y)$ – однородные многочлены степени k с комплексными коэффициентами.*

Понятие комплексного центра для системы (2), где $x, y: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, определяется аналогично. Кроме того, так как система (2) автономная и (3) зависит от переменной времени t неявно, то необходимые и достаточные условия наличия комплексного центра в $O(0, 0)$ для такой системы и для системы (2), где $x, y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, будут совпадать.

Отметим, что равенство нулю фокусных величин системы (2) (определим их так же, как фокусные величины для системы (1)) обеспечивает наличие не только формального, но и аналитического комплексного интеграла вида (3) в окрестности $O(0, 0)$, что следует из теорем 2–4, размещённых в основной части сообщения и доказанных в [4, с. 39–51].

Следуя определению многообразия центра системы (1), аналогичным образом введём понятие *многообразия комплексного центра* системы (2).

Тогда для системы (2) можно сформулировать следующую задачу: найти многообразие комплексного центра, т. е. определить необходимые и достаточные условия существования аналитического в окрестности начала координат первого интеграла, не зависящего от времени [3, с. 108–113; 4, с. 39–57].

Возникает вопрос о наличии и характере связи между многообразием центра системы (1) и многообразием комплексного центра системы (2), ответ на который будет указан в данном сообщении.

Основная часть. Рассмотрим системы (1) и (2), содержащие s произвольных параметров $p_{i,j}, q_{i,j}$, где $s \leq ((n+4)(n-1) + (m+4)(m-1))/2$. Введём h – вектор с координатами $p_{i,j}, q_{i,j}$. Используя фокусные величины G_{2k} системы (1) (системы (2)), введём следующие определения:

О п р е д е л е н и е 3 [3, с. 109]. *Многообразием центра системы (1) и многообразием комплексного центра системы (2) назовём множества*

$$V_{\text{real}} = \{h \in \mathbb{R}^s : G_{2k}(h) = 0, \forall k = \overline{2, +\infty}\},$$

$$V_{\text{complex}} = \{h \in \mathbb{C}^s : G_{2k}(h) = 0, \forall k = \overline{2, +\infty}\}$$

соответственно.

Ответ на вопрос о наличии и характере связи между многообразием центра системы (1) и многообразием комплексного центра системы (2) даёт теорема 1.

Т е о р е м а 1. *Пусть V_{real} – многообразие центра системы (1), содержащей s параметров, а V_{complex} – многообразие комплексного центра системы (2), содержащей те же s параметров. Тогда*

$$V_{\text{real}} = \{h \in \mathbb{R}^s : h \in V_{\text{complex}}\}.$$

Докажем справедливость включений $V_{\text{real}} \subset \{h \in \mathbb{R}^s : h \in V_{\text{complex}}\}$ и $\{h \in \mathbb{R}^s : h \in V_{\text{complex}}\} \subset V_{\text{real}}$.
Л е м м а 1. *Справедливо включение*

$$V_{\text{real}} \subset \{h \in \mathbb{R}^s : h \in V_{\text{complex}}\},$$

где V_{real} и V_{complex} из теоремы 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем справедливость включения $V_{\text{real}} \subset \{h \in \mathbb{R}^s : h \in V_{\text{complex}}\}$. Пусть $h^* \in V_{\text{real}}$. Тогда $O(0, 0)$ – центр системы (1). По теореме Ляпунова система (1) имеет аналитический в окрестности $u = v = 0$ интеграл вида

$$U(u, v) = \sum_{i+j=2}^{+\infty} f_{i,j} u^i v^j,$$

где $f_{2,0} = f_{0,2} = 1, f_{1,1} = 0, f_{i,j} \in \mathbb{R}$, сходящийся в некоторой области $M = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : |u| < \alpha, |v| < \beta\}$.

Возьмём $0 < \alpha' < \alpha$ и $0 < \beta' < \beta$. Тогда при $(u, v) = (\alpha', \beta')$ числовой ряд $\sum_{i+j=2}^{+\infty} f_{i,j} (\alpha')^i (\beta')^j$ сходится, а значит, все члены этого числового ряда ограничены, т. е. $\exists L > 0 : |f_{i,j} (\alpha')^i (\beta')^j| \leq L$ ($i, j = 0, 1, 2, \dots$).

Так как $U(u, v)$ – интеграл системы (1), то $U(x, y)$ – интеграл соответствующей комплексной системы (2) с вещественными коэффициентами $p_{i,j}, q_{i,j}$. Ряд $\sum_{i+j=2}^{+\infty} f_{i,j} x^i y^j$ сходится в области

$M' = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| < \alpha', |y| < \beta'\}$, так как в этой области сходится ряд $\sum_{i+j=2}^{+\infty} |f_{i,j} x^i y^j|$, общий член которого не превосходит общего члена сходящегося ряда $\sum_{i+j=2}^{+\infty} L \left| \frac{x}{\alpha'} \right|^i \left| \frac{y}{\beta'} \right|^j$.

Таким образом, $O(0, 0)$ – центр комплексной системы (2) с вещественными коэффициентами, откуда $h^* \in \{h \in \mathbb{R}^s : h \in V_{\text{complex}}\}$. Лемма доказана.

Перед тем, как перейти к доказательству обратного включения, используя замену $x = -X$, $y = Y$, преобразуем систему (2) к виду

$$\dot{X} = -Y + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\alpha+\beta=k} A_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta, \quad \dot{Y} = X + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\alpha+\beta=k} B_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta, \quad (5)$$

где $\sum_{\alpha+\beta=k} A_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta \equiv p_k(-X, Y)$, $\sum_{\alpha+\beta=k} B_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta \equiv q_k(-X, Y)$.

Далее вместо системы (5) будем рассматривать её аналог, где независимая переменная $\tau \in \mathbb{C}$, т. е. систему вида

$$\frac{dx}{d\tau} = -y + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\alpha+\beta=k} A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta, \quad \frac{dy}{d\tau} = x + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\alpha+\beta=k} B_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta. \quad (6)$$

З а м е ч а н и е 1. Система (5) и система (6) имеют одни и те же условия существования комплексного центра.

Используя указанную выше замену (не меняя обозначения u и v), вещественную систему (1) также можно привести к виду

$$\dot{u} = -v + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\alpha+\beta=k} A_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta, \quad \dot{v} = u + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\alpha+\beta=k} B_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta. \quad (7)$$

Сформулируем некоторые результаты, полученные для систем (6) и (7) в [2] и в [4].

Рассмотрим систему (6). Замена переменных $z = x + iy$, $w = x - iy$, $T = i\tau$ приводит (6) к виду

$$\frac{dz}{dT} = z + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\alpha+\beta=k} a_{\alpha\beta} z^\alpha w^\beta, \quad \frac{dw}{dT} = -w - \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\alpha+\beta=k} b_{\alpha\beta} w^\alpha z^\beta, \quad (8)$$

где

$$\sum_{\alpha+\beta=k} a_{\alpha\beta} z^\alpha w^\beta = \sum_{\alpha+\beta=k} (B_{\alpha\beta} - iA_{\alpha\beta}) \left(\frac{z+w}{2} \right)^\alpha \left(\frac{z-w}{2i} \right)^\beta,$$

$$\sum_{\alpha+\beta=k} b_{\alpha\beta} w^\alpha z^\beta = \sum_{\alpha+\beta=k} (B_{\alpha\beta} + iA_{\alpha\beta}) \left(\frac{z+w}{2} \right)^\alpha \left(\frac{z-w}{2i} \right)^\beta.$$

У т в е р ж д е н и е 1 [2, с. 12; 4, с. 40]. Если в системе (6) $A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$, то в (8) $\forall (\alpha, \beta)$ $b_{\alpha\beta} = \bar{a}_{\alpha\beta}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что многочлен $(z+w)^\alpha (z-w)^\beta$ можно представить в виде

$$(z+w)^\alpha (z-w)^\beta = \sum_{l=0}^{\alpha+\beta} D_l^{\alpha;\beta} z^{\alpha+\beta-l} w^l$$

или в виде

$$(z+w)^\alpha (z-w)^\beta = (-1)^\beta (w+z)^\alpha (w-z)^\beta = (-1)^\beta \sum_{l=0}^{\alpha+\beta} D_l^{\alpha;\beta} w^{\alpha+\beta-l} z^l,$$

где $D_l^{\alpha;\beta}$ – некоторые вещественные постоянные, зависящие от l, α и β .

Рассмотрим теперь полиномы $\sum_{\alpha+\beta=k} a_{\alpha\beta} z^\alpha w^\beta$ и $\sum_{\alpha+\beta=k} b_{\alpha\beta} w^\alpha z^\beta$. Положим $Q_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} - iA_{\alpha\beta}$. Имеем

$$\sum_{\alpha+\beta=k} a_{\alpha\beta} z^\alpha w^\beta = \sum_{\beta=0}^k 2^{-k} Q_{(k-\beta)\beta} (-i)^\beta (z+w)^{k-\beta} (z-w)^\beta =$$

$$\sum_{\beta=0}^k 2^{-k} Q_{(k-\beta)\beta} (-i)^\beta \left(\sum_{l=0}^k D_l^{k-\beta;\beta} z^{k-l} w^l \right) = \sum_{\beta=0}^k \sum_{l=0}^k 2^{-k} Q_{(k-\beta)\beta} (-i)^\beta D_l^{k-\beta;\beta} z^{k-l} w^l =$$

$$\sum_{l=0}^k \left(\sum_{\beta=0}^k 2^{-k} Q_{(k-\beta)\beta} (-i)^\beta D_l^{k-\beta;\beta} \right) z^{k-l} w^l.$$

Так как с другой стороны $(z+w)^{k-\beta} (z-w)^\beta = (-1)^\beta \sum_{l=0}^k D_l^{k-\beta;\beta} w^{k-l} z^l$, то

$$\sum_{\alpha+\beta=k} b_{\alpha\beta} w^\alpha z^\beta = \sum_{l=0}^k \left(\sum_{\beta=0}^k 2^{-k} \bar{Q}_{(k-\beta)\beta} i^\beta D_l^{k-\beta;\beta} \right) w^{k-l} z^l.$$

Получаем

$$\bar{a}_{(k-l)l} = \overline{\sum_{\beta=0}^k 2^{-k} Q_{(k-\beta)\beta} (-i)^\beta D_l^{k-\beta;\beta}} = \sum_{\beta=0}^k 2^{-k} \bar{Q}_{(k-\beta)\beta} i^\beta D_l^{k-\beta;\beta} = b_{(k-l)l}.$$

Утверждение доказано.

Из доказательства теоремы 1.8.1 [4, с. 40] (или из рассуждений [2, с. 19–22]) следует, что для системы (8) существует единственная формальная замена переменных вида

$$\xi = z + \sum_{k+j=2}^{+\infty} c_{kj} z^k w^j = \xi(z, w), \quad \eta = w + \sum_{k+j=2}^{+\infty} d_{kj} w^k z^j = \eta(z, w), \quad (9)$$

где $c_{k+1,k} = d_{k+1,k} = 0$, $k = \overline{1, +\infty}$, приводящая систему (8) к нормальной форме

$$\frac{d\xi}{dT} = \xi \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} p'_k (\xi\eta)^k \right), \quad \frac{d\eta}{dT} = -\eta \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} q'_k (\xi\eta)^k \right). \quad (10)$$

Согласно определению 1.8.1 [4, с. 42] формальную замену (9) будем называть *стандартным* нормализующим преобразованием, а полученную при помощи этого преобразования систему (10) – *стандартной* нормальной формой системы (8).

Введём следующее обозначение: $\mu_k = p'_k - q'_k$, где p'_k, q'_k из (10).

Т е о р е м а 2 [2, с. 25; 4, с. 43]. *Если $\mu_k = 0$, $\forall k = \overline{1, +\infty}$, то замена (9) является аналитической в некоторой окрестности $z = w = 0$, приводящей (8) к системе (10) с аналитическими правыми частями.*

Т е о р е м а 3 [4, с. 47]. *Система (8) имеет формальный первый интеграл в окрестности начала координат тогда и только тогда, когда $\mu_k = 0$, $\forall k = \overline{1, +\infty}$.*

Для системы (6) рассмотрим преобразование вида

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{\xi(x+iy, x-iy) + \eta(x+iy, x-iy)}{2} = x + \sum_{k+j=2}^{+\infty} c'_{kj} x^k y^j, \\ \tilde{v} &= \frac{\xi(x+iy, x-iy) - \eta(x+iy, x-iy)}{2i} = y + \sum_{k+j=2}^{+\infty} d'_{kj} x^k y^j. \end{aligned} \quad (11)$$

У т в е р ж д е н и е 2 [4, с. 50]. *Если в системе (6) $A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$, то в (11) $c'_{kj}, d'_{kj} \in \mathbb{R}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в системе (6) $A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$, тогда из утверждения 1 и теоремы 1.8.12 [4, с. 49] следует, что в (9) выполняются условия $\forall(k, j) d_{kj} = \bar{c}_{kj}$.

Представим $(x+iy)^k (x-iy)^j$ в следующем виде:

$$(x+iy)^k (x-iy)^j = \sum_{l=0}^{k+j} D_l^{k;j} i^l x^{k+j-l} y^l,$$

где $D_l^{k;j}$ – некоторые вещественные постоянные, зависящие от l, k и j .

Учитывая $d_{kj} = \bar{c}_{kj}$, преобразуем \tilde{u} из (11):

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= x + \frac{\sum_{k+j=2}^{+\infty} c_{kj} (x+iy)^k (x-iy)^j + \sum_{k+j=2}^{+\infty} \bar{c}_{kj} (x-iy)^k (x+iy)^j}{2} = \\ &= x + \frac{\sum_{s=2}^{+\infty} \sum_{t=0}^s c_{(s-t)t} (x+iy)^{s-t} (x-iy)^t + \sum_{s=2}^{+\infty} \sum_{t=0}^s \bar{c}_{(s-t)t} (x+iy)^{s-t} (x-iy)^t}{2} = \\ &= x + \frac{\sum_{s=2}^{+\infty} \sum_{t=0}^s \left(c_{(s-t)t} \sum_{l=0}^s D_l^{s-t;t} i^l x^{s-l} y^l + \bar{c}_{(s-t)t} \sum_{l=0}^s D_l^{s-t;t} (-i)^l x^{s-l} y^l \right)}{2} = \\ &= x + \frac{\sum_{s=2}^{+\infty} \sum_{t=0}^s \sum_{l=0}^s D_l^{s-t;t} \left(c_{(s-t)t} i^l + \overline{c_{(s-t)t} i^l} \right) x^{s-l} y^l}{2} = x + \frac{\sum_{s=2}^{+\infty} \sum_{t=0}^s \sum_{l=0}^s D_l^{s-t;t} 2 \operatorname{Re}(c_{(s-t)t} i^l) x^{s-l} y^l}{2}. \end{aligned}$$

Преобразовывая аналогично \tilde{v} из (11), получаем

$$\tilde{v} = y + \frac{\sum_{k+j=2}^{+\infty} c_{kj} (x+iy)^k (x-iy)^j - \sum_{k+j=2}^{+\infty} \bar{c}_{kj} (x-iy)^k (x+iy)^j}{2i} =$$

$$y + \frac{\sum_{s=2}^{+\infty} \sum_{t=0}^s \sum_{l=0}^s D_l^{s-t,t} \left(c_{(s-t)l} i^l - \overline{c_{(s-t)l} i^l} \right) x^{s-l} y^l}{2i} = y + \frac{\sum_{s=2}^{+\infty} \sum_{t=0}^s \sum_{l=0}^s D_l^{s-t,t} 2i \operatorname{Im}(c_{(s-t)l} i^l) x^{s-l} y^l}{2i}.$$

Таким образом, $c'_{kj}, d'_{kj} \in \mathbb{R}$. Утверждение доказано.

Т е о р е м а 4 [2, с. 23; 4, с. 50]. *Формальное преобразование (11) приводит комплексную систему (6) к нормальной форме*

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = -\tilde{v} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} (\sigma_k \tilde{u} - \tau_k \tilde{v})(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)^k,$$

$$\frac{d\tilde{v}}{d\tau} = \tilde{u} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} (\tau_k \tilde{u} + \sigma_k \tilde{v})(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)^k,$$

где $\sigma_k = i\mu_k$, $\tau_k = p'_k + q'_k$ и все σ_k , τ_k , c'_{kj} , d'_{kj} являются полиномами с рациональными коэффициентами от переменных $A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}$.

С л е д с т в и е [4, с. 51]. *Для системы (6) имеет место*

$$\frac{dH}{d\tau} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k H^{k+1},$$

где $H = \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2$.

З а м е ч а н и е 2. *Если в (6) $A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$, тогда из теоремы 1.8.12 [4, с. 49] следует, что в (10) выполняются условия $\forall k p'_k = \bar{q}'_k$. Тогда $\sigma_k = i\mu_k = i(p'_k - q'_k) = i(\bar{q}'_k - q'_k) \in \mathbb{R}$.*

Вернёмся к доказательству обратного включения $\{h \in \mathbb{R}^s : h \in V_{\text{complex}}\} \subset V_{\text{real}}$.

Л е м м а 2. *Справедливо включение*

$$\{h \in \mathbb{R}^s : h \in V_{\text{complex}}\} \subset V_{\text{real}},$$

где V_{real} и V_{complex} из теоремы 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть теперь $h^* \in \mathbb{R}^s$ и $h^* \in V_{\text{complex}}$. Так как $h^* \in V_{\text{complex}}$, то по определению 2 комплексная система (2) имеет не зависящий от времени сходящийся в некоторой области M' интеграл $U(x, y)$ вида (3). Так как $h^* \in \mathbb{R}^s$, то комплексная система (2) имеет вещественные коэффициенты.

Используя замену $x = -X$, $y = Y$, приводим (2) к виду (5). Система (5), а значит, и система (6), также имеют вещественные коэффициенты и сходящийся в окрестности $O(0, 0)$ интеграл $V(x, y) = U(-x, y)$ вида (3).

Тогда из изложенного выше следует, что функция $H = \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2$, где \tilde{u}, \tilde{v} из (11), также будет аналитическим интегралом системы (6), а значит, и системы (5), причём, по утверждению 2, этот интеграл имеет вещественные коэффициенты, так как $c'_{kj}, d'_{kj} \in \mathbb{R}$.

Отсюда следует, что вещественная система (7), а значит, и система (1), также имеют аналитический в окрестности $u = v = 0$ вещественный интеграл вида (3). Тогда по теореме Ляпунова $O(0, 0)$ – центр системы (1). Значит, $h^* \in V_{\text{real}}$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 3. *Теорема 1 также справедлива, если предположить, что в системах (1) и (2) $P(z, w) = \sum_{i=2}^{+\infty} p_i(z, w)$, $Q(z, w) = \sum_{j=2}^{+\infty} q_j(z, w)$, а функции $p_i(z, w)$, $q_j(z, w)$ – однородные многочлены степени i и j соответственно.*

Используя фокусные величины G_{2k} системы (2), содержащей s комплексных параметров, определим идеал фокусных величин $I_G = \langle G_4, G_6, \dots, G_{2k}, \dots \rangle$.

О п р е д е л е н и е 4 [3, с. 29; 6, с. 108]. *Пусть $I \subset k[x_1, \dots, x_s]$ – некоторый идеал, где k – бесконечное поле. Положим $V(I) = \{(h_1, \dots, h_s) \in k^s : g(h_1, \dots, h_s) = 0 \quad \forall g \in I\}$.*

Из определения 3 получаем, что $V_{\text{complex}} = V(I_G)$ [3, с. 109], причём по теореме Гильберта о базисе I_G конечно порождён. Допустим, что полиномы $g_i, i = 1, l$, образуют некоторый конечный базис идеала I_G , т. е. точки множества V_{complex} получаются как множество комплексных

решений системы полиномиальных уравнений $g_i = 0, i = \overline{1, l}$, где g_i – полиномы от переменных $p_{i,j}, q_{i,j}$ из системы (2). Тогда из теоремы 1 следует, что многообразие центра вещественной системы (1) представимо в виде

$$V_{\text{real}} = \{h \in \mathbb{R}^s : g_i(h) = 0 \quad i = \overline{1, l}\}.$$

Таким образом, точки множества V_{complex} получаются как множество комплексных решений системы полиномиальных уравнений $g_i = 0, i = \overline{1, l}$, а точки множества V_{real} получаются как множество вещественных решений этой же системы уравнений.

Заключение. Стоит отметить, что с увеличением числа параметров $p_{i,j}, q_{i,j}$ в системе (1) поиск некоторого конечного базиса идеала фокусных величин становится весьма сложной задачей, поэтому при исследовании характера особой точки в таких системах имеет смысл использовать критерии и методы, позволяющие обойти использование фокусных величин как основного инструмента при решении проблемы.

Например, используя обобщение метода Л. А. Черкаса на случай комплексных систем Льенара [7], в [8] доказано, что полученные в [9] компоненты $V(J_i)$ многообразия комплексного центра $V_{\text{complex}}^{\text{cubic}}$ девятипараметрической кубической системы вида (2), приводящейся к системе Льенара, представляют не только достаточные, но и необходимые условия наличия комплексного центра в начале координат этой системы, а именно, $V_{\text{complex}}^{\text{cubic}} = \bigcup_{i=1}^{25} V(J_i)$, где идеалы J_i определены конечным числом полиномов. Тогда по теореме 1 следует, что многообразие центра $V_{\text{real}}^{\text{cubic}}$ аналогичной вещественной девятипараметрической системы будет полностью описываться решениями 25 систем полиномиальных уравнений, составленных при помощи полиномов, определяющих идеалы J_i .

Таким образом, доказанная в сообщении теорема 1 устанавливает наличие связи между многообразием центра системы (1) и многообразием комплексного центра системы (2), что позволяет определить за *конечное число шагов* характер особой точки $O(0, 0)$ системы вида (1) в случае известного набора полиномов, образующих какой-либо *конечный* базис идеала, определяющего многообразие комплексного центра аналогичной комплексной системы вида (2).

Список использованной литературы

1. Пуанкаре, А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / А. Пуанкаре. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1947. – 392 с.
2. Амелькин, В. В. Нелинейные колебания в системах второго порядка / В. В. Амелькин, Н. А. Лукашевич, А. П. Садовский. – Минск: БГУ, 1982. – 208 с.
3. Садовский, А. П. Полиномиальные идеалы и многообразия: пособие для студентов / А. П. Садовский. – Минск: Изд-во БГУ, 2008. – 199 с.
4. Liu, Y. Planar Dynamical Systems / Y. Liu, J. Li, W. Huang. – Berlin; Boston: Science Press and Walter de Gruyter GmbH, 2014. – 372 p.
5. Romanovski, V. G. The center and cyclicity problems: a computational algebra approach / V. G. Romanovski. – Basel: Birkhauser, 2010. – 330 p.
6. Кокс, Д. Идеалы многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры / Д. Кокс, Дж. Литтл, Д. О’Ши. – М.: Мир, 2000. – 687 с.
7. Садовский, А. П. Система Льенара с комплексными коэффициентами и метод Черкаса / А. П. Садовский, Т. В. Щеглова // Весн. ГрДУ. Сер. 2. Матэматыка, Фізика. Інфарматыка, вылічальна тэхніка і ўпраўленне. – 2014. – № 1 (170). – С. 21–33.
8. Садовский, А. П. Решение проблемы центра и фокуса для кубической системы с девятью параметрами / А. П. Садовский, Т. В. Щеглова // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 2. – С. 209–224.
9. Bondar, Y. L. Variety of the center and limit cycles of a cubic system which is reduced to Lienard form / Y. L. Bondar, A. P. Sadovskii // Buletinul Academiei de Stiinta a Republicii Moldova. Matematica. – 2004. – Vol. 46, N 3. – P. 71–90.

Поступило в редакцию 08.07.2015

ФИЗИКА

УДК 535.5

*Академик В. А. ПИЛИПОВИЧ, В. Б. ЗАЛЕССКИЙ, А. И. КОНОЙКО, В. М. КРАВЧЕНКО***АМПЛИТУДНАЯ МОДУЛЯЦИЯ СВЕТА
ПУТЕМ ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ МНОГОЛУЧЕВОЙ
ИНТЕРФЕРЕНЦИЕЙ В ИНТЕРФЕРОМЕТРЕ ФАБРИ–ПЕРО***Институт физики им. Б. И. Степанова, Минск, Беларусь
zaleski@inel.bas-net.by; kon54@yandex.by*

В настоящей работе были рассмотрены вопросы, связанные с уменьшением управляющего напряжения амплитудных модуляторов Фабри–Перо с сохранением их высокой эффективности. Были предложены схематические модели высокоэффективных амплитудных электрооптических модуляторов Фабри–Перо.

Ключевые слова: электрооптический эффект, амплитудная модуляция, фазовая модуляция, многолучевая интерференция, модулятор Фабри–Перо.

*V. A. PILIPOVICH, V. B. ZALESKY, A. I. KONOIKO, V. M. KRAVCHENKO***LIGHT AMPLITUDE MODULATION BY ELECTROOPTICAL CONTROL OF MULTIBEAM INTERFERENCE
IN THE FABRY-PEROT INTERFEROMETER***B. I. Stepanov Institute of Physics of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
zaleski@inel.bas-net.by; kon54@yandex.by*

In present work the questions related to decreasing the control voltage of amplitude Fabry–Perot modulators with conserving their high efficiency have been considered. Schematic models of high-efficient amplitude Fabry–Perot electrooptical modulators have been proposed.

Keywords: electro-optical effect, amplitude modulation, phase modulation, multipath interference, a modulator of Fabry–Perot.

В последнее время наблюдается бурное развитие спектральных оптических методов обработки информации, в которых широко используются различные интерферометры [1]. Их использование позволяет осуществлять как сканирование по оптическому спектру путем изменения показателя преломления электрооптической среды, так и все виды модуляции излучения, в том числе и модуляции добротности лазерных резонаторов видимой и ИК области спектра [2; 3]. Наиболее чувствительными из интерферометров являются многолучевые интерферометры, например, Фабри–Перо (ИФП). Существующий метод стабилизации светомодуляционных характеристик электрооптического модулятора Фабри–Перо [4] позволяет получить их стабилизацию только для широкополосного излучения.

Использование фазовой модуляции на базе электрооптики в устройствах многолучевой интерференции для целей амплитудной модуляции света позволяет за счет многократного взаимодействия света с электрооптической средой значительно снизить величину управляющего электрического напряжения, а следовательно, увеличить рабочий частотный диапазон таких модуляторов. Однако в существующих методах не в полной мере учитывается влияние на эффективность амплитудной модуляции особенностей устройств на базе многолучевой интерференции, что существенно ограничивает рабочий частотный диапазон, стабильность и эффективность таких модуляторов. Поэтому представляет интерес рассмотреть, во-первых, возможность уменьшения управляющего напряжения амплитудных модуляторов Фабри–Перо при сохранении их высокой

эффективности. Во-вторых, возможность повышения стабильности и эффективности амплитудной модуляции плоско поляризованного лазерного излучения за счет исключения обратной связи между модулятором Фабри–Перо и лазерным резонатором за счет поляризационной фильтрации отраженных модулятором световых пучков и, в-третьих, рассмотреть оптические схемы амплитудных модуляторов Фабри–Перо с многократным прохождением светового пучка.

Для осуществления модуляции света наиболее перспективными считаются методы, основанные на явлении изменения показателя преломления среды под действием электрического поля – методы, основанные на применении электрооптического эффекта. Эти методы позволяют осуществлять как поляризационную, так и фазовую модуляцию.

Одной из основных причин, ограничивающих частотный диапазон электрооптических модуляторов, является рассеиваемая в их кристаллах электрическая мощность, которая приводит к уменьшению эффективности модуляции.

В поляризационных электрооптических модуляторах величина рассеиваемой электрической мощности задается, с одной стороны, как характеристиками используемого электрооптического материала, ориентацией управляющего поля, так и конструктивными параметрами элементов модулятора. Использование кристаллов с более высокими электрооптическими свойствами не позволяет расширить частотный диапазон поляризационных модуляторов в силу закономерности, состоящей в том, что величина электрооптического эффекта и его быстродействие – величины взаимосвязанные: чем больше эффект, тем меньше его быстродействие. Работа электрооптических кристаллов группы KDP вблизи точки фазового перехода также не позволяет уменьшить величину рассеиваемой в кристалле электрической мощности вследствие того, что относительная диэлектрическая постоянная и электрооптический коэффициент этих кристаллов изменяются по одному и тому же закону Кюри–Вейса. Поэтому расширение частотного диапазона таких модуляторов достаточно проблематично.

Использование фазовой модуляции на базе электрооптики в устройствах многолучевой интерференции для целей амплитудной модуляции света позволяет за счет многократного взаимодействия света с электрооптической средой значительно снизить величину управляющего электрического напряжения, а следовательно, увеличить рабочий частотный диапазон таких модуляторов. Однако в существующих методах не в полной мере учитывалось влияние на эффективность амплитудной модуляции особенностей устройств на базе многолучевой интерференции, что существенно ограничивало рабочий частотный диапазон таких модуляторов.

В настоящей работе рассмотрены вопросы, связанные с уменьшением управляющего напряжения амплитудных модуляторов Фабри–Перо при сохранении их высокой эффективности.

Амплитудная модуляция светового излучения на базе многолучевой интерференции является следствием фазовой модуляции одинаково поляризованных световых пучков внутри многолучевого интерферометра, например, Фабри–Перо.

Такие модуляторы обладают достаточно высоким светопропусканием. На рис. 1 показан график расчетной зависимости максимальной величины коэффициента светопропускания модулятора на базе интерферометра Фабри–Перо (Q_{\max}) от коэффициента отражения зеркал (R) в случае однократного (1) и двукратного (2) прохождения его световым пучком.

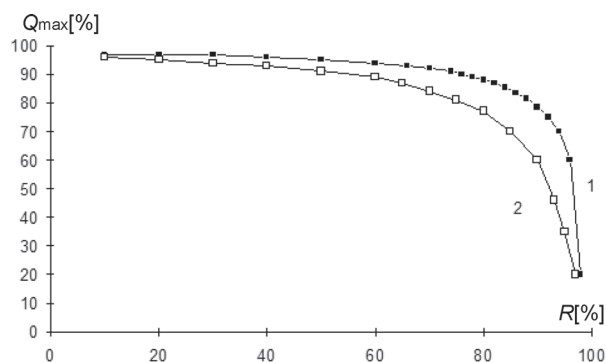


Рис. 1. Зависимость величины коэффициента максимального (Q_{\max}) светопропускания в модуляторе на базе ИФП в случае однократного (1) и двукратного (2) прохождения его световым пучком

При расчете принималось, что коэффициент пропускания электрооптической среды (ν) выбирался равным 0,995, а коэффициент поглощения зеркал (K) – 0,005.

Величина эффективности такого модулятора в случае однократного (η_1) и двукратного (η_2) прохождения его световым пучком будет определяться выражениями, имеющими соответственно следующий вид:

$$\eta_1 = \frac{I_{\approx}}{I_0} = Q_{\max} - Q = \frac{1}{v(1/v + K/T)^2} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + [4vR/(1-vR)^2] \sin^2(q/2)} \right\},$$

$$\eta_2 = \frac{I_{\approx}}{I_0} = Q'_{\max} - Q' = \frac{1}{v^2(1/v + K/T)^4} \left\{ 1 - \frac{1}{\{1 + [4vR/(1-vR)^2] \sin^2(q/2)\}^2} \right\},$$
(1)

где I_0 – интенсивность падающего света; I_{\approx} – переменная составляющая света на выходе модулятора; v – коэффициент пропускания электрооптического кристалла, находящегося между зеркалами интерферометра; $q = Nq_0 = N2l_0\delta n \cos(\alpha)$ – разность фаз, наводимая в интерферометре и позволяющая изменять коэффициент пропускания модулятора от максимальной величины (Q_{\max}) до требуемой (Q); $2l_0\delta n \cos(\alpha) = \delta\Delta_0$ – оптическая разность хода, наводимая в одном электрооптическом кристалле; Nl_0 – расстояние между зеркалами интерферометра; l_0 – толщина одного электрооптического кристалла; δn – величина изменения коэффициента преломления кристалла под воздействием электрического поля; α – угол падения светового пучка на интерферометр; λ – длина световой волны; T и R – коэффициенты светопропускания и отражения полупрозрачных покрытий зеркал интерферометра при условии, что $T_1 = T_2 = T$, а $R_1 = R_2 = R$. Последние величины связаны между собой соотношением $R + T + H = 1$, где H – коэффициент поглощения отражающих покрытий.

Выражения для соответствующей оптической разности хода ($\delta\Delta_1$, $\delta\Delta_2$), вносимой каждым электрооптическим кристаллом будут иметь следующий вид:

$$\delta\Delta_1 = \frac{\lambda}{N\pi} \arcsin \left[\frac{(1-vR)}{2} \sqrt{\frac{1}{vR} \frac{I_{\approx}}{I_{\phi}}} \right];$$

$$\delta\Delta_2 = \frac{\lambda}{N\pi} \arcsin \left\{ \frac{(1-vR)}{2} \sqrt{\frac{1}{vR} \left[\sqrt{\frac{I_{\approx}}{I_{\phi}} + 1} - 1 \right]} \right\},$$
(2)

где (I_{\approx} / I_{ϕ}) – отношение сигнал/фон.

На основании выражений (2) и параметров из (1) можно получить зависимости величины управляющего электрического напряжения от требуемой величины отношения (I_{\approx} / I_{ϕ}) для продольного (\parallel) и поперечного (\perp) подключения управляющего поля в случае однократного ($U_{1\parallel}$, $U_{1\perp}$) и двукратного ($U_{2\parallel}$, $U_{2\perp}$) прохождения светового пучка:

$$U_{1\parallel} = \frac{\lambda}{\pi N} \frac{1}{n_0^3 r_{ij}} \left\{ \arcsin \left[\frac{(1-vR)}{2} \sqrt{\frac{1}{vR} \frac{I_{\approx}}{I_{\phi}}} \right] \right\},$$

$$U_{1\perp} = \frac{\lambda}{\pi N} \frac{1}{n_0^3 r_{ij}} \frac{d}{l_0} \left\{ \arcsin \left[\frac{(1-vR)}{2} \sqrt{\frac{1}{vR} \frac{I_{\approx}}{I_{\phi}}} \right] \right\};$$

$$U_{2\parallel} = \frac{\lambda}{N\pi} \frac{1}{n^3 r_{ij}} \arcsin \left\{ \frac{(1-vR)}{2} \sqrt{\frac{1}{vR} \left[\sqrt{\frac{I_{\approx}}{I_{\phi}} + 1} - 1 \right]} \right\},$$

$$U_{2\perp} = \frac{\lambda}{N\pi} \frac{1}{n^3 r_{ij}} \frac{d}{l_0} \arcsin \left\{ \frac{(1-vR)}{2} \sqrt{\frac{1}{vR} \left[\sqrt{\frac{I_{\approx}}{I_{\phi}} + 1} - 1 \right]} \right\},$$
(3)

где r_{ij} – электрооптический коэффициент; d – апертура кристалла.

На рис. 2 показаны графики расчетной зависимости величины управляющего напряжения (U_1 , U_2) соответственно для продольного (1, 3) и поперечного (2, 4) подключения электрического

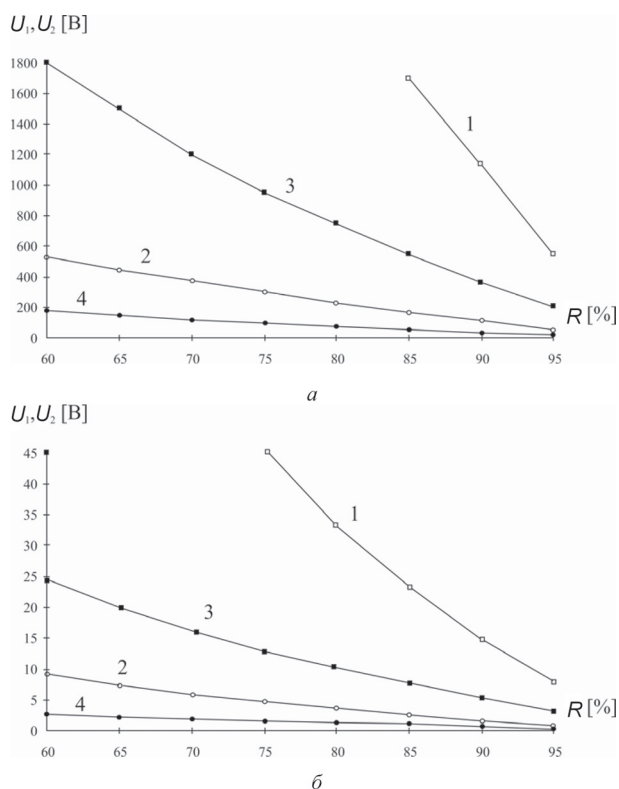


Рис. 2. Зависимости величин управляющего напряжения амплитудного модулятора Фабри–Перо от коэффициента отражения зеркал для заданного отношения сигнал/фон, равного 50, при температуре $20\text{ }^\circ\text{C}$ (а), $-55\text{ }^\circ\text{C}$ (б) в случае однократного ($U_1 - 1, 2$) и двукратного ($U_2 - 3, 4$) прохождения его световым пучком

факторы приводят к резкому снижению эффективности амплитудной модуляции и снижению стабильности характеристик всей оптической схемы.

Повышения стабильности и эффективности амплитудной модуляции можно достичь за счет исключения обратной связи между модулятором и лазерным резонатором путем поляризационной фильтрации отраженных от модулятора световых пучков.

Оптическая схема такого модулятора представлена на рис. 3. Она состоит из анализатора плоскости поляризации (1); двух, развернутых друг относительно друга на угол 45° , фазовых элементов $\lambda/4$ (2, 3); интерферометра Фабри–Перо с электрооптическим элементом (4), одна из осей оптической анизотропии которого параллельна плоскости поляризации входящего в интерферометр светового пучка. Причем оси индикатрисы показателей преломления первого фазового элемента $\lambda/4$ ориентированы под углом 45° к плоскости поляризации падающего светового пучка. В этом случае свет, отразившись от входного зеркала модулятора, не будет возвращаться к выходному зеркалу лазерного резонатора, а в модулятор поступит плоскополяризованный световой пучок, что соответствует оптимальному режиму работы.

В рассмотренном модуляторе электрооптический элемент работает в режиме фазовой модуляции. Возникновение анизотропии показателей преломления, обусловленной упругооптическим эффектом в электрооптическом кристалле, приводит к уменьшению эффективности модуляции проходящего светового пучка. В этом случае компенсацию влияния упругооптического эффекта можно осуществить за счет использования четного количества электрооптических кристаллов [3]. При этом каждый второй кристалл должен быть ориентирован под углом 90° относительно первого, а направления

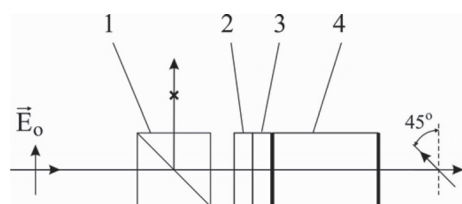


Рис. 3. Оптическая схема амплитудного модулятора Фабри–Перо с поляризационной фильтрацией

поля к кристаллам модуляторов, выполненных на базе одного ($N = 1$) кристалла DKDP, от коэффициента отражения зеркал интерферометра (R), работающих, соответственно, при температуре $20\text{ }^\circ\text{C}$ (а) и $-55\text{ }^\circ\text{C}$ (б) в случае однократного и двукратного прохождения его световым пучком, для отношения сигнал/фон (I_{\approx} / I_{ϕ}), равного 50.

Приведенные зависимости показывают возможность снижения управляющего напряжения для модулятора Фабри–Перо, выполненного на базе электрооптического кристалла DKDP, до величины порядка $0,8\text{ В}$, в случае его работы вблизи температуры Кюри, и порядка 60 В – при нормальной температуре.

Работа таких модуляторов с лазерным излучением имеет свои особенности. Так как лазерный резонатор представляет собой интерферометр Фабри–Перо с помещенным в него активным элементом, то непосредственное использование рассмотренного выше амплитудного модулятора света приводит к возникновению в такой оптической схеме целой совокупности связанных между собой интерферометров Фабри–Перо (лазерного резонатора, модулятора, промежуточного, образованного выходным зеркалом лазера и входным зеркалом модулятора и т. д.).

управляющих полей в соседних кристаллах противоположны.

Дальнейшее снижение управляющих напряжений в модуляторах Фабри–Перо возможно осуществить двумя путями: используя последовательное оптическое соединение нескольких модуляторов с применением поляризационной фильтрации или многократное прохождение светового пучка в оптической схеме модулятора. С точки зрения упрощения конструкции и реализации наибольший интерес представляет модулятор с многократным прохождением светового пучка.

На рис. 4 представлена оптическая схема амплитудного модулятора с прямым и обратным ходом светового пучка. Она содержит электрооптический модулятор Фабри–Перо (3), образованный зеркалами и электрооптическим элементом, оси наведенной анизотропии которого ориентированы под углом 45° к кристаллографическим осям ближайших фазовых элементов $\lambda/4$, вращателей плоскости поляризации светового пучка (2, 4), которые в свою очередь повернуты на угол 45° по отношению к дальним фазовым элементам $\lambda/4$ вращателей; 1, 5 – анализаторы поляризации световых пучков, главные плоскости которых ориентированы под углом 45° к кристаллографическим осям дальних фазовых элементов $\lambda/4$ вращателей плоскости поляризации светового пучка (2, 4); 6 – синхронизатор световых пучков, одна из осей наведенной анизотропии которого параллельна главной плоскости второго анализатора поляризации светового пучка (5), и глухое зеркало (7).

Отличительной особенностью рассматриваемого модулятора является то, что наряду с поляризационной фильтрацией, осуществляемой анализаторами поляризации световых пучков и вращателями плоскости поляризации светового пучка, в нем предусмотрена управляемая фазовая синхронизация интерферирующих световых пучков, осуществляемая синхронизатором, которая позволяет получить максимальную эффективность при использовании его, например, для модуляции добротности лазерного резонатора.

Наряду с кристаллами DKDP для ряда практических применений, например, для управления параметрами излучения с длиной волны $\lambda = 1,5$ мкм, необходимо использование кристаллов ниобата лития LiNbO_3 .

Расчеты показывают, что для модулятора на кристалле ниобата лития с апертурой $d = 5$ мм и поперечным приложением управляющего электрического поля при коэффициенте отражения зеркал равном 0,6 и $\lambda = 1,5$ мкм, управляющее напряжение составит порядка 200 В при отношении сигнал/фон 50 и светопропускании 0,9.

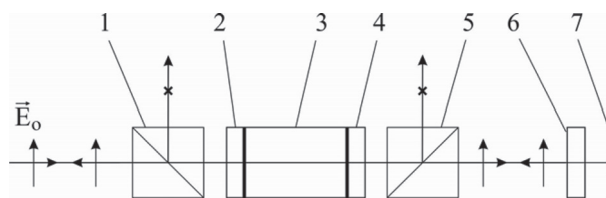


Рис. 4. Оптическая схема амплитудного модулятора с прямым и обратным ходом светового пучка

Список использованной литературы

1. Двухканальный виброустойчивый интерферометр с совмещенными каналами зондирования / В. А. Пилипович [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 4(13). – С. 30–34.
2. Пилипович, В. А. Высокоэффективные электрооптические затворы для лазеров видимой и ближней ИК области спектра / В. А. Пилипович, А. А. Ставров, А. И. Конойко // Электроника инфо. – 2008. – № 4. – С. 45–48.
3. Пилипович, В. А. Методы и средства электрооптической модуляции излучения ИК области спектра / В. А. Пилипович, А. И. Конойко, А. М. Поликанин // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4(9). – С. 54–59.
4. Метод стабилизации светомодуляционных характеристик электрооптического модулятора Фабри–Перо для широкополосного излучения / В. А. Пилипович [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4(21). – С. 30–35.

Поступило в редакцию 13.04.2015

УДК 535.34+535.372

А. А. СУХОДОЛА

**ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТОВ КРАСНОГО КРАЯ НА ИНТЕРКОМБИНАЦИОННУЮ
КОНВЕРСИЮ ИНДОЛА В ЭТАНОЛЕ ПРИ 77 К***(Представлено академиком Н. А. Борисевичем)**Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь
sukhodola@imaph.bas-net.by*

Изучены спектрально-кинетические характеристики фосфоресценции и флуоресценции раствора индола в этаноле при 77 К в зависимости от длины волны возбуждающего излучения. Обнаружено уменьшение отношения квантовых выходов интерконверсии и флуоресценции при возбуждении молекул индола на красном крае спектра поглощения.

Ключевые слова: индол, флуоресценция, фосфоресценция, интеркомбинационная конверсия.

A. A. SUKHODOLA

**RED – EDGE EXCITATION EFFECT ON THE INTERSYSTEM CROSSING
OF THE INDOLE SOLUTION IN ETHANOL AT 77 K***B. I. Stepanov Institute of Physics of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
sukhodola@imaph.bas-net.by*

Spectral and kinetic characteristics of phosphorescence and fluorescence of the indole solution in ethanol at 77 K have been studied. The decrease of phosphorescence quantum yield at red – edge excitation has been observed.

Keywords: Indole, fluorescence, phosphorescence, intersystem crossing.

Введение. Индол является хромофором триптофана, который широко используется как внутренний зонд локальной структуры и динамики белков. Вследствие высокой полярности возбужденных состояний индола спектры поглощения и флуоресценции этих молекул сильно зависят от полярности микроокружения. Максимум спектра флуоресценции в жидких растворах изменяется от 28200 см^{-1} в нейтральном растворителе гексане до 32800 см^{-1} в воде [1]. Исследование зависимости фотофизических характеристик молекул индола от энергии их взаимодействия с микроокружением является важной задачей спектроскопии и люминесценции белков.

Полярные взаимодействия между хромофором и его молекулярным окружением в жидких растворах, в силу неоднородности структуры растворителя, приводят к широкому распределению по энергии взаимодействия и, следовательно, к распределению по энергии 0-0 перехода в спектрах поглощения молекул. На длинноволновом крае спектра поглощения селективно возбуждается та часть хромофорных молекул, которая сильнее взаимодействует с локальным окружением и имеет наиболее низкую энергию электронного перехода. В твердых растворах это распределение остается неизменным за время жизни возбужденного состояния, в результате чего в этих средах наблюдается эффект красного края [2], который приводит к зависимости фотофизических характеристик молекулы от длины волны возбуждающего излучения.

Ранее [3] для индола в смеси вода–этиленгликоль при 77 К наблюдалось длинноволновое смещение спектров флуоресценции и фосфоресценции при возбуждении молекул излучением с длиной волны $\lambda_{\text{в}} = 295\text{ нм}$. В [4] обнаружено уменьшение времени жизни флуоресценции индола в смеси вода–глицероль также при $\lambda_{\text{в}} = 295\text{ нм}$. В данной работе исследована роль интерком-

бинационной конверсии в релаксации возбужденных синглетных состояний индола в этаноле при 77 К при возбуждении молекул на красном крае спектра поглощения. С этой целью было проведено измерение зависимости спектрально-кинетических характеристик фосфоресценции и флуоресценции от длины волны возбуждающего излучения.

Материалы и методы исследования. Спектры люминесценции измерялись с помощью CCD-камеры на основе матрицы Hamamatsu S-7031. Измерения свечения производились за один импульс возбуждающего излучения. Время регистрации сигнала люминесценции составляло 30 с. За это время полностью затухала как быстрая флуоресценция, так и долгоживущая фосфоресценция, что позволяло корректно определить отношение интенсивностей фосфоресценции и флуоресценции $I_{\text{фосф}} / I_{\text{фл}}$. Величина $I_{\text{фосф}} / I_{\text{фл}}$ определялась из отношения значений интенсивности в максимумах спектров фосфоресценции и флуоресценции. Погрешность измерений не превышала 10 %.

Регистрация кинетики люминесценции в узком спектральном диапазоне, выделяемом интерференционным фильтром, проводилась фотоэлектрическим методом с помощью ФЭУ Hamamatsu-1828 и осциллографа Tektronics TDS 2022В.

В качестве возбуждающего излучения использовались импульсы четвертой гармоники лазера на неодимовом гранате YAG : Nd³⁺ длительностью 10 нс и длиной волны генерируемого излучения $\lambda_{\text{в}} = 266$ нм, импульсы третьей гармоники лазера на сапфире с титаном Sa : Ti длительностью 30 нс, перестраиваемого в спектральной области 250–300 нм, а также импульсы второй гармоники лазера на красителе (родамин 6Ж в этаноле), перестраиваемого в спектральной области 275–305 нм. Накачка титан-сапфирового лазера и лазера на красителе осуществлялась импульсами второй гармоники лазера на YAG : Nd³⁺. Энергия возбуждающего импульса изменялась в области от 10 до 100 мкДж.

Использовался индол фирмы Sigma (США) без дополнительной очистки. Кювета с раствором исследуемого вещества помещалась в кварцевый сосуд Дьюара с жидким азотом так, чтобы образец находился над поверхностью азота. Это обеспечивало охлаждение образца до температуры 77 К и в то же время исключало поглощение азотом света возбуждения и люминесценции. Удаление кислорода до концентрации 10⁻⁵ М осуществлялось вакуумированием по стандартной методике: 5–6 циклов замораживание–откачка. Концентрация раствора индола в этаноле составляла около 10⁻⁵ М/л.

Результаты и их обсуждение. На рис. 1 показаны спектры люминесценции индола в этаноле при 77 К для разных длин волн возбуждающего излучения $\lambda_{\text{в}}$. Спектры состоят из двух полос: флуоресценции в диапазоне 300–380 нм и фосфоресценции в диапазоне 400–480 нм.

Спектры флуоресценции при $\lambda_{\text{в}} = 280$ и 285 нм являются бесструктурными и практически совпадают друг с другом. Для $\lambda_{\text{в}} = 291$ и 295 нм в спектрах флуоресценции появляется структура и с увеличением $\lambda_{\text{в}}$ спектры смещаются в длинноволновую сторону. Зависимость положения максимума спектра флуоресценции от длины волны возбуждающего излучения показана на рис. 2, а. Видно, что в области $\lambda_{\text{в}} = 255$ –285 нм значение максимума не зависит от длины волны возбуждающего излучения. В области $\lambda_{\text{в}} = 285$ –295 нм наблюдается эффект красного края, и длина волны максимума спектра флуоресценции увеличивается с увеличением $\lambda_{\text{в}}$. Это означает, что в спектральной области $\lambda_{\text{в}} = 285$ –295 нм селективно возбуждается подансамбль молекул, которые имеют более низкую энергию 0-0 перехода. В области длин волн $\lambda_{\text{в}} = 255$ –285 нм возбуждается полный ансамбль молекул, в результате

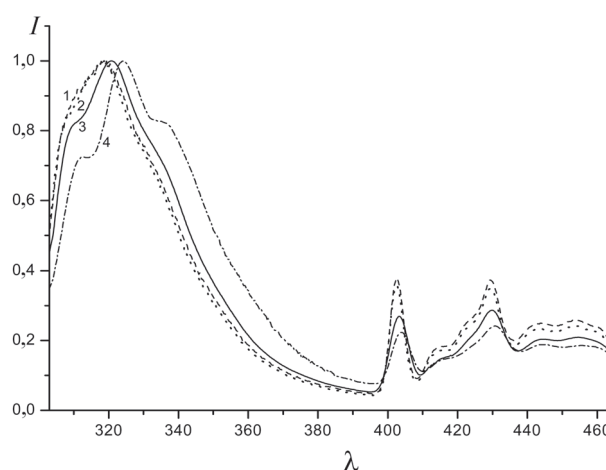


Рис. 1. Спектр люминесценции раствора индола в этаноле при 77 К в зависимости от длины волны возбуждающего излучения $\lambda_{\text{в}}$: 1 – $\lambda_{\text{в}} = 280$ нм, 2 – $\lambda_{\text{в}} = 285$ нм, 3 – $\lambda_{\text{в}} = 291$ нм, 4 – $\lambda_{\text{в}} = 295$ нм

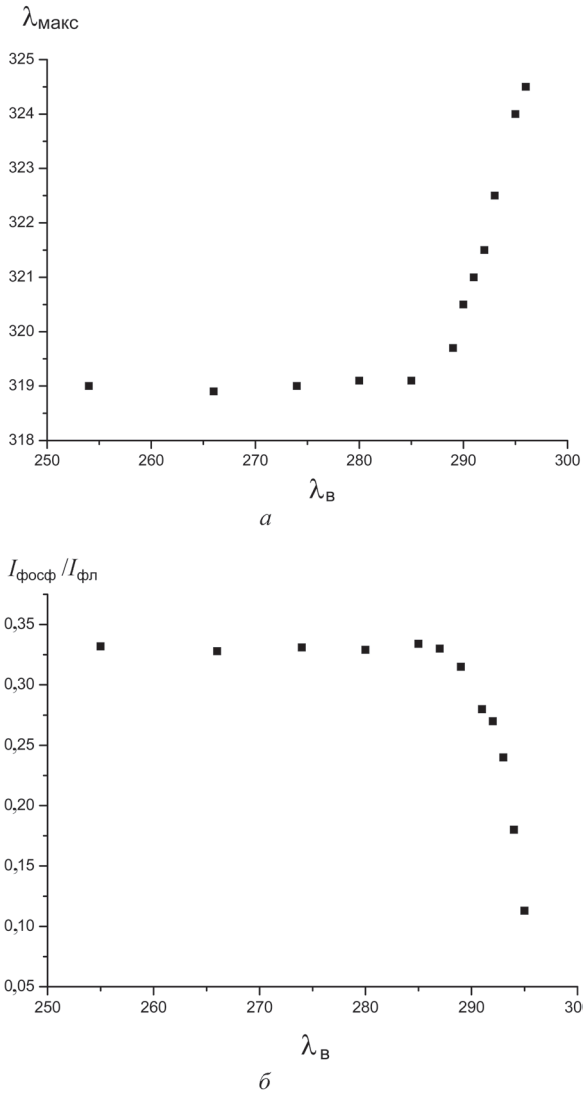


Рис. 2. Зависимость положения максимума спектра флуоресценции (а) и отношения интенсивностей фосфоресценции и флуоресценции (б) от длины волны возбуждающего излучения раствора индола в этаноле при 77 К

вый выход интеркомбинационного перехода из возбужденного синглетного состояния в триплетное $\Phi_{ик}$. Чтобы связать величину $I_{фосф} / I_{фл}$ с фотофизическими характеристиками индола запишем выражение для интенсивности флуоресценции и фосфоресценции. В условиях импульсного возбуждения молекул интенсивность флуоресценции $I_{фл}$ запишется в виде

$$I_{фл} = \Phi_{фл} I_{п}, \quad (1)$$

где $\Phi_{фл}$ – квантовый выход флуоресценции; $I_{п}$ – количество поглощенных квантов за возбуждающий импульс. Интенсивность фосфоресценции $I_{фосф}$ запишется в виде

$$I_{фосф} = I_{п} \Phi_{ик} k_{фосф} / (k_{фосф} + k_d), \quad (2)$$

где $\Phi_{ик}$ – квантовый выход интеркомбинационной конверсии; $k_{фосф}$ и k_d – константы скорости излучательной и безызлучательной дезактивации триплетного состояния соответственно. Из (1) и (2) следует, что

$$I_{фосф} / I_{фл} = (\Phi_{ик} / \Phi_{фл}) (k_{фосф} / (k_{фосф} + k_d)). \quad (3)$$

чего спектр флуоресценции размывается, и положение максимума не зависит от $\lambda_{в}$.

Спектры фосфоресценции являются структурными при всех длинах волн возбуждающего излучения и имеют типичную для индола форму с тремя максимумами при $\lambda = 403, 430$ и 455 нм. Для этих спектров также наблюдается эффект красного края. При возбуждении излучением с $\lambda_{в} = 291$ и 295 нм максимумы спектра фосфоресценции слегка смещаются в длинноволновую сторону.

Из рис. 1 видно также, что отношение интенсивностей фосфоресценции и флуоресценции зависит от длины волны возбуждающего излучения. При $\lambda_{в} = 280$ и 285 нм отношение $I_{фосф} / I_{фл}$ имеет близкие значения. При возбуждении молекул в длинноволновой области ($\lambda_{в} = 291$ и 295 нм) $I_{фосф} / I_{фл}$ уменьшается. Зависимость $I_{фосф} / I_{фл}$ от длины волны возбуждающего излучения приведена на рис. 2, б. Видно, что для величины $I_{фосф} / I_{фл}$ также наблюдается эффект красного края. В области $\lambda_{в} = 255-285$ нм в пределах погрешности $I_{фосф} / I_{фл}$ не зависит от длины волны возбуждающего излучения. При возбуждении молекул в длинноволновой области ($\lambda_{в} = 285-295$ нм) $I_{фосф} / I_{фл}$ уменьшается. Отметим, что при возбуждении молекул в спектральном диапазоне $\lambda_{в} = 255-285$ нм отношение интенсивностей фосфоресценции и флуоресценции равно $\sim 0,33$ и близко к значению $I_{фосф} / I_{фл} = 0,36$, полученному в работе [5] для индола в смеси этилового спирта с диэтиловым эфиром при 77 К при возбуждении молекул излучением с 280 нм.

Отношение интенсивностей фосфоресценции и флуоресценции характеризует квантовый

Из выражения (3) видно, что величина $I_{\text{фосф}} / I_{\text{фл}}$ зависит от отношения квантовых выходов интеркомбинационной конверсии и флуоресценции $\varphi_{\text{ик}} / \varphi_{\text{фл}}$, которое характеризует возбужденное синглетное состояние, и от констант скоростей $k_{\text{фосф}}$ и k_d дезактивации триплетного состояния.

Чтобы выяснить изменение констант $k_{\text{фосф}}$ и k_d при возбуждении молекул на красном крае спектра поглощения были измерены кинетики затухания фосфоресценции при $\lambda_{\text{в}} = 280$ и 295 нм. На основании этих кинетик можно определить время жизни триплетных состояний τ_T , связанное с константами $k_{\text{фосф}}$ и k_d выражением

$$\tau_T = 1 / (k_{\text{фосф}} + k_d). \quad (4)$$

Результаты измерения представлены на рис. 3. Видно, что при $\lambda_{\text{в}} = 280$ нм затухание является экспоненциальным. При $\lambda_{\text{в}} = 295$ нм наблюдается отклонение от экспоненты на начальном участке кривой затухания. На основании измерения разрешенных во времени спектров фосфоресценции установлено, что свечение на начальном участке кривой при $\lambda_{\text{в}} = 295$ нм связано с фосфоресценцией примеси. Свечение на экспоненциальном участке при $\lambda_{\text{в}} = 280$ нм и $\lambda_{\text{в}} = 295$ нм связано с фосфоресценцией индола. Расчеты показывают, что на экспоненциальном участке обе кривые имеют одинаковое время затухания. Это означает, что время жизни триплетных состояний τ_T индола в этаноле при 77 К не изменяется при возбуждении молекул на красном крае спектра поглощения. Отметим, что вычисленное из этих кривых значение $\tau_T = 5,7$ с близко к $\tau_T = 6,3$ с, полученному в работе [5] для индола в смеси этилового спирта с диэтиловым эфиром при 77 К.

На основании выражения (4) можно предположить, что обе константы $k_{\text{фосф}}$ и k_d не зависят от длины волны возбуждающего излучения, поскольку маловероятно одновременное изменение значений этих констант на одну и ту же величину. Косвенным признаком независимости констант скоростей релаксации триплетного состояния от энергии взаимодействия хромофора с молекулами окружения является экспоненциальность затухания фосфоресценции при $\lambda_{\text{в}} = 280$ нм, когда возбуждаются молекулы индола, различающиеся по энергии взаимодействия с молекулами растворителя. Поскольку константы скорости $k_{\text{фосф}}$ и k_d не изменяются при возбуждении молекул на красном крае спектра поглощения, то на основании выражения (3) можно сделать вывод, что уменьшение $I_{\text{фосф}} / I_{\text{фл}}$ связано с уменьшением отношения квантовых выходов интерконверсии и флуоресценции $\varphi_{\text{ик}} / \varphi_{\text{фл}}$.

Отношение $\varphi_{\text{ик}} / \varphi_{\text{фл}}$ зависит от констант скоростей различных каналов релаксации возбужденного синглетного состояния. Для индола в этаноле при 77 К вследствие ограниченной диффузии молекул бимолекулярными процессами затухания можно пренебречь, и релаксация возбужденного синглетного состояния определяется мономолекулярными процессами флуоресценции, интеркомбинационной конверсии и внутренней конверсии с константами скоростей соответственно $k_{\text{фл}}$, $k_{\text{ик}}$ и $k_{\text{вк}}$. Известно [6], что для органических молекул в жестких средах при разнице энергии между возбужденным синглетным и основным состояниями $\Delta E \sim 30000 \text{ см}^{-1}$ константа скорости $k_{\text{вк}}$ близка к нулю. Это означает, что для раствора индола в этаноле при 77 К существенный вклад в релаксацию возбужденного синглетного состояния вносят два конкурирующих процесса: флуоресценция и интеркомбинационная конверсия и сумма квантовых выходов этих процессов

$$\varphi_{\text{фл}} + \varphi_{\text{ик}} = 1. \quad (5)$$

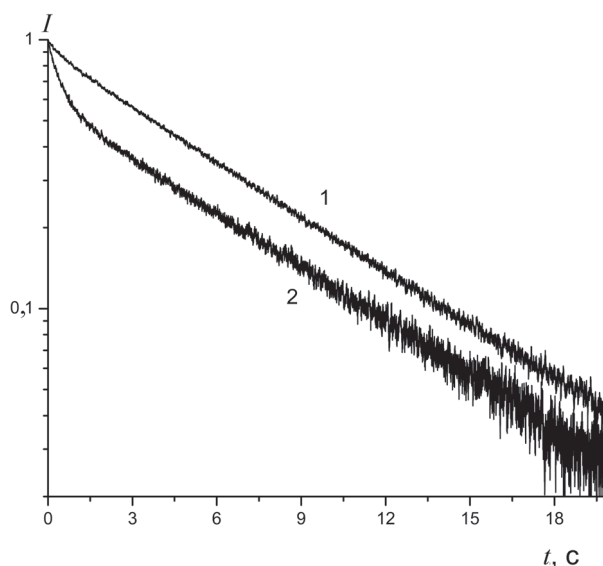


Рис. 3. Кинетика затухания фосфоресценции раствора индола в этаноле при 77 К для разных длин волн возбуждающего излучения $\lambda_{\text{в}}$: 1 – $\lambda_{\text{в}} = 280$ нм, 2 – $\lambda_{\text{в}} = 295$ нм

С учетом (5) из выражения (3) следует, что уменьшение $I_{\text{фосф}} / I_{\text{фл}}$ при возбуждении молекул на красном крае спектра поглощения связано с уменьшением квантового выхода интеркомбинационной конверсии и одновременным увеличением квантового выхода флуоресценции.

Для объяснения полученных результатов рассмотрим фотофизические процессы, происходящие при возбуждении молекул индола в спектральной области 250–300 нм. Спектры поглощения в этой области определяются двумя электронными переходами в возбужденные синглетные $\pi\pi^*$ -состояния 1L_a и 1L_b , которые имеют близкие значения электронной энергии [7]. 1L_a состояние имеет значительно больший дипольный момент, чем 1L_b и сильнее взаимодействует с молекулами полярного растворителя. Вследствие большой разницы в дипольных моментах взаимное расположение этих уровней зависит от полярности микроокружения. Для индола в нейтральных растворителях 1L_b является нижним возбужденным синглетным состоянием [8]. При переходе к полярным растворителям энергия 1L_a уменьшается значительно больше, чем 1L_b и нижним возбужденным синглетным состоянием становится 1L_a [8]. Данное расположение возбужденных уровней приводит к зависимости фотофизических свойств индола от энергии взаимодействия с молекулами микроокружения.

На основании измерения поляризации флуоресценции и фосфоресценции установлено, что для индола в этаноле при 77 К флуоресцирующими являются оба синглетных $\pi\pi^*$ -состояния 1L_a и 1L_b [9]. Фосфоресценция обусловлена одним электронным переходом из нижнего триплетного $\pi\pi^*$ -состояния 3L_a в основное [10]. Независимость спектров флуоресценции и величины $I_{\text{фосф}} / I_{\text{фл}}$ от длины волны возбуждающего излучения в области $\lambda_b = 255\text{--}285$ нм означает, что верхние электронно-колебательные синглетные состояния релаксируют путем внутренней конверсии, а излучательные переходы и процессы интерконверсии происходят из нижних возбужденных 1L_a - и 1L_b -состояний, которые находятся в термическом равновесии. Доля участия этих состояний в указанных выше фотофизических процессах зависит от взаимного расположения 1L_a - и 1L_b -уровней. Вследствие неоднородности структуры растворителя молекулы индола имеют разную энергию взаимодействия с молекулами микроокружения и, следовательно, отличаются расположением уровней 1L_a и 1L_b . С увеличением энергии взаимодействия уровень 1L_a снижается больше, чем 1L_b и вклад состояния 1L_a в излучение и интеркомбинационную конверсию увеличивается.

В работе [8] показано, что для молекул индола константа скорости излучательного перехода из 1L_a -состояния на порядок больше, чем из состояния 1L_b . С другой стороны, из измерений поляризации фосфоресценции установлено [10], что дипольный момент синглет-триплетного перехода из 1L_b -состояния больше, чем из 1L_a . На основании этих данных можно предположить, что величина $\phi_{\text{ик}} / \phi_{\text{фл}}$ отношения квантовых выходов интерконверсии и флуоресценции для 1L_b -состояния больше, чем для 1L_a . Уменьшение величины $I_{\text{фосф}} / I_{\text{фл}}$ на красном крае спектра поглощения может быть связано с тем, что в этой спектральной области возбуждаются молекулы хромофора, которые сильнее взаимодействуют с молекулами растворителя и, следовательно, имеют более низкую энергию 1L_a -состояния. С увеличением длины волны возбуждения на красном крае увеличивается вклад во флуоресценцию 1L_a -состояния, что приводит к уменьшению отношения интенсивностей фосфоресценции и флуоресценции.

Заключение. Изучены спектрально-кинетические характеристики фосфоресценции и флуоресценции раствора индола в этаноле при 77 К в зависимости от длины волны возбуждающего излучения. Обнаружено уменьшение отношения квантовых выходов интерконверсии и флуоресценции при возбуждении молекул индола на красном крае спектра поглощения.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф13А3-023)

Список использованной литературы

1. Vincent, M. Solvent relaxation around the excited state of indole: analysis of fluorescence lifetime distributions and time-dependence spectral shifts / M. Vincent, J. Gally, A. P. Demchenko // J. Phys. Chem. – 1995. – Vol. 99. – P. 14931–14941.
2. Демченко, А. П. Люминесценция и динамика структуры белков / А. П. Демченко. – Киев, 1989.

3. *Gallay, W. C.* Role of heterogeneity of the solvation site in electronic spectra in solution / W. C. Gallay, R. M. Purkey // Proc. Natl. Acad. Sci. – 1970. – Vol. 67. – P. 1116–1121.
4. *Ladokhin, A. S.* Red-edge excitation study of nonexponential fluorescence decay of indole in solution and in a protein / A. S. Ladokhin // J. Fluorescence. – 1999. – Vol. 9. – P. 1–9.
5. *Ермолаев, В. Л.* Люминесценция простых производных бензола / В. Л. Ермолаев // Опт. и спектр. – 1961. – Т. 11, № 4. – С. 492–497.
6. *Siebrand, W.* Radiationless transitions in polyatomic molecules. II. Triplet-ground states transition in aromatic hydrocarbons / W. Siebrand // J. Chem. Phys. – 1967. – Vol. 46. – P. 2411–2415.
7. Near-ultraviolet absorption band of tryptophan. Studies using indole and 3-methylindole as models / E. H. Strickland [et al.] // Biochemistry. – 1970. – Vol. 9, N 25. – P. 4914–4920.
8. *Andrews, L. J.* Fluorescence characteristics of indoles in non-polar solvents: lifetime, quantum yields and polarization spectra / L. J. Andrews, L. S. Forster // Photochem. Photobiol. – 1974. – Vol. 19, N 3. – P. 353–360.
9. *Schut, H. U.* Polarisierung der elektronenbanden von aromaten 7. Mitteilung: indol, indazol, benzimidazol, benzotriazol, carbazol / H. U. Schut, H. Zimmerman // Z. Elektrochem. – 1963. – Vol. 67. – P. 54–59.
10. *Song, P.-S.* A spectroscopic study of the polarized luminescence of indoles / P.-S. Song, W. E. Kurtin // J. Am. Chem. Soc. – 1969. – Vol. 91, N 17. – P. 4892–4906.

Поступило в редакцию 22.04.2015

УДК 536.424

Член-корреспондент И. О. ТРОЯНЧУК¹, А. Н. ЧОБОТ¹, О. С. МАНТЫЦКАЯ¹, Н. В. ТЕРЕШКО¹,
Л. С. ЛОБАНОВСКИЙ¹, В. М. ДОБРЯНСКИЙ², Г. М. ЧОБОТ², А. В. НИКИТИН¹

КОЛОССАЛЬНЫЙ МАГНИТОРЕЗИСТИВНЫЙ ЭФФЕКТ В КОБАЛЬТИТАХ СО СТРУКТУРОЙ ПЕРОВСКИТА

¹НПЦ НАН Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь

troyan@physics.by; a.n.chobot@tut.by; mantytskaja1@rambler.ru; tereshko@physics.by; lobanov@physics.by;
shyrik_n@tut.by

²Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь
dobryanval@mail.ru; chobot@batu.edu.by

Проведены исследования магнитных свойств кобальтита $\text{La}_{0,45}\text{Ba}_{0,55}\text{CoO}_{3-x}$ в зависимости от содержания кислорода. Показано, что уменьшение содержания кислорода ведет к уменьшению спонтанной намагниченности, метамгнитному поведению и резкому увеличению магниторезистивного эффекта. Метамагнетизм и магниторезистивный эффект обусловлены переходом из антиферромагнетного в ферромагнетное состояние во внешнем магнитном поле. Предполагается, что диэлектрическая антиферромагнитная фаза содержит ионы кобальта в смешанном высокоспиновом/низкоспиновом состоянии, а проводящая ферромагнитная фаза – в промежуточном спиновом состоянии.

Ключевые слова: кобальтиты, магнитоупорядоченные материалы, твердофазные реакции, магнитосопротивление.

I. O. TROYANCHUK, A. N. CHOBOT, O. S. MANTYTSKAYA, N. V. TERESHKO, L. S. LOBANOVSKY,
V. M. DOBRYANSKY, G. M. CHOBOT, A. V. NIKITIN

COLOSSAL MAGNETORESISTIVE EFFECT IN THE COBALTITES WITH PEROVSKITE STRUCTURE

¹Scientific and Practical Materials Research Centre of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

troyan@physics.by; a.n.chobot@tut.by; mantytskaja1@rambler.ru; tereshko@physics.by;
lobanov@physics.by; shyrik_n@tut.by

²Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk, Belarus
dobryanval@mail.ru; chobot@batu.edu.by

The magnetic and magnetotransport properties of the $\text{La}_{0,45}\text{Ba}_{0,55}\text{CoO}_{3-x}$ cobaltites have been studied as a function of oxygen content. It is shown that the decrease in the oxygen content leads to strong enhancement of the magnetoresistance and the metamagnetic behavior. It is suggested that the colossal magnetoresistance results from the spin state transition induced by an external magnetic field.

Keywords: cobaltites, magnetically ordered materials, solid state reactions, magnetoresistance.

Введение. Кобальтиты редкоземельных металлов являются материалами, перспективными для различных технических применений [1]. LaCoO_3 при температурах ниже 40 К является диамагнитным диэлектриком [1–3]. В интервале температур 40–100 К в нем происходит фазовый переход в парамагнитное состояние вследствие возбуждения части ионов Co^{3+} из низкоспинового состояния в высокоспиновое. При температуре выше 500 К в нем реализуется металлическое состояние. Известно, что металлическое состояние можно получить также замещением ионов лантана на щелочноземельные ионы [1–5]. В системе $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{CoO}_3$ вблизи $x \approx 0,2$ происходит формирование металлического ферромагнитного состояния, тогда как при меньших концентрациях стронция реализуется состояние типа кластерного спинового стекла [4]. Иначе происходит образование металлического ферромагнитного состояния в системе $\text{La}_{1-x}\text{Ba}_x\text{CoO}_3$ [5]. В этой системе спиновое стекло при $x > 0,16$ сменяется на диэлектрическое антиферромагнитное состояние, которое через двухфазную область постепенно переходит в металлическое ферромагнитное

состояние ($x_c \sim 0,22$). Установлено, что $\text{La}_{0,5}\text{Ba}_{0,5}\text{CoO}_3$ проявляет довольно большой магниторезистивный эффект при низких температурах [6; 7]. Однако в $\text{La}_{0,5}\text{Sr}_{0,5}\text{CoO}_3$ магниторезистивный эффект при низких температурах крайне мал [8]. В отличие от манганитов, кобальтиты не проявляют большого магниторезистивного эффекта вблизи точки Кюри [6–8]. В работах [9–11] показано, что уменьшение содержания кислорода в кобальтитах $\text{La}_{0,5}\text{Ba}_{0,5}\text{CoO}_{3-x}$ и $\text{La}_{0,5}\text{Sr}_{0,5}\text{CoO}_{3-x}$ ведет к стабилизации антиферромагнитного состояния *G*-типа (шахматный порядок магнитных моментов).

Целью настоящей работы является установление механизма формирования магнитотранспортных свойств в кобальтитах, легированных барием.

Экспериментальная часть. Поликристаллический образец $\text{La}_{0,45}\text{Ba}_{0,55}\text{CoO}_{3-x}$ был получен методом твердофазных реакций из реактивов высокой чистоты La_2O_3 , BaCO_3 и Co_3O_4 . Предварительный синтез проведен при 1000 °С, а окончательный – при 1200 °С в течение 10 ч, после чего образец охлаждался со скоростью 100 °С/ч до комнатной температуры. Затем образец был разделен на две части, одна из которых отжигалась на воздухе в течение трех суток при температуре 650 °С, а другая – при температуре 350 °С. Термогравиметрический анализ показал, что примерное содержание кислорода в образце, отожженном при 350 °С, составляет 2,9, а в образце, отожженном при 650 °С, – 2,8. Рентгенофазовый анализ, выполненный на дифрактометре ДРОН-3М, не выявил следов посторонних фаз. Уточнение кристаллической структуры проведено по методу Ритвельда с использованием пакета программ FullProf. Измерения намагниченности и электропроводности в магнитных полях до 14 Тл выполнены на универсальной установке для измерения физических свойств (Cryogenic Ltd).

Результаты и их обсуждение. Рентгеноструктурные исследования показали, что все составы серии $\text{La}_{0,45}\text{Ba}_{0,55}\text{CoO}_{3-x}$ кристаллизуются в структуре перовскита и характеризуются кубической элементарной ячейкой (пространственная группа *Rm-3m*). С увеличением концентрации вакансий кислорода наблюдалось незначительное увеличение объема элементарной ячейки.

Температурные зависимости намагниченности, измеренные в малом внешнем магнитном поле (рис. 1), свидетельствуют о разном типе основного магнитного состояния окисленного и восстановленного образцов. В окисленном образце кривая FC (образец охлаждался при приложении магнитного поля) имеет вид, характерный для ферромагнитного состояния, и намагниченность увеличивается при понижении температуры. Точка Кюри близка к 145 К. Увеличение ZFC (образец охлаждался в нулевом магнитном поле) намагниченности с ростом температуры можно связать с большой магнитной анизотропией, что проявляется в области низких температур. Кривые ZFC- и FC-намагниченности восстановленного образца имеют ярко выраженный максимум при 120 К, что может быть обусловлено сменой типа магнитного состояния при понижении температуры. В этом случае при высоких температурах доминируют ферромагнитные взаимодействия, тогда как при низких температурах – антиферромагнитные.

На рис. 2 представлены полевые зависимости намагниченности. При 5 К полевая зависимость намагниченности окисленного образца типична для ферромагнетика с большой

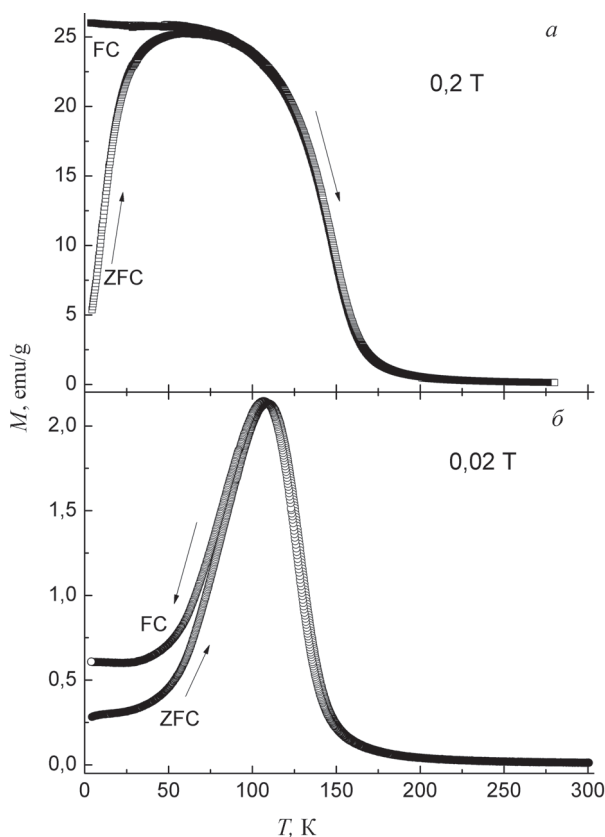


Рис. 1. ZFC- и FC-намагниченности составов $\text{La}_{0,45}\text{Ba}_{0,55}\text{CoO}_{2,9}$ (а) и $\text{La}_{0,45}\text{Ba}_{0,55}\text{CoO}_{2,8}$ (б) в зависимости от температуры

величиной магнитной анизотропии, так как коэрцитивная сила близка к 0,3 Тл. Спонтанная намагниченность составляет $1,75 \mu_B/\text{Co}$. Коэрцитивная сила резко уменьшается с повышением температуры. Следует отметить, что намагниченность в поле 14 Тл при 40 К больше, чем при 5 К. Это может быть связано с наличием в образце антиферромагнитных кластеров, которые переходят в ферромагнитное состояние во внешнем магнитном поле. Принципиально другое поведение показывают кривые намагниченности восстановленного образца. Спонтанная намагниченность при 5 К очень мала, она не превышает $0,1 \mu_B/\text{Co}$, причем в высоких полях наблюдался полевой гистерезис, который связан с размытым по полю фазовым превращением. Это превращение можно приписать переходу из антиферромагнитной фазы в ферромагнитную. Гистерезис в больших полях резко возрастает при 40 К, тогда как коэрцитивная сила сильно уменьшается от 0,65 Тл (4 К) до 0,1 Тл (40 К). Спонтанная намагниченность возрастает до $0,6 \mu_B/\text{Co}$ при 120 К, но при этом полевой гистерезис практически исчезает.

На рис. 3 представлены температурные зависимости электросопротивления, измеренные при понижении температуры в поле и без поля. Для окисленного образца поведение электросопротивления в отсутствие поля во всем измеренном температурном интервале соответствует поведению электросопротивления полупроводников. Однако в поле 14 Тл в интервале от 300 до 140 К наблюдается металлический тип проводимости. Ниже 140 К сопротивление начинает возрастать. Магнитосопротивление возрастает с понижением температуры и достигает почти 50 % при гелиевых температурах. Электросопротивление восстановленного образца очень слабо меняется в интервале температур 140–300 К. Однако при понижении температуры в интервале 5–140 К оно резко увеличивается на три порядка. Сопротивление образца, охлажденного в поле, в 12 раз меньше, чем сопротивление образца, охлажденного без поля.

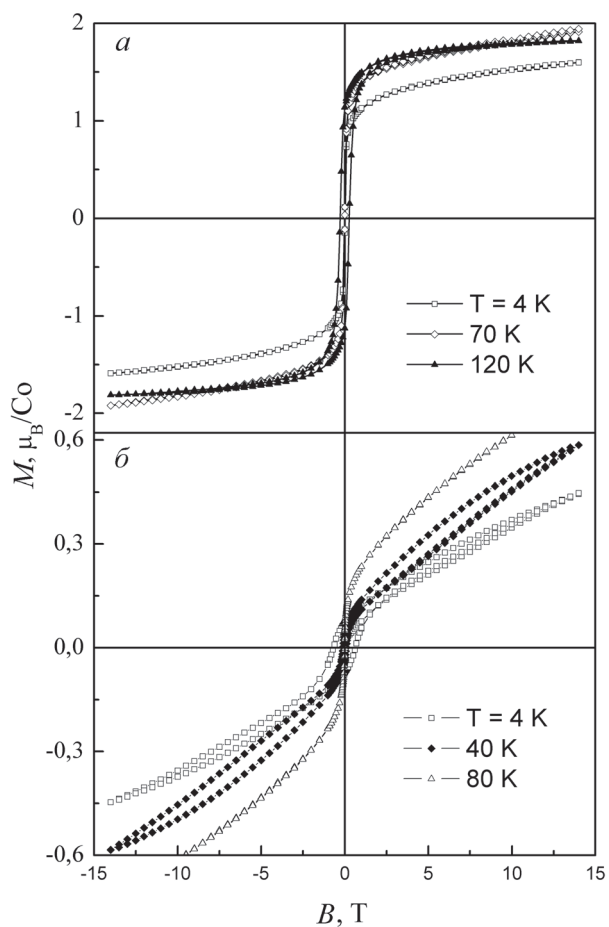


Рис. 2. Полевые зависимости намагниченности составов $\text{La}_{0,45}\text{Ba}_{0,55}\text{CoO}_{2,9}$ (а) и $\text{La}_{0,45}\text{Ba}_{0,55}\text{CoO}_{2,8}$ (б)

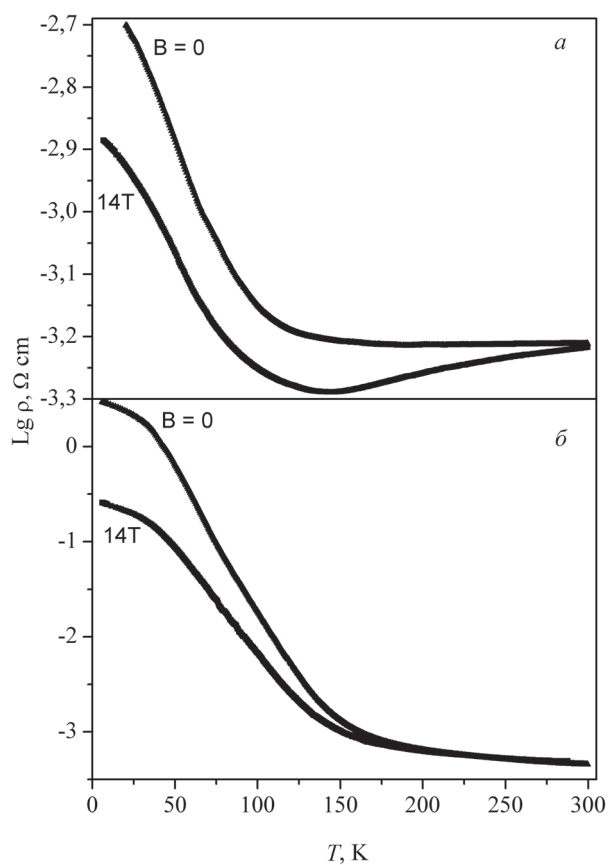


Рис. 3. Зависимости сопротивления от температуры для составов $\text{La}_{0,45}\text{Ba}_{0,55}\text{CoO}_{2,9}$ (а) и $\text{La}_{0,45}\text{Ba}_{0,55}\text{CoO}_{2,8}$ (б)

На рис. 4 представлены полевые зависимости магнитосопротивления восстановленного образца после охлаждения без поля. При низких температурах магнитосопротивление максимально, причем наблюдался большой гистерезис по полю. Это соответствует результатам магнитных измерений (рис. 2). При повышении температуры полевой гистерезис исчезал и магнитосопротивление плавно уменьшалось.

При температуре, соответствующей максимуму намагниченности, аномалий не наблюдалось.

Значение спонтанной намагниченности окисленного образца несколько ниже, чем в случае промежуточного спинового состояния ионов Co^{3+} ($S = 1; t_{2g}e_g^1$) и Co^{4+} ($S = 3/2; t_{2g}e_g^1$). По-видимому, это обусловлено незначительным содержанием антиферромагнитной фазы, что согласуется с результатами магнитных измерений (рис. 1 и рис. 2). Действительно, магнитная анизотропия при низких температурах резко возрастает, а намагниченность в больших полях несколько увеличивается с ростом температуры. В восстановленном образце эти явления выражены намного ярче (рис. 1 и рис. 2). При понижении температуры происходит постепенная стабилизация антиферромагнитной фазы и дестабилизация ферромагнитной фазы. При низкой температуре гистерезис в больших полях соответствует размытому по полю метамагнитному переходу из антиферромагнитного состояния в ферромагнитное. Магнитное упорядочение в обоих образцах сопровождается возрастанием сопротивления (рис. 3). По-видимому, это обусловлено тем, что антиферромагнитная и ферромагнитная фазы начинают появляться приблизительно при одной и той же температуре. При этом ферромагнитная фаза слабо влияет на проводимость, тогда как антиферромагнитная фаза является диэлектрической. Это может наблюдаться в случае, когда фазы содержат ионы кобальта в различном спиновом состоянии. Антиферромагнитная фаза в $\text{La}_{0,5}\text{Ba}_{0,5}\text{CoO}_{3-x}$ имеет несколько больший объем элементарной ячейки, чем ферромагнитная фаза [9]. Понижение температуры приводило к росту объема ячейки [9]. Антиферромагнитная фаза в $\text{La}_{0,5}\text{Ba}_{0,5}\text{CoO}_{3-x}$ под давлением переходит в ферромагнитную [10]. Поэтому было предположено, что ферромагнитной фазе соответствует промежуточное спиновое состояние ионов кобальта, а антиферромагнитной – смешанное высоко/низкоспиновое состояние [10; 11]. Внешнее магнитное поле вызывает переход из диэлектрической антиферромагнитной фазы в проводящую ферромагнитную фазу (рис. 2). Это фазовое превращение приводит к колоссальному магниторезистивному эффекту при низких температурах.

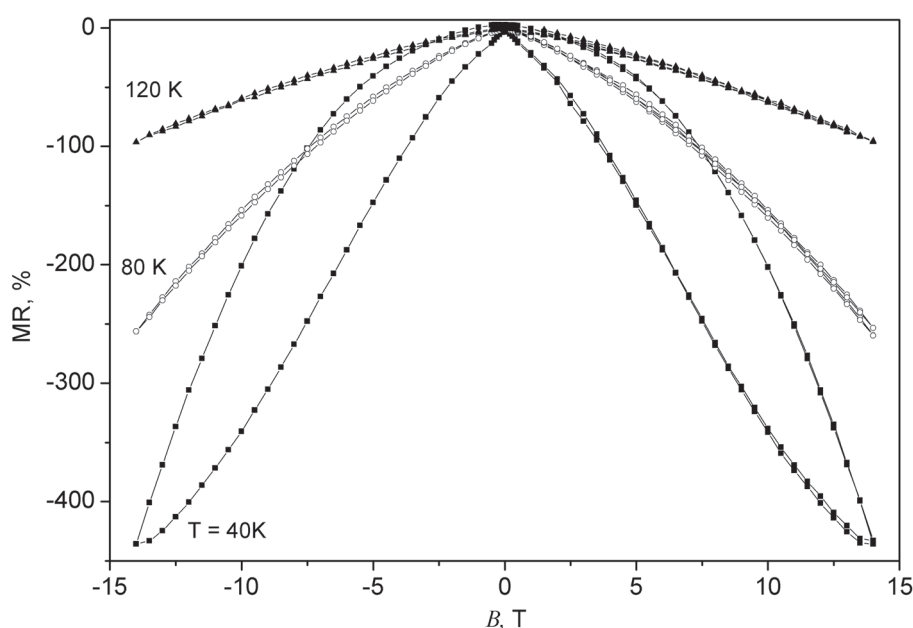


Рис. 4. Зависимости магнитосопротивления от поля для состава $\text{La}_{0,45}\text{Ba}_{0,55}\text{CoO}_{2,8}$

Заключение. В результате исследования магнитных свойств кобальтита $\text{La}_{0,45}\text{Ba}_{0,55}\text{CoO}_{3-x}$ в зависимости от содержания кислорода показано, что уменьшение содержания кислорода приводит к смене ферромагнитного проводящего состояния на антиферромагнитное диэлектрическое. В $\text{La}_{0,45}\text{Ba}_{0,55}\text{CoO}_{2,8}$ при температуре выше 140 К доминирует ферромагнитное взаимодействие. При более низкой температуре сильнее становится антиферромагнитное взаимодействие. Низкотемпературная фаза проявляет метамагнетизм, обусловленный переходом во внешнем поле антиферромагнетик–ферромагнетик. Антиферромагнитная фаза является диэлектрической, тогда как ферромагнитная – проводящей. Большое магнитосопротивление, выявленное при низких температурах в $\text{La}_{0,45}\text{Ba}_{0,55}\text{CoO}_{2,8}$, обусловлено переходом антиферромагнитной фазы в ферромагнитную. Предполагается, что ферромагнитной фазе соответствует промежуточное спиновое состояние ионов кобальта, тогда как антиферромагнитной – смешанное высокоспиновое/низкоспиновое состояние.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Ф14Р-040).

Список использованной литературы

1. Особенности спинового, зарядового и орбитального упорядочения в кобальтитах / Н. Б. Иванова [и др.] // УФН. – 2009. – Т. 179, № 8. – С. 837–876.
2. Spin state transition in LaCoO_3 studies using soft X-ray absorption spectroscopy and magnetic circular dichroism / M. W. Haverkort [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2006. – Vol. 97. – P. 176405.
3. Temperature- and pressure-driven spin-state transitions in LaCoO_3 / D. P. Kozlenko [et al.] // Phys. Rev. B. – 2007. – Vol. 75. – P. 064422.
4. Wu, J. Glassy ferromagnetism and magnetic phase separation in $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{CoO}_3$ / J. Wu, C. Leighton // Phys. Rev. B. – 2003. – Vol. 67. – P. 174408.
5. Possible link of a structurally driven spin flip transition and the insulator-metal transition in perovskite $\text{La}_{1-x}\text{Ba}_x\text{Co}_3$ / P. Tong [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2011. – Vol. 106. – P. 156407.
6. Fauth, F. Intermediate spin state of Co^{3+} and Co^{4+} ions in $\text{La}_{0,5}\text{Ba}_{0,5}\text{CoO}_3$ evidenced by Jahn-Teller distortions / F. Fauth, E. Suard, V. Caignaert // Phys. Rev. B. – 2001. – Vol. 65. – P. 060401(R).
7. Nakajima, T. New A-site ordered perovskite cobaltite $\text{LaBaCo}_2\text{O}_6$: synthesis, structure, physical property and cation order-disorder effect / T. Nakajima, M. Ichihara, Y. Ueda // J. of the Physical Society of Japan. – 2005. – Vol. 74, N 5. – P. 1572.
8. Фазовые превращения и магнитотранспортные свойства системы $\text{Pr}_{0,5}\text{Sr}_{0,5}\text{Co}_{1-x}\text{Mn}_x\text{O}_3$ / И. О. Троянчук [и др.] // ЖЭТФ. – 2011. – Т. 139, вып. 5. – С. 957–968.
9. The ferromagnetic and antiferromagnetic phases in anion deficient $\text{La}_{0,5-x}\text{Pr}_x\text{Ba}_{0,5}\text{CoO}_{3-d}$ cobaltites / I. O. Troyanchuk [et al.] // J. Appl. Phys. – 2012. – Vol. 112. – P. 013916.
10. Pressure induced antiferromagnet-ferromagnet transition in $\text{La}_{0,5}\text{Ba}_{0,5}\text{CoO}_{2,8}$ cobaltite / I. O. Troyanchuk [et al.] // Eur. Phys. J. B. – 2013. – Vol. 86. – P. 435.
11. Magnetic and structural phase transitions in $\text{La}_{0,5}\text{Sr}_{0,5}\text{CoO}_{3-\delta}$ ($0 \leq \delta \leq 0.3$) cobaltites / D. V. Karpinsky [et al.] // J. Phys.: Condens. Matter. – 2013. – Vol. 25. – P. 316004.

Поступило в редакцию 22.06.2015

УДК 621.315.592

С. Б. ЛАСТОВСКИЙ¹, В. П. МАРКЕВИЧ², член-корреспондент Ф. П. КОРШУНОВ¹,
А. С. ЯКУШЕВИЧ¹, Л. И. МУРИН¹, Л. Ф. МАКАРЕНКО³

БИСТАБИЛЬНЫЕ ЦЕНТРЫ С ГЛУБОКИМИ УРОВНЯМИ В ОБЛУЧЕННЫХ КРИСТАЛЛАХ КРЕМНИЯ *p*-ТИПА

¹НПЦ НАН Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь
lastov@ifftp.bas-net.by; korshun@ifftp.bas-net.by; yakushevich@ifftp.bas-net.by; murin@ifftp.bas-net.by

²Университет г. Манчестер, Англия
V.Markevich@manchester.ac.uk

³Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
makleo@mail.ru

Методом нестационарной спектроскопии глубоких уровней (DLTS) исследованы электрически активные дефекты в кристаллах кремния *p*-типа, облученных быстрыми электронами и α -частицами. Обнаружен новый бистабильный радиационно-индуцированный центр с глубокими уровнями вблизи середины запрещенной зоны Si. Определены основные характеристики данного центра и высказаны предположения о его возможной природе.

Ключевые слова: кремний, быстрые электроны, DLTS, радиационно-индуцированные дефекты, глубокие уровни, бистабильность.

S. B. LASTOVSKII, V. P. MARKEVICH, F. P. KORSHUNOV, H. S. YAKUSHEVICH, L. I. MURIN, L. F. MAKARENKO

BISTABLE DEEP LEVEL CENTERS IN IRRADIATED *p*-TYPE SILICON CRYSTALS

¹Scientific and Practical Materials Research Centre of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
lastov@ifftp.bas-net.by; korshun@ifftp.bas-net.by; yakushevich@ifftp.bas-net.by; murin@ifftp.bas-net.by

²University of Manchester, Manchester, United Kingdom
V.Markevich@manchester.ac.uk

³Belarusian State University, Minsk, Belarus
makleo@mail.ru

Deep level transient spectroscopy (DLTS) has been used for studying the electrically active defects in *p*-type silicon crystals irradiated with fast electrons and α -particles. A new bistable radiation-induced center with deep levels around the mid-gap of silicon is revealed. The main characteristics of this center are determined and some suggestions on its origin are given.

Keywords: silicon, fast electrons, DLTS, radiation-induced defects, deep levels, bistability.

Введение. Бистабильными принято считать дефекты, для которых существует две устойчивые конфигурации в решетке полупроводника. Как правило, в равновесных условиях в зависимости от положения уровня Ферми одна из конфигураций является энергетически более выгодной и является основной [1–3]. При изменении зарядового состояния центра вследствие захвата неравновесных (неосновных) носителей заряда возможен переход во вторую (метастабильную) конфигурацию [4; 5]. Обычно конфигурации разделены энергетическим барьером, что позволяет создавать и сохранять в течение длительного времени неравновесную заселенность метастабильного состояния даже в области комнатных температур. С повышением температуры, как правило, имеет место термически активируемый обратный переход из метастабильной в основную конфигурацию. При этом в области термической стабильности дефекта возможны многократные обратимые конфигурационные трансформации [1–5]. Так как электронные свойства дефекта в различных конфигурациях могут быть существенно различными, то, изменяя заселен-

ность состояний, можно влиять на электрические и оптические свойства полупроводника. Очевидно, что при изменении конфигурации дефекта в решетке в результате инъекции неосновных носителей заряда могут существенно измениться и параметры полупроводниковых приборов. В связи с этим возникает необходимость проведения детальных исследований природы и электронных свойств бистабильных дефектов в кремнии, который продолжает оставаться базовым материалом современной микроэлектроники. Поскольку в технологии изготовления быстродействующих кремниевых приборов широко используются радиационные методы [6], то значительный интерес представляет и исследование бистабильных радиационно-индуцированных центров в p - n -структурах на основе кремния.

К настоящему времени накоплен большой экспериментальный материал по свойствам радиационно-индуцированных центров (РИЦ) в кремнии, для ряда РИЦ определены параметры, выяснены механизмы образования и отжига некоторых центров. В то же время имеющаяся информация о бистабильных РИЦ в Si весьма ограничена. Достаточно хорошо изучены электронные свойства только таких центров, как вакансии, междоузельный атом бора и комплекс междоузельный углерод–узловой углерод [1–3]. Недавно была обнаружена бистабильность такого технологически важного дефекта, как тривакансия и определены ее электронные характеристики в различных конфигурациях [7; 8]. В настоящем сообщении дается информация об обнаружении в кремнии еще одного бистабильного радиационно-индуцированного центра (БРИЦ) с глубокими уровнями вблизи середины запрещенной зоны.

Материалы и методы исследования. Исследуемые образцы изготавливались на эпитаксиальном кремнии p -типа (легирующая примесь – бор с концентрацией $N_B = 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$), выращенном на подложке КДБ-0,005. Толщина эпитаксиального слоя составляла около 33 мкм. P - n -переход формировался имплантацией фосфора в p -базу с последующим отжигом при 1420 К в атмосфере азота и кислорода. Глубина залегания p - n -перехода составляла 8–9 мкм, площадь – $6,25 \times 10^{-2} \text{ см}^2$. В качестве омических контактов напылялся слой алюминия толщиной 4,5 мкм.

Облучение n^+ - p -структур осуществлялось альфа-частицами с помощью источника с изотопами Pu^{239} (энергия альфа-частиц соответствовала 5,144 и 5,157 МэВ) в течение 300 мин. Поверхностная активность источника была около $2 \cdot 10^8 \text{ Бк/см}^2$. Температура образцов в процессе облучения не превышала 290 К. Часть образцов облучалась также гамма-квантами ^{60}Co и быстрыми электронами с энергией 4–6 МэВ при комнатной температуре и при $T = 80 \text{ К}$. Отжиг облученных образцов в интервале температур 273–398 К проводился в криостате DLTS спектрометра, а при более высоких температурах отжига – в печи в атмосфере азота либо на воздухе.

Определение концентрации и электронных характеристик РИЦ (энергии активации эмиссии и сечения захвата носителей заряда) в базовой области n^+ - p -структур осуществлялось методами нестационарной спектроскопии глубоких уровней (DLTS) и Лаплас-DLTS спектроскопии с высоким разрешением (LDLTS) [9]. Спектры измерялись в диапазонах температур 77–400 (DLTS) и 40–300 (LDLTS) К в режимах заполнения ловушек как основными, так и неосновными носителями заряда.

Результаты и их обсуждение. На рис. 1 показаны типичные DLTS спектры для n^+ - p -диодов, которые были облучены альфа-частицами в течение 300 мин и отожжены при 100 °С в течение 30 мин. Термообработка при 100 °С использовалась для удаления из спектров нескольких незначительных по амплитуде DLTS-пигов, связанных с дырочными ловушками, которые нестабильны при температурах, незначительно превышающих 300 К, и их исследование не относится к цели данной работы. Спектры 1 и 2 на рис. 1, измеренные в режимах заполнения ловушек основными и неосновными носителями заряда после отжига, характерны для DLTS-спектров кристаллов Cz-Si:B, облученных как быстрыми электронами, так и альфа-частицами (см., напр., [7; 8; 10]). Для всех ловушек были определены электронные характеристики (энергия активации эмиссии для дырок (электронов) ($E_{h(e)}$) и предэкспоненциальный фактор (α) из зависимостей Аррениуса скоростей эмиссии дырок (электронов), измеренных с использованием LDLTS. Сравнение полученных значений для дырочных ловушек, ответственных на спектре 1 за доминирующие пики

с максимумами при 125 К ($E_h = 0,192$ эВ, $\alpha = 7,4 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}\text{К}^{-2}$) и 201 К ($E_h = 0,360$ эВ, $\alpha = 4,0 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}\text{К}^{-2}$), с известными литературными данными для радиационных дефектов в кристаллах Cz-Si:В позволяет соотнести их с эмиссией дырок из однократно положительно заряженных состояний дивакансии (V_2) и комплекса междуузельный углерод–междуузельный кислород (C_iO_i) соответственно [7; 8; 10]. Спектр 2 получен в режиме перезарядки ловушек неосновными носителями заряда. На нем наблюдается только один пик с минимумом при 130 К. Электронные характеристики соответствующей ему ловушки равны $E_e = 0,24$ эВ и $\alpha = 1 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}\text{К}^{-2}$. Данная ловушка может быть связана с донорным уровнем комплекса междуузельный бор–междуузельный кислород (B_iO_i) [7; 8; 10].

DLTS-спектр 3 на рис. 1 записан после пропуска через диодную n^+p -структуру прямого тока плотностью $4,8 \text{ А/см}^2$ в течение 1 мин при 300 К. Как видно из представленных данных, инжекция неосновных носителей заряда в базовую p -область приводит к изменению вида DLTS спектра: увеличению амплитуды пика при 125 К и появлению двух дополнительных пиков с максимумами амплитуд при 229 и 255 К. Наблюдаемое изменение спектра в области низких температур вероятнее всего связано с трансформацией тривакансии V_3 из четырехкратно скоординированной конфигурации в метастабильную планарную (110) [7; 8]. В связи с этим увеличение амплитуды пика при 125 К вызвано наложением амплитуд пиков $V_3(+/0)$ и $V_2(+/0)$, что хорошо видно из спектра 4, полученного вычитанием спектра 1 из 3. Появление на спектрах пиков H_{229} и H_{255} обусловлено эмиссией дырок с уровней ранее не наблюдававшихся РИЦ. Поскольку оба пика ведут себя совершенно идентично в процессе как инжекционных, так и термических обработок, то очевидно, что они оба обусловлены эмиссией дырок с уровней одного и того же метастабильного дефекта. Уровни данного дефекта в электрически активной конфигурации являются более глубокими, чем уровень комплекса C_iO_i и расположены вблизи середины запрещенной зоны у $E_V + 0,45$ эВ и $E_V + 0,54$ эВ (рис. 2). Проведенные изохронный и изотермические отжиги показали, что трансформация из электрически активной конфигурации в нейтральную имеет место в области температур 50–100 °С и характеризуется энергией активации $\sim 1,25$ эВ и частотным фактором $\sim 5 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ (рис. 3). Последующая инжекция неосновных носителей заряда в области комнатных температур переводит дефект опять в электрически активное состояние. Такие трансформации в результате термических и инжекционных обработок могут проводиться многократно без изменения концентрации дефекта, т. е. данный дефект является бистабильным центром. Обнаруженный БРИЦ от-

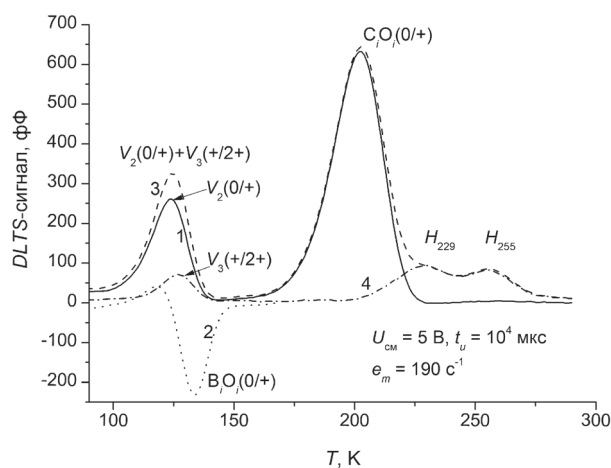


Рис. 1. Спектры DLTS эпитаксиальной n^+p -структуры, облученной альфа-частицами при $T = 290$ К и отожженной при 100 °С в течение 30 мин (спектры 1 и 2). Спектр 3 измерен после последующего пропуска прямого тока плотностью $4,8 \text{ А/см}^2$ в течение 1 мин при 300 К. Спектр 4 соответствует разности спектров 1 и 3

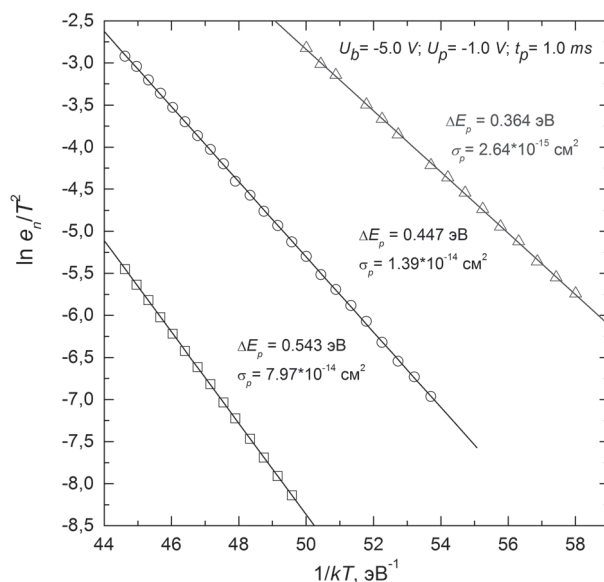


Рис. 2. Зависимости Аррениуса для скорости эмиссии дырок с донорного уровня комплекса C_iO_i и глубоких уровней метастабильного дефекта в кремнии p -типа

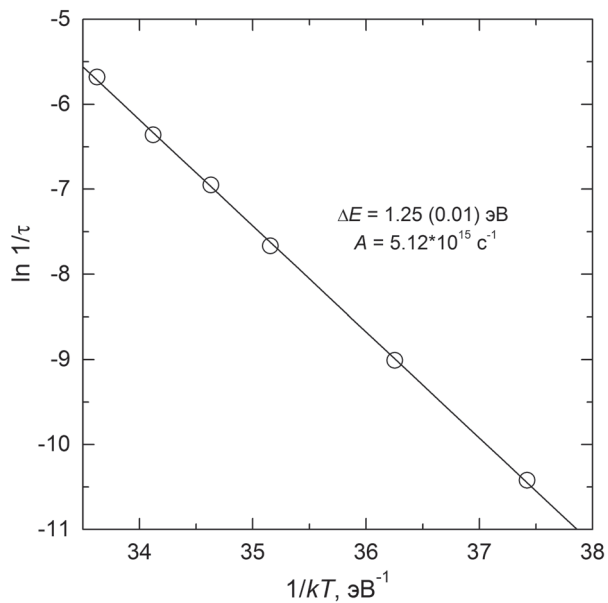


Рис. 3. Температурная зависимость обратной величины характеристического времени трансформации метастабильного дефекта в электрически неактивное состояние

жигается в области температур 170–230 °С, т. е. обладает довольно высокой термической стабильностью.

Некоторые характеристики обнаруженного нами бистабильного центра близки к таковым тривакансии [7; 8]. Оба дефекта могут находиться по крайней мере в двух конфигурациях, характеризующихся различным спектром энергетических уровней. При этом для перехода из одной конфигурации в другую достаточно провести инжекцию неосновных носителей заряда в базовую p -область n^+p -структур. Обратный переход (из метастабильной в основную конфигурацию) имеет место в процессе термического отжига в области температур 320–370 К и характеризуется энергией активации ~1,2–1,3 эВ и значением частотного фактора $\sim 10^{14}$ – 10^{15} с⁻¹ (рис. 3). Отжигаются оба центра в области температур 450–530 К.

В то же время имеется ряд существенных отличий как по конкретным характеристикам обоих центров (например, положение уровней в запрещенной зоне), так и по условиям их формирования и отжига, а также проявления электрической активности в той или иной конфигурации. Очевидно, что природа этих центров различна. Идентифицировать обнаруженный бистабильный дефект на основании полученных экспериментальных данных пока достаточно сложно. Однако совокупность уже имеющихся результатов и их сопоставление с литературными данными позволяют высказать предположения о возможной природе данного дефекта.

Наиболее вероятно, что этот радиационно-индуцированный центр является дефектом междоузельного типа. Об этом свидетельствует заметное дообразование данного центра в области температур 350–370 К, в которой имеет место отжиг (диссоциация) комплексов I_2O [11]. Кроме того, в области температур отжига БРИЦ (при $T \geq 480$ К) имеет место некоторое дообразование междоузельных комплексов C_iO_i , при этом увеличения концентрации вакансионно-кислородных комплексов не наблюдается.

Эффективность образования БРИЦ существенно зависит от энергии бомбардирующих частиц: при облучении гамма-квантами ^{60}Co концентрация БРИЦ не превышает 1–2 % от концентрации комплексов C_iO_i и сравнима с концентрацией дивакансий (в пределах погрешности эксперимента). При облучении быстрыми электронами ($E = 4$ – 6 МэВ) и альфа-частицами относительная эффективность образования обнаруженного бистабильного центра по сравнению с C_iO_i резко возрастает, особенно при $T_{обл} = 80$ К. Это свидетельствует о том, что в формировании БРИЦ принимает участие не одиночный собственный междоузельный атом кремния I , а более сложный собственный дефект. Поскольку значения концентрации БРИЦ (амплитуды соответствующих пиков в спектрах DLTS) обычно находятся между таковыми для тривакансии и дивакансии, то логично предположить, что таким дефектом могут быть собственные ди-междоузлия Si (I_2), эффективность образования которых как первичных дефектов, согласно экспериментальным данным и расчетам [12], находятся именно в данной области. Согласно литературным данным [12–14], собственные ди-междоузлия кремния обладают высокой миграционной способностью как единое целое и могут взаимодействовать с другими дефектами и примесями даже при температурах существенно ниже комнатной. Следует ожидать, что основными стоками для подвижных I_2 в кремнии p -типа, как и для собственных междоузельных атомов Si, являются примесные узловые атомы кислорода,

углерода (C_s) и бора (B_s). Как уже отмечалось выше, комплекс I_2O обладает относительно невысокой термической стабильностью и отжигается при $T \sim 350$ К. При взаимодействии собственных междоузельных димеров Si с атомами C_s и B_s будут идти реакции $I_2 + C_s \rightarrow IC_i$ и $I_2 + B_s \rightarrow IB_i$. Достоверных данных об электронных свойствах и термической стабильности комплекса собственный междоузельный атом Si–междоузельный атом бора IB_i в литературе нет. Вероятнее всего, обнаруженный нами в кремнии p -типа метастабильный дефект с уровнями у $E_V + 0,45$ эВ и $E_V + 0,54$ эВ является комплексом собственный междоузельный атом Si–междоузельный атом углерода IC_i .

Во-первых, примесные атомы углерода присутствуют в значительных концентрациях практически во всех кристаллах кремния и вероятность образования этого комплекса очень высока (как и вероятность образования междоузельных атомов углерода C_i), во-вторых, термическая стабильность БРИЦ и комплекса IC_i [15] совпадают.

Для окончательной идентификации обнаруженного БРИЦ требуется проведение ряда дополнительных исследований, в том числе на кристаллах с различным относительным содержанием примесных атомов бора и углерода, облученных различными дозами быстрых электронов и/или альфа-частиц при различных температурах и т. д. Если высказанная нами гипотеза о природе данного центра подтвердится, то в результате проведенных исследований будет получена важная информация о природе такого фундаментального дефекта в кремнии, как собственный междоузельный димер.

Заключение. Таким образом, методом DLTS-спектроскопии в базовой p -области кремниевых диодных n^+p -структур, облученных высокоэнергетическими частицами, обнаружен новый радиационно-индуцированный дефект, обладающий свойствами бистабильных центров. После длительного хранения облученных образцов при комнатной температуре либо их кратковременного отжига при $T \sim 370$ К дефект не проявляет электрической активности в кремнии p -типа. В результате инжекции неосновных носителей заряда данный центр переходит в метастабильную конфигурацию с глубокими уровнями у $E_V + 0,45$ эВ и $E_V + 0,54$ эВ. Обратный переход в основную конфигурацию имеет место в области температур 50–100 °С и характеризуется энергией активации $\sim 1,25$ эВ и частотным фактором $\sim 5 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$. Предполагается, что данный дефект является комплексом собственный междоузельный атом кремния–междоузельный атом углерода IC_i .

Список использованной литературы

1. Chantre, A. Introduction to defect bistability / A. Chantre // Appl. Phys. A. – 1989. – Vol. 48. – P. 3–9.
2. Watkins, G. D. Defect metastability and bistability / G. D. Watkins // Material Science Forum. – 1989. – Vol. 38–41. – P. 39–50.
3. Мукашев, Б. Н. Метастабильные и бистабильные дефекты в кремнии / Б. Н. Мукашев, Х. А. Абдуллин, Ю. В. Горелкинский // УФН. – 2000. – Т. 43, № 2. – С. 143–155.
4. Makarenko, L. F. Trapping of minority carriers in thermal U^- -donors in n -Si / L. F. Makarenko, L. I. Murin // Phys. stat. sol. (b). – 1988. – Vol. B145, N 1. – P. 241–253.
5. Watkins, G. D. Modification of defect structures by electronic excitation / G. D. Watkins // Reviews of Solid State Science. – 1990. – Vol. 4, N 3–4. – P. 279–296.
6. Коршунов, Ф. П. Радиационная технология изготовления мощных полупроводниковых приборов / Ф. П. Коршунов, Ю. В. Богатырев // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2008. – № 4. – С. 106–114.
7. Structure and electronic properties of trivacancy and trivacancy-oxygen complexes in silicon / V. P. Markevich [et al.] // Phys. stat. sol. (a). – 2011. – Vol. 208, N 3. – P. 568–571.
8. The trivacancy and trivacancy-oxygen family of defects in silicon / V. P. Markevich [et al.] // Solid State Phenomena. – 2014. – Vol. 205–206. – P. 181–190.
9. Dobaczewski, L. Laplace-transform deep-level spectroscopy: The technique and its applications to the study of point defects in semiconductors / L. Dobaczewski, A. R. Peaker, B. K. Nielsen // J. Appl. Phys. – 2004. – Vol. 96, N 9. – P. 4689–4728.
10. Forward current enhanced elimination of the radiation induced boron-oxygen complex in n^+p diodes / L. F. Makarenko [et al.] // Phys. stat. sol. (a). – 2014. – Vol. 211, N 11. – P. 2558–2562.
11. Complexes of the self-interstitial with oxygen in irradiated silicon: a new assignment of the 936 cm^{-1} band / J. Hermansson [et al.] // Physica B: Condensed Matter. – 2001. – Vol. 302–303. – P. 188–192.

12. Radiation damage in silicon exposed to high-energy protons / G. Davies [et al.] // Phys. Rev. B. – 2006. – Vol. 73, N 16. – P. 165202 (1–10).
13. Self-interstitial clusters in silicon / R. Jones [et al.] // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B. – 2002. – Vol. 186. – P. 10–18.
14. *Posselt, M.* Atomistic study of the migration of di- and tri-interstitials in silicon / M. Posselt, F. Gao, D. Zwicker // Phys Rev. B. – 2005. – Vol. 71, N 24. – P. 245202 (1–12).
15. Evolution of radiation-induced carbon-oxygen-related defects in silicon upon annealing: LVM studies / L. I. Murin [et al.] // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B. – 2006. – Vol. 253. – P. 210–213.

Поступило в редакцию 20.05.2015

ХИМИЯ

УДК 547.775; 544.25

В. Н. КОВГАНКО¹, Н. Н. КОВГАНКО², Д. С. ДОРОЩУК¹**НОВЫЙ ПОДХОД К СИНТЕЗУ ПИРАЗОЛСОДЕРЖАЩИХ
ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ**(Представлено членом-корреспондентом В. И. Поткин^{ым})¹Белорусский государственный технологический университет, Минск, Беларусь
umkauhanka@belstu.by²Белорусский государственный медицинский университет, Минск, Беларусь

Разработан новый подход к синтезу пиразолсодержащих жидких кристаллов, который заключается во взаимодействии мезогенных 3-арил-3-кетозэфиров с 4-замещенными арилгидразинами. В качестве примера применения данного подхода реакцией 3-арил-3-кетозэфиров с 4-метоксифенилгидразином синтезирован ряд новых мезогенных пиразолов. Среди синтезированных соединений обнаружены вещества, образующие монотропную нематическую фазу.

U. M. KAUSHANKA¹, M. M. KAUSHANKA², D. S. DARASHCHUK¹**NEW APPROACH TO THE SYNTHESIS OF PYRAZOLE-CONTAINING LIQUID CRYSTAL**¹Belarusian State Technological University, Minsk, Belarus
umkauhanka@belstu.by²Belarusian State Medical University, Minsk, Belarus

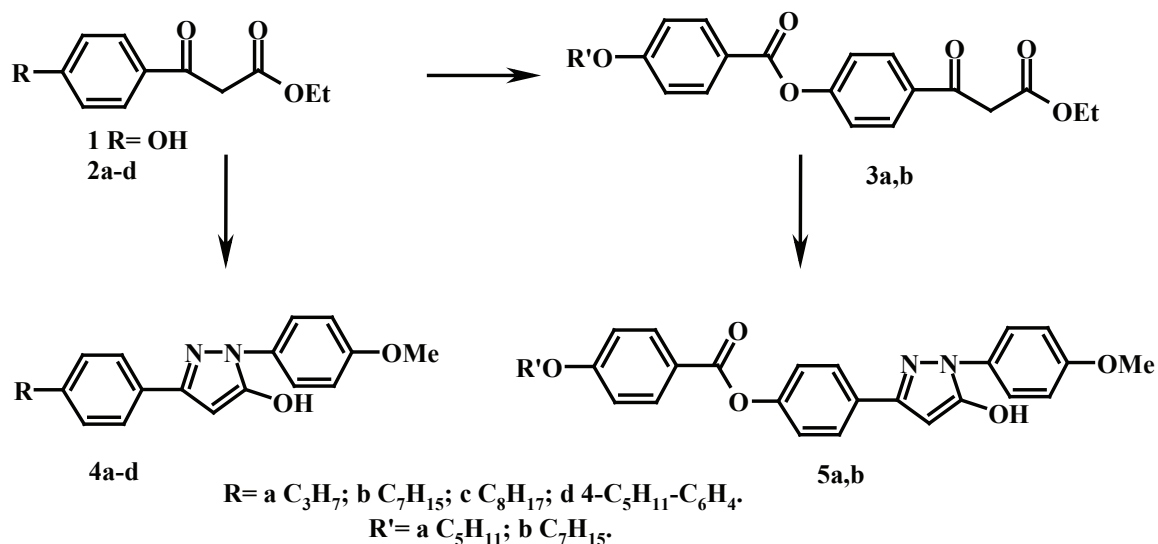
A new approach to the synthesis of pyrazole-containing liquid crystals was investigated. This synthetic approach is based on the mesogenic reaction of 3-aryl-3-ketoesters with 4-substituted arylhydrazines. As an example of this approach, the reaction of 3-aryl-3-ketoesters with 4-methoxyphenylhydrozine was investigated. As a result, a series of new mesogenic pyrazoles were synthesized. Substances with a monotropic nematic phase were detected among the synthesized compounds.

В последние десятилетия в области синтеза мезогенных соединений значительный интерес уделяют разработке методов получения веществ, содержащих в жестком остове молекул различные гетероциклы. Это связано с тем, что на основе гетероциклических мезогенов могут быть созданы новые типы жидких кристаллов, расширены области их применения. К перспективным гетероциклическим мезогенам, в частности, относятся замещенные азолы [1–6]. Так, в настоящее время разработаны методы синтеза жидкокристаллических 2-изоксазолинов, изоксазолов и пиразолов [1–3].

При этом наибольшее внимание исследователи уделяют 3,5-дизамещенным изоксазолам и пиразолам, надежные методы синтеза которых позволяют получать соединения с анизотропной структурой [2; 3]. В литературе имеется также ряд сообщений о синтезе мезоморфных соединений, жесткий остов которых содержит 1,4-дизамещенные пиразолы [4; 5]. В то же время для пиразолсодержащих соединений существует принципиальная возможность создать необходимую для проявления жидкокристаллических свойств вытянутую форму молекулы при наличии мезогенных заместителей в положении 1 и 3 гетероцикла. Разработка синтетического подхода для получения такого нового класса мезогенных веществ и являлась целью данного исследования.

В основе разработанного нами подхода лежит взаимодействие мезогенных 3-арил-3-кетоэфиров с 4-замещенными арилгидразинами. В результате могут быть получены соответствующие 1,3-диарилпиразолонны. Потенциальная мезогенность будет достигнута вытянутой формой молекулы.

Для проверки возможности применения данного подхода в синтезе мезоморфных 1,3-диарилпиразолонов нами исследовано взаимодействие мезогенных кетоэфиров с коммерчески доступным гидрохлоридом 4-метоксифенилгидразина. В качестве исходных соединений нами использованы кетоэфиры **2a-d** и **3a,b**, синтез которых описан ранее [7–9].



В литературе описан синтез пиразолонов с использованием гидрохлорида 4-метоксифенилгидразина [10; 11], однако известные методики, на наш взгляд, не являются препаративными. Поэтому на примере синтеза пиразолона **4b** нами вначале проведена разработка удобных экспериментальных условий синтеза.

Попытки получить соответствующий пиразолон **4b** реакцией кетоэфира **2b** с гидрохлоридом 4-метоксифенилгидразина и ацетатом натрия в обычных для такого рода превращений условиях [7; 12] оказались безуспешными. Так, осуществить эту реакцию в водной суспензии, а также в среде этанола не удастся в силу низкой растворимости гидрохлорида 4-метоксифенилгидразина. Использование в качестве растворителя уксусной кислоты, ацетонитрила или пиридина позволяло повысить растворимость гидрохлорида 4-метоксифенилгидразина, но приводило к осмолению реакционной смеси. Попытка предварительного получения свободного основания взаимодействием гидрохлорида 4-метоксифенилгидразина с этанольным раствором эквимольного количества гидроксида натрия позволило решить проблему растворимости. Однако реакция в этанольном растворе между полученным таким образом 4-метоксифенилгидразином и кетоэфиром **2b** не протекала даже при длительном кипячении реакционной смеси.

В результате анализа литературных данных [10; 11] и неудачных синтезов в среде растворителя нами было решено провести синтез при сплавлении реагентов. Смесь кетоэфира **2b**, гидрохлорида 4-метоксифенилгидразина, ацетата натрия, хлорида или сульфата натрия (в качестве инертного твердого разбавителя и теплоносителя) тщательно растирали в фарфоровой чашке, после чего выдерживали в сушильном шкафу при 100 °С. В результате нам удалось получить целевой пиразолон **4b** с выходом 82 %.

Замещенные пиразолы **4a,c,d** и **5a,b** также получены сплавлением реагентов в описанных выше условиях. Выход целевых соединений составил 60–90 %.

Строение синтезированных соединений **4**, **5** подтверждено данными УФ, ИК и ЯМР спектров. Так, в ЯМР ¹H спектрах соединений **4**, **5** отсутствуют характерные триплеты и квартеты этилокси групп, которые наблюдаются в спектрах исходных β-кетоэфиров **2**, **3** [7–9]. Это под-

тверждает, что при реакции происходит циклизация с образованием соответствующих гетероциклов, сопровождающаяся отщеплением этилового спирта. В спектрах ЯМР ^1H и ^{13}C синтезированных соединений **4**, **5** присутствуют сигналы всех фрагментов исходных кетоэфиров и гидразина.

Для соединений **5a,b** в ИК спектрах наблюдается полоса колебаний $\text{C}=\text{O}$ связи бензоатной группы при 1735 см^{-1} . Это подтверждает, что при циклизации кетоэфиров **2a,b** не происходит побочного гидразиолиза сложноэфирной группы.

Известно, что для замещенных пиразолонов характерна кето-енольная таутомерия, которая фиксируется по данным спектров [7; 12]. Следует указать, что в ИК спектрах кристаллических образцов **4a-d** и **5a,b** только в спектре соединения **4a** присутствует интенсивная полоса поглощения $\text{C}=\text{O}$ группы при 1684 см^{-1} . Это значит, что в кристаллическом состоянии соединения **4b-d** и **5a,b** существуют в виде 5-гидроксипиразолов.

Для растворов соединений **4a-d** и **5a,b** соотношение пиразолоновой и пиразолольной форм зависит от типа растворителя. Так, судя по данным ЯМР спектров растворов в дейтеродиметилформамиде вещества **4a,c,d** и **5b** существуют в енольной форме. Для растворов соединений **4b** в дейтероацетоне и **5a** в дейтероацетонитриле фиксируются оба таутомера, с преобладанием кетонной формы.

Изучение температур фазовых переходов показало, что для соединений **5a,b** характерно наличие монокристаллической нематической фазы. Это подтверждает перспективность синтеза новых жидкокристаллических 1,3-дизамещенных пиразолов с использованием разработанного подхода. О результатах дальнейшей работы в данном направлении будет сообщено дополнительно.

Экспериментальная часть. Температуры плавления и фазовых переходов определены на нагревательном столике, соединенном с поляризационным микроскопом. ИК спектры записаны в таблетках бромида калия на ИК фурье спектрометре Nexus (Thermo) в области $400\text{--}4000\text{ см}^{-1}$, УФ спектры – в циклогексане (если не указано иначе) на спектрофотометрах Specord M500 и Solar PB2201 в области $220\text{--}900\text{ нм}$. Спектры ЯМР растворов в дейтеродиметилформамиде (если не указано иначе) записаны на приборе Bruker Avance. Ход реакций и чистоту полученных соединений контролировали с помощью пластинок Kieselgel 60 F_{254} фирмы Merck.

Кетоэфиры **2a-d** синтезированы по методу, приведенному в работе [7]. Синтез бензоатов **3a,b** из фенола **1** приведен в работе [8].

1-(4-Метоксифенил)-3-(4-пропилоксифенил)-пиразол-5-ол 4a. В фарфоровой чашке смешали $0,124\text{ г}$ ($0,496\text{ ммоль}$) кетоэфира **2a**, $0,097\text{ г}$ ($0,556\text{ ммоль}$) гидрохлорида 4-метоксифенилгидразина и $0,300\text{ г}$ ($3,66\text{ ммоль}$) ацетата натрия. Полученную смесь тщательно растерли фарфоровым пестиком и нагрели в сушильном шкафу. Реакционную смесь выдержали при $100\text{ }^\circ\text{C}$ 30 мин , а затем охладили до комнатной температуры и добавили 25 мл воды. Полученный пиразолон **4a** отфильтровали, последовательно промыли на фильтре водой, водным 2-пропанолом (1 : 1), петролейным эфиром и снова водой. Получено $0,108\text{ г}$ соединения **4a**. Выход 67% . Аналитический образец получен после дополнительной перекристаллизации из ацетонитрила. Т. пл. $137\text{--}138\text{ }^\circ\text{C}$ (ацетонитрил). УФ спектр, $\lambda_{\text{макс}}$, нм: 228, 241, 259, 269, 293, 297, 316, 325, 345. ИК спектр, см^{-1} : 3200–3650 (О-Н), 2999, 2965, 2938, 2876, 2833 (С-Н), 1684 (С=О), 1607, 1509 (С=N, С=C_{аром}). Спектр ЯМР ^1H (δ , м. д.), в виде 5-гидроксипиразола: 1,02 (3H, т, J 7 Гц, CH_3); 1,78 (2H, секстет, J 7 Гц, CH_2); 3,99 (2H, т, J 7 Гц, OCH_2) $\{\text{OC}_3\text{H}_7\}$; 3,86 (3H, с, OCH_3); 6,00 (1H, с, 4-CH); 6,99 (2H, д, J 8 Гц); 7,08 (2H, д, J 9 Гц); 7,75–7,85 (4H, м) $\{\text{аром. протоны}\}$. Спектр ЯМР ^{13}C (δ , м. д.): 10,67 (CH_3); 23,05 (CH_2); 55,78 (OCH_3); 69,88 (OCH_2); 84,95 (4-CH); 114,56; 115,04; 123,35; 127,01; 133,55; 150,14; 154,76; 158,13; 159,56 (С аром., С=N).

1-(4-Метоксифенил)-3-(4-гептилоксифенил)-пиразол-5-ол 4b. Выход 82% . Т. пл. $127\text{ }^\circ\text{C}$ (2-пропанол). УФ спектр ($\lambda_{\text{макс}}$, нм): 278 (этанол). УФ спектр, $\lambda_{\text{макс}}$, нм: 266, 334 (циклогексан). ИК спектр, см^{-1} : 3300–3650 (О-Н), 2954, 2924, 2854 (С-Н), 1614, 1596, 1578, 1570, 1526, 1510 (С=N, С=C_{аром}). Спектр ЯМР ^1H (дейтероацетон, δ , м. д.) (фиксируется кето-енольная таутомерия; кетон : енол = 4 : 1). Кетон: 0,898 (3H, т, J 7 Гц, CH_3); 1,28–1,43 (6H, м, CH_2 -алкил.); 1,50 (2H, квинтет, J 7 Гц, CH_2); 1,80 (2H, квинтет, J 7 Гц, CH_2); 4,07 (2H, т, J 7 Гц, OCH_2) $\{\text{OC}_7\text{H}_{15}\}$; 3,82 (3H,

с, OCH₃); 3,84 (1H, с); 3,99 (1H, с) {4-CH₂}; 6,99 (2H, д, J 9 Гц); 7,03 (2H, д, J 9 Гц); 7,79 (2H, д, J 9 Гц); 7,90 (2H, д, J 9 Гц) {аром. протоны}. Енол: 0,902 (3H, т, J 7 Гц, CH₃); 3,81 (3H, с, OCH₃); 4,02 (2H, т, J 7 Гц, OCH₂); 5,94 (1H, с, 4-CH); 7,47 (2H, д, J 9 Гц); 7,75 (2H, д, J 9 Гц) {аром. протоны}. Спектр ЯМР ¹³C (δ, м. д., кетонная и енольная формы): 14,34 (CH₃); 23,27; 26,69 (кетон); 26,74 (енол); 32,55 (CH₂); 40,05 (кетон 4-CH₂); 55,71 (кетон OCH₃); 55,77 (енол OCH₃); 68,80 (кетон OCH₂); 68,72 (енол OCH₂); 114,59; 114,63; 114,67; 115,19; 115,24; 115,54; 120,88; 121,08; 123,73; 124,87; 127,26; 128,51; 131,13; 133,22; 155,80; 157,67; 161,97; 170,94 (C аром., C=N).

1-(4-Метоксифенил)-3-(4-октилоксифенил)-пиразол-5-ол 4с. Выход 69 %. Т. пл. 127–128 °С (ацетонитрил). УФ спектр, λ_{макс}, нм: 232, 259, 269, 278, 332. ИК спектр, см⁻¹: 3300–3630 (O-H), 2954, 2924, 2876, 2851 (C-H), 1614, 1596, 1578, 1570, 1526, 1509 (C=N, C=C_{аром}). Спектр ЯМР ¹H (δ, м. д.), в виде 5-гидроксипиразола: 0,88 (3H, т, J 7 Гц, CH₃); 1,24–1,38 (8H, м, CH₂); 1,47 (2H, квинтет, J 7 Гц, CH₂); 1,77 (2H, квинтет, J 7 Гц, CH₂); 4,04 (2H, т, J 7 Гц, OCH₂) {OC₈H₁₇}; 3,86 (3H, с, OCH₃); 6,01 (1H, с, 4-CH); 7,00 (2H, д, J 9 Гц); 7,08 (2H, д, J 9 Гц); 7,79 (4H, м) {аром. протоны}. Спектр ЯМР ¹³C (δ, м. д.): 14,27 (CH₃); 23,08; 26,56; 32,32 (CH₂); 55,78 (OCH₃); 68,40 (OCH₂); 114,56; 115,04; 123,37; 127,01; 133,50; 158,14; 159,59 (C аром., C=N).

1-(4-Метоксифенил)-3-(4-(4'-пентил)-бифенил)-пиразол-5-ол 4d. Выход 62 %. Т. пл. 193–194 °С (ацетонитрил-ацетон). УФ спектр, λ_{макс}, нм: 276, 345. ИК спектр, см⁻¹: 3300–3630 (O-H), 2958, 2922, 2851 (C-H), 1595, 1571, 1526, 1509 (C=N, C=C_{аром}). Спектр ЯМР ¹H (δ, м. д.), в виде 5-гидроксипиразола: 0,89 (3H, т, J 7 Гц, CH₃); 1,3–1,38 (4H, м, CH₂); 1,65 (2H, квинтет, J 7 Гц, CH₂); 2,66 (2H, т, J 7 Гц, CH₂) {C₅H₁₁}; 3,87 (3H, с, OCH₃); 6,13 (1H, с, 4-CH); 7,01 (2H, д, J 9 Гц); 7,34 (2H, д, J 8 Гц); 7,68 (2H, д, J 9 Гц); 7,75 (2H, д, J 8 Гц); 7,84 (2H, д, J 9 Гц); 7,96 (2H, д, J 8 Гц) {аром. протоны}. Спектр ЯМР ¹³C (δ, м. д.): 14,24 (CH₃); 22,96; 31,74; 31,98 (CH₂); 55,80 (OCH₃); 114,60; 123,52; 126,23; 127,14; 127,28; 129,65; 149,79; 154,98 (C аром., C=N).

1-(4-Метоксифенил)-3-(4-(4'-пентилокси)-бензоилоксифенил)пиразол-5-ол 5a. Выход 82 %. Температуры фазовых переходов, °С: нагревание Cr 147 I, охлаждение I 116 N 109 Cr. УФ спектр, λ_{макс}, нм: 238, 245, 259, 268, 281, 336. ИК спектр, см⁻¹: 3300–3600 (O-H), 3073, 2950, 2932, 2870, 2830 (C-H), 1735 (C=O сл. эф.), 1605, 1567, 1510 (C=N, C=C_{аром}). Спектр ЯМР ¹H (дейтероацетонитрил, δ, м. д.) (фиксируется кето-енольная таутомерия; кетон : енол = 4,5 : 1). Кетон: 0,94 (3H, т, J 7 Гц, CH₃); 1,35–1,50 (4H, м, CH₂); 1,80 (2H, квинтет, J 7 Гц, CH₂); 4,09 (2H, т, J 7 Гц, OCH₂) {OC₅H₁₁}; 3,81 (3H, с, OCH₃); 3,90 (2H, с, 4-CH₂); 7,01 (2H, д, J 9 Гц); 7,06 (2H, д, J 9 Гц); 7,34 (2H, д, J 9 Гц); 7,81 (2H, д, J 9 Гц); 7,88 (2H, д, J 9 Гц); 8,12 (2H, д, J 9 Гц) {аром. протоны}. Спектр ЯМР ¹³C (дейтероацетонитрил, δ, м. д.): 14,23 (CH₃); 23,05; 28,74; 29,39 (CH₂); 40,37 (4-CH₂); 56,04 (OCH₃); 69,27 (OCH₂); 114,86, 115,45, 121,79; 123,50; 128,11, 133,05 (C аром., C=N).

1-(4-Метоксифенил)-3-(4-(4'-гептилокси)-бензоилоксифенил)пиразол-5-ол 5b. Выход 89 %. Cr 165 I, охлаждение I 132 N 112 Cr. УФ спектр (λ_{макс}, нм): 277 (этанол). УФ спектр, λ_{макс}, нм: 229, 241, 259, 269, 279, 298, 312, 321, 332, 336 (циклогексан). ИК спектр, см⁻¹: 3300–3600 (O-H), 2993, 2950, 2930, 2855 (C-H), 1735 (C=O сл. эф.), 1606, 1566, 1510 (C=N, C=C_{аром}). Спектр ЯМР ¹H (δ, м. д.): в виде 5-гидроксипиразола 0,89 (3H, т, J 7 Гц, CH₃); 1,28–1,43 (6H, м, CH₂-алкил.); 1,48 (2H, квинтет, J 7 Гц, CH₂); 1,81 (2H, квинтет, J 7 Гц, CH₂); 4,16 (2H, т, J 7 Гц, OCH₂) {OC₇H₁₅}; 3,87 (3H, с, OCH₃); 6,13 (1H, с, 4-CH); 7,09 (2H, д, J 9 Гц); 7,18 (2H, д, J 9 Гц); 7,36 (2H, д, J 9 Гц); 7,81 (2H, д, J 9 Гц); 7,96 (2H, д, J 9 Гц); 8,15 (2H, д, J 9 Гц) {аром. протоны}. Спектр ЯМР ¹³C (δ, м. д.): 13,67 (CH₃); 22,46; 25,83; 31,71 (CH₂); 55,25 (OCH₃); 68,40 (OCH₂); 84,80 (4-CH); 114,05; 114,77; 117,67; 121,39; 122,18; 123,09; 126,17; 132,18; 132,76; 148,95; 150,82; 154,01; 157,81; 163,79; 164,63 (C аром., C=N).

Список использованной литературы

1. Ковганко, Н. Н. Синтез новых жидкокристаллических соединений на основе 2-изоксазолинов и фуроксанов / Н. Н. Ковганко, В. Н. Ковганко // Вестн. Фонда фундаментальных исследований. – 2004. – № 3. – С. 36–60.
2. Kauhanka, U. M. Synthesis of new liquid crystalline isoxazole-, pyrazole- and 2-isoxazoline-containing compounds / U. M. Kauhanka, M. M. Kauhanka // Liq. Cryst. – 2006. – Vol. 33, N 1. – P. 121–127.
3. Synthesis of liquid-crystalline 3,5-diarylisoxazolines / A. Tavares [et al.] // Liq. Cryst. – 2010. – Vol. 37, N 2. – P. 159–169.
4. Thaker B. T. [et al.] // Liq. Cryst. – 2013. – Vol. 40, N 9. – P. 1296–1309.
5. Thaker B. T. [et al.] // Mol. Cryst. Liq. Cryst. – 2012. – Vol. 552, N 1. – P. 134–146.

6. Heterocyclic 3,5-disubstituted phenylpyrazoles and isoxazoles: synthesis and mesomorphic behavior / H.-M. Kuo [et al.] // *Tetrahedron*. – 2013. – Vol. 69, N 2. – P. 618–626.
7. Ковганко, В. Н. Синтез новых мезогенных веществ ряда 3-арилизоксазолонов и 3-арилпиразолонов / В. Н. Ковганко, Н. Н. Ковганко, М. А. Половков // *Жур. орг. хим.* – 2010. – Т. 46, № 12. – С. 1803–1807.
8. Ковганко, В. Н. Синтез новых металломезогенов на основе 3-кетозэфиров / В. Н. Ковганко, Н. Н. Ковганко // *Жур. общ. хим.* – 2013. – Т. 83, № 8. – С. 1326–1333.
9. Ковганко, В. Н. Синтез новых мезогенных 3-кетозэфиров меди (II) / В. Н. Ковганко, Н. Н. Ковганко // *Весті НАН Беларусі. Сер. хім. навук.* – 2012. – № 2. – С. 75–79.
10. Efficient di-bromination of 5-pyrazolones and 5-hydroxypyrazoles by *N*-bromobenzamide / Y.-Y. Huang [et al.] // *Tetrahedron*. – 2009. – Vol. 65, N 46. – P. 9592–9597.
11. Basaif, S. A. AlCl₃-Catalyzed diazocoupling of 1-(aryl/hetaryl)-3-phenyl-1H-pyrazol-2-in-5-ones in aqueous medium. Synthesis of hetaryl-azopyrazolones and their application as disperse dyes / S. A. Basaif, M. A. Hassan, A. A. Gobouri // *Dyes and Pigments*. – 2007. – Vol. 72, N 3. – P. 387–391.
12. 3-Арил-3-кетозэфиры в синтезе микобактерицидов / В. Н. Ковганко [и др.] // *Весті НАН Беларусі. Сер. хім. навук.* – 2013. – № 3. – С. 94–99.

Поступило в редакцию 16.03.2015

УДК 535.317.1:621.9.048

А. А. БАРАБОШИНА¹, Т. В. СВИРИДОВА¹, Л. С. ЦЫБУЛЬСКАЯ¹, А. И. КОКОРИН²,
член-корреспондент Д. В. СВИРИДОВ¹

НЕОРГАНИЧЕСКИЕ ФОТОРЕЗИСТЫ НА ОСНОВЕ СМЕШАННЫХ ОКСИДОВ МОЛИБДЕНА И ВАНАДИЯ

¹Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

anya15789@mail.ru; sviridova@bsu.by; Gaevskaya@bsu.by; sviridov@bsu.by

²Институт химической физики им. Н. Н. Семёнова Российской академии наук, Москва, Россия
kokorin@chph.ras.ru

Продемонстрирована возможность использования тонких пленок смешанного молибден-ванадиевого оксида в качестве неорганического фоторезистного материала для получения высокоустойчивых рисунков-масок. В основе фоточувствительности систем такого рода лежит фотоиндуцированная поликонденсация олигомеров смешанных полиоксокислот в пленках ксерогеля $V_2O_5 : MoO_3$.

Ключевые слова: смешанный оксид молибдена-ванадия, фотолитография, неорганический фоторезист.

A. A. BARABOSHINA¹, T. V. SVIRIDOVA¹, L. S. TSYBULSKAJA¹, A. I. KOKORIN², D. V. SVIRIDOV¹

INORGANIC PHOTORESISTS BASED ON MIXED OXIDES OF MOLYBDENUM AND VANADIUM

¹Belarusian State University, Minsk, Belarus

anya15789@mail.ru; sviridova@bsu.by; Gaevskaya@bsu.by; sviridov@bsu.by

²Semenov Institute of Chemical Physics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
kokorin@chph.ras.ru

The possibility of application of thin films of molybdenum-vanadium oxide as the photoresist material was demonstrated. The photosensitivity of such a system was due to the photo-induced polycondensation of polymolybdic acid oligomers in xerogel $V_2O_5 : MoO_3$ films.

Keywords: molybdenum-vanadium mixed oxide, photolithography, inorganic photoresist.

Введение. В последнее время неорганические оксиды (прежде всего, оксиды титана и ванадия) рассматриваются в качестве перспективных фоторезистов для литографических приложений [1; 2]. Отличительной чертой оксидных фоторезистов является их высокая чувствительность к действию актиничного излучения, малая дефектность, высокая контрастность, а также несвойственная традиционным органическим фоторезистам высокая плазмо- и термостабильность, что открывает возможность «сухого» (плазмохимического) проявления топологических рисунков [3]. Последнее обстоятельство позволяет получать высокостойкие маски для глубокого ионного травления нижележащего полупроводникового материала и, таким образом, отказаться от использования сложных многослойных маскирующих систем, включающих как термостойкие, так и фоточувствительные слои [4].

Одним из наиболее разработанных способов получения фоторезистных пленок на основе неорганических оксидов (в частности, на основе оксидов ванадия и молибдена) является их плазменный либо электрохимический синтез [2; 4]. Недостатком данных способов является то, что он дает пленки, состав которых неконтролируемым образом меняется по толщине [3]. В свою очередь, возможность использования в качестве фоторезистных материалов пленок TiO_2 , полученных золь-гель методом, существенно ограничивается необходимостью их высокотемпературной обработки для придания достаточной фоточувствительности [2].

В качестве альтернативного способа получения пленок оксидного фоторезиста может рассматриваться сольвотермический синтез, предполагающий использование в качестве прекурсо-

ра соответствующих полиоксокислот в виде водных растворов [5]. Достоинствами такого способа синтеза является возможность управления процессом осаждения за счет варьирования концентрации прекурсоров и pH раствора, а также перспективы простого получения пленок смешанных оксидов, для которых можно ожидать высокого уровня аморфизации, что важно с точки зрения достижения высокой разрешающей способности. В связи с этим в рамках настоящего исследования ставилась задача изучения возможности использования в качестве фоторезистных материалов пленок на основе смешанных оксидов молибдена и ванадия, полученных сольвотермическим методом из водных растворов соответствующих оксокислот.

Материалы и методы исследования. Пленки смешанных оксидов молибдена и ванадия наносились путем полива предварительно профильтрованных водных 0,5 М растворов смешанных оксокислот на вращающиеся гидрофилизированные стеклянные и кремниевые подложки (скорость вращения 2300 об/мин). Водные растворы смешанных оксокислот (молярное соотношение V : Mo составляло 1 : 3, 2 : 3, 1 : 1, 3 : 2, 3 : 1) были получены методом ионного обмена из смеси растворов парамолибдата и метаванадата аммония с использованием катионита КУ-2 в Н-форме [5]. Полученные оксидные пленки облучались с использованием ультрафиолетовой (УФ) лампы Philips TUV 15 (длина волны 253,7 нм, интенсивность 1,5 мВт/см²) с использованием кварцевого фотошаблона в виде параллельных дорожек. Проявление полученного рисунка проводилось в 0,1 М растворе уксусной кислоты. Время проявления составляло 5 мин. Проявленные образцы тщательно промывались в дистиллированной воде и сушились в темновых условиях на воздухе.

Исследование микрогеометрии поверхности полученных пленок ксерогелей V₂O₅ : MoO₃ выполнялось с помощью сканирующего электронного микроскопа Leo-1420 и атомно-силового микроскопа NT-206. Спектры комбинационного рассеяния (КР) были получены с помощью КР-микроскопа Nanofinder ТП.

Результаты и их обсуждение. Выполненное исследование показало, что пленки ксерогелей, полученные из смешанных молибден-ванадиевых полиоксокислот, характеризуются высокой кроющей способностью и адгезией к подложке. При этом пленки сохраняют высокую эластичность и не подвергаются растрескиванию при хранении. В то же время выполненное электронно-микроскопическое исследование показало (рис. 1), что пленки без видимых признаков обра-

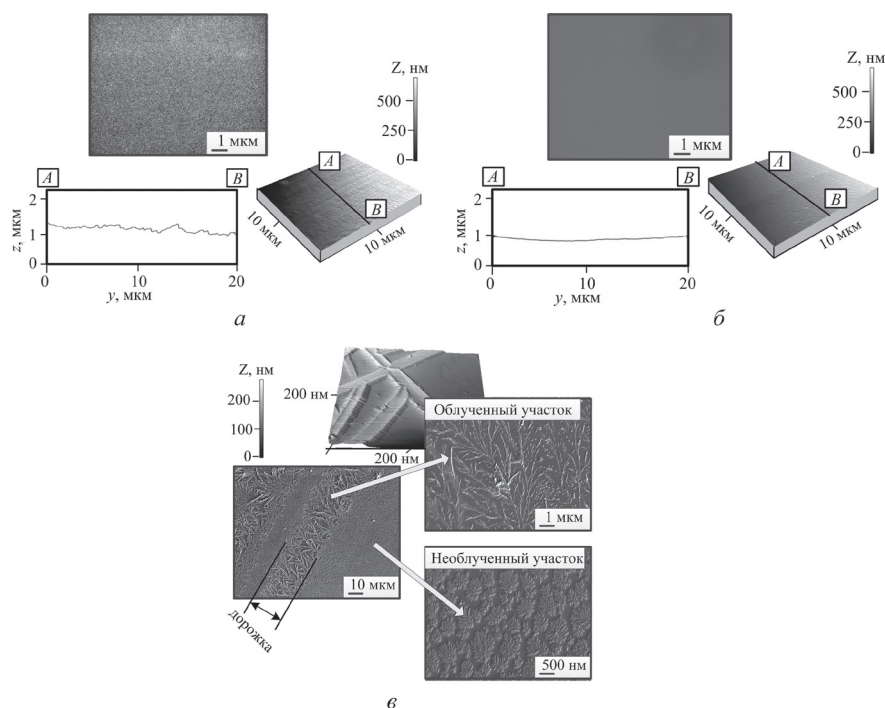


Рис. 1. Электронномикроскопические изображения, дополненные атомно-силовыми трехмерными изображениями и профилями поверхности для пленок ксерогеля V₂O₅ : MoO₃ (молярное соотношение V : Mo = 3 : 2) до облучения (а), после УФ-облучения в течение 10 мин (б); изображения дорожек, полученных на поверхности пленки ксерогеля в результате облучения через маску в течение 30 мин (в)

зования надструктур в объеме ксерогеля могут быть получены из раствора смешанной молибден-ванадиевой кислоты, мольное содержание V : Mo в которой составляет 3 : 2. Исследование таких пленок с помощью атомной силовой микроскопии показало наличие сетчатой микрогеометрии поверхности, образование которой можно объяснить сформированной характерными для неорганических кислот-полимеров протяженными олигомерными образованиями [6]. Среднеквадратичное отклонение профиля поверхности для пленок такого рода составляет 25 нм. Облучение молибден-ванадиевых оксидно-гидроксидных пленок приводит к уменьшению их микрошероховатости, что хорошо прослеживается как на электронномикроскопических изображениях, так и на изображениях, полученных методом атомно-силовой микроскопии (анализ последних свидетельствует о том, что среднеквадратичное отклонение профиля поверхности в случае облученных пленок снижается до 7–10 нм) (рис. 1). Можно предположить, что УФ-облучение способствует активированию олигомерных остатков и стимулирует их поликонденсационную активность, результатом чего является протекание объемной сшивки в пленке ксерогеля.

О характере протекающих в условиях УФ-облучения фотоиндуцированных процессах свидетельствуют и изменения в КР-спектрах пленок ксерогеля $V_2O_5 : MoO_3$ в результате экспонирования: как видно на рис. 2, облучение сопровождается быстрой деградацией пика в области 716 см^{-1} , соответствующего колебаниям группы V-O-H [7], что указывает на протекание поликонденсационных процессов с переходом оловых связей в оксоловые [6]. Одновременно наблюдается расширение пика в области 823 см^{-1} , соответствующего валентным колебаниям группы V-O-V [7] и его сдвигу в область более высоких частот, что позволяет сделать вывод о преимущественном образовании гетероатомных мостиковых структур V-O-Mo с формированием смешанного оксида.

Принудительная поликонденсация в пленке ксерогеля, протекающая на облучаемых участках, придает ему нерастворимость в кислых средах, что позволяет использовать такие пленки в качестве неорганического фоторезистного материала. Как видно на рис. 3, облучение пленок $V_2O_5 : MoO_3$ (3 : 2) через фотошаблон и последующее травление в растворе уксусной кислоты приводит к формированию микродорожек, характеризующихся высокой крутизной края (свыше

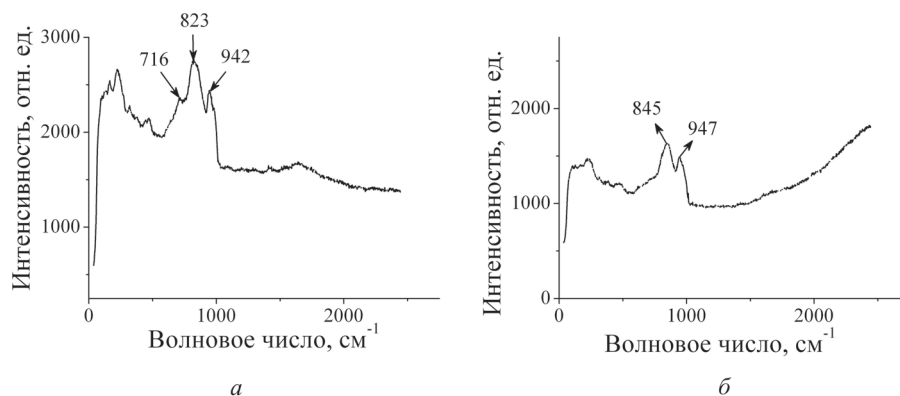


Рис. 2. Спектры КР-пленок ксерогеля $V_2O_5 : MoO_3$ до облучения (а), после УФ-облучения в течение 10 мин (б)

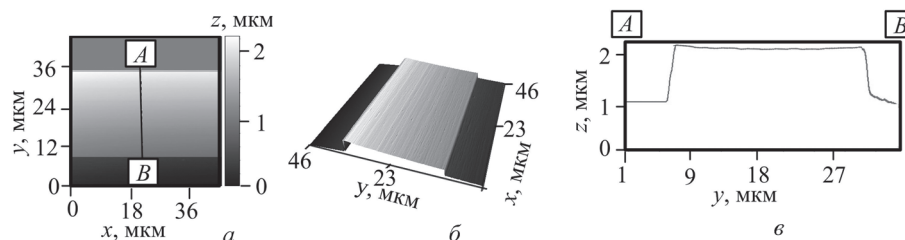


Рис. 3. Двумерное (а), трехмерное атомно-силовое (б) изображения и профиль поверхности (в), соответствующий отрезку АВ, для дорожки травления, полученной на поверхности пленок ксерогеля $V_2O_5 : MoO_3$ за счет УФ-облучения с использованием фотошаблона в течение 10 мин

80°) и отсутствием дефектов. Для получаемого топологического микрорисунка характерно высокое аспектное отношение (толщина пленки составляет 1 мкм при ширине дорожки 20 мкм), а скорость травления необлученных участков пленки ксерогеля при проявлении достигает 1,5 мкм/мин.

При продолжительном экспонировании (свыше 10 мин) протекает дальнейшая полимеризация олигомерных остатков в структуре ксерогеля $V_2O_5 : MoO_3$, результатом чего является формирование на поверхности облученной пленки протяженных мультимикронных кристаллитов ветвевой формы (рис. 1). При этом защищенная маской поверхность также начинает трансформироваться, по-видимому, в результате слабого термического воздействия и на ее поверхности происходит формирование разветвленных кристаллических образований, размер которых в ряде случаев достигает 500 нм.

Заключение. Таким образом, возможность индуцирования под действием УФ-облучения процессов поликонденсации в пленках ксерогелей смешанных молибден-ванадиевых оксидов, полученных из соответствующих оксокислот, позволяет использовать их в качестве неорганических фоторезистных материалов. При этом растворимость таких резистов управляется низкими дозами облучения ($\sim 0,1$ Дж · см⁻²); при больших дозах облучения в ксерогеле начинают протекать процессы кристаллизации.

Работа выполнена в рамках проекта БРФФИ (грант X14P-076) и РФФИ (грант № 14-03-90020-Бел-а).

Список использованной литературы

1. Liu, B. Sub-100 nm nanolithography and pattern transfer on sol-gel-derived TiO₂ resist / B. Liu, S.-T. Ho // J. Electrochem. Soc. – 2008. – Vol. 155. – P. P57–P60.
2. Лазерно-стимулированная модификация свойств оксидов переходных металлов / А. М. Ильин [и др.] // Оптика и спектроскопия. – 1997. – Т. 82. – С. 32–38.
3. Chudnovskii, F. A. Metal-insulator phase transition in disordered VO₂ / F. A. Chudnovskii, G. B. Stefanovich // J. Solid State Chem. – 1992. – Vol. 98. – P. 137–145.
4. van Zant, P. Microchip fabrication / P. van Zant. – NY, 1997.
5. Sviridova, T. V. Nano- and microcrystals of molybdenum trioxide and metal-matrix composites on their basis / T. V. Sviridova, L. I. Stepanova, D. V. Sviridov // Molybdenum: Characteristics, Production and Applications / ed. by M. Ortiz [et al.]. – NY, 2012. – P. 147–179.
6. Livage, J. Sol-gel chemistry of transition metal oxides / J. Livage, M. Henry, C. Sanchez // Progr. Solid State Chem. – 1988. – Vol. 18. – P. 259–341.
7. Авдеев, В. И. Моделирование активных центров нанесенных катализаторов V₂O₅/SiO₂ и V₂O₅/TiO₂. Теоретический анализ оптических свойств методом DFT / В. И. Авдеев, Г. М. Жидомиров // Журн. структурной химии. – 2005. – Т. 46. – С. 599–612.

Поступило в редакцию 04.02.2015

УДК 543.42

*Е. В. ВОРОБЬЁВА, академик Н. П. КРУТЬКО, П. Д. ВОРОБЬЁВ,
Д. В. ЧЕРЕДНИЧЕНКО, Ю. В. МАТРУНЧИК*

КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРГАНИЧЕСКИХ РЕАГЕНТОВ В ОБРАЗЦАХ ХЛОРИДА КАЛИЯ МЕТОДОМ ИК СПЕКТРОСКОПИИ

*Институт общей и неорганической химии НАН Беларуси, Минск, Беларусь
evorobieva@igic.bas-net.by; krutko@igic.bas-net.by; pdvc@tut.by; cherednichenko@tut.by; Yuliya.M@tut.by*

Методом ИК фурье-спектроскопии проведен анализ содержания органических реагентов (смеси амина с экстрактом нефтяным) в образцах хлорида калия и определены основные метрологические характеристики. Для повышения точности анализа при обработке спектральных данных и построении градуировочных графиков предложено использовать нелинейное полиномиальное уравнение второй степени и учитывать оптическую плотность нескольких полос поглощения.

Ключевые слова: ИК спектроскопия, количественное определение, органические реагенты, хлорид калия.

E. V. VOROBIOVA, N. P. KRUTKO, P. D. VOROBIOV, D. V. CHEREDNICHENKO, J. V. MATRUNCHIK

QUANTITATIVE DETERMINATION OF THE ORGANIC REACTANTS IN THE SAMPLES OF POTASSIUM CHLORIDE BY IR SPECTROSCOPY

*Institute of General and Inorganic Chemistry of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
evorobieva@igic.bas-net.by; krutko@igic.bas-net.by; pdvc@tut.by; cherednichenko@tut.by; Yuliya.M@tut.by*

FTIR spectroscopy analysis of the organic reagent content (a mixture of amine to extract oil) in samples of potassium chloride was done and the main metrological characteristics were determined. To improve the accuracy of the analysis of the spectral data on the processing and construction of calibration curves, it is proposed to use second-degree non-linear polynomial equations and to take into account the optical density of several absorption bands.

Keywords: IR spectroscopy, quantitative analysis, organic reagents, potassium chloride.

Введение. В качестве реагентов, улучшающих физико-химические и механические свойства калийных удобрений, гидрофобизирующих поверхность, снижающих гигроскопичность и слеживаемость, используют различные виды нефтепродуктов, в частности, парафины, масла, вакуумный газойль, экстракт нефтяной или их композиции с алифатическими аминами [1; 2]. Количественное определение углеводородов в хлориде калия является достаточно сложной задачей, предусматривающей продолжительный химический анализ образцов. Один из наиболее известных и широко используемых методов основан на экстракции органических реагентов хлороформом с последующей его отгонкой и весовым определением остатка [3]. Метод ИК фурье-спектроскопии диффузного отражения, разработанный авторами [4], имеет несомненные преимущества, поскольку позволяет анализировать непосредственно образцы хлорида калия, модифицированные органическими реагентами, с высокой скоростью определения. Установленная зависимость интенсивности колебаний указанных полос поглощения от концентрации органических реагентов [4] позволяет использовать их для количественного определения.

Органические реагенты, в частности углеводородные соединения нефти, применяемые для обработки хлорида калия, представляют собой сложную смесь парафиновых, нафтеновых и ароматических углеводородов. Анализ осложняется взаимным влиянием компонентов в смесях углеводородов и их взаимодействием с поверхностью частиц хлорида калия, что проявляется в положении и интенсивности характерных полос поглощения. В данном случае необходима раз-

работка подходов, позволяющих минимизировать влияние химических процессов, происходящих в системе, на результаты анализа.

В настоящем сообщении на основании статистической обработки экспериментальных данных, полученных методом ИК спектроскопии, определены основные метрологические характеристики и обоснован способ обработки спектральных данных с целью повышения точности определения концентрации органических реагентов в образцах хлорида калия.

Экспериментальная часть. В работе в качестве органических реагентов использовали первичные алифатические амины R-NH₂, где R – органическая группа с содержанием C₁₄ – 1,5; C₁₆ – 28,5; C₁₈ – 48,0 и (C₂₀ + C₂₂) – 17,5 % и экстракт нефтяной (ТУ РБ 05778477-25–93). Смеси амина с экстрактом нефтяным (АЭН) готовили путем тщательного перемешивания реагентов в определенных соотношениях при нагревании на водяной бане до (75 ± 5) °С, затем обрабатывали смесью нагретый до той же температуры хлорид калия (KCl, х. ч.).

Спектры исследуемых образцов регистрировали в диапазоне частот 4000–400 см⁻¹ на инфракрасном фурье-спектрометре Avatar INTERTECH Corporation с приставкой диффузного отражения. Разрешение 4 см⁻¹, число сканов 64. Для каждого образца регистрировали не менее трех спектров. В качестве стандарта использовали хлорид калия марки х. ч.

На основании статистической обработки экспериментальных данных, полученных методом ИК спектроскопии, определяли основные метрологические характеристики [5–7].

Для оценки случайной составляющей погрешности результата измерений рассчитывали среднее арифметическое результатов параллельных наблюдений и выборочную дисперсию повторяемости по формулам (1), (2):

$$X_{ml} = \sum_{n=1}^N X_{mln} / N, \quad (1)$$

где X_{ml} – среднее значение группы параллельных наблюдений; X_{mln} – единичное значение группы параллельных наблюдений; N – число параллельных наблюдений;

$$S_{ml}^2 = \sum_{n=1}^N (X_{mln} - X_{ml})^2 / N - 1, \quad (2)$$

где S_{ml}^2 – выборочная дисперсия повторяемости.

На основе полученных значений выборочных дисперсий S_{ml}^2 , S_{mL}^2 рассчитывали статистику C_m по формуле

$$C_m = (S_{ml}^2)_{\max} / \sum_{l=1}^L S_{ml}^2$$

и сравнивали с $C_{\text{крит}}$ для уровней значимости 1 и 5 %.

Критерий Граббса, представляющий собой критерий межлабораторной изменчивости, применяли для проверки отклонений наибольших и наименьших значений X_{ml} по формулам (3)–(6)

$$G_{\max(1)} = \frac{X_{ml\max} - X_m}{S^*}, \quad (3)$$

$$G_{\min(1)} = \frac{X_m - X_{ml\min}}{S^*}, \quad (4)$$

$$S^* = \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^L (X_{ml} - X_m)^2}{L - 1}}, \quad (5)$$

$$X_m = \sum_{l=1}^L X_{ml} / L \quad (6)$$

и сравнивали с $C_{\text{крит}}$ для уровней значимости 1 и 5 %.

После сравнения полученных статистических данных не исключенные из расчетов S_{ml}^2 считали однородными и по ним оценивали среднее квадратическое отклонение (СКО), характеризующее повторяемость результатов параллельных определений. СКО рассчитывали по формуле

$$S_{R,m} = \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^L (X_{ml} - X_m)^2}{L-1} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right) S_{r,m}^2},$$

где n – число параллельных определений.

Показатель воспроизводимости (σ_R) рассчитывали следующим образом:

$$\sigma_R = \lambda_1 + \lambda_2 C_m. \quad (7)$$

Параметры λ_1 и λ_2 в (7) находили методом наименьших квадратов.

Показатель правильности методики анализа (верхнюю $\Delta_{св}$ и нижнюю $\Delta_{сн}$ границы, в которых неисключенная систематическая погрешность методики анализа находится с принятой вероятностью $P = 0,95$), рассчитывали по (8) (значение k в интервале 1,2 до 2,0)

$$\Delta_{св} = |\Delta_{сн}| = 1,96 \sqrt{(kS_1)^2 \frac{(kS_1)^2}{L} + \frac{(kS_2)^2}{L} + \frac{\Delta_0^2}{3}} = 1,96 \sigma_C. \quad (8)$$

Оценку показателя точности методики анализа: верхнюю (Δ_v) и нижнюю (Δ_n) границы, в которых погрешность результата анализа находится с принятой доверительной вероятностью $P = 0,95$, определяли по формуле

$$\Delta_v = |\Delta_n| = \Delta = 1,96 \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_c^2} = 1,96 \sigma(\Delta).$$

Результаты и их обсуждение. Для построения калибровочных зависимостей выбраны полосы поглощения 2955, 2923, 2852, 1376 см^{-1} . Область 3000–2800 см^{-1} характеризует симметричные и асимметричные валентные колебания С–Н в метильных и метиленовых группах: полосы при 2980–2950 см^{-1} – в CH_3 , 2940–2880 см^{-1} – в CH_2 , максимум при 2920 см^{-1} – в CH_2 - и CH_3 -группах [8; 9].

Полосы поглощения в области 1800–1350 см^{-1} характеризуют валентные и деформационные колебания CH_2 - и CH_3 -групп (1475–1450, 1410; 1383–1377 см^{-1}), С=C (1648–1638 см^{-1}), $\text{C}_{\text{Ar}}-\text{C}_{\text{Ar}}$ (1610–1600 см^{-1}) парафиновых, нафтеновых и ароматических структур, а также колебания групп NH_2 и NH_3^+ (1625–1560, 1550–1505 см^{-1}) аминов и колебания карбонатных групп (1450–1410 см^{-1}). На интенсивность полос поглощения в области 1800–1550 см^{-1} также может оказывать влияние кристаллизационная вода (1640–1615 см^{-1}) [10; 11].

Указанные полосы поглощения присутствуют в спектрах всех исследованных образцов хлорида калия после обработки органическими реагентами (АЭН). Из данных табл. 1 видно, что при повышении концентрации АЭН наблюдается рост интенсивности поглощения валентных и деформационных С–Н колебаний при 2955, 2923, 2852 и 1376 см^{-1} . Зависимость интенсивности колебаний от концентрации реагентов позволяет использовать их для количественной оценки содержания органических реагентов в хлориде калия.

Т а б л и ц а 1. Интенсивности полос поглощения в спектрах хлорида калия, обработанного АЭН

Массовая доля АЭН, мг/кг КСl	Полоса поглощения, см^{-1}			
	2955	2923	2852	1376
520	0,036	0,060	0,040	0,032
1010	0,072	0,107	0,072	0,042
3020	0,158	0,217	0,149	0,069
3940	0,181	0,240	0,166	0,075
6010	0,254	0,333	0,246	0,088

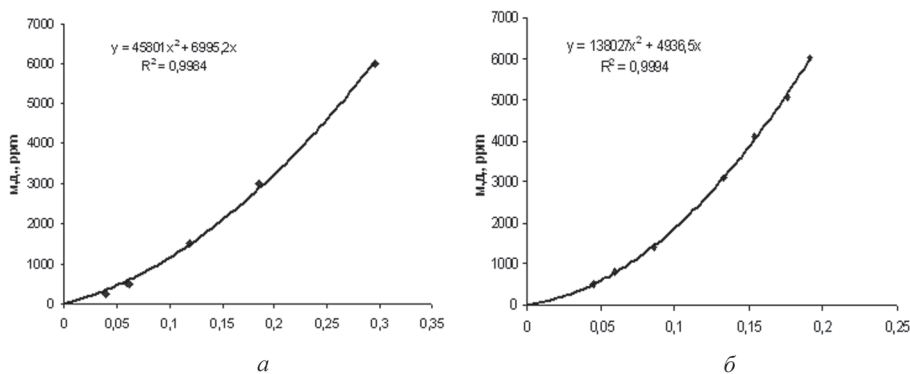
Количественный анализ выполняется сравнением оптической плотности при определенной длине волны в максимуме полосы поглощения с оптической плотностью того же вещества известной стандартной концентрации.

Калибровочные графики оптической плотности (полосы поглощения 2923 и 2852 см⁻¹) образцов хлорида калия, обработанных АЭН, отклоняются от линейной зависимости (рисунок). На калибровочных графиках методом наименьших квадратов рассчитаны величины достоверности аппроксимации R^2 (коэффициент корреляции). В уравнении аппроксимирующей зависимости множитель перед значением показателя (x) соответствует тангенсу угла наклона аппроксимирующей прямой и характеризует чувствительность анализа. Свободный член в уравнении характеризует точку пересечения аппроксимирующей прямой с осью оптической плотности и нижний предел обнаружения органического реагента в образце хлорида калия.

Исследуемая система не подчиняется закону Бугера–Ламберта–Бера, что выражается в нарушении линейной зависимости между концентрацией поглощающего вещества и величиной оптической плотности. Принимая во внимание известные данные, что при больших концентрациях определяемого вещества в пробе имеет место уменьшение угла наклона градуировочного графика к оси концентраций, что снижает чувствительность и увеличивает погрешность определения [11] и, предположив, что наблюдаемые отклонения связаны с высокой концентрацией органической добавки, мы провели разбавление исследуемых образцов в два раза. Однако результаты исследований показали, что и в таком варианте зависимость интенсивности спектральной линии от массовой доли не имеет линейного характера.

Основной причиной наблюдаемых отклонений является, вероятно, образование на поверхности хлорида калия межмолекулярных ассоциатов между алифатическими аминами, их солями, парафино-нафтеновыми и полициклическими углеводородами. Вероятность таких взаимодействий рассматривается в литературе [10; 12] и подтверждается результатами наших исследований. Показано, что с уменьшением массовой доли амина в смеси в 2 раза при одинаковом содержании АЭН в образце хлорида калия (3 г/кг KCl) интенсивность полос поглощения нафтеновых сопряженных структур в области 970 см⁻¹ уменьшается в 3,5 раза и аренов в области 750 см⁻¹ – в 4,7 раза.

Кроме того, известно [12; 13], что форма и интенсивность полос поглощения твердых углеводородов нефти зависят от их фазового состояния. Так, n-алканы в зависимости от температуры могут кристаллизоваться в четырех формах: гексагональной (α), орторомбической (β), моноклинной (γ) и триклинной (δ). В жидком состоянии (при повышенной температуре или в растворе) парафины представляют собой смесь поворотных изомеров. При быстром охлаждении молекулы не успевают принять устойчивую плоскую форму и включаются в кристаллическую решетку в неизменном состоянии (в виде поворотных изомеров), что обеспечивает многообразие кристаллических дефектов и, следовательно, появление в спектрах различных серий спектральных линий. При медленном охлаждении поворотные изомеры молекул парафина переходят в устойчивую плоскую форму и спектр упрощается.



Калибровочные графики зависимости оптической плотности образцов хлорида калия от содержания АЭН. Полоса поглощения, см⁻¹: а – 2923; б – 2852

Таким образом, в системе возможно одновременное образование нескольких фаз, имеющих разный коэффициент преломления, что осложняет процесс диффузного отражения и сказывается на количественной интерпретации ИК спектров, в том числе вследствие высокой чувствительности метода.

Сложный контур области поглощения 1800–1350 см⁻¹ формируется из большого числа перекрывающихся и не подающихся однозначной интерпретации конформационно-чувствительных полос. Наблюдаемое увеличение интенсивности полосы 1461 см⁻¹ не пропорционально содержанию АЭН и искажает результаты количественного анализа.

В рассматриваемой системе для описания уравнения нелинейной корреляционной связи между массовой долей органической примеси (y) и интенсивностью оптической плотности (x) использовали полином второй степени

$$y = a + bx + cx^2, \quad (9)$$

где a , b и c – коэффициенты нелинейной корреляционной связи.

В (9) коэффициент a может быть равен нулю в том случае, когда точка пересечения осей привязана к нулю (рисунок). В геометрическом плане коэффициент c характеризует кривизну параболы, описываемой (9), поскольку является ее второй производной.

Для повышения точности количественного анализа содержания органических добавок в хлориде калия необходимо в градуировочном уравнении (9) учитывать значения оптической плотности полос поглощения 1376, 2923 и 2852 см⁻¹:

$$y = a + b \left(\frac{D_{2923} + D_{1376}}{D_{1376}} - \frac{D_{2923}}{D_{2852}} \right) + c \left(\frac{D_{2923} + D_{1376}}{D_{1376}} - \frac{D_{2923}}{D_{2852}} \right)^2, \quad (10)$$

где D_{2923} , D_{2852} , D_{1376} – высота пика в максимуме полосы поглощения 2923, 2852 и 1376 см⁻¹ соответственно.

Используя уравнение корреляционной связи между массовой долей органической примеси (y) и интенсивностью оптической плотности (x) в виде полинома второй степени (10), рассчитывали основные метрологические характеристики результатов измерений в относительном выражении для различных диапазонов содержания органических реагентов. Для этого измеряли значения оптической плотности при 2923, 2852 и 1376 см⁻¹ и вычисленные по калибровочному графику массовые доли органических примесей сравнивали с заданными значениями. Полученные данные приведены в табл. 2, 3.

Т а б л и ц а 2. Относительная погрешность определения содержания АЭН

Высота пика в максимуме полосы поглощения, отн.ед.			Массовая доля, мг/кг		Относительная погрешность, %
D_{1376}	D_{2852}	D_{2923}	заданная	определенная	
0,210	0,042	0,061	512	548	7
0,194	0,057	0,087	991	931	6
0,220	0,100	0,148	1989	2069	4
0,226	0,125	0,185	2977	2828	5
0,220	0,149	0,213	3964	4123	4
0,222	0,167	0,242	4953	4853	2

Т а б л и ц а 3. Основные метрологические характеристики результатов измерений в относительном выражении для различных диапазонов содержания органических реагентов

Диапазон измерений, мг/кг	Метрологический показатель, %		
	воспроизводимости (σ_R)	правильности ($\pm\Delta_c$)	точности ($\pm\Delta$)
500–1000	2,7	2,2	6,2
1000–2000	2,6	1,9	5,3
2000–5000	2,3	1,8	5,0
5000–7000	2,1	1,7	4,2

Использование регрессионного анализа при количественной оценке содержания органических реагентов в образцах хлорида калия позволило оценить достоверность концентрационных кривых и осуществить выбор уравнения корреляционной связи между концентрацией органической примеси и интенсивностью оптической плотности в виде полинома второй степени.

Таким образом, на основании статистической обработки экспериментальных данных, полученных методом ИК фурье-спектроскопии, определены основные метрологические характеристики анализа содержания органических реагентов в образцах хлорида калия. Экспериментально установленное отклонение концентрационных зависимостей оптической плотности от основного закона светопоглощения, обусловленное межмолекулярными взаимодействиями органических реагентов в смеси АЭН и с поверхностью хлорида калия, снижает точность количественного определения органических реагентов. Для повышения точности анализа при обработке спектральных данных и построении градуировочных графиков предложено использовать нелинейное полиномиальное уравнение второй степени. Метод ИК спектроскопии позволяет с высокой точностью проводить количественное определение органических реагентов в образцах минеральных солей и может быть рекомендован для использования в производственных условиях.

Список использованной литературы

1. Влияние поверхностно-активных модификаторов на физико-химические свойства гранулированных калийных удобрений / Ф. Ф. Можейко [и др.] // ЖПХ. – 2002. – Т. 75, № 9. – С. 183–187.
2. Способ кондиционирования гранул хлористого калия: пат. 11551 Респ. Беларусь, МПК С 01D 3/00 / Н. П. Крутько, А. Д. Маркин, А. Н. Башура и др.; заяв. ГНУ «Институт общей и неорганической химии Нац. акад. наук Беларуси»; РУП «Производственное объединение «Беларуськалий». – № а 20070659; заявл. 31.05.07; опубл. 28.02.09 // Официальный бюл. Нац. центр интеллектуал. собственности. – 2009.
3. Калий хлористый. Технические условия: ГОСТ 4568–95. – Введ. 01.07.97. – Минск: Межгосударственный технический комитет МКТ 285 «Калийные удобрения и продукты переработки калийсодержащих руд», 1997. – 12 с.
4. Метрологические аспекты количественного анализа органических реагентов в хлористом калии методом ИК-спектроскопии / Е. В. Воробьева [и др.] // Обогащение руд. – 2006. – № 5. – С. 23–26.
5. Государственная система обеспечения единства измерений. Показатели точности, правильности, прецизионности методик количественного химического анализа. Методы оценки: МИ 2336–2002. – Дата принятия 24.10.02. – Екатеринбург: Государственный комитет Российской Федерации по стандартизации и метрологии, 2002. – 46 с.
6. Точность (правильность и прецизионность) методов и результатов измерений: СТБ ИСО 5725-1-2002. – Введ. 01.11.02. – Россия: Федеральное государственное унитарное предприятие «Всероссийский научно-исследовательский институт метрологической службы» Госстандарта России, 2002. – 31 с.
7. Чарыков, А. К. Математическая обработка результатов химического анализа / А. К. Чарыков. – Л.: Химия, 1984. – 168 с.
8. Смит, А. Прикладная ИК-спектроскопия / А. Смит; пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 328 с.
9. Флотационные реагенты. Механизм действия, физико-химические свойства, методы исследования и анализа / под ред. В. А. Кремера. – М.: Недра, 1974. – 240 с.
10. Иванова, Л. В. ИК-спектрометрия в анализе нефти и нефтепродуктов / Л. В. Иванова, Р. З. Сафиева, В. Н. Кошелев // Вестн. Башкирского ун-та. – 2008. – Т. 13, № 4. – С. 869–874.
11. Сильверстейн, Р. Спектрометрическая идентификация органических соединений / Р. Сильверстейн, Ф. Вебстер, Д. Кимл. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011. – 557 с.
12. Казакова, Л. П. Твердые углеводороды нефти / Л. П. Казакова. – М.: Химия, 1986. – 176 с.
13. Казаченко, Л. П. Молекулярная спектроскопия жидкостей / Л. П. Казаченко. – Минск: Изд-во БГУ, 1978. – 176 с.

Поступило в редакцию 06.05.2015

БИОЛОГИЯ

УДК 595.341.1.018(285.2)(476)

В. В. ВЕЖНОВЕЦ, А. Г. ЛИТВИНОВА

**РАЗМЕРНО-ВОЗРАСТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА *EURYTEMORA LACUSTRIS*
В ОЗЕРАХ БЕЛАРУСИ**

(Представлено членом-корреспондентом В. П. Семенченко)

Научно-практический центр НАН Беларуси по биоресурсам, Минск, Беларусь
vzv@belbio.bas-net.by; nastya_litvinova_1986@mail.ru

Впервые для редкого и охраняемого вида эуритеморы озерной получены линейные размеры для всех возрастов. Диапазон размеров тела взрослых животных из озер Беларуси укладывается в пределы размеров, указанных в литературе для водоемов России и стран Западной Европы. Установлено, что длина тела половозрелых самцов превышает длину тела самок, что не характерно для других видов планктонных пресноводных копепоид и противоречит литературным данным. Установленный факт является отличительной особенностью для этого вида.

Ключевые слова: копепода, *Eurytemora lacustris*, размеры тела, стадии развития, озера Беларуси.

V. V. VEZHNAVETS, A. G. LITVINOVA

SIZE AND AGE CHARACTERISTICS OF *EURYTEMORA LACUSTRIS* IN THE LAKES OF BELARUSThe Scientific and Practical Center for bioresources of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
vzv@belbio.bas-net.by; nastya_litvinova_1986@mail.ru

For the first time the linear sizes of a rare and protected species *Eurytemora lacustris* have been obtained for all ages. The range of body sizes of adult animals from the lakes of Belarus is within the size limits indicated in the literature on the water bodies of Russia and the countries of Western Europe. It has been found that the body length of adult males exceeds that of females, which is not typical for other species of planktonic freshwater copepods and contradicts the literature data. The established fact is a distinctive feature of this species.

Keywords: copepod, *Eurytemora lacustris*, body size, age stage, lakes of Belarus.

Введение. Эуритемора озерная – *Eurytemora lacustris* – один из двух представителей каланоидных копепоид семейства *Temoridae* в фауне Беларуси. Он обитает только в двух мезотрофных озерах – Волчин и Вечелье, расположенных в Витебской области [1; 2]. Этот вид встречается и в некоторых озерах стран Западной Европы [3–5]. Центром его ареала считается север Европы и Западная Сибирь, южная граница ареала вида проходит по северо-западу Беларуси [6; 7]. Относится к редким реликтовым видам, в Беларуси и некоторых соседних странах Европы занесен в красные книги [3].

Размерные характеристики для этого вида немногочисленны и известны только для взрослых особей, для всех других стадий развития размеры тела в литературе отсутствуют, в том числе и для водоемов Беларуси. Традиционно считается, что у пресноводных планктонных копепоид, к которым относится эуритемора, длина тела самок превышает длину самцов.

Цель работы – получить размеры эуритемор всех возрастов в водоемах Беларуси.

Материалы и методы исследования. Основные исследования были проведены на озере Вечелье (Ушачский р-н, Витебская обл.) в бассейне реки Крошенка. Вечелье – средне-глубокий во-

доем. Его площадь составляет около 1,4 км²; максимальная глубина – 35,9 м; средняя – 18,5 м при объеме воды – 25,13 млн м³ [8]. Частично привлечены материалы и по озеру Волчин (бассейн реки Мяделка), расположенному в Мядельском районе Минской области. Максимальная глубина этого водоема 32,9 м; средняя – 14,8 м; объем – 7,87 млн. м³. Оба озера относятся к водоемам мезотрофного типа.

Пробы зоопланктона отобраны в пелагиали озер на станциях с максимальной глубиной количественной планктонной сетью с диаметром ячеей фильтрующего конуса 100 мкм. Лабораторная обработка проб проводилась в счетной камере Богорова под бинокулярным микроскопом МБС-10 при увеличении 4 × 8, где измеряли длину тела копепоидов и отбирали науплиусов. Цена деления окуляр-микрометра при этом составляла 0,025 мм. Копепоидитные стадии развития измеряли от начала головогруды до конца фуркальных ветвей без фуркальных щетинок. Для измерения длины науплиев, а также уточнения морфологических деталей использовался исследовательский микроскоп Jenaval с увеличением до 600, при цене деления 0,004 мм.

Результаты и их обсуждение. В процессе онтогенеза *E. lacustris*, как и другие виды каланид, проходит 6 науплиальных (N I–N VI) и 6 копепоидитных (C I–C VI) стадий развития. Нами впервые установлены размеры тела для всех стадий развития (табл. 1). Эти параметры рассматриваются отдельно для самок и самцов, начиная с пятой копепоидитной стадии.

Т а б л и ц а 1. Размеры тела (*L*, мм) стадий развития *E. lacustris* в оз. Вечелье (сезон 2014–2015 гг.)

Стадия развития	<i>n</i>	<i>L</i> , мин.–макс.	<i>L</i> , среднее
<i>Науплиальные стадии развития</i>			
N I	50	0,120–0,136	0,130
N II	178	0,136–0,184	0,162
N III	157	0,184–0,224	0,199
N IV	130	0,232–0,280	0,250
N V	42	0,280–0,344	0,311
N VI	19	0,352–0,408	0,376
<i>Копепоидитные стадии развития</i>			
C I	65	0,442–0,546	0,508
C II	122	0,546–0,728	0,648
C III	219	0,702–0,910	0,812
C IV	411	0,832–1,118	0,960
C V ♂	122	1,040–1,300	1,164
C V ♀	183	0,988–1,248	1,099
C VI ♂	271	1,092–1,534	1,340
C VI ♀	415	1,092–1,534	1,308

Полученные нами данные для взрослых особей хотя и совпадают по размерному диапазону с опубликованными ранее для озера Вечелье (1,16–1,55 мм), но не согласуются с имеющимся там утверждением, что самки (средний размер – 1,52 мм) крупнее самцов (средний размер – 1,37 мм) [2]. Исходя из полученных нами данных размерный диапазон (*L*, мин.–макс.) пятой стадии развития у самцов и самок отличается, а измеренные животные шестой копепоидитной стадии имеют полностью совпадающий диапазон размерных характеристик. Средняя длина тела зрелых (C VI) самцов и самок *E. lacustris* в оз. Вечелье также практически совпадают при несколько более крупных размерах все же самцов. Максимальная длина тела взрослых особей в озерах Беларуси может достигать 1,7 мм [9].

Проведенный статистический анализ выборок для взрослых особей обоих полов показал, что распределение не подчиняется нормальному. Поэтому сравнение было проведено по тесту Mann–Whitney *U*-тест. Согласно этому тесту, сравниваемые выборки размеров самцов и самок статистически различаются ($p < 0,05$), т. е. линейные размеры самцов все же превышают таковые для самок.

Для большинства пресноводных каланоидных копепоид, как правило, характерна большая длина тела для самок. В целом *E. lacustris* относят к среднеразмерной группе пресноводных ко-

пепод, у которых длина взрослых животных колеблется от 1,1 до 1,5 мм [10]. Для изучаемого вида в определительных таблицах всегда указываются более крупные размеры для самок. Так, по Е. В. Боруцкому [11], у *E. lacustris* для водоемов бывшего СССР приводится длина самки – 1,1–1,3 мм, при этом замечается, что «размеры самцов лишь немногим менее». В более позднем и полном издании Е. В. Боруцкий и соавт. [12] для этого вида приводят следующий диапазон размеров: длина самок 1,1–1,5 мм, самцов – 1,0–1,4 мм. В определителе пресноводных беспозвоночных России указывается только общая длина взрослых животных 1,0–1,4 мм без разделения по полу [13]. Размеры из конкретных местообитаний известны для эстуария р. Одер (Польша): длина самок от 0,923 до 1,425 мм; самцов – от 1,245 до 1,290 мм [14]. Согласно единичным измерениям длины *E. lacustris* из озера Меларен (Швеция), линейные размеры самца равны 1,2 мм (1 измерение), самок – 1,5 и 1,64 мм (2 измерения). Таким образом, согласно имеющимся литературным данным наблюдаются относительно слабые вариации линейных размеров тела у взрослых особей данного вида в пределах ареала, при этом размеры самок превышают таковые самцов.

В связи с расхождением наших данных и приводимых сведений в литературе, проведена дополнительная работа по определению размеров взрослых особей в озерах Вечелье и Волчин из ранее отобранных проб (табл. 2). Для анализа использованы взрослые животные только шестой копеподитной стадии. При этом самцы отличались от предыдущей стадии развития утолщением на видоизмененной правой антеннуле. Самок без яйцевых мешков относили к шестой стадии по минимальному размеру встреченных яйценосных особей. Чтобы исключить ошибки при определении возраста у самок, за основу брали разницу в размерах между яйценосными самками и зрелыми самцами. Учитывая обитание вида при относительно низкой температуре в течение всего года, что характеризует этот вид как холодолюбивую форму, по нашему мнению, температурный фактор для этого вида не имеет решающего значения. Несмотря на это, чтобы исключить влияние температуры на дефинитивные размеры, для измерений использовали животных только из летних проб. В результате были подтверждены выше указанные закономерности и для предыдущих лет наблюдений, причем как для озера Вечелье, так и для озера Волчин. При этом взрослые животные в озере Волчин крупнее, чем в Вечелье (по обоим полам разница составляла приблизительно 0,1–0,2 мм), но самцы также имеют большую длину тела, чем самки.

Т а б л и ц а 2. Размерные характеристики (L , мм) взрослых особей *E. lacustris* в разные годы наблюдений из разных озер

	$L_{\text{♀ov}}$	$L_{\text{♀}}$	$L_{\text{♂}}$	$L_{\text{♂}} - L_{\text{♀ov}}$
<i>оз. Вечелье, 03.08.2002</i>				
L , среднее	1,329	–	1,350	0,021
L , макс.	1,400	–	1,425	
L , мин.	1,250	–	1,275	
n	20	–	10	
<i>оз. Вечелье, 13.06.2005</i>				
L , среднее	1,232	1,233	1,289	0,056
L , макс.	1,400	1,400	1,475	
L , мин.	1,150	1,150	1,125	
n	17	31	20	
<i>оз. Волчин, 22.07.1992</i>				
L , среднее	1,445	1,437	1,476	0,031
L , макс.	1,550	1,525	1,550	
L , мин.	1,325	1,325	1,325	
n	22	10	23	

П р и м е ч а н и е: $L_{\text{♀ov}}$ – яйценосные самки.

С целью подтверждения полученных результатов нами проведено измерение основных частей тела взрослых особей из зимних проб Вечелья, когда наблюдалась высокая их плотность в озере. Отдельно были измерены длина головогруды (L_{Cphd}) и длина брюшка (L_{Abd}) у 26 особей

Т а б л и ц а 3. Размеры (L , мм) основных частей тела взрослых особей *E. lacustris*

Показатель	Размер		
	Макс.	Мин.	Среднее
<i>Самки, n = 26</i>			
L_{Cpht}	0,884	0,728	0,802
L_{Abd}	0,624	0,468	0,524
$L_{Cpht} + L_{Abd}$	1,456	1,222	1,326
<i>Самцы, n = 26</i>			
L_{Cpht}	0,832	0,676	0,781
L_{Abd}	0,650	0,520	0,588
$L_{Cpht} + L_{Abd}$	1,482	1,222	1,369

каждого пола (табл. 3). В результате оказалось, что длина цефалоторакса, в отличие от общей длины, у самок несколько больше, чем у самцов в среднем на 0,021 мм. С другой стороны, у самцов длиннее abdomen с фуркальными ветвями на величину 0,064 мм, что и определяет в результате большую общую длину их тела ($L_{Cpht} + L_{Abd}$).

В результате для изучаемого вида в условиях Беларуси характерна почти совпадающая по размерному диапазону длина самцов и самок, при этом размеры взрослых самцов больше на 0,02–0,05 мм за счет более стройных фуркальных ветвей abdomen, что и подтверждается результатами статистического анализа.

Заключение. Впервые для каланоидной копеподы *Eurytemora lacustris* получены размерные характеристики всех стадий развития. Установлены размеры тела для взрослых животных в условиях белорусских водоемов. Длина тела дефинитивных особей из озер Беларуси находится в диапазоне размеров, указанных в литературе для водоемов России и некоторых стран Западной Европы. Показано, что длина тела самцов превышает длину тела самок, что не характерно для других видов планктонных пресноводных копепод и противоречит литературным данным. Большую длину тела у взрослых самцов необходимо считать отличительной особенностью для этого вида.

Работа выполнена при частичной поддержке БРФФИ (грант № Б14МС-008) и аспирантского гранта «Биология и современное состояние популяций реликтовых и чужеродных видов рода *Eurytemora* (Copepoda, Calanoida) в водоемах Беларуси».

Список использованной литературы

1. Петрович, П. Г. Видовой состав зоопланктона рыбопромысловых озёр западных областей БССР / П. Г. Петрович // Уч. зап. БГУ им. В. И. Ленина. – 1956. – Вып. 26. – С. 3–39.
2. Митрахович, П. А. Характеристика популяции *Eurytemora lacustris* (Poppe) в оз. Вечелье Белорусской ССР / П. А. Митрахович, В. П. Ляхнович // Вестн. БГУ им. В. И. Ленина. – 1979. – № 2. – С. 39–44.
3. Balevičius, K. Red Data Book of Lithuania. Rare and endangered species of animals, plants and fungi / K. Balevičius. – Vilnius, 1992. – 366 p.
4. Вежновец, В. В. Фауна пелагиали озер Белорусского Поозерья / В. В. Вежновец, Г. А. Галковская, В. В. Арапов // Сохранение биологического разнообразия Белорусского Поозерья: тез. докл. регион. науч.-практ. конф., 25–26 апреля 1996. – Витебск, 1996. – С. 101–102.
5. Arbačiauskas, K. Occurrence and interannual abundance variation of glacial relict calanoids *Limnocalanus macrurus* and *Eurytemora lacustris* in Lithuanian lakes / K. Arbačiauskas, D. Kalvytė // Acta zoologica Lituanica. – 2010. – Vol. 20, N 1. – P. 61–67.
6. Habitat characteristics of *Eurytemora lacustris* (Poppe, 1887) (Copepoda, Calanoida): the role of lake depth, temperature, oxygen concentration and light intensity / P. Kasprzak [et al.] // Internat. Rev. Hydrobiol. – 2005. – Vol. 3. – P. 292–309.
7. Вежновец, В. В. Распространение *Eurytemora lacustris* (Poppe, 1887) (Copepoda, Calanoida) в озерах Беларуси / В. В. Вежновец, А. Г. Литвинова // Экологическая культура и охрана окружающей среды: I Дорофеевские чтения: мат. междунар. науч.-практ. конф., 21–22 ноября 2013. – Витебск, 2013. – С. 87–88.
8. Дзісько, Н. А. Блакітная кніга Беларусі: энцыкл. / Н. А. Дзісько. – Мінск, 1994. – 94 с.

9. Озерная эвритемора // Красная книга Республики Беларусь в рамках проекта ПРООН ГЭФ Полесье [Электронный ресурс]. – 2006. – Режим доступа: <http://redbook.minpriroda.gov.by/animalsinfo.html?id=177>.
10. Northkote, T. G. Feeding ecology of *Coregonus albula* and *Osmerus eperlanus* in the limnetic waters of lake Mälaren, Sweden / T. G. Northkote, J. Hammar // Boreal environment research. – 2006. – N 11. – P. 229–246.
11. Боруцкий, Е. В. Определитель свободноживущих пресноводных веслоногих раков СССР и сопредельных стран по фрагментам в кишечниках рыб / Е. В. Боруцкий. – М., 1960. – 117 с.
12. Боруцкий, Е. В. Определитель Calanoida пресных вод СССР / Е. В. Боруцкий, Л. А. Степанова, М. С. Кос. – Л., 1991. – 504 с.
13. Цалолихин, С. Я. Определитель пресноводных беспозвоночных России и сопредельных территорий. Ракообразные / С. Я. Цалолихин. – СПб., 1995. – 627 с.
14. Wolska, M. Seasonality of zooplankton changes phenomena observed in the estuarine part of the Oder River / M. Wolska, W. G. Piasecki // Limnological Review. – 2007. – Vol. 7, N 2. – P. 117–121.

Поступило в редакцию 27.05.2015

УДК 597-19(476)

В. К. РИЗЕВСКИЙ, И. А. ЕРМОЛАЕВА, А. В. ЛЕЩЕНКО, А. П. КУДРИЦКАЯ
**БЫЧОК-ПЕСОЧНИК *NEOGOBIOUS FLUVIATILIS* – ПОНТО-КАСПИЙСКИЙ
ЧУЖЕРОДНЫЙ ВИД РЫБ В БАССЕЙНЕ Р. НЕМАН**

(Представлено членом-корреспондентом В. П. Семенченко)

НПЦ НАН Беларуси по биоресурсам, Минск, Беларусь
RVK869@mail.ru; Incha_2005@mail.ru; andreyleshch@mail.ru; imbris.09@mail.ru

Показана натурализация бычка-песочника *Neogobius fluviatilis* (Pallas, 1814) в бассейне р. Неман и выявлен новый путь инвазии понто-каспийских рыб в бассейн Балтийского моря. Установлено доминирующее место чужеродного вида в структуре рыбного населения мелководной прибрежной зоны Вилейского вдхр.

Ключевые слова: бычок-песочник, чужеродный понто-каспийский вид рыб, бассейн р. Неман.

V. K. RIZEVSKY, I. A. ERMOLAEVA, A. V. LESCHENKO, A. P. KUDRITSKAYA

**MONKEY GOBY *NEOGOBIOUS FLUVIATILIS* – THE ALIEN PONTO-CASPIAN FISH SPECIES
IN THE NEMAN RIVER BASIN**

Scientific and Practical Center of the National Academy of Sciences of Belarus for Biological Resources, Minsk, Belarus
RVK869@mail.ru; Incha_2005@mail.ru; andreyleshch@mail.ru; imbris.09@mail.ru

Naturalization of a monkey goby *Neogobius fluviatilis* (Pallas, 1814) for the basin of the Neman River has been shown. The new way of invasion of the Ponto-Caspian fishes to the basin of the Baltic Sea has been revealed. It has been established that the alien species *N. fluviatilis* is a dominant fish species in littoral zone of Vileysky reservoir.

Keywords: Monkey goby, alien ponto-caspian fish, Neman river basin.

Введение. В настоящее время имеется достаточное количество примеров расширения ареалов и резкого увеличения численности отдельных видов гидробионтов в результате инвазий с глобальными экологическими, экономическими и социальными последствиями.

В течение последних 25 лет в водоемах Беларуси были выявлены 7 понто-каспийских чужеродных видов рыб, проникших в водоемы страны из Киевского водохранилища (Украина) вследствие антропогенно обусловленного расширения ареала, связанного со строительством на р. Днепр каскада водохранилищ (далее виды-аутовселенцы): бычок-гонец *Neogobius gymnotrachelus* (Kessler, 1857), бычок-кругляк *Neogobius melanostomus* (Pallas, 1814), бычок-цуцик *Proterorhinus marmoratus* (Pallas, 1814), колюшка малая южная *Pungitius platigaster* (Kessler, 1859), черноморская пухлощечкая игла-рыба *Syngnathus abaster* Risso, 1827, пуголовка звездчатая *Benthophilus stellatus* (Sauvage, 1874) и тюлька черноморско-азовская *Clupeonella cultriventris* (Nordmann, 1840) [1–5].

Однако первым из известных чужеродных видов, расширяющих ареал из Черного моря вверх по впадающим в него водотокам и выявленных в водотоках Беларуси, является бычок-песочник *Neogobius fluviatilis* (Pallas, 1814). Впервые песочник на территории Беларуси был выявлен в реках Днепр и Сож в 1936 г. [6]. В начале XXI в. данный вид указывают уже для верховьев Днепра у Смоленска (Россия) [7].

В конце XX в. бычок-песочник отмечается также и в бассейне Балтийского моря: на территории Беларуси в р. Мухавец (приток р. Зап. Буг) [1] и на территории Польши в р. Зап. Буг [8]. В настоящее время этот понто-каспийский вид отмечен в Европе во многих водотоках бассейнов Балтийского и Северного морей [9; 10]. Проникновение песочника в бассейны этих морей в ос-

новном происходит через территорию Беларуси по так называемому центральному инвазионному коридору, описанному А. Bij de Vaate [11], и состоящего из рек: Днепр–Припять (бассейн Черного моря)–Зап. Буг–Висла–Одер (бассейн Балтийского моря)–Эльба–Вессер–Эмс–Рейн (бассейн Северного моря).

Ни в бассейне Зап. Двины, ни в бассейне Немана, относящихся к бассейну Балтийского моря, но не входящих в систему водотоков центрального инвазионного коридора, до начала XXI в. понто-каспийских видов-аутовселенцев (в т. ч. и песочника) не отмечалось. Впервые сведения о поимке единичных экземпляров бычка-песочника в бассейне р. Неман (в Вилейском вдхр. на р. Виля) появились в 2008 г. [12].

Целью настоящего исследования было подтверждение обитания бычка-песочника *Neogobius fluviatilis* (Pallas, 1814) в бассейне р. Виля и установление его роли в структуре рыбного населения мелководной прибрежной зоны данного водотока.

Материалы и методы исследований. Исследования структуры рыбного населения р. Виля проводили в летний период 2013 г. на трех участках в пределах Вилейского района: участок 1 – р. Виля в 10 км выше Вилейского вдхр.; участок 2 – Вилейское вдхр.; участок 3 – р. Виля в 15 км ниже Вилейского вдхр. Лов рыбы осуществляли мелкочейистым неводом (8–10 мм, длина 30 м, высота 2 м) на глубине не более 2 м. Облавливались однотипные прибрежные биотопы. Всего осуществлено 31 притонение. После поштучного подсчета всех особей каждого вида рыб и определения их общей массы в каждом улове рыба (кроме бычка-песочника) выпускалась в живом виде обратно в водоток в месте её поимки. Бычка-песочника фиксировали в 4 %-ном растворе формалина для дальнейшего лабораторного исследования.

Для каждого участка (и в целом для трех обловленных участков) рассчитывали среднюю долю каждого вида в общей численности рыбы в уловах (N , %), а также коэффициент встречаемости (V , %) и индекс доминантности (I_d). При значениях $I_d \geq 1,0$ вид считали доминантным, при $0,99 \geq I_d \geq 0,01$ – субдоминантным, и при $I_d < 0,01$ – подчиненным. При встречаемости вида в 50 % притонений и более ($V \geq 50$ %) вид считали константным.

Помимо этого для обнаружения бычка-песочника в прибрежной зоне на глубине до 1,0 м среди камней на укрепляющих берег Вилейского вдхр. бетонных плитах применяли крючковую снасть (удочку). Непосредственно в береговой зоне р. Виля в пределах Вилейского р-на, а также в каналах Вилейско-Минской водной системы на глубине 30–50 см среди прибрежной растительности на песчаном грунте рыб отлавливали сачком (ячей 5 мм). На каменистых перекатах на русле р. Виля в пределах Островецкого р-на (Гродненская обл.) на глубине 50–70 см применяли электроловильную установку Samus-725MP.

Результаты и их обсуждение. Всего в уловах на трех обловленных мелкочейистым неводом участках р. Виля в пределах Вилейского района было выявлено 16 видов рыб, относящихся к 7 семействам. Наиболее представительными были семейства Карповые (8 видов) и Окуневые (3 вида), остальные семейства представлены по одному виду. Среди отловленных видов рыб в уловах был отмечен также и бычок-песочник. При этом в целом для трех обловленных участков доля его в уловах была наибольшей и составила 40,17 % всех выловленных экземпляров рыб. За песочником по численности в уловах следовали плотва и окунь (соответственно 30,42 и 14,16 %). Эти же три вида рыб в целом для трех участков были константными и доминантными (табл. 1).

На участке р. Виля выше Вилейского вдхр. бычок-песочник как в уловах мелкочейистым неводом, так и в уловах сачком обнаружен не был. Всего в уловах мелкочейистым неводом на данном участке было выявлено 7 видов рыб, среди которых доминировал окунь. Его доля в общих уловах составила 78,91 % всех выловленных экземпляров рыб (табл. 2).

В неводных уловах в Вилейском вдхр. также было выявлено 7 видов рыб, но здесь, в отличие от участка выше водохранилища, во всех притонениях присутствовал бычок-песочник (встречаемость 100 %), и его доля по численности в уловах оказалась максимальной – 57,03 %. Численность песочника на 100 м² обловленной площади здесь составила 15,7 экз. Довольно значительной в Вилейском вдхр. была также и доля в уловах окуня – 25,72 %. Соотношение окунь : песочник здесь составляло 1 : 2,2.

Т а б л и ц а 1. Встречаемость, индекс доминантности (по численности) и доля в улове (по численности) молоди рыб на прибрежных мелководьях Вилейского вдхр. и р. Вилия в пределах Вилейского района (в целом для трех участков)

Вид рыб	Семейство	В целом для исследованного участка		
		доля в улове, N , %	встречаемость, V , %	индекс доминантности, I_d
Бычок-песочник	Бычковые	40,17	55	22,03
Окунь	Окуневые	30,42	87	26,50
Плотва	Карповые	14,16	84	11,88
Щиповка обыкновенная	Вьюновые	7,76	13	1,00
Елец	Карповые	2,10	39	0,81
Лещ	Карповые	1,16	23	0,26
Колюшка трехиглая	Колюшковые	1,05	10	0,10
Уклейка	Карповые	0,74	13	0,10
Налим	Налимовые	0,74	6	0,05
Щука	Щуковые	0,53	13	0,07
Ерш обыкновенный	Окуневые	0,42	10	0,04
Пескарь обыкновенный	Карповые	0,21	6	0,01
Язь	Карповые	0,21	6	0,01
Голавль	Карповые	0,11	3	<0,01
Горчак	Карповые	0,11	3	<0,01
Судак	Окуневые	0,11	3	<0,01

П р и м е ч а н и е. Полу жирным выделены значения доминантных и константных видов.

Т а б л и ц а 2. Встречаемость, индекс доминантности (по численности) и доля в улове (по численности) молоди рыб на прибрежных мелководьях Вилейского вдхр. и р. Вилия в пределах Вилейского района (по разным участкам)

Вид рыб	Участок								
	Выше Вилейского вдхр. (2 притонения)			Вилейское вдхр. (16 притонений)			Ниже Вилейского вдхр. (13 притонений)		
	встречае- мость, V , %	индекс до- минантно- сти, I_d	доля в уло- ве, N , %	встречае- мость, V , %	индекс до- минантно- сти, I_d	доля в уло- ве, N , %	встречае- мость, V , %	индекс до- минантно- сти, I_d	доля в уло- ве, N , %
Бычок-песочник	–	–	–	100	57,03	57,03	8	0,36	4,28
Голавль	–	–	–	–	–	–	8	0,06	0,72
Горчак	–	–	–	–	–	–	8	0,06	0,72
Елец	–	–	–	19	0,11	0,61	75	8,57	11,43
Ерш обыкнов.	50	1,17	2,34	–	–	–	–	–	–
Колюшка трехиглая	–	–	–	–	–	–	25	1,79	7,15
Лещ	–	–	–	31	0,43	1,36	17	0,24	1,43
Налим	100	5,47	5,47	–	–	–	–	–	–
Окунь	100	79,91	78,91	94	24,11	25,72	75	8,03	10,71
Пескарь обыкновенный	–	–	–	–	–	–	17	0,24	1,43
Плотва	100	3,91	3,91	88	13,11	14,98	75	15,53	20,70
Судак	–	–	–	–	–	–	8	0,06	0,72
Уклейка	–	–	–	6	<0,01	0,15	25	1,07	4,28
Щиповка обыкновенная	100	6,25	6,25	–	–	–	8	2,92	35,00
Щука	100	2,34	2,34	–	–	–	17	0,24	1,43
Язь	50	0,39	0,78	6	<0,01	0,15	–	–	–

П р и м е ч а н и е. Полу жирным выделены значения доминантных и константных видов.

Наибольшее количество видов рыб в уловах мелкочейистым неводом было отмечено на участке р. Вилия ниже водохранилища – 13 видов, в том числе и бычок-песочник. Наиболее часто встречаемыми здесь были плотва, окунь и елец. Каждый из этих видов был отмечен в 75 % притонений. Помимо этих трех видов на данном участке доминантными оказались также уклей-



а



б

Бычок-песочник – самец в брачном наряде (Вилейское водохранилище, июнь 2013 г.): а – вид сбоку, б – вид на брюшную присоску

ка и щиповка обыкновенная. Численность песочника на 100 м² обловленной площади здесь составила 0,3 экз. Доля окуня и песочника в уловах соответственно была 10,71 и 4,28 %, что в соотношении между собой составляло 1 : 0,4.

Исходя из полученных данных, прослеживается тенденция замещения в прибрежной мелководной зоне р. Вилия аборигенного окуня чужеродным бычком-песочником.

Необходимо также отметить, что среди выловленных крючковой снастью (удочка) бычков-песочников в Вилейском вдхр. были отмечены самцы в брачном наряде, полностью окрашенные в черный цвет (рисунок). Данный факт свидетельствует о натурализации бычка-песочника в Вилейском водохранилище и участии его в естественном воспроизводстве.

На основании полученных данных можно предположить, что в дальнейшем следует ожидать распространения бычка-песочника по всему водотоку и продвижения его к Балтийскому морю. Доказательством этому является поимка нами при помощи электроловильного устройства единичных особей песочника на русле р. Вилия на участке вблизи границы с Литвой (Островецкий р-н, Гродненская обл.), расположенном значительно ниже по течению от Вилейского вдхр.

Проникновение песочника в Вилейское вдхр. произошло по Вилейско-Минской водной системе из р. Свислочь (приток р. Березины, бассейн Днепра). Нахождение песочника в р. Свислочь в пределах Минска было отмечено несколько ранее А. С. Змачинским [13]. Подтверждением проникновения песочника в Вилейское вдхр. из р. Свислочь служит отлов нами (сачком) большого количества песочника в каналах Вилейско-Минской водной системы. Здесь, как и на исследованных нами участках р. Вилия, отмечена тенденция замещения аборигенного окуня чужеродным песочником.

Заключение. В результате проведенных исследований установлено, что в настоящее время доминирующее место в структуре рыбного населения мелководной прибрежной зоны Вилейского вдхр. (р. Вилия, приток р. Немана, бассейн Балтийского моря) занимает понто-каспийский представитель семейства Бычковые Gobiidae – бычок-песочник *Neogobius fluviatilis* (Pallas, 1814). Натурализация бычка-песочника в бассейне р. Неман на территории Беларуси свидетельствует о дальнейшем расширении ареала данного чужеродного вида и указывает на роль Вилейско-Минской водной системы в инвазии понто-каспийских гидробионтов в бассейн Балтийского моря.

Список использованной литературы

1. Гулюгин, С. Ю. Новые данные по расширению ареала бычков рода *Neogobius*: песочника *N. fluviatilis*, кругляка *N. melanostomus*, гонца *N. gymnotrachelus* / С. Ю. Гулюгин, Д. Ф. Куницкий // Калинингр. гос. техн. ун-т. Междунар. науч.-техн. конф. – Калининград, 1999. – Ч. 1. – С. 5.

2. First record of the invasive Ponto-Caspian tubenose goby *Proterorhinus marmoratus* (Pallas, 1814) from the River Pripyat, Belarus / V. Rizevsky [et al.] // Aquatic Invasions. – 2007. – Vol. 2, Iss. 3. – P. 275–277.
3. Новые виды рыб в фауне Беларуси / В. К. Ризевский [и др.] // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 3. – С. 95–97.
4. Новый для фауны Беларуси вид рыб – пухлощекая рыба-игла (*Syngnathus abaster*) / В. К. Ризевский [и др.] // Весці НАН Беларусі. Сер. біял. навук. – 2011. – № 2. – С. 102–105.
5. First record of the Ponto-Caspian stellate tadpole-goby *Benthophilus stellatus* (Sauvage) from the River Dnieper, Belarus / V. Rizevsky [et al.] // Bioinvasion Records. – 2013. – Vol. 2, Iss. 2. – P. 159–161.
6. Воронцов, Е. М. Состав ихтиофауны водоемов Западной области и БССР и характеристика ихтиофауны верхнеднепровского бассейна / Е. М. Воронцов // Фауна и экология. – Смоленск, 1937. – Вып. 3. – С. 59–86.
7. Атлас пресноводных рыб России / Ю. П. Решетников [и др.]. – М.: Наука, 2002. – Т. 2. – 252 с.
8. Danilkiewicz, Z. Monkey goby, *Neogobius fluviatilis* (Pallas, 1811), Perciformes, Gobiidae – a new Pontic element in ichthyofauna of the Baltic Sea basin / Z. Danilkiewicz // Fragmenta Faunistica. – 1998. – Vol. 41. – P. 269–277.
9. Kostrzewa, J. New invasive fish species in Polish waterbodies / J. Kostrzewa, M. Grabowski, G. Zięba // Archives of Polish Fisheries. – 2004. – Vol. 12 (Supp. 2). – P. 21–34.
10. Van Kessel, N. First record of Pontian monkey goby *Neogobius fluviatilis* (Pallas, 1814) in the Dutch Rhine / N. Van Kessel, M. Dorenbosch, F. Spikmans // Aquatic Invasions. – 2009. – Vol. 4, N 2. – P. 421–424.
11. Geographical patterns in range expansion of macroinvertebrate Ponto-Caspian species in Europe / A. Bij de Vaate [et al.] // Can. J. Fish. Aquat. Sci. – 2002. – Vol. 59. – P. 1159–1174.
12. Бурко, Л. Д. Бычок-песочник – *Neogobius fluviatilis* (Pallas, 1814) – новый вид рыб Вилейского водохранилища / Л. Д. Бурко // Вест. БГУ. Сер. 2. – 2008. – № 1. – С. 109–110.
13. Змачинский, А. С. Видовой состав ихтиофауны р. Свислочь в пределах г. Минска в условиях зарегулированного стока / А. С. Змачинский // Актуальные проблемы охраны окружающей среды и рационального природопользования: мат. III Междунар. науч.-практ. конф. – Чебоксары, 2013. – С. 34–36.

Поступило в редакцию 02.04.2015

УДК 635. 918:581.132+581.52

Н. В. ГЕТКО, Т. А. ПОБОЛОВЕЦ, член-корреспондент В. В. ТИТОК

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ АНАТОМИЯ ЛИСТА ТРОПИЧЕСКИХ И СУБТРОПИЧЕСКИХ ДРЕВЕСНЫХ ВИДОВ В ОРАНЖЕРЕЙНОЙ КУЛЬТУРЕ

*Центральный ботанический сад НАН Беларуси, Минск, Беларусь
N.Hetko@cbg.org.by; tl-21@hotmail.com; titok@cbg.org.by*

Выявлен характер сопряженности между структурными и функциональными параметрами листа, раскрывающий механизмы адаптации древесных тропических и субтропических видов в условиях оранжерей.

Ключевые слова: функциональная анатомия, адаптивная стратегия, тропические и субтропические древесные виды, флуоресценция.

N. V. HETKO, T. A. POBOLOVETZ, V. V. TITOK

FUNCTIONAL ANATOMY OF THE LEAVES OF TROPICAL AND SUBTROPICAL WOODY SPECIES IN THE GREENHOUSE CULTIVATION

*Central Botanical Garden of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
N.Hetko@cbg.org.by; tl-21@hotmail.com; titok@cbg.org.by*

The nature of the interaction between structural and functional parameters of a leaf, which discloses the mechanism of adaptation of tropical and subtropical woody species in greenhouse conditions, is revealed.

Keywords: functional anatomy, adaptive strategy, tropical, subtropical, tree species, fluorescence.

Введение. Адаптивную стратегию растений, представляющих тропическую флору Земли и культивируемых в условиях оранжерей, следует рассматривать как научную проблему, требующую для своего изучения комплексного подхода и мобилизации теоретических и практических достижений различных отраслей ботаники и смежных с ней дисциплин. Анализ источников показывает, что такие характеристики растений, как структура и морфология листа в наибольшей степени отражают адаптивную стратегию тропических видов в местах их естественного произрастания. Например, установлена закономерность, согласно которой в тропическом лесу представители различных семейств в одинаковых условиях произрастания обнаруживают сходную морфологию листа (конвергенция) [1–3]. Такой признак, как размеры листа принят в качестве основного при выделении формаций влажных тропических лесов Малайзии, Бразилии [4], Мексики [5] и других тропических регионов. Как мезофильные (Mesophyllous) характеризуются 50 % низинных тропических лесов Эквадора, Бразилии и Австралии, 95 % растений горных лесов в Коста Рика отнесены к формации микрофильные (Microphyllous), а тропические лесные формации пустошей – к категории склерофильных (Sclerophyllous).

Вторым важным признаком адаптивной стратегии вида является анатомическая структура листа, формирующаяся как интегральный функциональный ответ на водный стресс и интенсивность света [6]. При этом, согласно [3], в качестве ключевого параметра принята величина соотношения объемов палисадной и губчатой паренхимы листа (П/Г). Так, большинство видов (91 %), произрастающих в низинных прибрежных Атлантических лесах, имеют мезоморфные листья, которые характеризуются одноклеточным слоем эпидермиса, одноклеточным слоем палисадной паренхимы, 5–8 слоями губчатой паренхимы и склеренхимой, примыкающей к проводящим пучкам. У ксероморфных растений двуслойный эпидермис, толщина листа почти вдвое больше, палисадная паренхима представлена более чем двумя слоями и величина отношения ее по объему к губчатой составляет около 0,6–0,8, иногда – более 1,5.

Смена условий произрастания обычно сопровождается и соответствующими изменениями в структуре листа: при недостатке воды и сильной инсоляции листья приобретают так называемую ксероморфную структуру, в условиях достаточного водоснабжения и недостатка света – мезоморфную. Свет, при прочих равных условиях, является ведущим фактором, регулирующим рост и развитие растений. При этом высокая фотосинтетическая способность энергетически целесообразна для растений лишь в условиях высокой интенсивности света, и она поддерживается структурой толстых листьев. Согласно [7], толстые листья с обширной внутренней поверхностью, обращенной к межклетникам, имеют преимущества в реализации большей скорости фотосинтеза в условиях высокого уровня инсоляции.

Изучению функциональной анатомии листа по отношению к фотосинтезу посвящены работы I. Terashima и соавт. [8; 9]. Работами R. Oguchi и соавт. [10; 11] было показано, что в листьях ряда древесных видов японского субтропического леса величина отношения площади поверхности хлоропластов к площади поверхности мезофилла (S_c/S_{mes}), граничащей с межклетниками, изменяется пропорционально величине максимального фотосинтеза (P_{max}). При этом высокие корреляции были выявлены между фотосинтетической способностью и толщиной листа, между фотосинтетической способностью и площадью поверхности клеток мезофилла, обращенной к межклетникам [10–12].

В данном сообщении анализируется характер сопряженности между параметрами анатомической структуры листа [13] и параметрами индукции флуоресценции хлорофилла a [14], характеризующими протекание фотохимических реакций, связанных с функционированием в листьях ФС 2 у древесных оранжерейных растений.

Цель работы – на основе комплексного анализа структурных и функциональных признаков листа выявить механизмы адаптации древесных видов тропической и субтропической флоры в оранжерейной культуре.

Материалы и методы исследований. Сравнительному изучению подвергнуты 12 видов, которые представляют флору сухих и влажных тропических и субтропических лесов и выращиваются в оранжереях с различными световыми условиями. В таблице виды распределены в пределах экологических групп в соответствии с их географической приуроченностью и экотопами. В качестве ключевых признаков структурной адаптации листа в оранжереях приводятся усредненные значения величин: соотношение объемов палисадный : губчатый мезофилл – П/Г [3–6], и отношение объема палисадной ткани к объему всего мезофилла – коэффициент палисадности мезофилла (КПМ) [13].

Величина соотношения тканей листа (П/Г, КПМ) у видов тропической и субтропической флоры в оранжерейной культуре

Вид	П/Г	КПМ
Сухие субтропики, леса		
<i>Brachychiton discolor</i> Muell.	1,26; 1,16	0,42; 0,54
* <i>Nerium oleander</i> L.	0,60; 0,97; *1,98	0,37; 0,58
Влажные субтропики, леса		
<i>Aucuba japonica</i> Thunb. cv. <i>variegata</i> <i>Camellia japonica</i> L.	0,59; 0,56	0,37; 0,35
* <i>Hibiscus rosa-sinensis</i> L.	0,36; 0,50	0,27; 0,35
<i>Ochrosia elliptica</i> Labill.	0,58; 0,61; *0,80	0,37; 0,38
<i>Pittosporum Tobira</i> (Thunb.) Aiton	0,50; 0,51	0,33; 0,34
cv. <i>Variegata</i>	0,98; 0,82	0,50; 0,45
Влажные тропики, леса		
<i>Codiaeum variegatum</i> (L.) Blume f. <i>platyphyllum</i> cv. <i>hollufiana</i>	0,25; 0,18	0,16; 0,14
* <i>Ficus benjamina</i> L.	0,34; 0,80; *0,80	0,26; 0,44
<i>Ficus binnendijkii</i> Miq. cv. <i>alii</i>	0,80; 0,53	0,50; 0,35
<i>Ficus triangularis</i> Muel. Arg.	0,19 ; 0,17	0,16; 0,14
Сухие тропики, подлесок		
<i>Coffea arabica</i> L.	0,25; 0,28	0,20; 0,22

Примечание. * – обозначена величина параметра, установленная для образцов растений из мест естественного произрастания (о. Кипр).

Среднемесячные показатели освещенности в секциях обеих оранжерей с тропическим и субтропическим режимами различаются, и наиболее существенно – в весенне-летний период. В летние месяцы освещенность в оранжерее № 1 достигает в среднем 8 тыс. лк (максимум 50–60 тыс. лк), в зимний период соответственно – 500–800 лк (максимум – 2000 лк). В условиях оранжереи № 2 освещенность в летний период составляет 9–10 тыс. лк (максимум – 60–70 тыс. лк), а в зимние месяцы – 1000–1500 лк (максимум – 3000 лк). По климатическим показателям более близкой к естественным условиям обитания культивируемых тропических и субтропических растений является оранжерея № 2.

Результаты и их обсуждение. Если судить по величине соотношения объемов палисадной и губчатой паренхимы (П/Г) у 12 видов оранжерейных растений (таблица), то очевидно, что в условиях оранжерей мезоморфная структура листа с величиной соотношения П/Г в пределах 0,16–0,30 сохраняется у представителей влажных тропических лесов: *Codiaeum variegatum*, *Ficus benjamina* (оранжерея № 1), *Ficus triangularis*, а также у вида, произрастающего в подлеске сухих тропиков, – *Coffea arabica*. Мезоксерофитная структура листа с величиной соотношения П/Г, равной 0,50 и 0,80, характерна для большинства представителей влажных субтропических лесов в условиях оранжерей, в то время как у видов, представляющих флору сухих субтропиков (*Brachychiton discolor* и *Nerium oleander*), в условиях оранжерей формируется типичная ксероморфная структура листа с величиной соотношения П/Г, равной 1,16–1,26 и 0,6–0,97 соответственно.

В пределах исследованной нами тропикогенной группы фикусов особо выделяются виды, обладающие пластичностью структуры в зависимости от условий произрастания. Среди них *F. bennendijkii* с переходной мезоксерофитной структурой листа, сформированной в условиях оранжерей с разным уровнем освещенности. Так у растений, культивируемых в условиях с более низким уровнем освещенности, обнаруживается одно- и двуслойная палисадная паренхима, которая располагается с обеих сторон листовой пластинки – мезофитная структура листа, с коэффициентом палисадности 0,35. У растений, культивируемых в условиях с более высоким уровнем освещенности, структура листа ксеромезофитная, с характерным для нее коэффициентом палисадности мезофилла, равным 0,47.

У образцов фикуса бенджамина – *F. benjamina*, отобранных в условиях более сухого субтропического климата на о. Кипр, сформирована структура с величиной П/Г, равной 0,80, характерной для ксероморфных листьев, в то время как у растений в оранжерейной культуре зафиксирована величина данного параметра, равная 0,34, – мезофитная структура листа. В стратегии структурной адаптации данных видов в условиях оранжерей с различным уровнем освещенности оба варианта являются эффективными в плане использования лучистой энергии и по данному признаку оба вида следует отнести к высоко пластичным.

У растений влажных субтропиков: *Aucuba japonica*, *Camellia japonica*, *Hibiscus rosa-sinensis*, *Ochrosia elliptica*, *Pittosporum tobira* в условиях оранжерей обнаруживается типичная ксероморфная структура листа (П/Г в пределах 0,6–0,75). А величина данного показателя, равная 0,80, характерна для образцов листьев *Hibiscus rosa-sinensis*, отобранных в местах его естественного произрастания (о. Кипр).

Скрининг пигментного фонда листьев оранжерейных растений, проведенный нами ранее [15], позволил сделать вывод о том, что пластичность фотосинтетического аппарата проявляется в поддержании баланса фотосинтетических пигментов, позволяющем расширить спектр поглощения солнечного света листом за счет увеличения в светособирающем комплексе пластид доли пигментов, аккумулирующих свет низкой интенсивности (хлорофилла *b* и каротиноидов).

Эффективность использования аккумулируемого листьями солнечного света в первичных процессах фотосинтеза сопряжена с высокой чувствительностью фотосинтетического аппарата к изменениям факторов среды, что непосредственно отражается на параметрах флуоресценции хлорофилла *a*, которые появляются задолго до видимых нарушений физиологического состояния растений. Источником флуоресценции в растительной клетке являются светособирающие молекулы пигментов, преимущественно хлорофилла *a* ФС 2. Данный метод широко используется для оценки физиологического состояния как отдельного растения, так и целых экосистем,

в том числе и при изучении тропических и субтропических видов растений в местах их естественного произрастания [16].

В предлагаемую нами систему мониторинга включены следующие параметры индукции флуоресценции хлорофилла a [14]:

F_0 – исходный уровень флуоресценции, который определяется флуоресценцией хлорофилла в условиях, когда все РЦ находятся в активном рабочем состоянии, способны тушить флуоресценцию антенны и составляет всего около 0,6 % от поглощенного света (вследствие конкуренции с фотохимическими реакциями) [17; 18];

F_m – максимальный уровень флуоресценции наблюдается, когда РЦ ФС 2 ингибируются под влиянием неблагоприятных факторов и составляют около 3 % от поглощенного света [17; 18];

F_v – переменная флуоресценции (разница между F_m и F_0). Она обусловлена той частью световой энергии, которая в первичных реакциях фотосинтеза утилизируется РЦ, когда они находятся в активном состоянии. Считается, что чем выше значение F_v , тем более благоприятными оказываются условия для функционирования фотосинтетического аппарата.

Величина отношения F_v / F_m отражает потенциальный квантовый выход фотохимических реакций ФС 2, который коррелирует с квантовым выходом фотосинтеза и позволяет использовать этот параметр для характеристики фотосинтетического процесса [17]. В здоровых листьях, независимо от вида изучаемого растения, величина данного параметра близка к 0,8 и по [18; 19] она составляет $(0,832 \pm 0,004)$. Меньшая величина отношения F_v / F_m указывает на то, что доля РЦ ФС 2 у растений в условиях стресса повреждена, и по мере усиления напряженности действия экстремального фактора наблюдается снижение величины F_v / F_m , что отражает нарушения в функционировании электрон-транспортной цепи (ЭТЦ) ФС 2.

Одной из наиболее важных составляющих предлагаемой нами системы мониторинга является исследование сопряженности между структурными и функциональными параметрами листа, характеризующей адаптационный потенциал тропических и субтропических растений в условиях оранжерей. Корреляционному анализу у исследуемых таксонов были подвергнуты 11 показателей, а именно: ГП – толщина (объем) губчатой паренхимы, ПП – толщина (объем) палисадной паренхимы, КПМ – коэффициент палисадности мезофилла, Хл a , Хл b , их суммарное содержание $\Sigma a + b$ и соотношение a / b , сумма каротиноидов $\Sigma_{\text{сар}}$ и соотношение сумм хлорофиллов и каротиноидов $\Sigma a + b : \Sigma_{\text{сар}}$, параметры флуоресценции (F_m , F_v , F_v / F_m). Анализ полученных данных позволил выявить ряд достоверно значимых коэффициентов корреляции. Наиболее важными из них следует считать обратные корреляции: между значениями F_m , F_v и толщиной (объемом) палисадной паренхимы листа ПП ($k = -0,7$ и $-0,63$ соответственно).

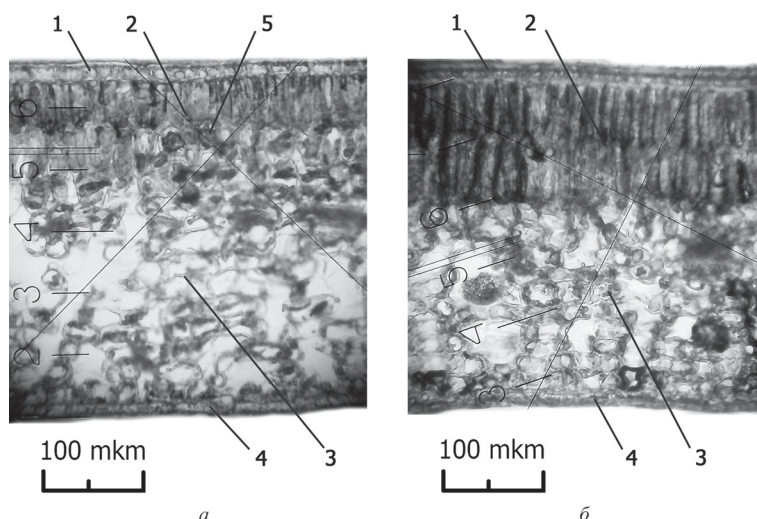


Рис. 1. Поперечные срезы листьев камелии японской – *Camellia japonica* L. (*Theaceae* Don.). D: a – $\text{П/Г} = 0,30$, $F_0 = 0,12$, $F_m = 0,55$, $F_v = 0,43$, $F_v / F_m = 0,77$; b – $\text{П/Г} = 0,50$, $F_0 = 0,14$, $F_m = 0,45$, $F_v = 0,32$, $F_v / F_m = 0,70$. 1 – верхняя эпидерма, 2 – палисадная паренхима, 3 – губчатая паренхима, 4 – нижняя эпидерма, 5 – включения

Рассмотрим несколько примеров структуры на поперечных срезах листьев у ряда растений.

У камелии японской – *Camellia japonica* L. (рис. 1) видно, что в оранжерее № 1 (а) у растений формируется типичная мезоморфная структура листа с соотношением $\Pi/\Gamma = 0,30$, в то время как в оранжерее № 2 (б) обнаруживается ксеромезофитная структура листа с величиной $\Pi/\Gamma = 0,50$, и исходя из величин показателей F_v (0,43) и F_v / F_m (0,77), условия культивирования в первом случае являются для вида более благоприятными. В данном случае за счет уменьшения объема палисадного мезофилла листа у растений в оранжерее № 1 возрастает доля губчатого мезофилла, и в результате увеличивается соответственно площадь поверхности клеток, обращенной к межклетникам, что напрямую связано с фотосинтетической способностью листа, согласно [10; 12]. При относительно равных объемах палисадного мезофилла в листьях кофе арабика – *Coffea arabica* (рис. 2) в обеих оранжереях в листьях формируется мезоморфная структура ($\Pi/\Gamma = 0,25$ и 0,28), но, судя по величине параметров F_v (0,57 против 0,24) и F_v / F_m (0,78 против 0,66), более благоприятные условия культивирования для вида имеют место в оранжерее № 1, где наиболее эффективное использование лучистой энергии достигается сравнительно большей площадью поверхности клеток губчатой ткани листа, обращенной к межклетникам, что отчетливо видно на рис. 2, а.

Совершенно иная картина наблюдается у листопадного вида – брахихитона (*Brachychiton discolor*), представляющего флору сухих субтропиков и саванн, обладающего типичной ксероморфной структурой листьев, различающихся по толщине. В условиях оранжерей – это вечнозеленое растение, в листьях которого палисадная паренхима по объему более чем в 1,2 раза превосходит губчатый мезофилл с его малой долей межклетников (рис. 3).

Для охросии эллиптической – *Ochrosia elliptica* наиболее оптимальными, исходя из значений показателя $F_v / F_m = 0,80$, следует считать условия оранжереи № 2, в то время как в оранжерее

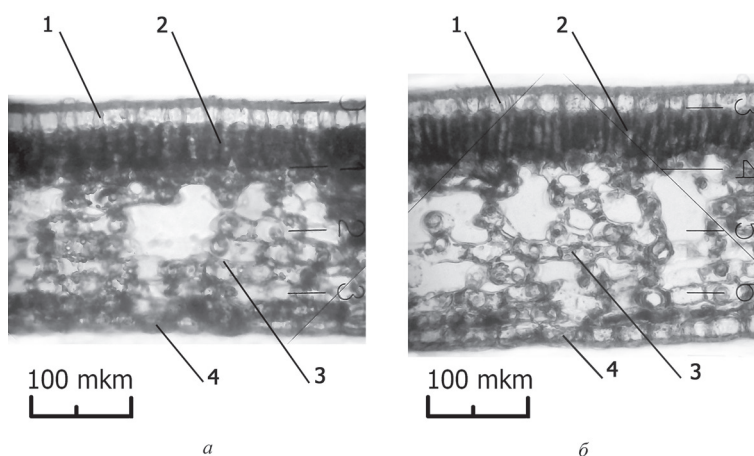


Рис. 2. Поперечные срезы листьев кофе арабика – *Coffea arabica* L. (*Rubiaceae* Juss.): а – $\Pi/\Gamma = 0,25$, $F_0 = 0,16$, $F_m = 0,72$, $F_v = 0,57$, $F_v / F_m = 0,78$; б – $\Pi/\Gamma = 0,28$, $F_0 = 0,12$, $F_m = 0,36$, $F_v = 0,24$, $F_v / F_m = 0,66$. 1 – верхняя эпидерма, 2 – палисадная паренхима, 3 – губчатая паренхима, 4 – нижняя эпидерма, 5 – включения

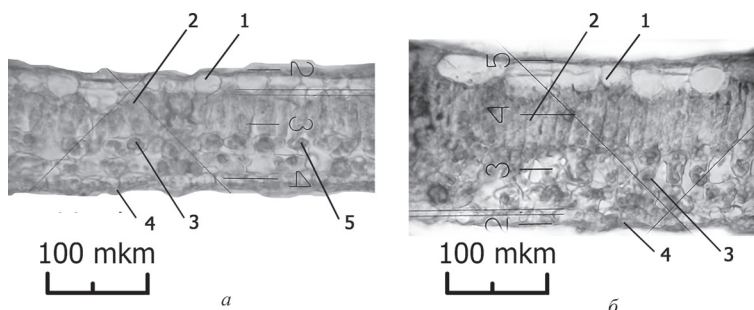


Рис. 3. Поперечные срезы листьев брахихитона – *Brachychiton discolor* Muell. (*Sterculiaceae* Juss.): а – $\Pi/\Gamma = 1,26$, $F_0 = 0,16$, $F_m = 0,63$, $F_v = 0,47$, $F_v / F_m = 0,74$; б – $\Pi/\Gamma = 1,16$, $F_0 = 0,14$, $F_m = 0,58$, $F_v = 0,44$, $F_v / F_m = 0,76$. 1 – верхняя эпидерма, 2 – палисадная паренхима, 3 – губчатая паренхима, 4 – нижняя эпидерма, 5 – включения

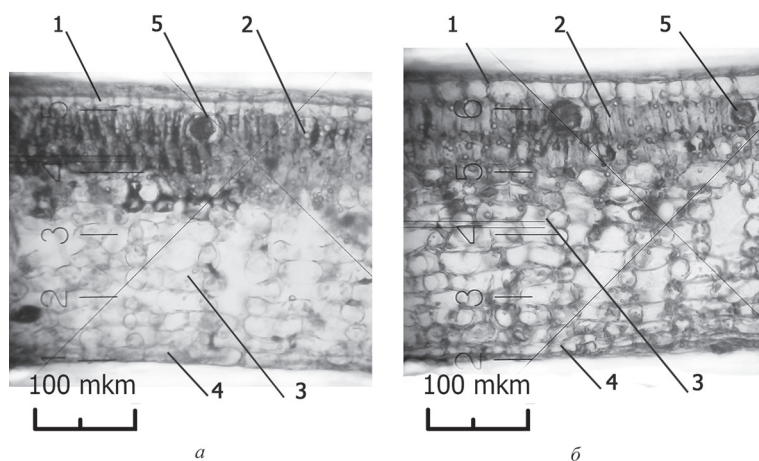


Рис. 4. Поперечные срезы листьев охросии эллиптической – *Ochrosia elliptica* Labill. (*Apocynaceae* Juss.): а – П/Г = 0,50, $F_0 = 0,15$, $F_m = 0,62$, $F_v = 0,47$, $F_v / F_m = 0,75$; б – П/Г = 1,16, $F_0 = 0,14$, $F_m = 0,61$, $F_v = 0,47$, $F_v / F_m = 0,80$. 1 – верхняя эпидерма, 2 – палисадная паренхима, 3 – губчатая паренхима, 4 – нижняя эпидерма, 5 – включения

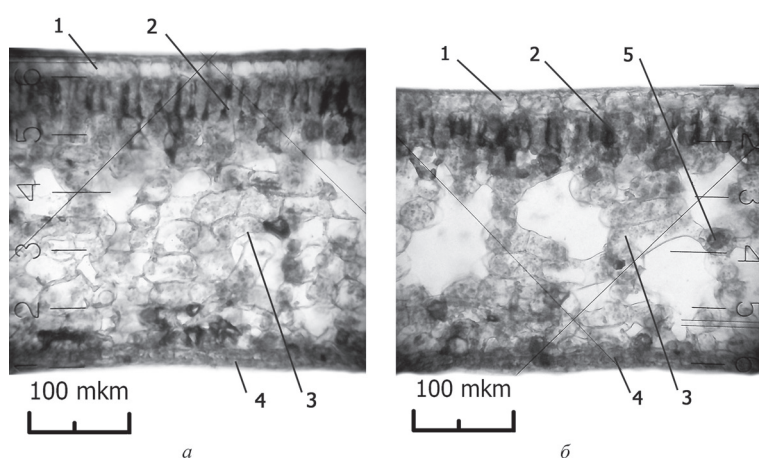


Рис. 5. Поперечные срезы листьев кротона – *Codiaeum variegatum* (L.) Blume (*Euphorbiaceae* Juss.): а – П/Г = 0,25, $F_0 = 0,15$, $F_m = 0,68$, $F_v = 0,53$, $F_v / F_m = 0,78$; б – П/Г = 0,18, $F_0 = 0,12$, $F_m = 0,62$, $F_v = 0,50$, $F_v / F_m = 0,81$. 1 – верхняя эпидерма, 2 – палисадная паренхима, 3 – губчатая паренхима, 4 – нижняя эпидерма, 5 – включения

№ 1 величина данного параметра составляет всего 0,75 (рис. 4). В листьях кротона – *Codiaeum variegatum* (рис. 5) с такой же пластичной мезоморфной структурой, как и у предыдущего вида, величины параметра F_v / F_m в условиях обеих оранжерей различаются менее существенно (0,78 и 0,81). Но структура губчатой ткани обеспечивает более эффективное использование лучистой энергии растениями в оранжерее № 2.

Заключение. Таким образом, впервые выявлен характер сопряженности между структурными и функциональными параметрами листа, раскрывающий механизмы адаптации тропических и субтропических видов в условиях оранжерей. Установлено, что ключевым параметром функциональной анатомии листа древесных растений в оранжерейной культуре является величина объема палисадной ткани листа, которая обратно коррелирует с параметрами индукции флуоресценции хлорофилла а: F_m – максимальным уровнем флуоресценции, когда РЦ ФС 2 ингибируются под влиянием неблагоприятных факторов, и F_v – переменной флуоресценции, обусловленной той частью световой энергии, которая в первичных реакциях фотосинтеза утилизируется РЦ в активном состоянии ($k = -0,7$ и $-0,63$ соответственно).

Впервые показано, что мезоморфная структура листа с однослойной палисадной паренхимой и величиной соотношения палисадный: губчатый мезофилл (П/Г) в пределах 0,20–0,30 обеспечивает наиболее эффективное использование лучистой энергии тропическими и субтропическими видами в световых условиях оранжерей. Полученные данные вносят существенный вклад

в разработку теоретических основ адаптации растений тропической и субтропической флоры к условиям, отличным от мест их естественного обитания, и они могут быть использованы в оценке и мониторинге функционального состояния как сохраняемых в коллекциях видов, так и применяемых в практике озеленения интерьеров.

Список использованной литературы

1. Turner, I. M. A quantitative analysis of leaf form in woody plants from the world's major broadleaved forest types // *J. of Biogeography*. – 1994. – Vol. 21. – P. 413–419.
2. Siqueira, M. F. Listagem de especies arboreas do Estado de Santa Catarina / M. F. Siqueira [Electronic resource]. – 2001. – Mode access: <http://www.bdt.org.br/mata.atlantica/flora/local?SC>.
3. Boeger, M. R. T. Leaf Morphology of 89 Tree Species from a Lowland Tropical Rain Forest (Atlantic Forest) in South Brazil / M. R. T. Boeger, L. C. Alves, R. R. B. Negrelle // *Brazilian Archives of Biology and Technology*. – 2004. – Vol. 47, N 6. – P. 933–943.
4. Medina, E. Sclerophyll and oligotrophic environments: relation between leaf, structure, mineral nutrient content and drought resistance in tropical rain forest of upper Rio Negro region / E. Medina, V. Garcia, T. Cuevas // *Biotropica*. – 1990. – Vol. 22. – P. 51–64.
5. Bonders, F. Leaf characteristics of the tropical rain forest flora of Los Tuxtlas, Mexico / F. Bonders, J. Popma // *Botanical Gazette*. – 1990. – Vol. 151. – P. 354–365.
6. Hogan, K. P. Ecotypic differentiation of gase exchange responses and leaf anatomy in a tropical forest understory shrub from areas of contrasting rainfall regimes / K. P. Hogan, A. P. Smith, J. L. Arous // *Tree Physiology*. – 1994. – Vol. 14. – P. 819–831.
7. Acclimation leaf characteristics of *Fagus* species to previous-year and current-year solar irradiances / A. Uemura [et al.] // *Tree Physiology*. – 2000. – Vol. 20. – P. 945–951.
8. Irradiance and phenotype: comparative eco-development of sun and shade leaves in relation to photosynthetic CO₂ diffusion / I. Terashima [et al.] // *J. Exp. Bot.* – 2006. – Vol. 57(2). – P. 343–354.
9. Leaf functional anatomy in relation to photosynthesis / I. Terashima [et al.] // *Plant Physiology*. – 2011. – Vol. 155. – P. 108–116.
10. Oguchi, R. Leaf anatomy as constraint for photosynthetic acclimation: different responses in leaf anatomy to increasing growth irradiance among three deciduous trees / R. Oguchi, K. Hikosaka, T. Hirose // *Plant, Cell and Environment*. – 2005. – Vol. 28. – P. 916–927.
11. Leaf anatomy and light acclimation in woody seedlings after gap formation in cold-temperate deciduous forest / R. Oguchi [et al.] // *Oecology*. – 2006. – Vol. 149. – P. 571–582.
12. Oguchi, R. Does the photosynthetic light-acclimation need change in leaf anatomy? / R. Oguchi, K. Hikosaka, T. Hirose // *Plant, Cell and Environment*. – 2003. – Vol. 26. – P. 505–512.
13. Ладыженко, Т. А. Эколого-географические особенности анатомической структуры листа древесно-кустарниковых растений тропической и субтропической флоры / Т. А. Ладыженко, Н. В. Гетко // *Весті НАН Беларусі. Сер. біял. навук.* – 2014. – № 4. – С. 15–22.
14. Параметры индукции флуоресценции хлорофилла а листьев тропических и субтропических видов растений, культивируемых в оранжерее / Т. А. Ладыженко [и др.] // *Весті НАН Беларусі. Сер. біял. навук.* – 2014. – № 1. – С. 40–44.
15. Ладыженко, Т. А. Экофизиологический скрининг пигментного фонда листьев тропических и субтропических видов растений, культивируемых в оранжерее / Т. А. Ладыженко, Н. В. Гетко, Л. Ф. Кабашникова // *Весті НАН Беларусі. Сер. біял. навук.* – 2013. – № 3. – С. 17–22.
16. Energy dissipation and photoinhibition / W. W. Adams [et al.] // *Advances in Photosynthesis and Respiration*. – 2006. – Vol. 22. – P. 49–64.
17. Рубин, А. Б. Биофизика фотосинтеза и методы экологического мониторинга / А. Б. Рубин // *Технология живых систем*. – 2005. – Т. 2. – С. 47–68.
18. Krause, G. H. Chlorophyll fluorescence and photosynthesis: the basics / G. H. Krause, E. Weis // *Ann. Rev. Plant Physiol. Plant Mol. Biol.* – 1991. – Vol. 42. – P. 313–349.
19. Корнеев, Д. Ю. Информационные возможности метода индукции флуоресценции хлорофилла / Д. Ю. Корнеев. – Киев, 2002.

Поступило в редакцию 06.04.2015

УДК 577.3:577.1:631.8

Н. Г. АВЕРИНА, З. БЕЙЗАИ, Р. А. ЩЕРБАКОВ

МОЛЕКУЛЯРНЫЕ МЕХАНИЗМЫ РЕГУЛЯЦИИ НИТРАТРЕДУКТАЗЫ ЭКЗОГЕННОЙ 5-АМИНОЛЕВУЛИНОВОЙ КИСЛОТОЙ В ПРОРОСТКАХ ЯЧМЕНЯ, ВЫРАЩЕННЫХ В УСЛОВИЯХ ЗАСОЛЕНИЯ ХЛОРИДОМ НАТРИЯ

(Представлено академиком И. Д. Волотовским)

Институт биофизики и клеточной инженерии НАН Беларуси, Минск, Беларусь
averina@ibp.org.by; z.beyzaei@mail.com; sherbakov@ibp.org.by

Изучено влияние экзогенной 5-аминолевулиновой кислоты (АЛК) на рост, активность нитратредуктазы (НР, КФ 1.6.6.1), накопление пролина и генерацию супероксид анион-радикала в проростках ячменя (*Hordeum vulgare* L., сорт Гонар), выращенных в условиях засоления, создаваемого NaCl. Показано, что АЛК в концентрациях 20, 40 и 80 мг/л увеличивала длину проростков, уширяла листовую пластинку растений, подвергнутых действию 150 мМ NaCl, по сравнению с контрольными растениями, не обработанными АЛК. В присутствии индуктора НР – ее субстрата 20 мМ KNO₃, экзогенная АЛК стимулировала экспрессию *Nar 1* гена фермента, увеличивала содержание НР-белка и его активность в растениях, выращенных на 150 мМ NaCl. АЛК также индуцировала накопление свободного пролина и уменьшала способность растений генерировать супероксид анион-радикал. Таким образом, продемонстрировано, что наблюдаемые эффекты экзогенной АЛК на выращиваемые в условиях солевого стресса растения ячменя связаны со стимуляцией активности НР как на транскрипционном, так и на трансляционном уровнях и приводят к улучшению ростовых характеристик растений и повышению уровня антирадикальной защиты.

Ключевые слова: засоление, *Hordeum vulgare*, нитратредуктаза, 5-аминолевулиновая кислота.

N. G. AVERINA, Z. BEYZAEI, A. SHERBAKOV

MOLECULAR MECHANISMS OF REGULATION OF NITRATE REDUCTASE WITH EXOGENOUS 5-AMINOLEVULINIC ACID IN BARLEY SEEDLINGS GROWN UNDER SALINIZATION WITH NaClInstitute Biophysics and Cell Engineering of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
averina@ibp.org.by; z.beyzaei@mail.com; sherbakov@ibp.org.by

The effect of exogenous 5-aminolevulinic acid (ALA) on the growth and activity of nitrate reductase (NR, EC 1.6.6.1), the synthesis of proline and the superoxide anion radical generation in barley (*Hordeum vulgare* L. cv. Gonar) seedlings grown under salinization with NaCl has been studied. The obtained data indicated that ALA (20, 40 and 80 mg L⁻¹) increased the elongation and leaf blade expansion of barley seedlings exposed to 150 mM NaCl as compared to control plants, which were not treated with ALA. In the presence of the NR inductor – its substrate 20mM KNO₃, exogenous ALA stimulated NR gene *Nar 1* expression, increased the NR-protein content and enzymatic activities in plants grown in 150 mM NaCl solution. ALA also induced the accumulation of free proline and decreased the generation of superoxide anion radicals. Thus, this study demonstrates that ALA effects on salt-stressed barley seedlings involves the stimulation of NR activities both at transcriptional and translational levels and leads to complex physiological modifications, such as the improvements of plant growth and antiradical defense.

Keywords: salinization, *Hordeum vulgare*, nitratereductase, 5-aminolevulinic acid.

Азот является одним из важнейших элементов, входящих в состав растительных организмов. Несимбиотические растения получают азот из почвы, где он представлен в основном в виде нитратов. Ассимиляция неорганического азота является одним из фундаментальных биологических процессов в природе, определяющих жизнедеятельность растительных организмов. Первым и одновременно ключевым ферментом в цепи восстановления нитрата до нитрита и далее до аммония является нитратредуктаза (НР, КФ 1.6.6.1-3) – индуцибельный белок, подверженный транскрипционной и посттрансляционной регуляции как эндогенными, так и внешними, экзо-

генными стимулами, такими как нитраты, нитриты, свет, циркадные ритмы и уровень Ca^{2+} [1]. Модифицирующее действие на НР оказывают фитогормоны – цитокинины увеличивают содержание мРНК НР, содержание белка и его активность [1]. В ячмене (*Hordeum vulgare* L.) функционируют два гена НР – ген *Nar 1*, который кодирует НАДН-специфичный фермент, присутствующий в листьях, и другой ген *Nar 7*, кодирующий НАД(Ф)Н-биспецифичную НР, локализованную в корнях [2]. НАДН-НР хорошо охарактеризована структурно, биохимически и генетически [3]. В высших растениях активность НР обеспечивается наличием субстрата фермента – солей нитрата. Нитрат (NO_3^-) функционирует также как сигнал, регулирующий метаболизм азота и углерода [4].

НР является мишенью для действия различных стрессоров окружающей среды, таких как тепловой шок, тяжелые металлы, водный дефицит, а также засоление [5]. Засоление – один из основных абиотических факторов, действие которого приводит к угнетению роста и развития растений, снижению эффективности фотосинтеза, дыхания и др. Информация о влиянии засоления на систему ассимиляции азота ограничена и противоречива. Высокий уровень активности НР в растениях солеустойчивых сортов, по сравнению с чувствительными к засолению растениями позволил сделать вывод, что фермент обеспечивает функционирование ряда механизмов, способствующих формированию солеустойчивости растений [5]. Повышение активности НР в условиях засоления растений может стать эффективной стратегией в формировании солеустойчивости сельскохозяйственных культур.

Одним из способов повышения устойчивости растений к солевому стрессу является использование регуляторов роста растений (PPP), таких как ауксины, гиббереллины, цитокинины, салициловая кислота и др. [6]. В частности, кинетин и бензиладенин ослабляли действие солевого стресса, усиливая ростовые процессы, увеличивая в растениях ячменя содержание фотосинтетических пигментов, свободных фенолов, аминокислот и активности пероксидазы [6]. В последние годы внимание многих исследователей сфокусировано на уникальном предшественнике хлорофилла и гема – 5-аминолевулиновой кислоте (АЛК), которая в низких концентрациях действует как PPP и антистрессор [7]. Экзогенная АЛК формирует устойчивость растений к солевому стрессу через уменьшение поглощения ионов Na^+ , возрастание скорости фотосинтеза, а также благодаря снижению уровня окислительных процессов путем уменьшения содержания активных форм кислорода и роста активности антиоксидантных ферментов [7]. Известно также, что экзогенная АЛК стимулирует активность НР в растениях кукурузы и в стареющих листьях капусты [8; 9]. Недавно нами было показано, что в присутствии нитрата экзогенная АЛК увеличивала активность НАДН-НР путем стимуляции экспрессии *Nar 1* гена фермента и возрастания содержания самого белка [10]. Однако информация о молекулярных механизмах действия АЛК на НР в условиях засоления растений не известна, что делает исследования в этом направлении особенно актуальными.

Механизмы росторегулирующих и антистрессовых свойств экзогенной АЛК интенсивно изучаются, что позволило установить возрастание в растениях, обработанных экзогенной АЛК, содержания цитокининов, усиление стабильности ряда белков [7]. В условиях стрессовых воздействий генерация супероксид анион-радикала ($\text{O}_2^{\bullet-}$) является первичной реакцией, приводящей к образованию активных форм кислорода и возникновению окислительного стресса [11]. Участие АЛК в контроле образования $\text{O}_2^{\bullet-}$ в растениях, выращиваемых в условиях засоления, до сих пор не изучено, что представляет определенный интерес при изучении антистрессовых механизмов действия АЛК.

Не менее интересна роль экзогенной АЛК в накоплении универсального стресс-протектора пролина. Данные о влиянии АЛК на изменение содержания пролина в растениях, подвергнутых засолению, противоречивы [12; 13]. Ранее Агтам и соавт. [12] сообщили об отсутствии каких-либо изменений в содержании пролина в растениях подсолнечника, выращиваемых в условиях засоления и при обработке листьев экзогенной АЛК. Напротив, Naeem и соавт. [13] наблюдали индукцию накопления осмолитов, таких как сахара, белки, свободные аминокислоты и пролин в растениях рапса, выращиваемых при 100 и 200 мМ NaCl в присутствии экзогенной АЛК. Ранее нами также было отмечено возрастание содержания пролина в растениях ячменя, выращенных

на водопроводной воде в присутствии экзогенной АЛК [7]. Однако влияние экзогенной АЛК на накопление пролина под действием соли в условиях субстратной активации НР не изучалось, что делает данный вопрос предметом дальнейшего исследования.

Цель работы – выяснение молекулярных механизмов действия экзогенной АЛК на нитратредуктазу в растениях ячменя, выращиваемых в условиях засоления, создаваемого NaCl, ее влияния на способность растений генерировать $O_2^{\bullet-}$ и накапливать пролин.

Материалы и методы исследования. В экспериментах использовали 7-дневные проростки ячменя (сорт Гонар). Растения выращивали под белыми люминесцентными лампами (ЛД-40; $160 \text{ мкмоль м}^{-2} \text{ с}^{-1}$; $25 \text{ }^\circ\text{C}$) в режиме 14 ч света/10 ч темноты на дистиллированной или водопроводной воде, либо их растворах. Опыты проводили на растениях, выращиваемых на 150 mM NaCl в присутствии индуктора НР – 20 mM KNO_3 (контрольные растения), к которым добавляли возрастающие количества АЛК (20, 40 и 80 мг/л). Растения срезали в возрасте 7 дней, листья выравнивали по длине над колеоптилем, отбрасывали 0,5 см сверху и использовали в анализе следующие 2-сантиметровые отрезки. Активность НР определяли по скорости накопления нитрита [14]. Общую активность НР определяли с буфером НЕРЕС-КОН, содержащим ЭДТА. При анализе активной формы НР вместо ЭДТА добавляли $MgCl_2$. Генерацию $O_2^{\bullet-}$ в листьях определяли по восстановлению нитротетразолия синего [15]. Экстракцию и электрофорез белков в полиакриламидном геле и иммуноблоттинг проводили по [16], используя антитела для НР (Agrisera, Sweden). ПЦР в реальном времени проводили используя MiniOpticon ПЦР-систему (Bio-Rad, США). Тотальную РНК изолировали из свежих листьев с помощью Tri-реагента (Sigma-Aldrich, США) и количественно определяли, используя спектрофотометр ND-2000 (Thermo Scientific, США). Синтез кДНК осуществляли с помощью cDNA Reverse Transcription Kit (Fermentas, Литва). ПЦР реакцию проводили, используя Real Time 2×PCR Master Mix SYBR[®] kit (Thermo Scientific, США) с рассчитанными нами генспецифичными праймерами: 5' AAG GGA TAC GCA TAC TCA GG 3' (прямой) и 5' TGA GGT TCC AGA TGA GCT TC 3' (обратный) для *Nar 1* гена НАДН НР и 5' TAA GGG ACA TCA AGG AGA AG 3' (прямой), 5' AGT TGT AGG TCG TCT CGT G 3' (обратный) для гена *actin* как внутреннего стандарта. В работе приведены средние значения из 5–6 экспериментов и их стандартные ошибки.

Результаты и их обсуждение. Ранее нами было показано, что выращивание растений ячменя на 150 mM растворе NaCl снижало высоту растений на 37 %, а длину главного корня на 39 % по сравнению с растениями, выращиваемыми на воде [17]. Чтобы оценить влияние экзогенной АЛК на ростовые характеристики растений ячменя, выращиваемых в условиях засоления, последние обрабатывали раствором 150 mM NaCl в присутствии индуктора НР – 20 mM KNO_3 (контроль), в который добавляли возрастающие количества АЛК – 20, 40 и 80 мг/л (опытные варианты). Отмечено, что АЛК усиливала ростовые процессы (рис. 1, а), увеличивая высоту растений на 11 % при использовании 40 мг/л, а ширину листовой пластинки на 26 % при использовании 80 мг/л по сравнению с растениями варианта « $KNO_3 + NaCl$ » (таблица).

Далее был осуществлен анализ действия экзогенной АЛК на НР – экспрессию гена фермента, его активность и содержание в растениях ячменя, выращенных в присутствии NaCl. В листьях проростков, выращенных на дистиллированной воде в присутствии NaCl или АЛК, экспрессия гена *Nar 1* не детектируется (данные не приведены). Экспрессия гена *Nar 1* запускается только с помощью субстрата фермента – нитрата. С целью индукции экспрессии гена НР и синтеза НР-белка в растениях, выращиваемых на солевых растворах в присутствии АЛК, во все растворы добавляли 20 mM KNO_3 . Уровень экспрессии гена *Nar 1* в растениях варианта « $NaCl + KNO_3$ » служил базовым уровнем для вариантов, содержащих экзогенную АЛК (рис. 1, в)

На рис. 1, б показано, что возрастание концентрации экзогенной АЛК в растворах приводило к увеличению как общей активности НР, так и ее активной формы. В присутствии 80 мг/л АЛК активность НР возрастала на 34 и 38 % по сравнению с контрольными растениями соответственно.

С целью выяснения молекулярных механизмов действия экзогенной АЛК на активность НР был использован количественный ПЦР анализ – изучена экспрессия гена *Nar 1*, а также с помощью антител на НР проведена оценка содержания фермента в растениях. Добавка к растворам, содержащим 150 mM NaCl + 20 mM KNO_3 (контроль), возрастающих концентраций АЛК показа-

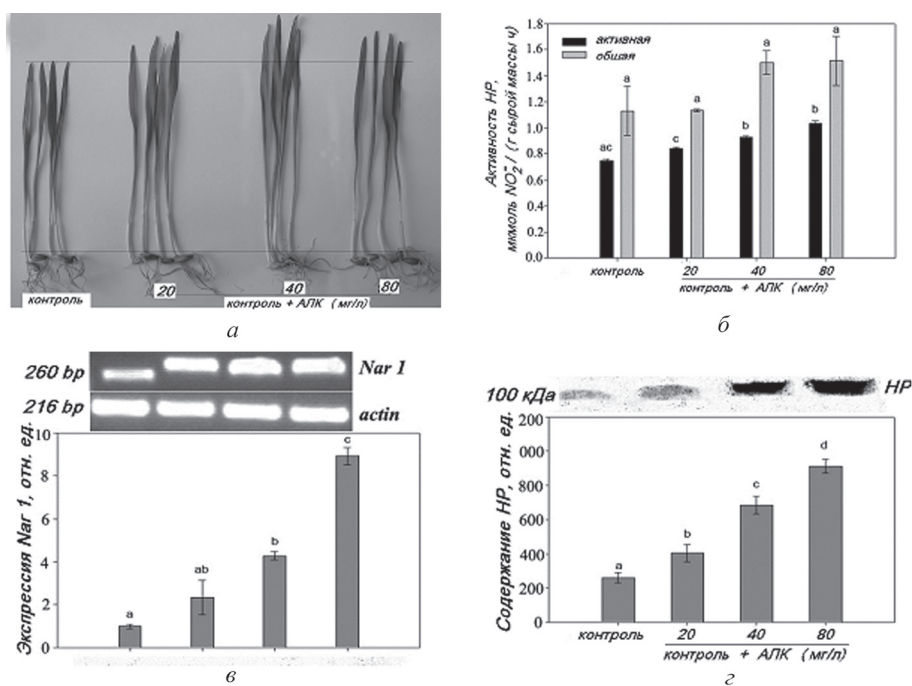


Рис. 1. Внешний вид (а), активность НР (б), уровень экспрессии *Nar 1* (в) и содержание НР (г) в растениях ячменя, выращенных на растворе «150 мМ NaCl + 20 мМ KNO₃» (контроль) с добавлением АЛК (20, 40 и 80 мг/л)

Влияние экзогенной АЛК на длину и ширину листьев 7-дневных растений ячменя, выращенных на растворах 150 мМ NaCl в присутствии 20 мМ KNO₃

KNO ₃ + NaCl (мМ)	АЛК (мг/л)	Высота (см)	Ширина (мм)
20 + 150	0	12,25 ± 0,39	4,00 ± 0,51
20 + 150	20	13,02 ± 0,57*	4,06 ± 0,56
20 + 150	40	13,56 ± 0,63*	4,75 ± 0,67*
20 + 150	80	12,92 ± 0,66*	5,04 ± 0,47*

Примечание. Представлены средние значения ±SD 4 независимых экспериментов. * – указывает на статистически значимые различия между контролем и опытом ($P < 0,05$).

ла отчетливое увеличение уровня экспрессии гена *Nar 1* (рис. 1, в). Использование 20, 40 и 80 мг/л АЛК привело к возрастанию количества мРНК-транскриптов НР в 3, 5 и 9 раз соответственно по отношению к таковому в растениях варианта «NaCl + KNO₃». В соответствии со стимуляцией экспрессии гена НР было отмечено и возрастание содержания фермента (рис. 1, г). Обработка растений 20, 40 и 80 мг/л АЛК привела к возрастанию содержания НР-белка на 60, 165 и 260 % соответственно по сравнению с контрольными растениями. Показана линейная корреляция между концентрациями АЛК, уровнями экспрессии гена НР (20–80 мг/л; $P = 0,001$, $r^2 = 0,778$) и содержанием фермента (20–80 мг/л; $P = 0,001$, $r^2 = 0,917$).

Ранее мы показали, что избыточное засоление, создаваемое NaCl, снижало активность НР [17]. Затем нами было продемонстрировано, что экзогенная АЛК стимулировала экспрессию субстрат-индуцибельного гена *Nar 1* фермента в проростках ячменя, выращиваемых при нормальных условиях в присутствии нитрата [10], что подтвердило результаты работы [9], в которой было показано увеличение уровня транскриптов НР в стареющих листьях капусты, обработанных экзогенной АЛК. Эти результаты указали на то, что экзогенная АЛК оказывает сильное регуляторное воздействие на экспрессию ядерного гена НР. Представленные выше данные показали, что экзогенная АЛК на ранних стадиях развития растений ячменя в условиях засоления в присутствии субстрата НР (NO₃⁻) значительно увеличивает активность фермента, причем как общую активность НР, так и ее активную форму (рис. 1, б). Возрастание при этом количества транскриптов фермента и его содержания указало на молекулярный механизм, с помощью кото-

рого экзогенная АЛК усиливает рост и развитие растений ячменя на ранних стадиях вегетации в условиях избыточного засоления – путем стимуляции экспрессии гена *Nar 1*, увеличения содержания фермента, его активности и тем самым ассимиляции неорганического азота. Maquyama-Nakashita и соавт. [18] продемонстрировали, что экзогенная АЛК увеличивала уровень транскриптов ряда генов, участвующих в ассимиляции серы в растениях *Arabidopsis thaliana*. Затем Czarneski и соавт. [19] показали, что биосинтез АЛК вносит определенный вклад в процесс пластидно-ядерной сигнализации. Наши результаты подтвердили, что экзогенная АЛК участвует в регуляции экспрессии ядерных генов, в частности, гена *Nar 1* НР.

Растения используют еще один механизм, с помощью которого формируется стрессоустойчивость – это способность к накоплению универсального стресс-протектора пролина. Проллин как совместимый осмолит защищает структуру белковых молекул, ДНК и мембран, является резервным источником углерода, азота, служит энергетическим субстратом, тушителем $O_2^{\bullet-}$ и H_2O_2 и перехватчиком свободных радикалов [20]. С целью изучения влияния экзогенной АЛК на накопление пролина и способность растений генерировать $O_2^{\bullet-}$ в условиях засоления и субстратной активации НР с помощью 20 мМ KNO_3 , проростки ячменя выращивали на водопроводной воде. При оценке содержания пролина в качестве контрольных растений использовали два варианта – растения, выращенные на 150 мМ растворе NaCl, и растения, выращенные на растворе 150 мМ NaCl + 20 мМ KNO_3 . Опытные растения выращивали на растворах, содержащих 150 мМ NaCl + 20 мМ KNO_3 + АЛК (20, 40, 80 мг/л).

Данные, представленные на рис. 2, отчетливо показали увеличение содержания пролина в условиях засоления не только при добавлении к солевому раствору 20 мМ KNO_3 (124 % по сравнению с вариантом «NaCl»), но и возрастающую по величине стимуляцию его накопления в вариантах с экзогенной АЛК (20, 40 и 80 мг/л) по сравнению с растениями варианта «NaCl + KNO_3 ». Так, при использовании 80 мг/л АЛК стимуляция составила 77 %. Показана линейная корреляция между используемыми концентрациями АЛК и содержанием пролина (20–80 мг/л; $P = 0,001$, $r^2 = 0,839$).

Таким образом, сочетанное действие экзогенной АЛК и KNO_3 значительно увеличивало содержание пролина как по сравнению с чисто солевым раствором, так и по сравнению с растениями варианта «NaCl + KNO_3 ». Увеличение содержания пролина под действием экзогенной АЛК в условиях засоления растений может быть прямым следствием возрастания в них активности НР за счет стимуляции экспрессии гена *Nar 1*, увеличения содержания фермента и тем самым способности ассимилировать неорганический азот, первичным продуктом ассимиляции которого является глутаминовая кислота – предшественник пролина в биосинтезе.

Учитывая тот факт, что глутаминовая кислота является общим предшественником и пролина, и эндогенной АЛК, в качестве рабочей гипотезы можно предложить еще один механизм, согласно которому в присутствии экзогенной АЛК синтез эндогенной может частично подавляться и приводить к переключению метаболизма глутаминовой кислоты с пути синтеза хлорофилла и гема на путь синтеза пролина, приводя тем самым к стимуляции образования последнего и возрастанию солеустойчивости растений. Понижение способности растений накапливать эндогенную АЛК в присутствии экзогенной было отмечено нами в ходе выращивания 7-дневных растений ячменя в нормальных условиях. Так, при использовании 40 мг/л экзогенной АЛК способность растений накапливать эндогенную АЛК

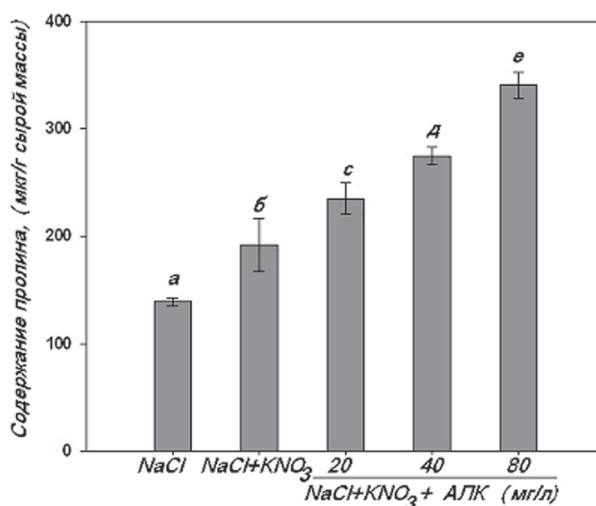


Рис. 2. Накопление пролина в растениях ячменя, выращенных на 150 мМ NaCl в присутствии 20 мМ KNO_3 и экзогенной АЛК (20, 40 и 80 мг/л). Разные маленькие буквы показывают статистически значимые различия между вариантами при $P \leq 0,05$

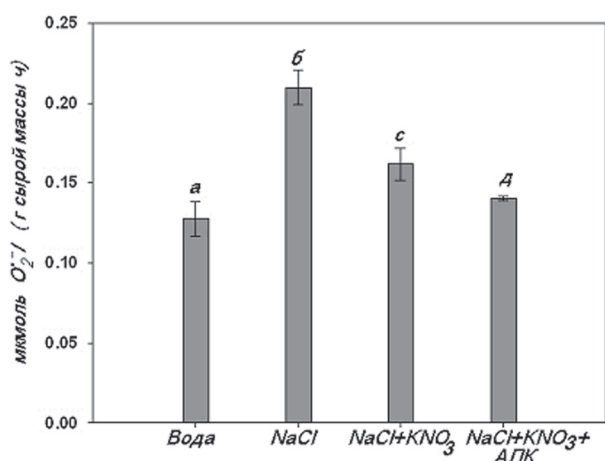


Рис. 3. Скорость генерации O₂^{•-} (мкмоль/г сырой массы ч) в отрезках листьев 7-дневных проростков ячменя, выращенных на поверхности воды, 150 мМ растворе NaCl, 150 мМ NaCl + 20 мМ KNO₃, а также на растворе 150 мМ NaCl + 20 мМ KNO₃ + 80 мг/л АЛК. Разные маленькие буквы показывают статистически значимые различия между вариантами при P ≤ 0,05

генной АЛК (80 мг/л) скорость образования O₂^{•-} возрастанием содержания пролина (рис. 2).

Заклучение. Таким образом, впервые показан один из молекулярных механизмов, с помощью которого экзогенная АЛК усиливает рост и развитие растений ячменя на ранних стадиях вегетации в условиях избыточного засоления – путем стимуляции экспрессии гена нитратредуктазы *Nar 1*, увеличения содержания фермента, его активности и тем самым ассимиляции неорганического азота. Использование двух агентов – нитрата и экзогенной АЛК, способствовало формированию высокой солеустойчивости растений ячменя на ранних стадиях их вегетации, проявившейся в стимуляции ростовых процессов, накоплении пролина, что в свою очередь привело к снижению уровня окислительного стресса путем уменьшения способности растений генерировать O₂^{•-}. Использование в качестве РРР экзогенной АЛК может явиться эффективной стратегией, позволяющей через воздействие на НР усиливать ассимиляцию неорганического азота и тем самым повышать стрессоустойчивость растений и их продуктивность.

Список использованной литературы

1. Garg, S. K. Role and hormonal regulation of nitrate / S. K. Garg // Plant Sci. Feed. – 2003. – Vol. 3. – P. 13–20.
2. Warner, R. L. Inheritance and expression of NAD(P)H nitrate reductase in barley / R. L. Warner, K. R. Narayanan, F. Kleinhofs // Theor. Appl. Genet. – 1987. – Vol. 74. – P. 714–717.
3. Campbell, W. H. Functional domains of assimilatory nitrate reductases and nitrite reductases / W. H. Campbell, K. R. Kinghorn // Trends Biochem. Sci. – 1990. – Vol. 15. – P. 315–319.
4. Foyer, C. H. Markers and signals associated with nitrogen assimilation in higher plants / C. H. Foyer, M. Parry, G. J. Noctor // J. Exp. Bot. – 2003. – Vol. 54. – P. 585–593.
5. Garg, N. Nitrate reductase activity in roots and leaves of chickpea cultivars under salt stress / N. Garg, R. Singla // Span. J. Agric. Res. – 2005. – Vol. 3. – P. 617–629.
6. Sarwat, M. I. Increasing salt tolerance in some barley genotypes (*Hordeum vulgare*) by using kinetin and benzyladenin / M. I. Sarwat, M. H. El-Sherif // World J. Agricult. Sci. – 2007. – Vol. 3. – P. 617–629.
7. Аверина, Н. Г. Биосинтез тетрапирролов в растениях / Н. Г. Аверина, Е. Б. Яронская. – Минск: Беларус. навука, 2012.
8. Mishra, S. N. Stimulation of nitrate reductase activity by delta aminolevulinic acid in excised maize leaves / S. N. Mishra, H. S. Srivastava // Experientia. – 1983. – Vol. 39. – P. 1118–1120.
9. Effect of 5-aminolevulinic acid on leaf senescence and nitrogen metabolism of pakchoi under different nitrate levels / Z. Y. Wei [et al.] // J. Plant Nutr. – 2012. – Vol. 35. – P. 49–63.
10. Bezaei, Z. Response of Nitrate Reductase to Exogenous Application of 5-Aminolevulinic Acid in Barley Plants / Z. Bezaei, R. A. Sherbakov, N. G. Averina // J. Plant Growth Regul. – 2014. – Vol. 33. – P. 745–750.

падала на 16 % по сравнению с контролем, а при использовании 60 мг/л – на 38 %. В таких растениях отмечено и возрастание содержания пролина [7]. К сожалению, оценить АЛК-синтезирующую способность растений, выращиваемых в условиях засоления в присутствии экзогенной АЛК не представляется возможным, поскольку само засоление индуцирует синтез дополнительной АЛК. Не исключено, что в описанных выше условиях проведения эксперимента работают оба механизма.

Оценка способности растений генерировать O₂^{•-} показала значительное ее возрастание при использовании 150 мМ NaCl (на 55 % по сравнению с растениями, выращенными на воде). Скорость генерации O₂^{•-} снижалась на 14 % при добавлении к раствору соли 20 мМ KNO₃ (рис. 3), в присутствии которого уровень пролина возрастал на 35 % (рис. 2). При добавлении к варианту «NaCl + KNO₃» экзо- снижалась на 29 %, что также сопровождалось

11. *Hernández, J. A.* Salt stress-induced changes in superoxide dismutase isozymes in leaves and mesophyll protoplasts from *Vigna unguiculata* (L.) / J. A. Hernández, L. A. Del Rio, F. Sevilla // *Walp. New Phytol.* – 1994. – Vol. 126. – P. 37–44.
12. *Akram, N. A.* Aminolevulinic acid-induced changes in some key physiological attributes and activities of antioxidant enzymes in sunflower (*Helianthus annuus* L.) plants under saline regimes / N. A. Akram, M. Ashraf, F. Al-Qurainy // *Sci. Hort.* – 2012. – Vol. 142. – P. 143–148.
13. 5-Aminolevulinic acid ameliorates salinity-induced metabolic, water-related and biochemical changes in *Brassica napus* L. / M. S. Naeem [et al.] // *Acta Physiol. Plant.* – 2011. – Vol. 33. – P. 517–528.
14. Salinity-induced changes in two cultivars of *Vigna radiata*: responses of antioxidative and proline metabolism / K. Sumithra [et al.] // *Plant Growth Regul.* – 2006. – Vol. 50. – P. 11–22.
15. Necessity of superoxide production for the development of etiolated wheat seedlings / B. Y. Shorning [et al.] // *Biochemistry (Moscow)*. – 2000. – Vol. 65. – P. 1357–1361.
16. *Weinstein, J. D.* Separate physiological roles and subcellular compartments for two tetrapyrrole biosynthetic pathways in *Euglena gracilis* / J. D. Weinstein, S. I. Beale // *J. Biol. Chem.* – 1983. – Vol. 258. – P. 6799–6807.
17. Роль метаболизма азота в формировании солеустойчивости растений ячменя (*Hordeum vulgare* L.) и пшеницы (*Triticum aestivum*) / Н. Г. Аверина [и др.] // *Физиология растений*. – 2014. – Т. 61. – С. 106–113.
18. Exogenous application of 5-aminolevulinic acid increases the transcript levels of sulfur transport and assimilatory genes, sulfate uptake, and cysteine and glutathione / A. Maruyama-Nakashita [и др.] // *Soil. Sci. Plant Nutr.* – 2010. – Vol. 56. – P. 281–288.
19. Evidence for a contribution of ALA synthesis to plastid-to-nucleus signaling / O. Czarnecki [et al.] // *Front. Plant Sci.* – 2012. – Vol. 3. – P. 236.
20. *Кузнецов, Вл. В.* Пролин при стрессе: биологическая роль, метаболизм, регуляция / Вл. В. Кузнецов, Н. И. Шевякова // *Физиология растений*. – 1999. – Т. 46. – С. 321–336.

Поступило в редакцию 29.06.2015

МЕДИЦИНА

УДК 616-089.843:611.779

*И. В. КУЗНЕЦОВА***РЕАКЦИЯ ОКРУЖАЮЩИХ ТКАНЕЙ В ОТДАЛЕННЫЙ ПОСЛЕОПЕРАЦИОННЫЙ ПЕРИОД НА ИМПЛАНТАЦИЮ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ***(Представлено членом-корреспондентом В. А. Кульчицким)**Институт физиологии НАН Беларуси, Минск, Беларусь
k.iriniya.v@mail.ru*

Продemonстрировано, что после имплантации композиционных материалов не происходит полной абсорбции биodeградируемых нитей в течение длительного периода наблюдения (12 месяцев). Изменения в окружающих тканях в отдаленном послеоперационном периоде, связанные с имплантацией композиционных сетчатых эндопротезов Parietene ProGrip фирмы Covidien (Франция), заключаются в сочетании острых реакций на внедрение инородного тела и проявлений хронического гранулематозного воспаления. Функциональная значимость подобных реакций заключается в изоляции материала соединительнотканной капсулой, отторжение и удаление его за пределы организма. С течением времени выраженность этих реакций ослабевает, но в редуцированном виде сохраняется на протяжении длительного времени (для крыс это составляет не менее 12 месяцев).

Ключевые слова: инородное тело, сетчатые эндопротезы, инкапсуляция, продуктивное воспаление.

*I. V. KUZNETSOVA***REACTION OF THE SURROUNDING TISSUES ON THE IMPLANTATION OF COMPOSITE MATERIALS IN THE LATE POSTOPERATIVE PERIOD***Institute of Physiology of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
k.iriniya.v@mail.ru*

Changes in the surrounding tissues in the late postoperative period associated with the implantation of composite mesh prosthesis (Parietene ProGrip) consists in a combination of acute reactions for the introduction of a foreign body and the manifestations of chronic granulomatous inflammation, which means the isolation of the material by a connective tissue capsule, failure and its removal outside the body. In the course of time, the severity of these reactions is reduced, but not completely leveled.

Keywords: foreign body, mesh implants, encapsulation, productive inflammation.

Введение. С развитием медицины и общества в целом необходимость в имплантации в ткани организма человека различных чужеродных объектов постоянно растет, а возможности применения композитных материалов расширяются. Далеко не всегда после имплантации достигаются признаки биологической совместимости, основным из которых является объединение имплантата и организма в неделимое целое. Изучение процессов интеграции живых тканей и искусственных материалов в различных условиях имеет большое значение для качества жизни больных, нуждающихся в применении эндопротезов в хирургии, травматологии, ортопедии, восстановительной медицине.

Вживление в организм любого чужеродного материала вызывает воспалительно-репаративную реакцию, которая является выражением естественной защитной и регенеративной функций соединительной ткани. Воспалительный процесс в окружающих тканях сопровождается проли-

ферацией фибробластов, которые продуцируют коллагеновые волокна и другие компоненты экстрацеллюлярного матрикса. Формируется соединительнотканная капсула, изолирующая инородное тело. Интенсивность воспаления зависит от степени биосовместимости имплантируемых материалов [1; 2].

При исследовании частоты и структуры осложнений, развившихся после использования синтетических или биологических материалов, достаточно часто сообщается о формировании вокруг имплантата очень плотных соединительнотканых капсул с деформациями и разрывами, миграции материала в пределах организма, отторжении, выведении через свищевые ходы и других осложнениях [1; 3]. Скорее всего, подобный спектр негативных последствий, связанный с гиперплазией и ремоделированием соединительной ткани, можно считать комплексом закономерных физиологических реакций организма, направленных на изоляцию и дальнейшее удаление инородного тела, а следовательно, их сложно избежать, но можно научиться прогнозировать.

В научной литературе практически нет данных о взаимодействии имплантата с организмом уже после его отграничения от живых тканей фиброзной капсулой, т. е. в отдаленный послеоперационный период, также нет сведений о том, как далее ведет себя макрофагальная система и как организм реципиента избавляется от имплантатов разных размеров и физических свойств. Однако без учета указанных факторов невозможно разработать эффективные методы профилактики и лечения развивающихся осложнений использования синтетических и биологических материалов для эндопротезирования.

Материалы и методы исследования. В качестве модели использованы самцы крыс инбредной линии Wag весом 180–200 г возрастом 6 месяцев. Все манипуляции с животными осуществляли под общим ингаляционным эфирным наркозом в условиях чистой операционной с соблюдением «Правил проведения работ с использованием экспериментальных животных». Все крысы получены из вивария Института цитологии и генетики СО РАН, содержание и работу с животными проводили на базе данного вивария.

После обработки кожи животных спиртом производили разрез длиной 1–2 см в области шеи от основания черепа до лопаток, куда имплантировали фрагменты прямоугольной формы композиционного сетчатого протеза Parietene ProGrip фирмы Covidien (Франция) (полурассасывающаяся самофиксирующаяся сетка, состоящая из 50 % полипропилена или монофиламентного полиэстера и 50 % полимолочной кислоты). На каждую точку исследования было использовано не менее 6 крыс.

Через 1, 2, 6 и 12 месяцев после операции имплантированный материал биоптировали вместе с окружающими тканями, фиксировали в 4 %-ном растворе параформальдегида на фосфатном буфере (рН 7,4) не менее 24 ч, обезвоживали в серии этанола возрастающей концентрации, просветляли в ксилоле и заключали в гистопласт. Срезы толщиной 5–7 мкм окрашивали гематоксилином и эозином, изучали на световом микроскопе Axioimager M1 (Carl Zeiss, Германия) при увеличении до 1200 раз.

По формуле $S = \pi\alpha\beta$, где S – площадь эллипса; α – длина большей полуоси эллипса; β – длина меньшей полуоси эллипса, вычисляли площади гранулем инородных тел.

Результаты и их обсуждение. Микроскопически на всех этапах эксперимента наблюдали формирование соединительнотканного каркаса, так называемой рубцовой сетки, вокруг филаментов эндопротеза. Именно для активации этого процесса изготовитель ввел в состав сеток биодеградируемые волокна, вокруг которых развивается гранулематозное воспаление [4].

Площади срезов гранулем инородных тел с течением времени уменьшались. От 0,08 мм² (через 1 месяц после имплантации) до 0,02 мм² (через 12 месяцев после операции). Но гранулемы не исчезли полностью, что говорит о персистенции гранулематозного воспаления в связи с незавершившейся абсорбцией полимолочной кислоты. В пользу продолжающейся воспалительной реакции также свидетельствуют расстройства кровообращения, обнаруживаемые перифокально во все сроки наблюдения и выражающиеся сужением сосудистых просветов, свя-

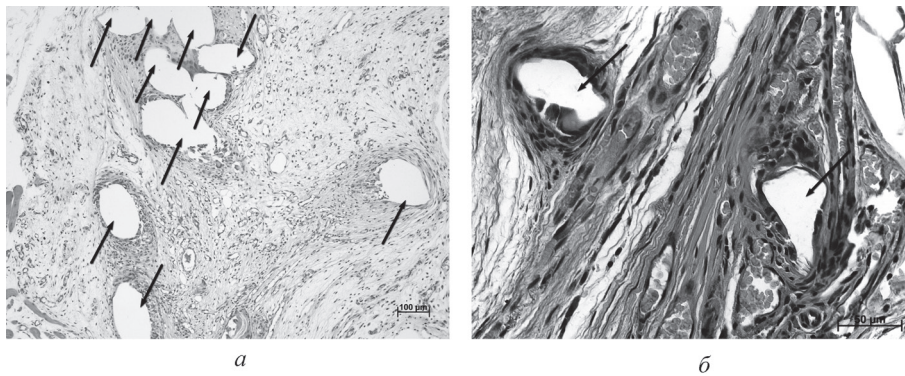


Рис. 1. Микрофотографии зон имплантации композиционной сетки. Стрелками указаны волокна сетки, окруженные гранулемами инородных тел. Признаки нарушения микрогемодинамики: полнокровие, микротромбы, сладж эритроцитов. Окраска гематоксилином и эозином: *а* – через 1 месяц после имплантации; *б* – через 12 месяцев после имплантации

занным со склерозом и гиалинозом их стенок, сладжем и стазом эритроцитов, микротромбами, геморрагиями (рис. 1).

Таким образом, несмотря на большинство литературных данных о биodeградируемости изделий из полимолочной кислоты, по истечении длительного срока (для крыс это составляет не менее 12 месяцев) в месте имплантации сохранились инкапсулированные фрагменты нитей этого материала.

Неабсорбируемые волокна сетки окружали соединительнотканые капсулы, которые с течением времени уплотнялись. В одних случаях капсулы объединяли группу из нескольких волокон, в других изолировали и отдаляли друг от друга отдельные филаменты сетки, тем самым вызывая деформацию сеток и перемещения ее элементов. Отдельные и сгруппированные волокна обнаруживали в достаточном отдалении от основной сетки (рис. 2, *а*).

Перемещения элементов сетки, по-видимому, происходят за счет сокращений соединительнотканых капсул, которые в свою очередь связаны с констрикцией миофибробластов, присутствующих в них [5; 6].

В центральных частях эндопротезов по большей части произошла группировка отдельных филаментов с формированием вокруг них общих соединительнотканых капсул, что привело к сморщиванию материала и уменьшению его площади. Причем толщина таких капсул зачастую была значительно большей, в сравнении с толщиной капсул, сформированных вокруг отдельных филаментов сетки (рис. 2, *б*). В капсулах присутствовали макрофаги и гигантские многоядерные клетки, очаги грубого склероза и признаки нарушения кровообращения: микротромбы, васкули-

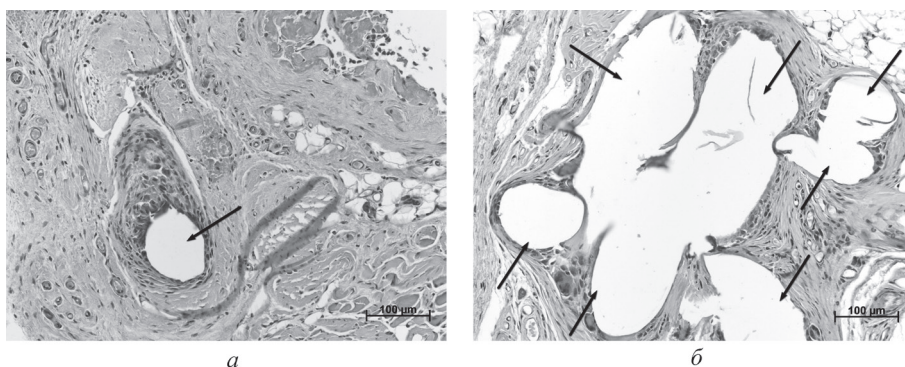


Рис. 2. Микрофотографии зон имплантации композиционной сетки через 6 месяцев после операции. Стрелками указаны волокна сеток, окруженные соединительноткаными капсулами. Окраска гематоксилином и эозином: *а* – изолированное волокно в отдалении от основного массива сетки, окруженное гранулемой инородного тела; *б* – сгруппированные волокна сетки, объединенные соединительнотканной капсулой

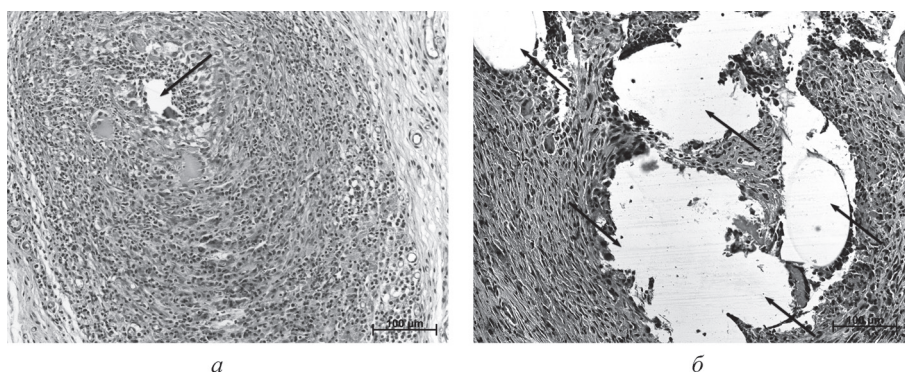


Рис. 3. Микрофотографии зон имплантации композиционной сетки. Стрелками указаны волокна сетки, окруженные соединительнотканными капсулами, инфильтрированными лейкоцитами, гистиоцитами, гигантскими многоядерными клетками. Окраска гематоксилином и эозином: *а* – через 2 месяца после имплантации; *б* – через 12 месяцев после имплантации

ты, склероз и гиалиноз сосудистых стенок, что, по-видимому, является реакцией на присутствующие в этих группах волокна полимолочной кислоты.

Формирование слишком плотных капсул вокруг сетчатых протезов считается неблагоприятным фактором, так как их кровоснабжение при этом остается недостаточным [7], что может способствовать вторичному инфицированию имплантата, с которым, вероятно, связано развитие проявлений острого воспаления у нескольких животных в сроки 1, 2 и 12 месяцев (рис. 3).

Кроме того, плотная соединительнотканная капсула может вызвать накопление метаболитов биохимических реакций, с появлением которых нередко связывают возникновение опухолей, в том числе злокачественных, на месте имплантации полимеров [8]. Грубая фиброзная капсула может подвергаться кальцификации. При этом уплотненная капсула может вызывать повреждение подлежащих тканей с развитием болевого синдрома или парестезий [9; 10].

Заключение. После имплантации композиционных сетчатых протезов не происходит полной абсорбции биodeградируемых нитей в течение длительного периода наблюдения (12 месяцев). Изменения в окружающих тканях в отдаленном послеоперационном периоде, связанные с имплантацией композиционных сетчатых эндопротезов Parietene ProGrip фирмы Covidien (Франция), заключаются в сочетании острых реакций на внедрение инородного тела и проявлений хронического гранулематозного воспаления. Функциональная значимость подобных реакций заключается в изоляции материала соединительнотканной капсулой, отторжение и удаление его за пределы организма. С течением времени выраженность этих реакций ослабевает, но в редуцированном виде сохраняется на протяжении длительного времени (для крыс это составляет не менее 12 месяцев).

Можно заключить, что абсолютная интеграция данных композитных сетчатых эндопротезов в макроорганизм невозможна, поскольку организм будет постоянно стремиться избавиться от инородного тела, перемещая и видоизменяя его. Имплантация подобных протезов всегда сопряжена с риском развития различных и трудно предсказуемых осложнений, как ранних, так отсроченных.

Список использованной литературы

1. Шехтер, А. Б. Тканевая реакция на имплантат / А. Б. Шехтер, И. Б. Розанова // Биосовместимость / под ред. В. И. Севастьянова. – М: ИЦВНИИ геосистем, 1999. – С. 174–211.
2. The fibrous capsules around static and dynamic implants: their biochemical, histological, and ultrastructural characteristics / J. K. Laitung [et al.] // Ann. Plast. Surg. – 1987. – Vol. 19, N 3. – P. 208–216.
3. Случай поворота имплантата молочной железы спереди назад / О. Б. Добрякова [и др.] // Анналы пластической, реконструктивной и эстетической хирургии. – 2010. – № 4. – С. 31–36.
4. Жуковский, В. А. Полимерные протезы для герниопластики / В. А. Жуковский. – СПб.: Эскулап, 2011. – 104 с.
5. Myofibroblasts and mechano-regulation of connective tissue remodeling / J. J. Tomasek [et al.] // Nat. Rev. Mol. Cell Biol. – 2002. – Vol. 3, N 5. – P. 349–363.

6. Myofibroblast contraction activates latent TGF- β 1 from the extracellular matrix / P. J. Wipff [et al.] // *J. Cell. Biol.* – 2007. – Vol. 179, N 6. – P. 1311–1323.
7. Майбородин, И. В. Нарушения микроциркуляции как причина капсулярной контрактуры после увеличивающей маммопластики / И. В. Майбородин, Н. Н. Ковынец, О. Б. Добрякова // *Хирургия.* – 2007. – № 3. – С. 49–53.
8. Moizhess, T. G. Carcinogenesis induced by foreign bodies / T. G. Moizhess // *Biochemistry (Mosc).* – 2008. – Vol. 73, N 7. – P. 763–775.
9. Gillion, J. F. Chronic pain and quality of life (QoL) after transinguinal preperitoneal (TIPP) inguinal hernia repair using a totally extraperitoneal, parietalized, Polysoft® memory ring patch: a series of 622 hernia repairs in 525 patients / J. F. Gillion, J. M. Chollet // *Hernia.* – 2013. – Vol. 17, N 6. – P. 683–692.
10. Self-adhesive mesh for Lichtenstein inguinal hernia repair. Experience of a single center / P. Tarchi [et al.] // *Minerva Chir.* – 2014. – Vol. 69, N 3. – P. 167–176.

Поступило в редакцию 25.03.2015

НАУКИ О ЗЕМЛЕ

УДК 550.42:551.1(476)

*Академик А. В. МАТВЕЕВ***ОСОБЕННОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ «МЕСТНОГО» (ГРУНТОВОГО) РАДОНА
В ПОЧВЕННОМ ВОЗДУХЕ ПОКРОВНЫХ ОТЛОЖЕНИЙ БЕЛАРУСИ***Институт природопользования НАН Беларуси, Минск, Беларусь
matveyev@nature.basnet.by*

Охарактеризован радонопродуцирующий потенциал основных генетических типов покровных отложений. По этим данным с использованием карты четвертичных отложений построена схема, на которой выделено пять типов территорий, различающихся по значениям объемной активности «местного» (грунтового) радона в почвенном воздухе. Выполнена оценка степени радоноопасности этих типов территорий, которые подразделены на относительно безопасные, потенциально опасные на локальных участках, потенциально опасные на отдельных площадях и потенциально опасные.

Ключевые слова: объемная активность радона, радонопродуцирующий потенциал, почвенный воздух, покровные отложения, радоноопасность.

*A. V. MATVEYEV***SOME FEATURES OF THE «LOCAL» (EARTH) RADON DISTRIBUTION
IN THE SOIL AIR OF THE COVER DEPOSITS OF BELARUS***Institute for Nature Management of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
matveyev@nature.basnet.by*

Five types of territories differing in the values of the volume activity of the «local» (earth) radon and in the degree of their radon hazard have been distinguished within the soil air region.

Keywords: volum activity of radon, radon producing potential, soil air, cover deposits, radon danger.

Введение. Результаты радонометрии достаточно широко используются при оценках состояния среды обитания населения. Это объясняется тем, что в ежегодной дозе облучения, получаемой человечеством, на долю радона и его дочерних продуктов распада приходится более 40 % [1; 2], причем этот газ является важнейшей (после курения) причиной рака легкого [3; 4], может способствовать развитию злокачественных опухолей и другой локализации, поскольку продукты его распада разносятся с кровью по всему организму и могут накапливаться в костной ткани, печени, костном мозге и т. д. [3; 5]. Одним из основных источников радона в воздухе жилых и производственных помещений являются горные породы и отложения, лежащие в основании зданий и сооружений. Поэтому карты содержания радона в поверхностных грунтах составляются во многих странах мира (Великобритания, Германия, Россия, США и др.).

В Беларуси также проводится изучение особенностей распределения объемной активности радона (ОАР) в почвах, подземных водах и жилых помещениях для решения геологических и экологических проблем. Эти исследования выполняются в организациях Министерства природных ресурсов и охраны окружающей среды (Я. Г. Грибик, А. П. Стародубова, А. П. Иваненко, А. В. Гаврилов, А. В. Беяшов, М. Ю. Калинин и др.), Национальной академии наук (О. И. Ярошевич, А. К. Карабанов, А. В. Кудельский, А. В. Матвеев, Л. Л. Василевский, И. В. Жук и др.), Министерства здравоохранения (И. В. Залуцкий, Ю. И. Аверин, Л. А. Чунихин, Д. Н. Дроздов,

С. А. Мацкевич, Л. В. Липницкий и др.), Институте радиологии Министерства по чрезвычайным ситуациям (М. И. Автушко, К. Н. Буздалкин, Ю. М. Жученко, Л. В. Жукова и др.), в некоторых вузах страны.

Работами белорусских специалистов установлено формирование радоновых аномалий в зонах отдельных разломов, показаны возможности использования радонометрических данных при прогнозировании нефтяных залежей, выявлении трубок взрыва. Собраны значительные материалы по концентрациям радона в жилых помещениях, которые свидетельствуют, что по отдельным районам от 5 до 15 % (единично до 33 %) в обследованных зданиях ОАР превышает 200 Бк/м^3 [6], а его концентрация в почвенном воздухе варьирует в интервале от 1000 до 70000 Бк/м^3 и более [7; 8].

Проведенными исследованиями показано, что ОАР в почвенном воздухе формируются за счет поступления газа из более глубокозалегающих горизонтов в процессе естественной дегазации Земли и так называемого местного (грунтового) радона, который продуцируется непосредственно в приповерхностных отложениях и доля которого составляет до 50 % и более, т. е. может измеряться десятками тысяч Бк/м^3 . Подобные значения по оценкам, используемым Инспекцией Госатомнадзора Российской Федерации, могут рассматриваться как относительно радоноопасные [9]. Поэтому изучение распределения «местной» составляющей объемной активности радона является вполне актуальным, тем более, что в настоящее время разработана методика, позволяющая достаточно оперативно проводить подобные измерения [10; 11].

Материалы и методы исследований. Покровные (почвообразующие) отложения на территории Беларуси относятся преимущественно к ледниковой формации, в составе которой преобладают моренные, флювиогляциальные, краевые ледниковые и озерно-ледниковые комплексы,



Рис. 1. Схема отбора проб покровных отложений: 1 – ключевые участки (А – Слуцкий, Б – Антопольский, В – Минский, Г – Подлесский, Д – Грицевичский, Е – Солигорский, Ж – Воложинский, 3 – Дубровенский, И – Шарковщинский); места отбора отдельных проб покровных отложений: 2 – флювиогляциальных, 3 – краевых ледниковых, 4 – моренных, 5 – аллювиальных, 6 – лессовидных, 7 – озерно-ледниковых, 8 – торфа, 9 – озерно-аллювиальных

а также к криогенной и термогенной формациям, среди которых наибольшие площади занимают лессовидные, аллювиальные, озерно-аллювиальные и болотные образования. При этом на или вблизи земной поверхности флювиогляциальные песчаные отложения встречаются примерно на 39 % территории страны, моренные супеси и суглинки – на 17 %, краевые ледниковые комплексы (пески, песчано-гравийный материал) – на 14 %, озерно-аллювиальные пески, алевриты, супеси – на 12 %, аллювиальные пески, реже супеси, суглинки – на 10 %, озерно-ледниковые глины и суглинки – на 6 %. Перечисленные отложения на значительных площадях могут быть перекрыты лессовидными супесями и суглинками (до 8 % территории региона) и болотными образованиями, распространенными примерно на 12 % поверхности Беларуси [12].

Изучение ОАР в поровом воздухе этих отложений проводилось на 9 ключевых участках, где отбор проб и анализы выполнялись преимущественно с интервалом от 100–200 м до 1,5–2,0 км. Кроме того, исследовались отдельные образцы из других районов Беларуси (рис. 1). Всего проанализировано свыше 300 проб.

Методика полевых и лабораторных работ достаточно подробно охарактеризована в [7; 8]. Следует только отметить, что определяя в лабораторных условиях ОАР по дочерним продуктам его распада, получаем значения, которые отражают как содержание способного мигрировать изотопа в поровом воздухе, так и его количество в субстрате (твердом веществе грунта), где радон находится в связанном состоянии. Оценить соотношение этих двух составляющих довольно сложно. После анализа результатов измерения ОАР разными способами в одних и тех же точках автор пришел к заключению, что для выделения способного к миграции радона, определяемую общую величину его концентрации следует уменьшить с учетом пористости отложений. После проведения таких расчетов полученные значения оказываются вполне сопоставимыми с данными непосредственных измерений радиометрами радона (РРА-01М-01 «Альфарад», «Альфарад плюс», РРА-01М-03 и др.).

По описанной методике были выполнены измерения и расчеты ОАР в почвенном воздухе основных генетических типов покровных отложений, результаты которых приведены в таблице.

Характеристики объемной активности радона в почвенном (поровом) воздухе основных типов покровных отложений Беларуси

Отложения	Кол-во образцов	Параметры объемной активности радона (в Бк/м ³)		
		Среднее	Пределы колебаний	Наиболее распространенные значения (более 70 % образцов)
Моренные	43	12900	9800–17800	9800–16600
Флювиогляциальные	111	7900	3600–15300	4300–12900
Краевые ледниковые	33	7800	2000–20900	7900–13000
Озерно-ледниковые	15	23400	14800–30000	17100–26600
Лессовидные	37	16300	12900–28200	14100–18700
Озерно-аллювиальные	20	10100	6600–21700	8100–12300
Аллювиальные	35	7900	4100–13000	5400–10500 (10000–13000 – пойменный аллювий крупных рек)
Торф	12	9700	1700–14900 единично 31900	4500–11300

Полученные данные затем наносились на геологическую карту [12], что позволило построить схему распределения рассматриваемого показателя на территории региона. При подобных построениях, учитывая значительные вариации состава отложений, принято решение не ограничиваться показом только какой-либо одной величины (среднее, пределы колебаний, максимальные значения, т. д.), а использовать комплексный показатель, включающий среднее, которое ставится перед дробью, числитель которой отражает наиболее возможный интервал вариаций, а знаменатель – максимальные значения концентраций газа. Картирование по предложенной формуле способствует более объективной оценке возможной радоноопасности тех или иных территорий.

При значительных площадях распространения отдельных типов отложений выделение на схеме контуров с определенными величинами ОАР не вызывает сложностей, однако нередко покровные отложения разного генезиса и состава достаточно пестро чередуются на небольших расстояниях. Для этих территорий проводились дополнительные расчеты усредненных показателей с учетом площадей, занимаемых определенными типами отложений, и характерными для них концентрациями газа.

После нанесения на схему всех значений ОАР оказалось, что иногда рядом расположенные контуры мало отличаются друг от друга, особенно с учетом допустимой ошибки лабораторных измерений 5–10 %. Поэтому для составления схемы распределения объемной активности «местного» (грунтового) радона используемые характеристики были сгруппированы, что позволило выделить пять типов территорий, которые отличаются следующими параметрами (Бк/м³):

$$\begin{aligned}
 \text{I} & - 8500 \frac{4300 - 11300}{20900}; \\
 \text{II} & - 9700 \frac{7000 - 14900}{20900}; \\
 \text{III} & - 11700 \frac{8500 - 16600}{28200}; \\
 \text{IV} & - 15200 \frac{11900 - 18700}{28200}; \\
 \text{V} & - 22700 \frac{17100 - 28600}{30000}.
 \end{aligned}$$

Распределение этих типов территорий показано на рис. 2.

Результаты и их обсуждение. Выполненные исследования позволили провести оценку радонопродуцирующего потенциала покровных отложений Беларуси и оценить его потенциальную опасность. С учетом уровней радоноопасности грунтов [9] к безопасным относятся участки с ОАР менее 10000 Бк/м³, к относительно опасным – 10000–50000 Бк/м³ и к опасным – более 50000 Бк/м³.

Из проанализированных отложений в категорию относительно радоноопасных попадают моренные суглинки и глины, лессовидные суглинки, озерно-ледниковые суглинки и глины, реже озерно-аллювиальные суглинки и наиболее минерализованные разновидности торфа, ОАР в почвенном воздухе которых чаще всего варьирует в интервале 10600–28600 Бк/м³, средние значения превышают 10000 Бк/м³. Другие отложения в основном являются радонобезопасными.

Для оценки радоноопасности выделенных на схеме (рис. 2) типов территорий учитывались соотношения в их пределах наиболее распространенных отложений. Так, территории первого и второго типов характеризуются преобладанием флювиогляциальных, краевых ледниковых, озерно-аллювиальных и аллювиальных песков, реже супесей, торфа, для которых наиболее характерны значения ОАР в поровом воздухе в интервале 4300–14900 Бк/м³ (средние и максимальная величины составляют соответственно 8500–9700 Бк/м³ и 20900 Бк/м³). Эти показатели позволяют считать рассматриваемые территории относительно радонобезопасными. Термин «относительно» используется в связи с тем, что значения ОАР, превышающие 10000 Бк/м³, установлены только в небольшом количестве образцов. Кроме того, при более детальных исследованиях в пределах рассматриваемых типов территорий могут быть выделены локальные участки распространения иных (кроме перечисленных выше) отложений с более высокими концентрациями радона.

Третий тип территорий отличается распространением моренных супесей и суглинков, а также чередованием моренных, лессовидных супесей и суглинков, краевых ледниковых песчано-гравийных отложений и флювиогляциальных песков. На этих площадях отмечено увеличение среднего значения ОАР до 11700 Бк/м³, наиболее распространенные величины составляют 8500–

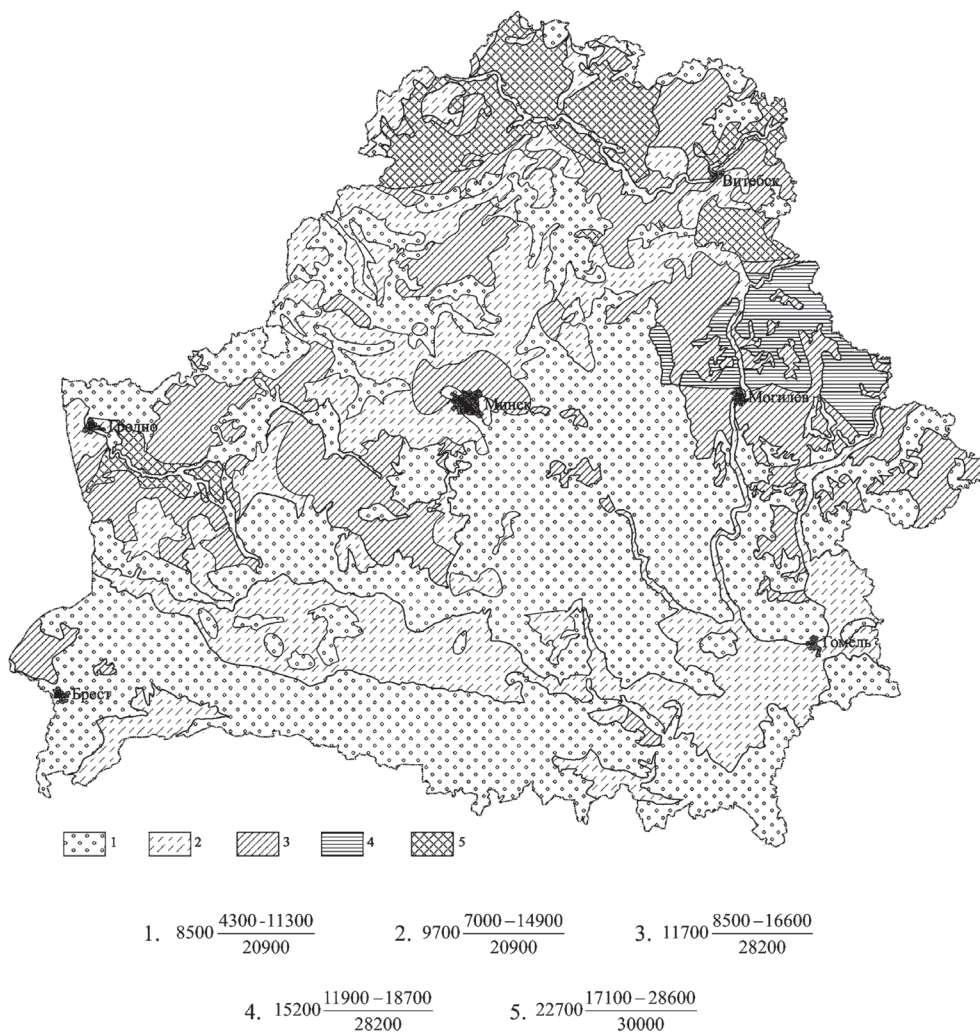


Рис. 2. Схема распределения объемной активности «местного» (грунтового) радона (в Бк/м³) в почвенном воздухе покровных отложений Беларуси

16600 Бк/м³, максимальные до 28200 Бк/м³. По этим показателям территории третьего типа относятся к потенциально радоноопасным на локальных участках распространения наиболее глинистых разностей моренных и лессовидных отложений.

В четвертом типе картируемых территорий среди покровных отложений преобладают лессовидные и моренные супеси и суглинки. Средняя величина ОАР в почвенном воздухе оценивается в 15200 Бк/м³, интервал преобладающих значений – 11900–18700 Бк/м³, а максимальные концентрации достигают 28200 Бк/м³, что позволяет рассматривать эти территории в качестве потенциально радоноопасных на отдельных площадях.

Пятый тип территорий выделен в зоне распространения озерно-ледниковых глин и суглинков, для которых установлены наиболее повышенные для Беларуси значения ОАР в почвенном воздухе покровных отложений. Практически все площади распространения озерно-ледниковых глин относятся к потенциально радоноопасным.

Заключение. По результатам лабораторных измерений потока гамма-квантов от дочерних продуктов распада радона рассчитаны значения его объемной активности в поровом воздухе основных типов покровных отложений. По этим данным с использованием геологической карты четвертичных отложений построена схема распределения объемной активности газа, который продуцируется непосредственно в почвенном слое. Выделено пять типов территорий, различающихся по средним, наиболее широко распространенным и максимальным значениям концентраций радона. Оценена степень радоноопасности этих территорий.

Список использованной литературы

1. *Богдасаров, А.* Радон: минусы и плюсы коварной невидимки / А. Богдасаров. – Брест, 2008.
2. Источники, эффекты и опасность ионизирующей радиации: Доклад научного комитета ООН. – М., 1992. – Т. 1.
3. Радиация: дозы, эффекты, риск. – М., 1988.
4. *McLaughlin, J. P.* Indoor radon: sources, health effects and control / J. P. McLaughlin // *Technology Ireland*. – 1990. – Vol. 22, N 4. P. 27–30.
5. *Barnes-Svarney, P.* Righting the risk of radon / P. Barnes-Svarney // *Earth Sciences*. – 1989. – Vol. 42, N 3. P. 17–18.
6. Радон в воздухе зданий и радоновая составляющая дозы радиоактивного облучения населения в различных областях Беларуси / О. И. Ярошевич [и др.] // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 6. – С. 92–97.
7. *Автушко, М. И.* Проявление линейных нарушений в концентрациях радона в покровных отложениях на территории Воложинского грабена / М. И. Автушко, А. В. Матвеев, Л. А. Нечипоренко // Докл. АН Беларуси. – 1996. – Т. 40, № 6. – С. 92–94.
8. *Автушко, М. И.* Концентрация радона в приповерхностных грунтах на территории Солигорского геодинамического полигона (Беларусь) / М. И. Автушко, А. В. Матвеев // *Літасфера*. – 2010. – № 2(33). – С. 98–105.
9. Реализация федеральной программы «Радон» в 1997 г. Анализ достоверности проведенных измерений. Оценка радоноопасности территории / Н. А. Манаков [и др.] // АНРИ. – 1998. – № 4. – С. 8–18.
10. Способ поиска аномалий радона глубинного происхождения: Патент № 987 ВУ. МКИ GO IV 5/02. / М. И. Автушко, К. Н. Буздалкин. Заявл. 3.06.1993. Оpubл. 20.03.1995.
11. Способ поиска аномалий радона глубинного происхождения: Патент № 6422 ВУ. МКИ 7 GO 01 5/00. / М. И. Автушко, В. Э. Ковдерко. Заявл. 15.08.2001. Оpubл. 30.09.2004.
12. Чацвярцічныя адклады. М 1:1 250 000 // Нацыянальны атлас Беларусі. – Мінск, 2002. – С. 42–43.

Поступило в редакцию 13.04.2015

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 621.2.082.18

*А. И. КОМАРОВ, академик П. А. ВИТЯЗЬ, В. И. КОМАРОВА***СТРУКТУРА И ТРИБОМЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
КЕРАМИЧЕСКОГО ПОКРЫТИЯ, МОДИФИЦИРОВАННОГО
В ПРОЦЕССЕ ЕГО ФОРМИРОВАНИЯ НАНОРАЗМЕРНЫМ TiN***Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси, Минск, Беларусь
al_kom@tut.by; vityaz@presidium.bas-net.by; komarova@inmash.bas-net.by*

Осуществлено модифицирование в процессе МДО оксидокерамических покрытий наноразмерным нитридом титана, что позволило получить оксидно-нитридную керамику в виде покрытия на алюминиевом сплаве Д16. Наибольшая концентрация нитрида титана регистрируется в поверхностных слоях покрытия, при этом область модифицирования распространена до 1/3 его толщины. Установлено, что модифицирование сопровождается повышением микротвердости в 1,2–1,4 раза, которая достигает 23 ГПа. Триботехнические испытания в условиях граничного трения показали, что модифицирование МДО-покрытий нитридом титана приводит к снижению коэффициента трения в 1,5–2,8 раз по сравнению с немодифицированным покрытием. Помимо повышения антифрикционных свойств, достигается повышение износостойкости покрытий в 3–5 раз.

Ключевые слова: микродуговое оксидирование, керамическое покрытие, нитрид титана, структура, микротвердость, коэффициент трения.

*A. I. KOMAROV, P. A. VITYAZ, V. I. KOMAROVA***STRUCTURE AND TRIBO-MECHANICAL PROPERTIES
OF THE CERAMIC COATING MODIFIED BY NANOSIZED TiN DURING ITS SHAPING***Joint Institute of Mechanical Engineering of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
al_kom@tut.by; vityaz@presidium.bas-net.by; komarova@inmash.bas-net.by*

Oxide-ceramic coatings during the process of Micro-Arc Oxidation (MAO) with nanoscale titanium nitride were modified, which allowed one to obtain oxide-nitride ceramics in the shape of a coating on an aluminum alloy D16. The highest concentration of titanium nitride was registered in the surface coating layers, and the modification area extended to 1/3 of its thickness. It was found that the modification was accompanied by a 1.2–1.4-fold increase in the microhardness that achieved 23 GPa. Tribological tests under boundary lubrication showed that the modification of the MAO-coating with titanium nitride reduced the friction coefficient by a factor of 1.5–2.8 as compared to an unmodified coating. In addition to improving anti-friction properties, the wear resistance of coatings increased by a factor of 3–5.

Keywords: microarc oxidation, ceramic coating, titanium nitride, structure, microhardness, friction coefficient.

Введение. Оксидные керамические покрытия (КП), формируемые методом микродугового оксидирования (МДО), позволяют значительно расширить область применения алюминиевых сплавов. Благодаря сочетанию высокой (до 25 ГПа) твердости, износостойкости, коррозионной стойкости, КП на сплавах алюминия находят все более широкое применение в современной технике [1; 2]. Вместе с тем антифрикционные свойства КП в ряде случаев не достаточны для обеспечения работоспособности трибосопряжений в условиях трения без смазочных материалов или ограниченной их подачи в зону фрикционного контакта [3]. Кроме того, к недостаткам алюмооксидной керамики можно отнести ее повышенную хрупкость. Отмеченные недостатки могут быть устранены путем включения в оксидное покрытие соединений неоксидной природы, отдельные физико-механические характеристики которых (ударная вязкость, устойчивость

к тепловым ударам, антифрикционные свойства) превосходят оксиды алюминия. Широко известны композиционные материалы, получаемые путем спекания оксида алюминия с неоксидными формами керамики (нитридом и карбидом титана, нитридом кремния), которые находят широкое применение в качестве инструментальных материалов [4; 5]. Основываясь на имеющихся данных, можно ожидать, что введение в матрицу оксидного покрытия нитридных фаз способно оказать положительное воздействие на его трибомеханические свойства. Нитрид титана, наряду с высокой твердостью, износостойкостью, низким коэффициентом трения, способствует повышению изгибной прочности композиционных керамических материалов, что делает обоснованным его выбор в качестве модификатора оксидного покрытия.

Материалы и методы исследования. Микродуговое оксидирование образцов из сплава Д16 выполняли в анодно-катодном режиме [1] в базовом силикатно-щелочном электролите и с добавлением в него 0,5 г/л нитрида титана. Суспензию нитрида титана перед введением в электролит диспергировали ультразвуком в течение 15 мин и стабилизировали додецилсульфатом натрия. Размер частиц нитрида титана, используемого для модифицирования покрытия, составлял 50–75 нм.

Исследования структуры и свойств керамических покрытий выполняли на поперечных шлифах методами рентгеноструктурного, металлографического анализов и сканирующей электронной микроскопии. Триботехнические испытания образцов КП проводили в режиме граничного трения по схеме возвратно-поступательного перемещения контртела из стали 65Г, закаленной до HRC 55, относительно неподвижного образца. Испытания осуществляли при скорости скольжения 0,1 м/с, при этом контактное давление изменяли пошагово с возрастанием по схеме 30 → 40 → 50 → 60 МПа. По результатам испытаний определяли коэффициент трения f , массовый износ Δm и интенсивность изнашивания $I (I = \Delta m / L)$. Износ образцов определяли взвешиванием на аналитических весах ВЛР-200 с точностью 0,05 мг.

Результаты и их обсуждение. Исследования структуры и фазового состава покрытий, сформированных в электролите с добавкой TiN, показали, что нитрид титана встраивается в покрытие в процессе микродугового оксидирования (рис. 1, 2).

Согласно данным МРСА (рис. 1) и рентгеноструктурного анализа (рис. 2), нитрид титана внедряется на глубину, составляющую примерно 1/3 толщины покрытия. При этом наибольшая концентрация TiN регистрируется в поверхностном оксидном слое. Из анализа полученных данных также следует, что модифицирование электролита наноразмерным TiN сопровождается формированием однородного, с низкой пористостью, керамического слоя (рис. 1), что в сочетании с по-

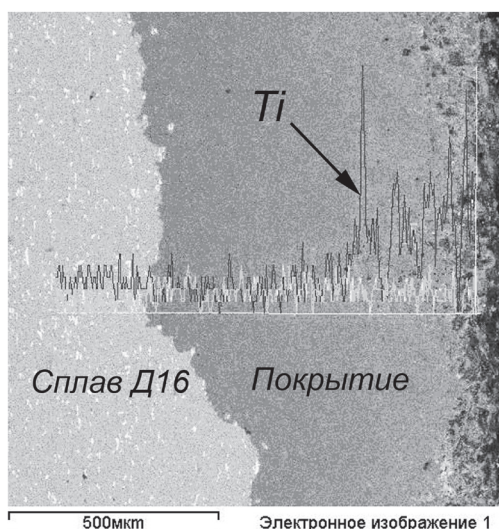


Рис. 1. Микроструктура модифицированного нитридом титана покрытия и распределение титана по глубине покрытия (поперечный ко- сый шлиф)

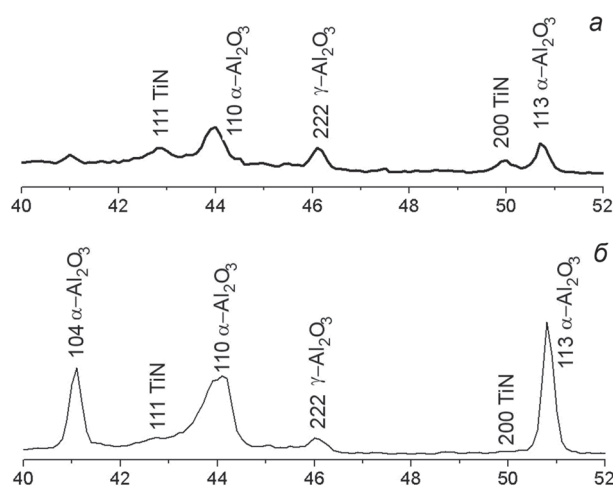


Рис. 2. Дифрактограммы модифицированного TiN покрытия на сплаве Д16: а – поверхностный слой; б – 40 мкм от поверхности

вышенным содержанием фазы $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$ (корунда) в этом случае приводит к повышению микротвердости покрытия в 1,2–1,4 раза (рис. 3). Повышенное содержание корунда указывает на более высокие температуры протекающих с участием нитрида титана плазмохимических реакций, лежащих в основе формирования оксидного покрытия.

Анализ распределения микротвердости по глубине керамического слоя выявляет также нехарактерный рост ее значений до 20–21 ГПа вблизи поверхности покрытия (рис. 3). Такой характер зависимости может быть связан с повышенной, как отмечалось выше, концентрацией нитрида титана в поверхностных слоях покрытия.

Согласно результатам триботехнических испытаний, модифицирование покрытия TiN приводит к снижению коэффициента трения во всем диапазоне исследуемых давлений. Наибольший эффект снижения коэффициента трения регистрируется при давлении $p = 30$ МПа. В этом случае коэффициент трения составляет 0,008, что приблизительно в 2,8 раз ниже соответствующей величины для немодифицированного покрытия (рис. 4).

Характер зависимости коэффициента трения от пути при $p = 40$ МПа указывает на то, что процессы приработки образцов к началу испытаний при этом давлении практически завершились. Коэффициент трения немодифицированной керамики составляет 0,020–0,025, тогда как покрытия с нитридной фазой – 0,010–0,012 (рис. 4, б).

Повышение давления до 50 МПа сопровождается снижением коэффициента трения модифицированного нитридом титана покрытия с 0,02 в начале испытаний до 0,008–0,010 в конце. Коэффициент трения немодифицированного покрытия при этом давлении имеет значения 0,03–0,04 (рис. 4, в).

Дальнейшее повышение давления до $p = 60$ МПа приводит к некоторому росту коэффициента трения, который все же не превышает 0,035. Это в 1,4 раза ниже значения f немодифицированной керамики (рис. 4, г).

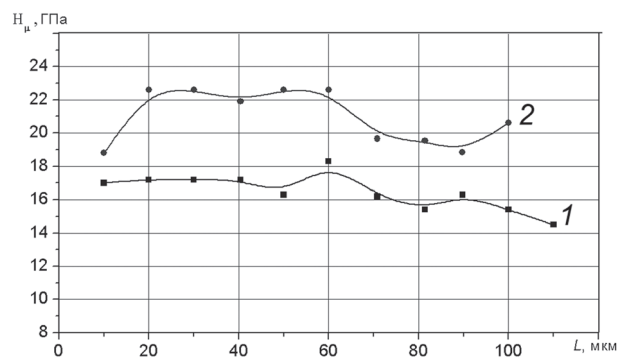


Рис. 3. Микротвердость покрытий, полученных в базовом электролите (1) и с добавкой TiN (2)

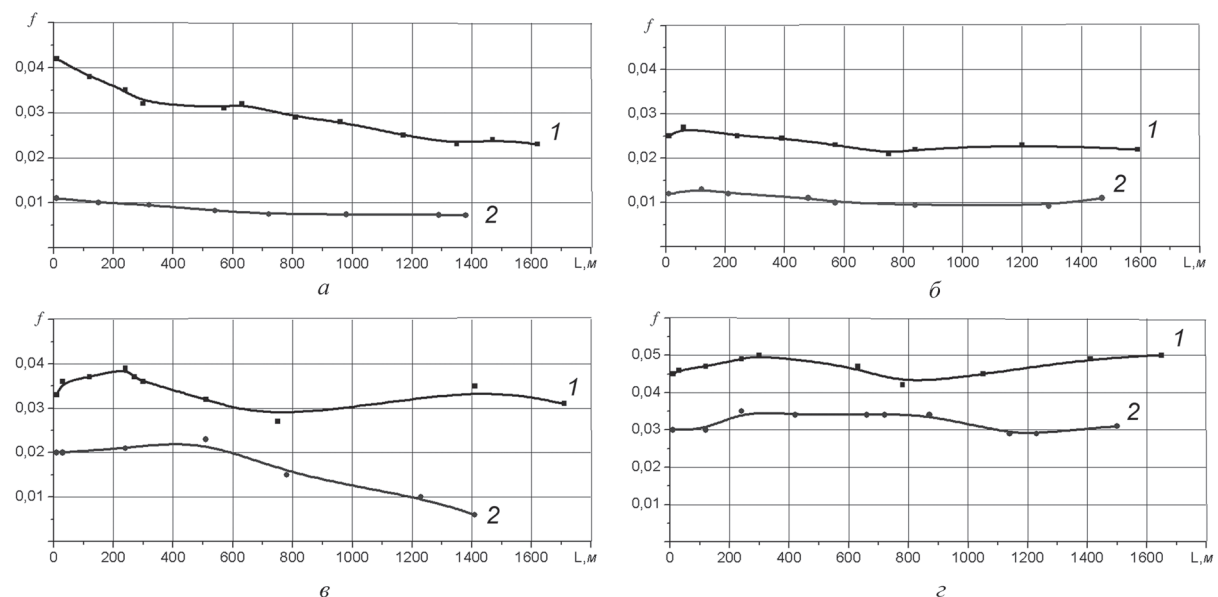


Рис. 4. Зависимость коэффициента трения от пути для покрытия на сплаве Д16 при различных давлениях: а – 30 МПа; б – 40; в – 50; г – 60 МПа; 1 – базовый электролит; 2 – с добавкой нитрида титана

Следует отметить, что помимо повышения антифрикционных свойств покрытия, модифицирование нитридом титана обеспечивает повышение его износостойкости в 3–5 раз.

Заключение. Впервые осуществлено модифицирование в процессе МДО оксидокерамических покрытий нитридом титана, что позволило получить оксидно-нитридную керамику в виде покрытия на алюминиевых сплавах. Глубина модифицирования покрытия нитридом титана составляет ~1/3 общей толщины керамического слоя. Модифицирование сопровождается повышением микротвердости в 1,2–1,4 раза, которая достигает 23 ГПа при формировании покрытия на сплаве Д16.

Триботехнические испытания в условиях граничного трения показали, что модифицирование МДО-покрытий нитридом титана приводит к снижению коэффициента трения в 1,5–2,8 раз по сравнению с немодифицированным покрытием. Помимо повышения антифрикционных свойств, модифицирование нитридом титана сопровождается повышением износостойкости покрытий в 3–5 раз.

Список использованной литературы

1. *Витязь, П. А.* Триботехнические свойства оксидокерамического покрытия в режиме граничного трения в контакте со сталью / П. А. Витязь, А. И. Комаров, В. И. Комарова // Трение и износ. – 2008. – Т. 29, № 5. – С. 447–452.
2. Микродуговое оксидирование (теория, технология, оборудование) / И. В. Суминов [и др.]. – М.: ЭКОМЕТ, 2005.
3. Создание наноструктурированных композиционных модификаторов для сплавов алюминия / П. А. Витязь [и др.] // Докл. НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 5. – С. 91–96.
4. *Зубков, Н. Н.* Инструментальные материалы для изготовления лезвийных инструментов / Н. Н. Зубков // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. – 2013. – № 5. – С. 75–100.
5. *Матренин, С. В.* Техническая керамика: учеб. пособие / С. В. Матренин, А. И. Слосман. – Томск: Изд-во ТПУ, 2004. – 75 с.

Поступило в редакцию 15.06.2015

СОЦИАЛЬНО-ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ

УДК 821.161.3'04.09-94"16"

А. И. БОГДАН

**«АЎТАБІЯГРАФІЯ» БАГУСЛАВА РАДЗІВІЛА
ЯК АЎТАРСКАЯ СПОВЕДЗЬ-АПРАЎДАННЕ
ПЕРАД ГРАМАДСТВАМ РЭЧЫ ПАСПАЛІТАЙ***(Прадстаўлена членам-карэспандэнтам С. С. Лаўшуком)**Цэнтр даследаванняў беларускай культуры, мовы і літаратуры НАН Беларусі, Мінск, Беларусь
lenabogdan007@gmail.com*

В сообщении анализируется «Автобиография» Б. Радзивилла – один из самых интересных памятников по истории Речи Посполитой XVII в. Исследование мемуаров князя в качестве первоисточника по общей истории Короны Польской и Великого Княжества Литовского, а также жизненному пути аристократа, даёт возможность объективно решить вопрос о роли Б. Радзивилла в политической истории страны.

Ключевые слова: автобиография, мемуары, авторское начало, субъективизм, историческая точность, образ автора, отбор материала, барочная эстетика.

A. I. BOHDAN

**«AUTOBIOGRAPHY» BY BOGYSLAW RADZIVILL AS THE AUTHOR'S CONFESSION
AND EXCUSE TOWARDS THE SOCIETY OF POLISH-LITHUANIAN COMMONWEALTH***Center for the Belarusian Culture, Language and Literature Researches of National Academy of Sciences of Belarus,
Minsk, Belarus
lenabogdan007@gmail.com*

The article analyzes the “Autobiography” by Bogyslaw Radzivill that is one of the most outstanding literary monument of the XVII century history of the Polish-Lithuanian Commonwealth. The duke’s memoirs were studied as an authentic source on the history of Polish Crown and Grand Duchy of Lithuania and as the duke’s walk of life. The analysis made gives a fair opportunity to specify the role of B. Radzivill in the political history of the country.

Keywords: autobiography, memoirs, the author’s origin, subjectivism, historical accuracy, the author’s character, material take off, the esthetics of Baroque.

У сусветнай гісторыі заўсёды ёсць людзі, памяць пра якіх застаецца ў стагоддзях. Менавіта такім чалавекам у свой час становіцца Багуслаў Радзівіл, адносіны да якога ў гістарыяграфіі неадназначныя: асобныя навукоўцы, успрымаючы князя як удзельніка шэрагу авантур і афёр, лічаць яго здраднікам, іншыя, аналізуючы ўдзел магната ў разнастайных гераічных падзеях свайго часу, – патрыётам. І гэтыя спрэчкі аб ролі князя ў сусветнай гісторыі не ўціхаюць стагоддзямі.

Для аб’ектыўнага вырашэння пытання аб тым, кім на самай справе з’яўляецца Б. Радзівіл, неабходна звярнуцца да першакрыніц, адна з якіх – мемуарная споведзь-апраўданне, уласнаручна напісаная князем і вядомая ў літаратуразнаўстве пад назвай «Аўтабіяграфія».

Багуслаў Радзівіл (герб «Трубы») нарадзіўся 3 мая 1620 г. у сям’і Януша Радзівіла, віленскага кашталяна, і другой яго жонкі Елізаветы Соф’і Гогенцолерн, дачкі брандэнбургскага курфюрста

Іагана Георга, унучкі Барбары Ягелонкі, таму па мацярынскай лініі ён быў нашчадкам караля Казіміра Ягелончыка і Елізаветы Габсбург.

Выхаваннем Б. Радзівіла, які рана застаўся сіратой, займаўся апякун К. Радзівіл, брат бацькі. У 1636 г. юнак быў прызнаны паўналетнім і пачаў рабіць уласную кар’еру, актыўна ўдзельнічаючы ў грамадска-палітычным жыцці краіны: неаднаразова абіраўся паслом на соймы Рэчы Паспалітай, у 1638–1646 гг. займаў пасаду харужага Вялікага Княства Літоўскага, з 1646 г. – літоўскага канюшага, удзельнічаў у элекцыі (1648) і каранацыі (1649) Яна II Казіміра Вазы і г. д.

У час Руска-Польскай (1654–1667) і Паўночнай (1655–1660) войнаў князь разам з братам Я. Радзівілам дамогся заключэння Кейданскай уніі (20–23 кастрычніка 1655 г.). Нягледзячы на тое, што яе падпісалі 1172 асобы, сярод якіх былі прадстаўнікі духавенства, магнатаў і шляхты краіны, гэтая падзея падзяліла грамадства Рэчы Паспалітай на папличнікаў Радзівілаў і іх праціўнікаў, што негатыўна ставіліся да дзяржаўнага саюза са Швецыяй.

Пачынаючы з восені 1655 г., князь удзельнічаў у шэрагу ваенных кампаній на баку шведскага караля. 8 кастрычніка 1656 г. Б. Радзівіл як фельдмаршал Швецыі пацярпеў паражэнне ў бітве пад Просткамі (Прусія) ад польнага літоўскага гетмана В. Гасеўскага і трапіў у палон. Знаходзячыся ў няволі, Багуслаў даў слова гонару каралю і гетману, што ў будучыні ніколі не будзе служыць шведам. Вызваліўшыся з палону (22 кастрычніка 1656 г.), ён накіраваўся ў Прусію і наняўся да брандэнбургскага курфюрста Фрыдрых Вільгельма – сваяка па лініі маці.

Восенню 1657 г., у сувязі з падпісаннем Велаўска-Быдгашчанскіх дамоў, Б. Радзівіл быў амніставаны польскім каралём, што, разам з атрыманнем пасады генеральнага намесніка і камандуючага брандэнбургскай арміяй (14 кастрычніка 1657 г.), істотна ўзняло аўтарытэт і палітычнае значэнне князя ў Рэчы Паспалітай.

Памёр Б. Радзівіл 31 снежня 1669 г.

Пасля князя засталася шмат незавершаных спраў, адна з якіх – «Аўтабіяграфія» – цікавы здабытак старабеларускай і старапольскай літаратуры. Характэрна ўжо сама назва помніка – «Аўтабіяграфія», якой аўтар прама, без аніякіх агаворак заяўляе нязвычайна для культурнага ўжытку XVII–XVIII стст. права асобы на ўласнае жыццёапісанне, на свецкую «агіяграфію», дзе творца выступае не толькі афіцыйным, дзяржаўным, дзеячом, але і прыватнай асобай з пэўнай біяграфіяй і лёсам.

Рашэнне Багуслава Радзівіла аднавіць у выглядзе мемуараў уласны жыццёвы шлях было абумоўлена некалькімі прычынамі, самымі важнымі сярод якіх былі наступныя. Па-першае, жаданне князя атрымаць пасаду вялікага літоўскага гетмана, якая пасля смерці Паўла Яна Сапегі (30 снежня 1665 г.) засталася вольнай і атрымаць якую магнат спрабаваў і раней (1663), але беспаспяхова.

Па-другое, пэўную ролю ў прыняцці князем рашэння напісаць успаміны аб уласным жыцці адыгралі шматлікія абвінавачванні магната ў дзяржаўнай здрадзе, папрокі за асобныя, здзейсненыя ім, учынкi (напрыклад, служба на карысць гаспадароў іншых краін, заключэнне Кейданскай уніі, падпісанне Радноцкага дагавора і г. д.), якія былі выказаны Багуславу падчас вількамірскага сойма (верасень 1666 г.), а таксама разнастайныя судовыя іскі аб вайсковых кампенсацыях, прад’яўленыя князю шэрагам шляхціцаў.

У такіх абставінах стварэнне мемуарнай споведзі-апраўдання для Б. Радзівіла было тым сродкам, з дапамогай якога князь разлічваў давесці да сучаснікаў, што ён варты пасады вялікага гетмана не толькі дзякуючы асабістай вайскавай кваліфікацыі, дасведчанасці ў ваеннай справе, удзелу ў шэрагу выпраў, але мае на яе правы, якія вынікаюць з уласных заслуг магната і ўсяго роду Радзівілаў перад Рэччу Паспалітай, а таксама абумоўлены кроўным сваяцтвам гэтага роду з шэрагам еўрапейскіх каралеўскіх дамоў. Акрамя таго, князь імкнуўся растлумачыць сучаснікам, што ён ніколі не здраджваў дзяржаўным інтарэсам Вялікага Княства Літоўскага, прычым нават тады, калі служыў на карысць валадароў іншых краін.

Такім чынам, сваю «Аўтабіяграфію» Б. Радзівіл піша не з уласна мемуарных мэт – расказаць пра прыватнае жыццё і значныя гістарычныя падзеі, сведкам альбо ўдзельнікам якіх ён быў,

хаця і яны адыгрываць пэўную ролю, а са знешніх, дзелавых, прычын, і звязана гэта было перш за ўсё з жаданнем арыстакрата атрымаць высокую дзяржаўную пасаду.

Пазначаныя мэты стварэння ўспамінаў, у сваю чаргу, абумовілі галоўную канцэпцыю мемуарнай споведзі і аднаўлення пісьменнікам у творы ўласнага вобраза як сапраўднага рыцара, надзвычай мужага ваяра, патрыёта сваёй Радзімы і, канешне ж, выдатнага сем'яніна. Менавіта таму аўтар насычае свой твор аповедамі пра разнастайныя вайсковыя кампаніі, надзвычай дэталёва і грунтоўна аднаўляе іх ход, пакідаючы пры гэтым па-за межамі помніка тыя падзеі, якія не адпавядаюць ажыццяўленню пастаўленых пісьменнікам мэт.

Магчымая дата пачатку працы над мемуарамі-споведдзю – каля 18 кастрычніка 1666 г., калі князь вярнуўся ў Каралявец (Кёнігсберг) пасля сойма ў Вількаміры і побыту ў Вільні. Разам з тым гэта і апошняя дата, пра падзеі якой расказваецца ў тэксце.

Нягледзячы на тое, што «Аўтабіяграфія» пісалася з разлікам на абнародаванне і што ў канцы кастрычніка – пачатку лістапада 1666 г. ужо існавала некалькі яе чарнавых рэдакцый, канчатковы варыянт помніка не быў створаны. Падчас завяршэння працы над успамінамі Багуслаў Радзівіл атрымаў з Варшавы навіны аб абранні на пасаду вялікага літоўскага гетмана Міхала Казіміра Паца (прызначаны ў 1667 г.). Гэтая падзея пазбавіла «Аўтабіяграфію» актуальнасці. Разам з тым князь, расчараваны пройгрышам у барацьбе за булаву, страціў таксама і жаданне апраўдвацца перад грамадствам Рэчы Паспалітай, а таму пакінуў свае ўспаміны незавершанымі.

Да нашага часу захавалася некалькі чарнавых рэдакцый «Аўтабіяграфіі» Б. Радзівіла, якія даследчыкі, выходзячы з аб'ёму адноўленага ў іх матэрыялу, літаратурнай апрацоўкі тэксту і г. д., умоўна падзяляюць на чатыры варыянты помніка, канчатковым з якіх лічаць апошні, чацвёрты. У параўнанні з іншымі рэдакцыямі ён грунтоўней і падрабязней аднаўляе жыццё Б. Радзівіла, мае большы памер і ў пэўнай ступені апрацаваны з літаратурнага боку: у ім амаль адсутнічаюць грубыя выказванні, удакладнены шэраг дат, уведзены лацінскія назвы месяцаў і г. д.

Упершыню ўспаміны Багуслава Радзівіла былі апублікаваны пад назвай «Аўтабіяграфія Альберта Радзівіла» ананімным выдаўцом, які падпісаўся «R», у 1839 г. у Вільні ў «Wizerunkach i rozstrząsaniach naukowych» (Т. 9, с. 32–93) [5, с. 113]. Другі раз твор пад тытулам «Аўтабіяграфія» быў надрукаваны Э. Рачынскім у 1841 г. у Познані. У наступныя разы помнік выдалі Т. Васілеўскі ў 1979 г. у Варшаве і У. Сіўчыкаў у 2009 г. у Мінску (апошні – на беларускай мове ў перакладзе А. Бутэвіча).

Для аднаўлення свайго жыццёвага шляху Б. Радзівіл абраў жанр мемуарнай прозы, у прыватнасці, такую яе разнавіднасць, як біяграфія. Як тыповая біяграфія перыяду Барока, «Аўтабіяграфія» князя напісана ў традыцыйнай храналагічнай форме і распачынаецца тыповым аповедам-уступам пра ўласнае нараджэнне аўтара і яго бацькоў: «Anno 1620. Urodziłem się die 3 maj we Gdańsku z ojca Janusza Radziwiłła, kasztelana wileńskiego, a z matki Zofiej Elżbiety, kurfirsztówny, margabianki brabdenburskiej» [5, с. 121].

Затым пісьменнік вельмі каротка, абмяжоўваючыся некалькімі сказами, расказвае пра падзеі 1621–1636 гг.: знаходжанне разам з маці ў Ліхтэнбергу (1621–1627), яе новае замужжа (1628), уласнае вяртанне ў Рэч Паспалітую, дзе пад апекай дзяцкі атрымлівае адукацыю, прымае першую камунію, удзельнічае ў працы сойма, на якім выступае з прамовай да Жыгімонта III Вазы (1631), служыць пакаёвым у Уладзіслава IV Вазы і, нарэшце, прызнаецца каралём і Трыбуналам паўналетнім (1636).

Такі просты і сціслы пачатак успамінаў Б. Радзівіла выконвае надзвычай важную функцыю, абумоўленую барочнай эстэтыкай і ўспрыняццем рэчаіснасці тагачаснай асобай, для якой было неабходным вызначыць уласнае месца не толькі ў сусветнай гісторыі, але і хрысціянскай супольнасці, «упісаць» сваю постаць у іх кантэкст. Менавіта таму, расказваючы пра бацькоў, Багуслаў засяроджвае ўвагу чытача на іх сацыяльным статусе і кроўным сваяцтве з шэрагам валадароў еўрапейскіх краін (у прыватнасці – з Ягелонамі, Габсбургамі і Гогенцолернамі), якія, па ўяўленнях тагачаснага чалавека, былі прадстаўнікамі Бога на зямлі. І гэтым аўтар ставіць сваю асобу

на адзін узровень з імі, падрэслівае ўласную перавагу над пэўнымі людзьмі свайго часу і дае зразумець чытачу, што гаворка ў «Аўтабіяграфіі» пойдзе пра знакамітую, неардынарную постаць.

Разам з тым гэтая кароткая даведка пра падзеі 1621–1636 гг. настройвае чытача на ўспрыняцце цэнтральнай часткі мемуарнай споведзі-апавядання пра сталае жыццё магната і яго грамадска-палітычную дзейнасць. Таму, пачынаючы з 1637 г., аўтар мяняе характар падчы інфармацыі ў творы: сціслыя біяграфічныя натакі пра дзяцінства і юнацтва ён замяняе разгорнутымі, звязнымі аповедамі пра пабачанае і перажытае, а кампазіцыйнай асновай успамінаў робіць падзеі «знешняга» жыцця, якія аднаўляе на фоне ўласнага «ўнутранага» жыцця. Усе гэтыя разнастайныя па сваім змесце падзеі аб'ядноўваюцца ў адно цэлае ў помніку далучанасцю да асобы творцы, яго аўтарскага «я», а таму яны не выглядаюць як звычайнае нагрувашчванне фактаў.

Разглядаючы «Аўтабіяграфію» Б. Радзівіла як споведзь-апраўданне перад грамадствам Рэчы Паспалітай і як крыніцу для вырашэння пытання аб ролі магната ў агульнай гісторыі Кароны Польскай і Вялікага Княства Літоўскага, неабходна ўлічваць наяўнасць у творы суб'ектыўнага пачатку як жанраваўтваральнай рысы мемуарнай прозы.

Аўтарскі суб'ектыўнізм выяўляецца перш за ўсё ў адборы матэрыялу для ўспамінаў, які здзяйсняецца ў адпаведнасці з задуманай пісьменнікам канцэпцыяй стварэння ўласнага вобраза, а таксама ў ацэнцы падзей, якія творца аднаўляе ва ўспамінах. Аднак гэты суб'ектыўнізм ні ў якім выпадку не прыводзіць да парушэння прынцыпу гістарычнай дакладнасці, паколькі для мемуарыста заўсёды востра стаіць пытанне аб даверы чытача да змешчанага ў тэксце інфармацыі. Таму Б. Радзівіл, які імкнецца стварыць уражанне поўнай дакладнасці аповеду, не дапускае узнікнення ў чытача сумненняў наконт верагоднасці адноўленага матэрыялу, пакідае па-за тэкстам тое, што не хоча надаваць галоснасці і што не адпавядае стварэнню задуманага ім уласнага вобраза.

Так, знаходзячыся за мяжой, князь траціць шмат грошай (толькі за 1641–1642 гг. каля 200000–250000 злотых), робіць немалыя пазыкі, а таму, каб вырашыць фінансавыя праблемы, прыязджае ў Рэч Паспалітую, дзе закладае асобныя родавыя маёнткі і прадае фамільнае срэбра, чаго раней у сям'і Радзівілаў ніколі не было. У «Аўтабіяграфіі» ж, раскажваючы пра неабходнасць вяртання з-за мяжы, пісьменнік коратка, даволі павярхоўна занатоўвае: «In novembre musiałem bieżeć do Polski dla pilnych spraw swoich» [5, с. 126]. Акрамя фінансавых праблем, у ліку гэтых «...pilnych spraw...» былі таксама судовы працэс Радзівіла з Максімовічам наконт маёмасці Копысь (у той час цягнуўся ўжо два гады) і жаданне князя пабаляваць на вяселлі стрыечнага брата Януша, сына Крыштофа.

На гэты ж час (1644 год) прыпадае і даволі загадкавая спрэчка паміж Багуславам і Янушам Радзівіламі, пра якую мемуарыст так запісвае ў помніку: «Z książęciem J. M. panem hetmanem, bratem moim, powadziliśmy się byli i przyszło było do szabel, ale potem wszystko *amicabiliter compositum*» [5, с. 126]. Паколькі сёння няма дакладных звестак пра гэтую падзею, то можна меркаваць, што гаворка, верагодней за ўсё, ідзе аб нейкай сутычцы, якая ўзнікла падчас вяселля Я. Радзівіла. І такіх кароткіх, цмяных заўваг даволі шмат ва ўспамінах.

Гаворачы пра адбор матэрыялу, які аднаўляецца мемуарыстам у «Аўтабіяграфіі», неабходна спыніцца на ўспамінах князя пра 1655–1656 гг., калі адбыліся тыя падзеі, за якія сучаснікі і асобныя прадстаўнікі будучых пакаленняў асуджалі магната.

Раскажваючы пра 1655 г., Б. Радзівіл звяртае ўвагу чытача, што «...chcę się Ojczyźnie mojej przysłużyć...» [5, с. 137], што на ўласныя грошы фарміруе ваенныя харугвы, што ў ходзе Руска-Польскай і Паўночнай войнаў адзін стрымлівае шматлікія атрады непрыяцеляў, якія ў хуткім часе ўсё ж захопліваюць значную частку Рэчы Паспалітай, што неаднаразова пасылае лісты да Яна II Казіміра з просьбамі аб фінансавай і ваеннай дапамозе, што не атрымлівае на іх адказы і г. д.

Трапіўшы ў такое складанае становішча, князь быў вымушаны зрабіць пэўны выбар: застацца на баку польскага караля і далей пераконваць яго ў сваёй вернасці Рэчы Паспалітай ці далучыцца да брата Януша, каб захаваць незалежнасць Вялікага Княства Літоўскага. І Багуслаў робіць свой выбар, аб чым запісвае ў споведзі: «...widząc, że mi na kredycie niesłusznie u Króla J. M.

Пана моего зружновано і же ми nawet на listy moje responsów nie dawano, *noles volens* musiałem się mieć do króla szwedzkiego...» [5, с. 137].

Нататкамі такога тыпу аўтар імкнецца прымусіць чытача стаць на яго, Багуслава, месца і пераканацца, што ў той момант, пра які ідзе гаворка, у князя проста не заставалася іншага выйсця, як разам з братам Янушам арганізаваць заключэнне Кейданскай уніі (1655) і перайсці на бок Карла X, у якога, пазначае пісьменнік, «...zastałem... J. M. pana Koniecpolskiego, ksiązęcia J. M. Dmitra Wiszniowieckiego, J. M. pana Sobieskiego, J. M. pana Potockiego, starostę winnickiego, J. M. pana Koryckiego і innych, a nawet і J. M. pan wojewoda witebski Sapieha przeze mnie króla szwedzkiego o Szawle upraszał» [5, с. 137]. Улічваючы пералічаныя акалічнасці ў іх сукупнасці, а таксама тое, што ўсімі сваімі дзеяннямі Б. Радзівіл імкнуўся перш за ўсё захаваць дзяржаўнасць Вялікага Княства Літоўскага, яго нельга лічыць здраднікам.

Расказваючы даволі падрабязна і грунтоўна пра разнастайныя падзеі 1655–1656 гг., у прыватнасці, уласны ўдзел у шэрагу вайсковых кампаній на баку шведскага караля, аўтар пакідае па-за межамі помніка сапраўдную прычыну (дадзенае польскаму каралю і польнаму гетману слова гонару), па якой пакінуў службу ў Карла X Густава, і абмяжоўваецца толькі кароткай заўвагай: «Od tego czasu już więcej przy Swedach wiązać się nie chciałem...» [5, с. 141].

Асобнае месца ў мемуарнай споведзі займаюць сціплыя заўвагі пісьменніка пра стасункі з прадстаўніцамі слабога полу. Так, аўтар успамінае пра няўдалыя залёты да княжон Маргарыты дэ Роган і Шарлоты дэ ля Форс, змаганні на дуэлях за гонар жанчын, уласную жаніцьбу і г. д. Ва ўсіх гэтых аповедах Багуслаў імкнецца паказаць сябе перш за ўсё як сапраўднага мужчыну і выдатнага мужа-сем'яніна, што шчыра кахае сваю жонку Ганну Марыю, клопоціцца аб працягу ўласнага роду, а таму балюча перажывае няўдалыя цяжарнасці жонкі, яе хваравітасць і г. д. Нягледзячы на тое, што пазначаныя нататкі маюць невялікі памер і надзвычай павярхоўна аднаўляюць асаблівасці гэтых падзей, яны выяўляюць моцныя перажыванні князя аб стане здароўя Ганны Марыі і яе будучым жыцці, глыбокі боль Багуслава па страчаных дзецях: «Die 5 maii. Pokarał mię Najwyższy poronieniem żony mej» [5, с. 154], «26 eiusdem. Znowy mię Bóg zasmucił chorobą żony mojej» [5, с. 154]. Пастаўленыя ж у адзін рад разнастайныя ўспаміны магната пра жонку дапамагаюць усвядоміць чытачу, што жонка для Б. Радзівіла – гэта не толькі прадаўжальніца роду, але і ўвасабленне ідэалу жанчыны і жаночай прыгажосці ўвогуле, тых маральна-этычных каштоўнасцей, якія з'яўляюцца для князя гарантам працягу жыцця і захавання гарманічнага суладдзя ў сям'і.

Такім чынам, Б. Радзівіл, расказваючы сучаснікам у «Аўтабіяграфіі» пра перажытае і пабачанае на працягу свайго жыцця, аднаўляе перш за ўсё «парадны» яго бок і робіць гэта ў форме аповеду, спосаб падачы інфармацыі ў якім набліжаецца да разгорнутага паслужнога спіса. Таму галоўнае месца ў помніку аўтар адводзіць успамінам пра ўласныя гераічныя подзвігі, якія аднаўляе на фоне пэўных падзей з прыватнага жыцця. У выніку на старонках помніка чытач бачыць Б. Радзівіла ў розных іпастасях: пакаёвым слугой караля Уладзіслава IV Вазы, палкоўнікам польскай пяхоты і кавалерыі французскага войска, генералам каралеўскай гвардыі, генеральным намеснікам і камандуючым брандэнбургскай арміяй і інш. Усё гэта дапамагае аўтару стварыць рознабаковы і глыбокі ўласны вобраз, паказаць асаблівасці свайго характару. І менавіта гэты жывы вобраз магната дае магчымасць чытачу зразумець сутнасць паводзін князя і адказаць на пытанне: «Дык хто ж такі Багуслаў Радзівіл – ахвяра лёсу ці барацьбіт з ім, герой ці здраднік?»

Кожны чытач, пазнаёміўшыся з «Аўтабіяграфіяй», павінен сам вырашыць гэтае пытанне для сябе, паколькі абсалютная аб'ектыўнасць і адназначнасць тут немагчымы. Але адно застаецца бяспрэчным: Б. Радзівіл – сын свайго эпохі, які шмат зрабіў для захавання незалежнасці Вялікага Княства Літоўскага ад Маскоўскай дзяржавы і Кароны Польскай, і таму для нас, беларусаў, ён – герой.

Спіс выкарыстаннай літаратуры

1. *Винокур, Г. О.* Биография и культура / Г. О. Винокур. – М.: Мосполиграф, 1927. – 86 с.
2. *Кориунов, А. Ф.* Историко-мемуарная литература / А. Ф. Кориунов // История белорусской дооктябрьской литературы / АН БССР. Ин-т лит. им. Я. Купалы; под ред. В. В. Борисенко, Ю. С. Пширкова, В. А. Чемерицкого. – Минск, 1977. – С. 202–217.

3. *Кукушкина, М. В.* Рукописные фонды Библиотеки Академии наук СССР / М. В. Кукушкина. – Л.: Наука. Ленингр. отделение, 1988. – 68 с.
4. Помнікі мемуарнай літаратуры Беларусі XVII ст. / АН БССР. Ін-т літ. імя Я. Купалы. – Мінск: Навука і тэхніка, 1983. – 175 с.
5. *Radziwiłł, Bogusław.* Autobiografia / Bogusław Radziwiłł. – Warszawa: Państwowy Instytut Wydawniczy, 1979. – 380 s.
6. *Sajkowski, A.* Od Sierotki do Rybeńki. W kręgu Radziwiłłowskiego mecenatu / A. Sajkowski. – Poznań: Wydawnictwo Poznańskie, 1965. – 254 s.
7. *Sajkowski, A.* Pamiętniki Samuela i Bogusława Kazimierza Maskiewiczów (wiek XVII) / A. Sajkowski. – Wrocław: Zakład Narodowy im. Ossolińskich, 1961. – 333 s.

Паступіла ў рэдакцыю 25.03.2015

АГРАРНЫЕ НАУКИ

УДК 631.151.6:338.433

Член-корреспондент Г. И. ГАНУШ¹, И. А. ГРИБОЕДОВА²**ОБОСНОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ЭКСПОРТООРИЕНТИРОВАННОГО
ПРОМЫШЛЕННОГО ГРИБОВОДСТВА В РЕСПУБЛИКЕ БЕЛАРУСЬ**¹Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь
*etip.bgatu@gmail.com*²Институт экономики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
oei2008@yandex.ru

Обосновано, что промышленное грибоводство остается недооцененной отраслью сельского хозяйства Беларуси, экономическая и социальная целесообразность развития которого определяется рядом факторов: наличием адекватных природных и экономических условий; высоким потенциалом экспорта с учетом его географической и продуктовой диверсификации; возможностями импортозамещения и расширения внутреннего рынка; относительно высокой эффективностью производства и использования инвестиций; социальной значимостью употребления культивируемых грибов в качестве полноценного и полезного экологически чистого продукта питания; потенциалом создания дополнительных рабочих мест в сельской местности.

Ключевые слова: диверсификация, агропродовольственный комплекс, промышленное грибоводство, мультипликативный эффект.

G. I. GANUSH, I. A. HRYBAYEDAVA

**CONCEPTUAL GROUND FOR THE DEVELOPMENT OF EXPORT-ORIENTED INDUSTRIAL-TYPE
MUSHROOM PRODUCTION IN THE REPUBLIC OF BELARUS**¹Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk, Belarus
*etip.bgatu@gmail.com*²Institute of Economics of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
oei2008@yandex.ru

The article proves that the industrial-type mushroom production remains an underestimated branch of the Belarusian agriculture, as well as the economic and social usefulness of its development that is determined by a number of factors: the availability of appropriate natural and economic environment; a high export potential due to its geographic and product diversification; a potential for import substitution and domestic market expansion; a relatively high effectiveness of production and investment use; social importance of consuming cultivated mushrooms as wholesome ecologically pure foodstuffs; a potential for job creation in the rural area.

Keywords: diversification, agrifood complex, industrial-type mushroom production, multiplier effect.

Введение. За последние годы в агропромышленном комплексе Республики Беларусь осуществлены крупномасштабные меры по модернизации материально-технической базы, развитию кооперативно-интеграционных объединений и совершенствованию государственного регулирования агропромышленного производства. Все это позволило не только обеспечить потребности населения в основных наиболее ценных продуктах питания, но и в значительных объемах поставлять агропродовольственные товары на экспорт. Однако в настоящее время в развитии агропромышленного комплекса возникли новые проблемы, которые связаны с резким обострением конкурентной борьбы в сегментах мирового рынка, обеспеченных платежеспособным спросом.

Одним из важнейших инструментов повышения конкурентоспособности отечественных продуктов питания является диверсификация агропродовольственного комплекса, которая, как

свидетельствует наука и практика, позволяет полнее использовать агроклиматический потенциал, материально-технические и трудовые ресурсы АПК. В настоящем исследовании представлено методологическое и практическое обоснование конкурентных преимуществ развития грибоводства промышленного типа как элемента стратегии экспортоориентированной диверсификации агропродовольственного комплекса.

Материалы и методы исследования. Оценка места и роли промышленного грибоводства в процессе диверсификации агропродовольственной системы Беларуси основана на исследовании многовековой ретроспективы культивирования грибов, изучении мировых тенденций производства, потребления и развития рынка грибной продукции и опирается на современные теории и методы анализа, общенаучные и специальные подходы к обработке статистических данных, представляемых национальными ведомствами и международными надправительственными организациями.

Результаты и их обсуждение. Мировое промышленное производство грибов динамично развивается, увеличиваясь ежегодно на 12–20 % (таблица), поскольку с точки зрения современной медицины данный продукт является полезной функциональной пищей и профилактическим средством для предотвращения болезней человека, повышения иммунитета, улучшения здоровья и продления продолжительности жизни.

Динамика производства культивируемых грибов в странах – лидерах отрасли

Место страны в мировом производстве	2000 г.			2013 г.		
	Страна	Объем производства, т	Объем производства, тыс. долл. США	Страна	Объем производства, т	Объем производства, тыс. долл. США
1	Китай	2408234	4345075	Китай	7068102	12752680
2	США	383830	692528	Италия	792000	1428972
3	Нидерланды	265000	478128	США	406198	732886
4	Франция	203811	367727	Нидерланды	323000	582775
5	Польша	113479	204745	Польша	220000	396937

Примечание. Составлено по результатам исследований на основе данных [1].

Являясь ценным и безопасным источником белка, культивируемые грибы стоят в розничной торговле в два раза дешевле мяса, что делает их доступными для всех слоев населения. Грибы настолько богаты белком, что их называют «лесным (или растительным) мясом». По питательности грибы превосходят многие овощи и фрукты за счет содержания углеводов, минеральных веществ и микроэлементов, витаминов (А, группы В, С, D, РР), ферментов, антиоксидантов, специфических полисахаридов и других веществ, оказывающих благотворное влияние на иммунную систему человека.

Промышленное грибоводство экономически целесообразно благодаря высокоинтенсивному типу производства, высокой урожайности грибных культур и исключению сезонности работ, характерной для большинства подотраслей агропродовольственного комплекса. При правильной организации производственного процесса в год можно снимать 8–9 урожаев грибов с 1 м² полезной площади, что соответствует 270 кг продукции в год. Ни одна из овощных культур не обеспечивает столь высокой производительности используемых земельных участков.

Определены основные факторы, формирующие рыночный потенциал экспортоориентированного промышленного грибоводства Беларуси, его объемы на текущий момент и возможности роста в перспективе:

1. Растущий спрос на свежие культивируемые грибы на всем объединенном пространстве ЕАЭС. Только в России за последние два десятилетия потребление свежих культивируемых грибов выросло более чем в 17 раз – с 4500 т в 1995 г. до 78829 т в 2013 г. Во многом этот рост был определен увеличением количества сетевых магазинов, располагающих охлажденными прилавками для торговли скоропортящимися продуктами, и ростом доходов населения;

2. Возможность импортозамещения в Беларуси и у партнера по ЕАЭС – России – свежих шампиньонов. Основную долю в общем объеме свежих культивируемых грибов на российском рынке (до введения запрета на ввоз в Россию свежих грибов из стран ЕС) составляли польские шампиньоны: в 2013 г. с учетом белорусского реэкспорта они занимали более 80 % рынка свежих грибов. Наличие в цене польского шампиньона транспортной и таможенной составляющей в размере 20–25 % от конечной стоимости продукта в России формирует для производителей Беларуси существенный резерв в ценовых конкурентных преимуществах и реальные предпосылки для импортозамещения польской продукции.

Кроме того, сегодня с учетом продолжающихся санкций белорусские грибководы остаются одними из немногих официальных поставщиков шампиньонов на российский рынок и имеют хорошие возможности для выхода и упрочения позиций собственной продукции на данном сегменте рынка. Оценка развития российского рынка грибной продукции, а также компоста для выращивания шампиньона и субстрата – для вешенки и иных древесных сапрофитов (далее – субстратов) на ближайшие пять лет позволяет сделать вывод о том, что спрос на субстраты может достичь 470 тыс. т, на грибы – 140 тыс. т.

Следует заострить внимание на том, что зарегистрированный в 2014 г. таможенной статистической экспорт из Беларуси в Россию по позиции «грибы рода *Agaricus*» (шампиньонная группа) в размере 40 тыс. т (30 млн долл. США) является реэкспортом польского шампиньона, поскольку собственное производство в Беларуси составило только 5,7 тыс. т грибов данного вида. Данный канал поставок на российский рынок необходимо переориентировать на отечественную продукцию, что уже в настоящее время позволиткратно увеличить объемы производства и экспорта продукции. В совокупности для Беларуси налицо объективные условия для выращивания до 60 тыс. т грибов, что требует строительства компостных цехов общей производительностью более 170 тыс. т компоста Фазы 3 в год и около двадцати комплексов по выращиванию шампиньона с общей площадью выращивания 230 тыс. м²;

3. Возможность импортозамещения переработанных шампиньонов. В результате роста себестоимости китайских шампиньонов цена китайских грибных консервов в странах ЕАЭС приближается к уровню, который может быть сопоставим с себестоимостью производства аналогичной продукции в Беларуси. Импорт консервированных шампиньонов в 2013 г. в Беларуси составил почти 7 тыс. т, а в России превысил 30 тыс. т. Таким образом, в ближайшие пять лет рынок консервированных шампиньонов ЕАЭС может также стать объектом импортозамещения. Еще одним грибным продуктом, который на объединенном рынке представлен импортной продукцией, является замороженный шампиньон. Его поставщиками преимущественно являются производители Голландии, Бельгии и Польши. Объем данного импорта в Беларуси и России в 2013 г. составил 2,5 и 25 тыс. т соответственно. Транспортные и таможенные расходы в цене данной категории грибной продукции также достигают 20 %, что дает белорусским производителям шампиньонов возможность конкурировать с европейскими производителями.

В целом объем возможного импортозамещения в Беларуси и России консервированных и замороженных шампиньонов составляет около 70 тыс. т. С учетом коэффициента перевода переработанных грибов в свежие это формирует дополнительную потребность в объеме более 50 тыс. т свежих шампиньонов. Для выращивания такого количества шампиньонов также требуется до 200 тыс. м² площадей выращивания и до 150 тыс. т компоста Фазы 3 в год;

4. Дополнительный фактор, определяющий значительный рыночный потенциал промышленного грибководства, – возможность замещения культивируемыми грибами диких лесных грибов. Опыт восточноевропейских стран с похожими традициями в питании (Польша, Чехия) говорит о том, что с ростом уровня доходов население все меньше времени уделяет самостоятельному сбору грибов в лесах и потребление диких грибов снижается. В то же время традиции в употреблении грибных блюд сохраняются, что повышает спрос на культивируемые грибы. Если предположить, что снижение потребления лесных грибов может идти со скоростью 1 % в год, то уже через 5 лет белорусскому и российскому рынку может потребоваться дополнительно 50–60 тыс. т свежих шампиньонов и пропорциональное наращивание производственных площадей.

Следует также отметить значительный мультипликативный эффект влияния грибоводства на повышение эффективности других отраслей и вовлечение в оборот местных ресурсов. Оборудование комплексов, постоянная необходимость поступления разнообразного сырья и материалов местного происхождения для производства субстратов и грибов создает дополнительный потенциал роста в различных видах экономической деятельности:

1. В сельском хозяйстве наличие в регионе грибного и субстратных производств создает рынок сбыта для таких побочных продуктов растениеводства и животноводства, как солома и куриный помет. Для производителей пшеницы и ржи появляется возможность реализации соломы на протяжении всего года, что уравнивает неравномерность финансовых поступлений от продажи основного продукта производства – зерна. Например, нидерландские производители субстратов, закупая солому во Франции и Великобритании по цене от 95 до 125 Евро за т, в последующем поставляют продукцию на все континенты, включая австралийский и новозеландский рынки. Учитывая большие площади под зерновыми, а также близость российского рынка, Беларусь имеет реальную возможность конкурировать по ценовому фактору исходного сырья не только на своей территории, но и на объединенном пространстве ЕАЭС. Также при производстве субстрата для выращивания древесных сапрофитов возможно использовать широкий спектр местных отходов сельскохозяйственного производства (стебли, корзинки и лузгу подсолнечника, стебли и стержни початков кукурузы, льняную костру и др.). Птицефермам помимо финансовой выгоды от реализации куриного помета наличие производства по изготовлению грибного компоста дает возможность уменьшить расходы по мероприятиям, направленным на утилизацию отходов и предотвращение загрязнения окружающей среды;

2. Сокращение поголовья крупного рогатого скота в хозяйствах населения и переход крупных ферм на новые технологии содержания животных, сопряженные с гидросмывом, создают дефицит традиционного органического удобрения – солоमистого полуперепревшего навоза, альтернативой которому могут стать отработанные грибные субстраты. Проведенное кафедрой биологии, экологии и химии им. А. Ф. Блиохватова ФГБОУ ВПО «Пензенская ГСХА» сравнение эффективности применения в качестве органического удобрения отработанного грибного субстрата с результатами использования полуперепревшего соломистого навоза показывает, что отработанный субстрат имеет ряд важных преимуществ, поскольку не содержит семян сорняков, яиц гельминтов и спор, а также опасных для здоровья человека бактерий. На основе данных исследования получены доказательства, что на основе отработанного субстрата в сочетании с минеральными удобрениями, гуматами, природными и химическими структурообразователями возможно создание широкого спектра продуктов, улучшающих агрономические показатели почвы и повышающие урожайность сельскохозяйственных культур [2];

3. Для культивирования древесных сапрофитов можно использовать целлюлозосодержащие местные материалы – отходы деревообрабатывающей промышленности (некондиционная древесина в виде отрезков стволов, древесная стружка и опилки лиственных пород деревьев), отходы мукомольной, текстильной, бумажной промышленности и т. д.;

4. При выращивании шампиньонов необходима покровная почва, для производства которой используются различные виды торфа, что создает дополнительный рынок сбыта для торфопредприятий;

5. Необходимой составляющей для производства субстратов является садовый гипс (алебастр) и известняк (мергель), что содействует развитию промышленности строительных материалов;

6. Стимулируется транспортная отрасль, задействованная в доставке сырья, тары, готовой продукции. Например, одной грибной ферме с полезной площадью в 10 тыс. м² ежемесячно требуется перевозка более 800 т сырья и готовой продукции;

7. Индустриальное культивирование грибов ведется в специальных сооружениях, однако для этих целей также могут быть использованы подземные выработки, овощехранилища, бывшие промышленные здания и практически любое другое помещение, отвечающее требованиям культуры к факторам роста и развития. По данным опроса руководителей сельскохозяйственных организаций Беларуси более чем в трети хозяйств есть неиспользуемые помещения, преимущественно фермы;

8. Как в случае нового строительства грибных комплексов, так и при реконструкции местным строительным организациям и производителям стройматериалов обеспечивается значительный объем заказов;

9. Промышленное производство субстратов и выращивание культивируемых грибов производится специализированными комплексами с высоким (до 90 %) уровнем механизации и автоматизации технологических процессов. Для поддержания оптимального температурно-влажностного режима, регулирования подачи воздуха и отвода газообразных продуктов обмена веществ из камеры выращивания грибов необходима разнообразная продукция высокотехнологичных отраслей – машины и механизмы, в первую очередь, системы кондиционирования, водоснабжения и пароснабжения, отопления и вентиляции, а также системы автоматического контроля и регулирования условий микроклимата с использованием компьютерного управления [3];

10. Совместное расположение грибных комплексов и тепличных комбинатов дает обоюдную возможность коллективного использования одинаковых для обоих производств сооружений и помещений – автовесов, агрохимлаборатории, склада химикатов, ремонтной мастерской и др.

Важным отражением эффекта промышленного грибоводства является позитивное влияние размещения субстратных и грибных производств на устойчивое развитие сельских территорий и социально-демографическую обстановку посредством создания новых высокопроизводительных рабочих мест. Президент Республики Беларусь, говоря о перспективах экономического развития страны, поставил задачу Правительству, исполнительной власти, руководителям предприятий к 2015 г. достичь выручки в среднем по республике на одного занятого не менее 60 тыс. долл. США [4]. По организациям системы МСХП на одного среднегодового работника, занятого в сельскохозяйственном производстве, в 2013 г. было произведено валовой продукции на сумму, эквивалентную 26,8 тыс. долл. США. Как показывает опыт ведущих грибоводческих предприятий России, при условии оптимальной организации производства и управления результат обеспечивает объем годовой выручки до 150 тыс. долл. США (из расчета выработки на одного занятого до 60 т грибов).

Наличие в регионе субстратных и грибных производств создает стимул к удержанию и возвращению кадров в сельскую местность. К примеру, для фермы с площадью выращивания шампиньонов или вешенки в 1 га необходим штат в составе не менее 3 руководителей, 5 инженерно-технических сотрудников, 2 сотрудников финансовой службы, 3 водителей, квалифицированный технолог и не менее 120 квалифицированных рабочих. Следует особо отметить, что грибоводство способствует решению проблемы гендерного равенства в занятости сельского населения, поскольку в отрасли широко востребован женский труд (к примеру, только для сбора 10 тыс. т шампиньонов в год требуется труд около 1000 женщин-сборщиц).

Исследование зарубежного опыта позволило предложить научно обоснованную бизнес-инновационную модель организации и развития промышленного грибоводства в Республике Беларусь на основе выделения основных технологических процессов в три самостоятельные специализированные производства: производство посадочного материала (мицелия); приготовление субстратов; выращивание плодовых тел грибов. Нами обоснована целесообразность организации:

а) региональных предприятий по централизованному производству субстратов для внутреннего и внешнего рынка,

б) сети ферм-сателлитов по выращиванию плодовых тел грибов, формируемой на основе интегратора (комплекс по производству субстрата) посредством его кооперации с базирующимися на стандартных конструкциях и климатическом оборудовании крупными, средними, малыми предприятиями, фермерскими хозяйствами и любительским грибоводством.

Данная система обеспечивает экономические, технические и санитарно-гигиенические преимущества для производителей субстратов и ферм по выращиванию грибов.

Предложены методологические принципы и организационно-структурная модель интеграции на основе формирования ассоциации производителей грибной продукции в Республике Беларусь. Деятельность интеграционного объединения грибоводов обеспечит повышение конкурентоспособности отечественного грибоводства посредством применения эффективных техно-

логий производства маточного (посевного) материала, субстрата (компоста и покровной почвы), культивирования грибов и их переработки на основе современных средств механизации, обеспечивающих получение качественной грибной продукции, экономии ресурсов, сохранения окружающей среды. Одновременно адаптация модели к условиям ЕАЭС и мировым рынкам продовольствия определила ее нацеленность на сотрудничество с интегрированными структурами «Грибной союз России» и Ассоциация «Теплицы России».

Обоснованные параметры высокой социально-экономической эффективности промышленного грибоводства позволили сделать заключение о целесообразности включения производства субстратов и культивирования грибов в государственную программу, определяющую развитие сельского хозяйства на следующее пятилетие (2016–2020 гг.) в виде самостоятельной подпрограммы. На основе разработанных нами концептуальных положений развития промышленного грибоводства, которые могут быть положены в основу проектов данных документов, определены целевые количественные параметры развития в стране промышленного грибоводства. Кроме того, определены наиболее перспективные предполагаемые формы государственной поддержки развития в Беларуси промышленного грибоводства. Оптимальной формой взаимодействия может стать кооперация государства и производителей на базе долевого участия при финансировании строительства грибных комплексов, что будет способствовать привлечению в грибоводство новых инвесторов и, тем самым, существенному ускорению темпов развития отечественной грибной индустрии.

Заключение. Исследование продемонстрировало комплекс потенциальных преимуществ формирования в стране отрасли промышленного грибоводства, которое остается одним из немногих сельскохозяйственных бизнесов Беларуси с благоприятными условиями для значительного роста экспорта. Так, Россия ежегодно тратит на импорт субстратов и грибной продукции более 400 млн долл. США, что в условиях торговых преференций на территории ЕАЭС является огромным потребительским заказом для производителей грибов в Беларуси. На основании проведенных расчетов продуктивности земельных участков установлено, что данное направление агробизнеса выгодно отличается от большинства подотраслей агропродовольственного комплекса короткими сроками окупаемости ввиду высокоинтенсивного типа производства, высокой урожайности грибных культур и исключения сезонности работ.

Определен мультипликативный эффект промышленного грибоводства, который выражается потенциалом сопутствующего роста в различных видах экономической деятельности. Для сельского хозяйства экономическая выгода заключается в возможности утилизации побочных продуктов растениеводства и животноводства, применения отработанного соломистого субстрата в качестве органического удобрения, использовании производственного потенциала пустующих ферм и иных сооружений капитального характера и пр. Развитие грибоводства формирует дополнительный заказ на высокотехнологичные машины и оборудование, на отходы деревообработки, мукомольной, текстильной, бумажной промышленности, продукцию торфопредприятий, а также для строительства, транспорта и др. Обоснован потенциал позитивного влияния отрасли на устойчивое развитие сельских территорий и социально-демографическую обстановку посредством создания высокопроизводительных рабочих мест с существенной долей занятости женщин в сельской местности.

Список использованной литературы

1. The Statistics Division of the FAO [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://faostat.fao.org/site/291/default.aspx>. – Дата доступа: 4.04.2014.
2. Возможности использования отработанного субстрата после выращивания вешенки в качестве органического удобрения // Школа грибоводства. – 2014. – № 6(90). – С. 46–50.
3. Выращивание шампиньона и вешенки (руководство) / Российская академия сельскохозяйственных наук, ГНУ Всероссийский научно-исследовательский институт овощеводства. – М., 2010. – 68 с.
4. Сайганов, А. Добиться выручки в 60 тысяч долларов на одного занятого в АПК реально / А. Сайганов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://csl.bas-net.by/press-nan/2012/10/03_anatolij_sajganov.pdf. – Дата доступа: 10.03.2013.

Поступило в редакцию 20.05.2015