ДОКЛАДЫ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

Выходит шесть номеров в год

Журнал основан в июле 1957 года

МИНСК, БЕЛОРУССКАЯ НАУКА, 2015, ТОМ 59, № 6

Учредитель – Национальная академия наук Беларуси

Редакционная коллегия:

В. Г. Гусаков (главный редактор),
А. В. Кильчевский (заместитель главного редактора),
С. Я. Килин (заместитель главного редактора),
С. А. Чижик (заместитель главного редактора),
И. М. Богдевич, Н. А. Борисевич, П. А. Витязь,
И. Д. Волотовский, И. В. Гайшун, С. В. Гапоненко, А. Е. Дайнеко, И. В. Залуцкий,
О. А. Ивашкевич, Н. А. Изобов, Н. С. Казак, А. А. Коваленя,
Ф. Ф. Комаров, И. В. Котляров, В. А. Лабунов, А. П. Ласковнев, О. Н. Левко,
А. И. Лесникович, В. Ф. Логинов, А. А. Махнач, А. А. Михалевич,
М. Е. Никифоров, В. А. Орлович, О. Г. Пенязьков, Ю. М. Плескачевский,
Н. С. Сердюченко, А. Ф. Смеянович, Л. М. Томильчик, С. А. Усанов,
Л. В. Хотылева, В. А. Хрипач, И. П. Шейко,
ведущий редактор **Т. П. Петрович**

Адрес редакции:

220072, Минск, ул. Академическая, 1, к. 119,
тел. 284-19-19
csl.bas-net.by/Web/Pages/magNAS.asp
E-mail: doklady_nanb@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Харин Ю. С., Журак М. К. Биномиальная условно авторегрессионная модель пространственно-временных данных и ее вероятностно-статистический анализ 5
Ламчановская М. В., Берник В. И. Регулярность распределения комплексных алгебраических чисел в кругах малого радиуса 13
Кудин А. С. Об оценке сверху количества многочленов с ограниченной производной в корне. 18
Дугинов О. И., Кузнецова И. Г. Задача минимального пополнения двудольного графа 24
Корзюк В. И., Дженалиев М. Т., Козловская И. С. Граничные задачи для слабо нагруженного оператора гиперболического уравнения второго порядка в цилиндрической области 33

ИНФОРМАТИКА

Чернявский А. Ф., Коляда А. А. Вычисление интегральных характеристик минимально избыточного модулярного кода 40

ФИЗИКА

Толкачев Е. А. Калибровочная свобода уравнений макроскопической электродинамики: двухпотенциальный подход 47

Шкадаревич А. П., Артюхина Н. К. О классификационных основах процедуры структурного синтеза оптических систем 52

Леоненя М. С., Луценко Е. В., Ржеуцкий Н. В., Павловский В. Н., Яблонский Г. П., Нагиев Т. Г., Тагиев Б. Г., Абушов С. А., Тагиев О. Б. Фотолюминесценция в видимой области спектра активированного трехвалентными ионами празеодима тиогаллата кальция в интервале температур 10–300 К . . 57

ХИМИЯ

Куликовская В. И., Егоров Д. И., Агабеков В. Е. Получение и свойства микрочастиц пектината кальция, содержащих мирамистин 62

Григорьев Ю. В., Григорьева И. М., Ивашкевич О. А. Синтез тетразолсодержащих полимеров на основе промышленно выпускаемого сополимера полиакрилонитрила 67

БИОЛОГИЯ

Соловей И. А. Изменения видовой и размерной структуры ассамблеи сов *Strigiformes* в результате антропогенной трансформации природных комплексов (на бел. яз.) 73

Лукашанец Д. А., Новик И. В. Влияние вселения карпа *Cyprinus carpio* Linnaeus, 1758 на сообщество макрозообентоса озерных экосистем 79

МЕДИЦИНА

Стукач Ю. П. Экспериментальное обоснование альтернативных путей доставки стволовых клеток в мозг 86

Митюкова Т. А., Леонова Т. А., Маньковская С. В., Свиридов О. В. Основные характеристики специфического связывания трийодтиронина с клетками-мишенями у пациентов с карциномой щитовидной железы на фоне лечения 91

НАУКИ О ЗЕМЛЕ

Бескопыльный В. Н., Айзберг Р. Е. Районирование Припятского нефтегазоносного бассейна по условиям фомирования залежей углеводородов в межсолевом комплексе 97

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Тютюма В. Д. Влияние теплообмена на распределение термодинамических параметров в вихревой трубе 103

Фисенко С. П., Такопуло Д. А. Связь броуновской диффузии с крупномасштабной морфологией наноструктурированной пленки на стенке проточного реактора 108

СОЦИАЛЬНО-ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ

Галузо И. В. Словарь живого белорусского языка в 20-е годы XX в.: критерии отбора лексики и ее фиксация (на бел. яз.). 115

АГРАРНЫЕ НАУКИ

Пестис В. К., Танана Л. А., Катаева С. А. Молочная продуктивность черно-пестрых коров различной селекции 123

ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ. 2015. Т. 59, № 6

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,
свидетельство о регистрации № 387 от 18.05.2009.

Редактор Т. П. Петрович
Компьютерная верстка Н. И. Кашуба

Сдано в набор 25.11.2015. Выпуск в свет 29.12.2015. Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 16,4. Тираж 130 экз. Заказ 239.

Цена номера: индивидуальная подписка – 83 600 руб.; ведомственная подписка – 203 287 руб.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/18 от 02.08.2013. ЛП № 02330/455 от 30.12.2013. Ул. Ф. Скорины, 40, 220141, г. Минск.

© «Издательский дом «Беларуская навука».
Доклады НАН Беларуси, 2015

DOKLADY
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

Published bimonthly

The journal has been published since July, 1957

MINSK, BELORUSSKAYA NAUKA, 2015, Vol. 59, N 6

Founder − National Academy of Sciences of Belarus

E d i t o r i a l B o a r d:

V. G. Gusakov (Editor-in-Chief),
S. Ya. Kilin (Associate Editor-in-Chief),
A. V. Kilchevsky (Associate Editor-in-Chief),
S. A. Chizhik (Associate Editor-in-Chief),
I. M. Bogdevich, N. A. Borisevich, A. Ye. Daineko, I. V. Gaishun, S. V. Gaponenko, O. A. Ivashkevich, N. A. Izobov, N. S. Kazak, L. V. Khotyleva, V. A. Khripach, A. A. Kovalenya, F. F. Komarov, I. V. Kotlyarov, V. A. Labunov, A. P. Laskovnev, O. N. Levko, A. I. Lesnikovich, V. F. Loginov, A. A. Makhnach, A. A. Mikhalevich, M. Ye. Nikiforov, V. A. Orlovich, O. G. Penyazkov, Yu. M. Pleskachevsky, N. S. Serduchenko, I. P. Sheiko, A. F. Smeyanovich, L. M. Tomilchik, S. A. Usanov, P. A. Vitiaz, I. D. Volotovski, I. V. Zalutsky,
lead editor **T. P. Petrovich**

Address of the Editorial Office:

220072, Minsk, 1 Akademicheskaya Str., room 119
telephone: 284-19-19
csl.bas-net.by/Web/Pages/magNAS.asp
E-mail: doklady_nanb@mail.ru

CONTENTS

MATHEMATICS

Kharin Yu. S., Zhurak M. K. Binomial conditional autoregressive model of the space-time data and its probabilistic and statistical analysis 5
Lamchanovskaya M. V., Bernik V. I. Regularity of distribution of complex algebraic numbers in circles of small radius 13
Kudin A. S. On the upper bound of the amount of polynomials with bounded derivative at a root 18
Duginov O. I., Kouznetsova I. G. Clustering minimum biclique completion of a bipartite graph 24
Korzyuk V. I., Dzhenaliev M. T., Kozlovskaya I. S. Boundary problems for a weakly loaded operator of the second-order hyperbolic equation in the cylindrical area 33

INFORMATICS

Chernyavsky A. F., Kolyada A. A. Calculation of the integral characteristics of minimally redundant modular code 40

PHYSICS

Tolkachev E. A. Gauge freedom of the macroscopic electrodynamics equations: the two-potential approach . . 47
Shkadarevich A. P., Artioukhina N. K. Classification bases of the structural synthesis of optical systems . . . 52
Leanenia M. S., Lutsenko E. V., Rzheutski M. V., Pavlovskii V. N., Yablonskii G. P., Naghiyev T. G., Tagiev B. G., Abushev S. A., Tagiev O. B. Photoluminescence of calcium thiogallate activated by trivalent praseodymium ions in the temperature range 10–300 K 57

CHEMISTRY

Kulikouskaya V. I., Egorov D. I., Agabekov V. E. Fabrication and properties of miramistin-containing calcium pectinate microparticles 62
Grigoriev Y. V., Grigorieva I. M., Ivashkevich O. A. Synthesis of tetrazole-containing polymers based on a commercial polyacrylonitrile copolymer 67

BIOLOGY

Solovej I. A. Changes in species and size structure of the assemblage of owls *Strigiformes* as a result of anthropogenic transformation of natural complexes 73
Lukashanets D. A., Novik I. V. Influence of common carp *Cyprinus carpio* Linnaeus, 1758 stoking on the macrozoobenthic community in lake ecosystems 79

MEDICINE

Stykach Y. P. Experimental study of alternative ways of stem cell delivery into the brain 86
Mityukova T. A., Leonova T. A., Mankovskaya S. V., Sviridov O. V. Basic characteristics of specific triidothyronine binding with cell-targets of patients with thyroid carsinoma during treatment 91

EARTH SCIENCES

Beskopylny V. N., Aizberg R. Ye. Division of the Pripyat oil-and-gas bearing basin into regions according to the hydrocarbon accumulation conditions in the intersalt complex 97

TECHNICAL SCIENCES

Tyutyuma V. D. Influence of heat transfer on the distribution of thermodynamic parameters in a vortex tube. . . . 103
Fisenko S. P., Takopulo D. A. Brownian diffusion and large-scale morphology of a nanostructured film on the wall of a flow reactor 108

SOCIAL SCIENCES AND HUMANITIES

Haluza I. U. Dictionary of the living Belarusian language in the 20 years of the twentieth century: criteria for selection of vocabulary and its fixation 115

AGRARIAN SCIENCES

Pestis V. K., Tanana L. A., Kataeva S. A. Milk productivity of black-motley cows of different breeding 123

Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **ноябрь–декабрь** **Том 59 № 6**

МАТЕМАТИКА

УДК 519.2

Член-корреспондент Ю. С. ХАРИН, М. К. ЖУРАК

БИНОМИАЛЬНАЯ УСЛОВНО АВТОРЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ ДАННЫХ И ЕЕ ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

НИИ прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь
kharin@bsu.by; mzhurak@gmail.com

Разработана биномиальная условно авторегрессионная модель пространственно-временных данных. Исследованы вероятностные свойства этой модели. Построены оценки максимального правдоподобия параметров модели на основе наблюдаемых пространственно-временных данных. Представлены результаты компьютерных экспериментов.

Ключевые слова: пространственно-временные данные, оценки максимального правдоподобия, биноминальное распределение, цепь Маркова.

Yu. S. KHARIN, M. K. ZHURAK

BINOMIAL CONDITIONAL AUTOREGRESSIVE MODEL OF THE SPACE-TIME DATA AND ITS PROBABILISTIC AND STATISTICAL ANALYSIS

Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, Minsk, Belarus
kharin@bsu.by; mzhurak@gmail.com

The binomial conditional autoregressive model of spatio-temporal data is constructed. The probabilistic properties of the model constructed are studied. The maximum likelihood estimators of parameters of the model based on the observed spatio-temporal data are calculated. The results of computer experiments are presented.

Keywords: spatio-temporal data, maximum likelihood estimators, binomial distribution, Markov chain.

Введение. На практике статистические данные часто содержат информацию об изменении реального процесса во времени и в пространстве совместно. Поэтому математические модели на основе пространственно-временных данных дают возможность адекватно описывать реальные процессы и проводить их статистический анализ, учитывая большее число факторов [1]. Приведем краткий обзор моделей пространственно-временных данных.

В [2] для анализа пространственно-временных данных младенческой смертности используется байесовская иерархическая статистическая модель со скрытым динамическим марковским случайным процессом. В [3] байесовская геостатистическая биномиальная и отрицательная биномиальная модели разработаны для моделирования распределения плотности локализации малярийных комаров. В [4] рассмотрена байесовская биномиальная геостатистическая модель и проведен сравнительный анализ со стандартными биномиальными моделями. Иерархические байесовские модели предложены для моделирования лонгитюдных и пространственно коррелированных биномиальных данных в [5].

В сообщении предлагается новая модель пространственно-временных данных – биномиальная условно авторегрессионная модель, исследуются вероятностные свойства этой модели и решается задача статистического оценивания параметров модели по наблюдаемым пространственно-временным данным.

Биномиальная условно авторегрессионная модель и ее свойства. Введем обозначения: (Ω, F, P) – вероятностное пространство; $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $I\{H\}$ –

© Харин Ю. С., Журак М. К., 2015.

индикаторная функция события H; $s \in S = \{1, 2, ..., n\}$ – индексная переменная, кодирующая пространственные координаты географических регионов (условимся далее их называть сайтами), на которые разбита изучаемая пространственная область; n – число сайтов; $t \in \{1, 2, ..., T\}$ – дискретное время; T – длительность временного промежутка наблюдений; $x_{s,t} \in \{0,1,\ldots,N\} = A$ – дискретная случайная величина наблюдения в момент времени t в сайте s; $F_{<t} = \sigma\{x_{u,\tau} : u \in S, \tau \le t-1\} \subset F$ – σ-алгебра, порожденная указанными в скобках случайными величинами; $z_{j,t} \ge 0$, $j = 1, ..., m$, – наблюдаемый (известный) набор значений m внешних факторов в момент времени t; $L(\xi)$ – закон распределения вероятностей случайной величины ξ; $\mathbf{E}\{\cdot\}$, $\mathbf{D}\{\cdot\}$, $\mathrm{cov}\{\cdot\}$ – символы математического ожидания, дисперсии, ковариации случайных величин соответственно; $Bi(\cdot\,; N, p)$ – биномиальный закон распределения вероятностей с параметрами $N \in \mathbb{N}$, $0 \le p \le 1$ для случайной величины ξ:

$$\mathbf{P}\{\xi = l\} = Bi(l; N, p) ::= C_N^l p^l (1-p)^{N-l}, \quad l \in A, \; L\{\xi\} = Bi(\cdot\,; N, p), \tag{1}$$

где $C_N^l = (N!/(N-l)!l!)$.

Построим биномиальную условно авторегрессионную модель пространственно-временных наблюдений $\{x_{s,t}\}$, следуя [6; 7]. Будем предполагать, что при фиксированной предыстории $\{x_{s,\tau} : s \in S, \tau \le t-1\}$ случайные величины $x_{1,t}, x_{2,t}, \ldots, x_{n,t}$ условно независимы, причем

$$L\{x_{s,t} \mid F_{<t}\} = Bi(\cdot\,; N, p_{s,t}), \tag{2}$$

$$\ln \frac{p_{s,t}}{1-p_{s,t}} = I\{t>1\} \sum_{i=1}^{n} a_{s,i} x_{i,t-1} + \sum_{j=1}^{m} b_{s,j} z_{j,t}, \quad s \in S, t \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

где $\theta_s = (a_s', b_s')' \in R^{n+m}$; $a_s = (a_{s,1}, a_{s,2}, \ldots, a_{s,n})' \in R^n$; $b_s = (b_{s,1}, \ldots, b_{s,m})' \in R^m$, $s \in S$, – векторы-столбцы параметров модели. Число параметров модели равно $D = n(n+m)$.

Из (3) получим полезные выражения для вычисления $p_{s,t}$:

$$\begin{gathered} p_{s,t} = p_s(X_{t-1}, Z_t) ::= \frac{\exp\{I\{t>1\} a_s' X_{t-1} + b_s' Z_t\}}{1 + \exp\{I\{t>1\} a_s' X_{t-1} + b_s' Z_t\}} = \frac{\exp\{\theta_s' Y_t\}}{1 + \exp\{\theta_s' Y_t\}}, s \in S, t \in \mathbb{N}, \\ 1 - p_{s,t} = (1 + \exp\{\theta_s' Y_t\})^{-1}, \; \frac{p_{s,t}}{1-p_{s,t}} = \exp\{\theta_s' Y_t\}, \end{gathered} \tag{4}$$

где $Z_t = (z_{1,t}, z_{2,t}, \ldots, z_{m,t})' \in R^m$ – вектор-столбец, задающий значения внешних факторов в момент времени t; $X_t = (x_{1,t}, x_{2,t}, \ldots, x_{n,t})' \in A^n$ – вектор-столбец, задающий временной срез исследуемого явления в момент времени $t \in \mathbb{N}$; $Y_t = (I\{t>1\} X_{t-1}', Z_t')' \in R^{n+m}, t \in \mathbb{N}$. Обозначим $L = \{l_j = (l_{1,j}, \ldots, l_{n,j})' \in A^n : j = 1, 2, \ldots, (N+1)^n\}$ – упорядоченное множество $\nu = (N+1)^n$ значений, которые принимает вектор X_t. Например, множество L может быть упорядочено следующим образом:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} N \\ N \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} \right\}, \; |L| = \nu.$$

Здесь при упорядочении сначала идет нулевой вектор, затем – векторы всевозможных комбинаций 0 и 1, затем – комбинации из 0, 1 и 2 и так далее.

Т е о р е м а 1. *Если имеет место модель (2), (3), то наблюдаемый векторный временной ряд X_t является неоднородной n-мерной векторной цепью Маркова с конечным пространством состояний L, матрицей вероятностей одношаговых переходов* $Q(t) = (q_{I,J}(t)) \in [0,1]^{\nu \times \nu}$:

$$q_{I,J}(t) = \prod_{s=1}^{n} C_N^{j_s} (\exp\{a_s' I + b_s' Z_{t-1}\})^{j_s} (1 + \exp\{a_s' I + b_s' Z_{t-1}\})^{-N}, \quad I, J \in L, t \ge 2, \; t \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

и начальным распределением вероятностей $p=(p_J)'\in[0,1]^{\nu}$:

$$p_J=\prod_{s=1}^{n}C_N^{j_s}(\exp\{b_s'Z_1\})^{j_s}(1+\exp\{b_s'Z_1\})^{-N},\quad J\in L. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для модели (2), (3) выполняется марковское свойство. Воспользуемся обобщенной формулой умножения вероятностей, модельными предположениями (2), (3) и условной независимостью случайных величин $x_{1,t},x_{2,t},\ldots,x_{n,t}\in A$ при фиксированной σ-алгебре $F_{<t}=\sigma\{x_{u,\tau}:u\in S,\tau\le t-1\}$:

$$\mathbf{P}\{X_t=I_t\,|X_{t-1}=I_{t-1},\ldots,X_1=I_1\}=\mathbf{P}\{x_{1,t}=i_{1,t},\ldots,x_{n,t}=i_{n,t}\,|X_{t-1}=I_{t-1}\}=$$

$$\prod_{s=1}^{n}\mathbf{P}\{x_{s,t}=i_{s,t}\,|X_{t-1}=I_{t-1}\}=\mathbf{P}\{X_t=I_t\,|X_{t-1}=I_{t-1}\}.$$

Таким образом, выполняется марковское свойство и X_t является неоднородной n-мерной векторной цепью Маркова. Матрица вероятностей одношаговых переходов $Q(t)=(q_{I,J}(t))$ определяется с учетом (1), (3) и свойства условной независимости:

$$q_{I,J}(t)=\mathbf{P}\{X_t=J\,|X_{t-1}=I\}=\prod_{s=1}^{n}\mathbf{P}\{x_{s,t}=j_s\,|X_{t-1}=I\}=$$

$$\prod_{s=1}^{n}C_N^{j_s}p_s^{j_s}(I,Z_t)(1-p_s(I,Z_t))^{N-j_s}=\prod_{s=1}^{n}C_N^{j_s}\left(\frac{p_s(I,Z_t)}{1-p_s(I,Z_t)}\right)^{j_s}(1-p_s(I,Z_t))^{N}.$$

Далее, с учетом (4) имеем

$$q_{I,J}(t)=\prod_{s=1}^{n}C_N^{j_s}(\exp\{a_s'I+b_s'Z_{t-1}\})^{j_s}(1+\exp\{a_s'I+b_s'Z_{t-1}\})^{-N},$$

что совпадает с (5).

Вычислим теперь начальное распределение вероятностей $p=(p_J)'\in[0,1]^{\nu}$ цепи Маркова X_t согласно (1)–(4)

$$p_J::=\mathbf{P}\{X_1=J\}=\prod_{s=1}^{n}\mathbf{P}\{x_{s,t}=j_s\}=\prod_{s=1}^{n}C_N^{j_s}p_s^{j_s}(Z_1)(1-p_s(Z_1))^{N-j_s}=$$

$$\prod_{s=1}^{n}C_N^{j_s}\left(\frac{p_s(Z_1)}{1-p_s(Z_1)}\right)^{j_s}(1-p_s(I,Z_1))^{N}=\prod_{s=1}^{n}C_N^{j_s}(\exp\{b_s'Z_1\})^{j_s}(1+\exp\{b_s'Z_1\})^{-N},$$

что совпадает с (6). □

С л е д с т в и е 1. В условиях теоремы 1 матрица условных вероятностей переходов $H(t_1,t_2)=(h_{i,j}(t_1,t_2)),\ h_{I,J}(t_1,t_2)=\mathbf{P}\{X_{t_2}=J\mid X_{t_1}=I\},\quad I,J\in L$, цепи Маркова X_t за t_2-t_1 шагов от момента времени t_1 до момента t_2 ($t_1<t_2,t_1,t_2\in N$) имеет вид

$$H(t_1,t_2)=Q(t_1+1)Q(t_1+2)\ldots Q(t_2).$$

С л е д с т в и е 2. В условиях теоремы 1 если вектор внешних факторов $Z_t=Z=(z_1,\ldots,z_m)'\in R^m$ не зависит от t, то матрица вероятностей одношаговых переходов (5) не зависит от t и цепь Маркова является однородной:

$$Q=(q_{I,J})\in[0,1]^{\nu\times\nu},$$

$$q_{I,J}=\prod_{s=1}^{n}C_N^{j_s}(\exp\{a_s'I+b_s'Z\})^{j_s}(1+\exp\{a_s'I+b_s'Z\})^{-N},\quad I,J\in L,$$

$$H(t_1,t_2)=Q^{t_2-t_1}.$$

С л е д с т в и е 3. Текущее распределение вероятностей $p(t)=(p_J(t))'\in[0,1]^{\nu}$, $p_J(t)::=\mathbf{P}\{X_t=J\}$, $J\in L$, в момент времени t определяется соотношением

$$p_J(t)=\sum_{I\in L}p_I h_{I,J}(1,t),\quad J\in L, t\in\mathbb{N}, \tag{7}$$

или в матричном виде

$$p(t)=H'(1,t)p,\quad t\in\mathbb{N},$$

где $H(1,1)=\mathbf{I}_{\nu}$ – единичная матрица порядка ν.

Л е м м а 1. *Если имеет место модель (2), (3), то распределение вероятностей* $\mathbf{P}\{x_{s,t}=i_{s,t}\}$, $s\geq 1$, $t\in\mathbb{N}$, *находится следующим образом:*

$$\mathbf{P}\{x_{s,t}=i_{s,t}\}=\sum_{i_{1,t},\ldots,i_{s-1,t},i_{s+1,t},\ldots,i_{n,t}\in A}((Q(1)\cdot\ldots\cdot Q(t))'p)_{I_t},$$

где матрицы $Q(t)$, p *определены в теореме 1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для нахождения $\mathbf{P}\{x_{s,t}=i_{s,t}\}$ воспользуемся формулой маргинального распределения вероятностей

$$\mathbf{P}\{x_{s,t}=i_{s,t}\}=\sum_{i_{1,t},\ldots,i_{s-1,t},i_{s+1,t},\ldots,i_{n,t}\in A}\mathbf{P}\{X_t=I_t\}.$$

Далее в силу следствий 1, 3 имеем

$$\mathbf{P}\{x_{s,t}=i_{s,t}\}=\sum_{i_{1,t},\ldots,i_{s-1,t},i_{s+1,t},\ldots,i_{n,t}\in A}(H'(1,t)p)_{I_t}=\sum_{i_{1,t},\ldots,i_{s-1,t},i_{s+1,t},\ldots,i_{n,t}\in A}\left((Q(1)\cdot\ldots\cdot Q(t))'p\right)_{I_t},$$

что совпадает с доказываемым выражением. □

Л е м м а 2. *Если имеет место модель (2), (3), то математическое ожидание и дисперсия случайной величины* $x_{s,t}$ *имеют вид*

$$\mathbf{E}\{x_{s,t}\}=N\sum_{i_1,\ldots,i_n\in A}p_s(I,Z_t)p_I(t-1),$$

$$\mathbf{D}\{x_{s,t}\}=N(N-1)\mathbf{E}\{p_s^2(X_t,Z_t)\}+\mathbf{E}\{x_{s,t}\}(1-\mathbf{E}\{x_{s,t}\}),$$

где $\mathbf{E}\{p_s^2(X_t,Z_t)\}=N\sum_{i_1,\ldots,i_n\in A}p_s^2(I,Z_t)p_I(t-1).$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся формулой полного математического ожидания и тем фактом, что в силу модели (2), (3) случайная величина $x_{s,t}$ имеет условное биномиальное распределение

$$\mathbf{E}\{x_{s,t}\}=\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{x_{s,t}\,|\,X_{t-1}\}\}=\mathbf{E}\{Np_s(X_{t-1},Z_t)\}.$$

По определению математического ожидания и в силу следствия 3 к теореме 1 получим

$$\mathbf{E}\{x_{s,t}\}=N\mathbf{E}\{p_s(X_{t-1},Z_t)\}=N\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N}p_s(I,Z_t)p_I(t-1),$$

где $p_s(I,Z_t)$, $p_I(t-1)$ находятся из (4) и (7) соответственно.

Далее, пользуясь формулой полного математического ожидания, свойством дисперсии биномиального распределения и полученными ранее результатами, найдем дисперсию

$$\mathbf{D}\{x_{s,t}\}=\mathbf{E}\{x_{s,t}^2\}-\mathbf{E}^2\{x_{s,t}\}=\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{x_{s,t}^2\,|\,X_{t-1}\}\}-\mathbf{E}^2\{\mathbf{E}\{x_{s,t}\,|\,X_{t-1}\}\}=$$

$$\mathbf{E}\{Np_{s,t}(1-p_{s,t}+Np_{s,t})\}-\mathbf{E}^2\{Np_{s,t}\}=N\mathbf{E}\{p_{s,t}\}-N\mathbf{E}\{p_{s,t}^2\}+N^2\mathbf{E}\{p_{s,t}^2\}-N^2\mathbf{E}^2\{p_{s,t}\}=$$

$$N(N-1)\mathbf{E}\{p_s^2(X_t,Z_t)\}+\mathbf{E}\{x_{s,t}\}(1-\mathbf{E}\{x_{s,t}\}),$$

где $\mathbf{E}\{p_s^2(X_t,Z_t)\}=N\sum_{i_1,\ldots,i_n\in A}p_s^2(I,Z_t)p_I(t-1)$. □

Л е м м а 3. *Если имеет место модель (2), (3) и* $Z_t = Z = (z_1, \ldots, z_m)' \in R^m$ *не зависит от t, то для n-мерной векторной цепи Маркова* X_t *существует единственное стационарное распределение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия леммы удовлетворяют следствию 2 теоремы 1, поэтому цепь Маркова X_t является однородной. Оценим снизу элементы матрицы Q:

$$q_{I,J} = \prod_{s=1}^{n} C_N^{j_s} (\exp\{a_s' I + b_s' Z\})^{j_s} (1 + \exp\{a_s' I + b_s' Z\})^{-N}, \quad I, J \in L.$$

Так как

$$C_N^{j_s} (\exp\{a_s' I + b_s' Z\})^{j_s} \geq 1, \ (1 + \exp\{a_s' I + b_s' Z\})^{-N} > 0, \ N < \infty,$$

то $q_{I,J} = \prod_{s=1}^{n} C_N^{j_s} (\exp\{a_s' I + b_s' Z\})^{j_s} (1 + \exp\{a_s' I + b_s' Z\})^{-N} > 0$ для всех $I, J \in L$. Поэтому согласно [8] цепь Маркова является эргодической и существует единственное стационарное распределение. □

Для нахождения стационарного распределения $\pi = (\pi_I) \in [0,1]^{\nu \times \nu}$ необходимо решить систему уравнений

$$Q'\pi = \pi, \ \sum_{I \in A^n} \pi_I = 1.$$

Статистическое оценивание параметров. Примем обозначения: $\theta = (\theta_1', \ldots, \theta_n')' \in R^{n(n+m)}$ – составной вектор параметров, подлежащих оцениванию.

Т е о р е м а 2. *В рамках модели (2), (3) логарифмическая функция правдоподобия для наблюдений* $\{X_t : t = 1, 2, ..., T\}$ *имеет аддитивный по* $\theta_1, \ldots, \theta_n$ *вид*

$$l(\theta) = \sum_{s=1}^{n} l_s(\theta_s), \ l_s(\theta_s) = \sum_{t=1}^{T} (x_{s,t} \theta_s' Y_t - N \ln(1 + \exp\{\theta_s' Y_t\}) + \ln C_N^{x_{s,t}}). \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся обобщенной формулой умножения и марковским свойством, установленным в теореме 1, для построения функции правдоподобия

$$L(\theta) = \mathbf{P}\{X_1, \ldots, X_T\} = \mathbf{P}\{X_1\} \prod_{t=2}^{T} \mathbf{P}\{X_t \,|\, X_{t-1}\}.$$

В теореме 1 найдены выражения для $\mathbf{P}\{X_1\}$ и $\mathbf{P}\{X_t | X_{t-1}\}$:

$$\mathbf{P}\{X_1\} = \prod_{s=1}^{n} C_N^{x_{s,1}} (\exp\{b_s' Z_1\})^{x_{s,1}} (1 + \exp\{b_s' Z_1\})^{-N},$$

$$\mathbf{P}\{X_t | X_{t-1}\} = \prod_{s=1}^{n} C_N^{x_{s,t}} (\exp\{\theta_s' Y_t\})^{x_{s,t}} (1 + \exp\{\theta_s' Y_t\})^{-N}, \quad t \geq 2.$$

Тогда имеем

$$L(\theta) = \prod_{t=1}^{T} \prod_{s=1}^{n} C_N^{x_{s,t}} (\exp\{\theta_s' Y_t\})^{x_{s,t}} (1 + \exp\{\theta_s' Y_t\})^{-N} = \prod_{s=1}^{n} \prod_{t=1}^{T} C_N^{x_{s,t}} (\exp\{\theta_s' Y_t\})^{x_{s,t}} (1 + \exp\{\theta_s' Y_t\})^{-N}.$$

Вычислим логарифмическую функцию правдоподобия

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = \ln\left(\prod_{s=1}^{n} \prod_{t=1}^{T} C_N^{x_{s,t}} (\exp\{\theta_s' Y_t\})^{x_{s,t}} (1 + \exp\{\theta_s' Y_t\})^{-N} \right) =$$

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} \left(x_{s,t} (\theta_s' Y_t) - N \ln(1 + \exp\{\theta_s' Y_t\}) + \ln C_N^{x_{s,t}} \right) = \sum_{s=1}^{n} l_s(\theta_s),$$

что совпадает с (8). □

Для нахождения оценки максимального правдоподобия (ОМП) $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1', \ldots, \hat{\theta}_n')'$ параметров модели необходимо максимизировать логарифмическую функцию правдоподобия (8)

$$l(\theta) \to \max_{\theta}. \tag{9}$$

Из теоремы 2 следует, что задача (9) распадается на n экстремальных задач:

$$l_s(\theta_s) \to \max_{\theta_s}, s \in S. \tag{10}$$

Необходимое условие для нахождения локального максимума в задаче (10) имеет вид

$$\nabla_{\theta_s} l_s(\theta_s) = \mathrm{O}_{n(n+m)}, \tag{11}$$

где $\mathrm{O}_{n(n+m)}$ – вектор-столбец, все $n(n+m)$ элементов которого равны нулю.

Л е м м а 4. *Для модели (2), (3) вектор-столбец производных первого порядка и матрица производных второго порядка по параметру* θ_s *от функции* $l_s(\theta_s)$, $s \in S$, *имеют вид*

$$\nabla_{\theta_s} l_s(\theta_s) = \sum_{t=1}^{T}\left(x_{s,t} - N\frac{\exp\{\theta_s{}'Y_t\}}{1+\exp\{\theta_s{}'Y_t\}}\right)Y_t,\ \nabla^2_{\theta_s} l_s(\theta_s) = -N\sum_{t=1}^{T}\frac{\exp\{\theta_s{}'Y_t\}}{(1+\exp\{\theta_s{}'Y_t\})^2}Y_tY_t{}'.$$

При условии $\left|\sum_{t=1}^{T}\frac{\exp\{\theta_s{}'Y_t\}}{(1+\exp\{\theta_s{}'Y_t\})^2}Y_tY_t{}'\right| \neq 0$ *матрица* $\nabla^2_{\theta_s} l_s(\theta_s)$ *является отрицательно определенной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вектор-столбец первых производных по параметру θ_s от функции $l_s(\theta_s), s \in S,$ вычисляется из (8) следующим образом:

$$\nabla_{\theta_s} l_s(\theta_s) = \nabla_{\theta_s}\left(\sum_{t=1}^{T}(x_{s,t}(\theta_s{}'Y_t) - N\ln(1+\exp\{\theta_s{}'Y_t\})) + \ln C_N^{x_{s,t}}\right) =$$

$$\sum_{t=1}^{T}(x_{s,t}\nabla_{\theta_s}(\theta_s{}'Y_t) - N\nabla_{\theta_s}\ln(1+\exp\{\theta_s{}'Y_t\})) = \sum_{t=1}^{T}(x_{s,t}Y_t - N(1+\exp\{\theta_s{}'Y_t\})^{-1}\exp\{\theta_s{}'Y_t\}Y_t).$$

Имеем цепочку матричных равенств

$$\nabla^2_{\theta_s} l_s(\theta_s) = \nabla_{\theta_s}(\nabla_{\theta_s} l_s(\theta_s)) = \nabla_{\theta_s}\left(\sum_{t=1}^{T}(x_{s,t}Y_t - N(1+\exp\{\theta_s{}'Y_t\})^{-1}\exp\{\theta_s{}'Y_t\}Y_t)\right) =$$

$$\sum_{t=1}^{T}\nabla_{\theta_s}(-N(1+\exp\{\theta_s{}'Y_t\})^{-1}\exp\{\theta_s{}'Y_t\}Y_t) = -N\sum_{t=1}^{T}\frac{\exp\{\theta_s{}'Y_t\}}{(1+\exp\{\theta_s{}'Y_t\})^2}Y_tY_t{}'.$$

Оценим квадратичную форму $z'\nabla^2_{\theta_s} l_s(\theta_s)z$, где $z \in R^{n+m}$ – произвольный вектор-столбец

$$z'\nabla^2_{\theta_s} l_s(\theta_s)z = -z'\left(N\sum_{t=1}^{T}\frac{\exp\{\theta_s{}'Y_t\}}{(1+\exp\{\theta_s{}'Y_t\})^2}Y_tY_t{}'\right)z = -N\sum_{t=1}^{T}\frac{\exp\{\theta_s{}'Y_t\}}{(1+\exp\{\theta_s{}'Y_t\})^2}(z'Y_t)(z'Y_t)' \le 0. \tag{12}$$

Так как при условии $\left|\sum_{t=1}^{T}\frac{\exp\{\theta_s{}'Y_t\}}{(1+\exp\{\theta_s{}'Y_t\})^2}Y_tY_t{}'\right| \neq 0$ равенство в (12) достигается только при нулевом векторе z, то выполняется свойство отрицательной определенности

$$\nabla^2_{\theta_s} l_s(\theta_s) \prec 0. \ \square$$

Пусть θ_s^* – некоторое решение системы (11), тогда достаточным условием локального максимума (10) в точке θ_s^* является условие отрицательной определенности матрицы вторых производных в этой точке, которое выполняется в силу леммы 4.

Систему (11) будем решать численно, применяя итерационный метод Ньютона, который обладает квадратичной сходимостью. Для этого метода (k + 1)-я итерация имеет вид ($k = 0, 1, 2, \ldots$):

$$\theta_s^{(k+1)} = \theta_s^{(k)} - (\nabla^2_{\theta_s} l_s(\theta_s^{(k)}))^{-1}\nabla_{\theta_s} l_s(\theta_s^{(k)}), \tag{13}$$

где $\theta_s^{(k)}$ – приближение к ОМП $\hat{\theta}_s$ на k-м шаге; $\nabla_{\theta_s} l_s(\theta_s^{(k)})$ – вектор-столбец производных первого порядка в точке $\theta_s^{(k)}$; $\nabla^2_{\theta_s} l_s(\theta_s^{(k)})$ – матрица производных второго порядка в точке $\theta_s^{(k)}$.

Итерационные вычисления заканчиваем, если норма $\|\nabla_{\theta_s} l_s(\theta_s^{(k)})\| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – наперед заданная достаточно малая величина, определяющая точность вычисления ОМП; при этом в качестве ОМП принимаем статистику $\hat{\theta}_s = \theta_s^{(k+1)}$.

Логарифмическая функция правдоподобия в задаче (10) может иметь несколько локальных максимумов, поэтому для нахождения глобального максимума $l_s(\theta_s)$ будем применять итерационный алгоритм (13) несколько раз для различных начальных значений, а в качестве оценки $\hat{\theta}_s$ выберем то решение задачи (10), для которого функция правдоподобия принимает наибольшее значение.

Так как $\boldsymbol{E}\{x_{s,t} \mid X_{t-1}\} = Np_{s,t}$, то

$$\ln\frac{p_{s,t}}{1-p_{s,t}} = \ln\frac{\boldsymbol{E}\{x_{s,t} \mid X_{t-1}\}}{N-\boldsymbol{E}\{x_{s,t} \mid X_{t-1}\}} = I\{t>1\}\sum_{i=1}^{n} a_{s,i}x_{i,t-1} + \sum_{j=1}^{m} b_{s,j}z_{j,t}.$$

Тогда в качестве одного из возможных векторов начального приближения $\theta_s^{(0)}$ для итерационного алгоритма (13) примем

$$\theta_s^{(0)} = \left(\sum_{t=1}^{T} v_{s,t}Y_{s,t}{}'\right)\left(\sum_{t=1}^{T} Y_{s,t}Y_{s,t}{}'\right)^{-1},$$

где $v_{s,t} = \ln\frac{x_{s,t}+\gamma}{N-x_{s,t}+\gamma}$; $Y_t = (I\{t>1\}X_{t-1}{}', Z_t{}')' \in R^{n+m}$, $t \in \mathbb{N}$; $\gamma > 0$ – некоторая достаточно малая константа для регуляризации вычислений.

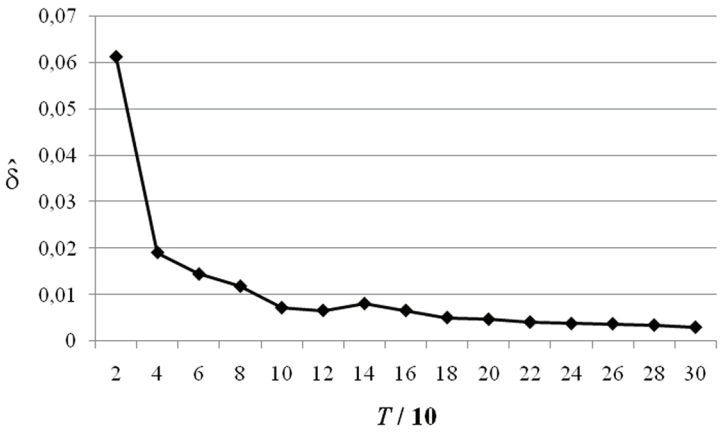
Результаты компьютерного моделирования. Компьютерные эксперименты проводились на модельных данных. Рассматривалась модель (1)–(3) при $N = 10$, $A = \{0, 1, ..., 10\}$, $n = 3$, $S = \{1, 2, 3\}$, $m = 0$, $\theta_1 = (-0{,}2, 0{,}08, -0{,}05)'$, $\theta_2 = (-0{,}06, 0{,}15, -0{,}08)'$, $\theta_3 = (0{,}01, -0{,}05, -0{,}2)'$. Статистические оценки параметров, полученные по $T = 50$ наблюдениям, имеют вид

$$\hat{\theta}_1 = (-0{,}17, 0{,}0007, 0{,}03)',\ \hat{\theta}_2 = (-0{,}08, 0{,}14, -0{,}05)',\ \hat{\theta}_3 = (0{,}03, -0{,}03, -0{,}29)'.$$

На рисунке представлен график зависимости выборочной среднеквадратической ошибки оценивания параметров в зависимости от длительности наблюдений T ($T \in [20, 300]$) по методу Монте-Карло:

$$\hat{\delta} = \widehat{\boldsymbol{E}}\left\{\left\|\hat{\theta}-\theta\right\|^2\right\} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\|\hat{\theta}^{(k)} - \theta\|^2,$$

где $\hat{\theta}^{(k)}$ – оценка максимального правдоподобия параметров по k-й реализации пространственно-временных данных; θ – истинное значение параметров; $M = 1000$ – количество реализаций Монте-Карло. Рисунок иллюстрирует состоятельность построенной оценки параметров $\hat{\theta}$.



Среднеквадратическая погрешность ОМП модели (1)–(3)

Заключение. В сообщении разработана биномиальная условно авторегрессионная модель на основе пространственно-временных данных. Доказано, что данная модель является неоднородной векторной Марковской моделью. Исследованы вероятностные свойства модели и построены оценки максимального правдоподобия параметров модели. Проведены компьютерные эксперименты на модельных данных.

Список использованной литературы

1. Handbook of spatial statistics / A. E. Gelfand [et al.]. – Boca Raton, 2010.
2. *Zhuang, L.* Spatio-temporal modeling of sudden infant death syndrome data / L. Zhuang, N. Creesie // Stat. Methodol. – 2012. – Vol. 9, N 1–2.
3. *Rumisha, S. F.* Modelling heterogeneity in malaria transmission using large sparse spatio-temporal entomological data / S. F. Rumisha, T. Smith, S. Abdulla // Global Health Action. – 2014. – Vol. 7.
4. Spatio-temporal modeling of sparse geostatistical malaria sporozoite rate data using a zero inflated binomial model / N. Amek [et al.] // Spatial and Spatio-temporal J. of Epidemiology. – 2011. – Vol. 2, N 4.
5. Hierarchical Bayesian spatiotemporal analysis of revascularization odds using smoothing splines / G. L. Silva [et al.] // Stat. Med. – 2008. – Vol. 15, N 27(13).
6. *Kharin, Yu.* Statistical Analysis of Spatio-Temporal Data Based on Poisson Conditional Autoregressive Model / Yu. Kharin, M. Zhurak // Informatica. – 2015. – Vol. 26, N 1. – P. 67–87.
7. *Харин, Ю. С.* Пуассоновская условно авторегрессионная модель и ее оценивание на основе пространственно-временных данных / Ю. С. Харин, М. К. Журак // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2013. – № 3. – С. 22–30.
8. *Ширяев, А. Н.* Вероятность / А. Н. Ширяев. – М.: МГУ, 1957.

Поступило в редакцию 17.06.2015

Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **ноябрь–декабрь** **Том 59 № 6**

УДК 511.42

М. В. ЛАМЧАНОВСКАЯ[1], *В. И. БЕРНИК*[2]

РЕГУЛЯНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ В КРУГАХ МАЛОГО РАДИУСА

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

[1]*Институт информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь*
lammv@mail.ru
[2]*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*
bernik@im.bas-net.by

Полученные в сообщении результаты связаны с распределением алгебраических чисел большой высоты $Q \in \mathbb{N}$ в кругах малых радиусов $r_i = Q^{-\gamma}, \gamma \geq 0$. В работе доказано, что при любом $Q \geq Q_0(n)$ в $\mathbb{C}$ существуют круги K_1 и K_2 радиусов r_1 и r_2, $\max(r_1, r_2) < c_1(n)Q^{-\frac{1}{4}}, c_1 > c_{01}(n)$, в которых нет алгебраических чисел $\alpha \in K_1$, $\beta \in K_2$, $\max(H(\alpha), H(\beta)) \leq Q$. Если же радиусы кругов удовлетворяют условию $\min(r_1, r_2) > c_2(n)Q^{-\frac{1}{4}}$, $c_2 > c_{02}(n)$, то количество алгебраических чисел в кругах K_1 и K_2 не менее, чем $c_3(n)Q^5 r_1^2 r_2^2$.

Ключевые слова: алгебраические числа, диофантовы приближения, мера Лебега, теорема Дирихле, теорема Минковского о выпуклом теле, теорема Лиувилля, дроби Фарея, равномерное распределение, регулярная система, распределение алгебраических чисел.

M. V. LAMCHANOVSKAYA[1], *V. I. BERNIK*[2]

REGULARITY OF DISTRIBUTHION OF COMPLEX ALGEBRAIC NUMBERS IN CIRCLES OF SMALL RADIUS

[1]*Institute of Information Technology of the Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus*
lammv@mail.ru
[2]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*
bernik@im.bas-net.by

For any sufficiently large positive integer $Q \geq Q_0(n)$ we prove that there exist complex circles K_1, $K_2 \subset \mathbb{C}$ of radii r_1 and r_2, $\max(r_1, r_2) < c_1(n)Q^{-\frac{1}{4}}, c_1 > c_{01}(n)$, containing no algebraic numbers $\alpha \in K_1$, $\beta \in K_2$ with heights bounded by Q, $\max(H(\alpha), H(\beta)) \leq Q$. We also show that if the radii of the circles K_1 and K_2 obey the condition $\min(r_1, r_2) > c_2(n)Q^{-\frac{1}{4}}$, $c_2 > c_{02}(n)$, then the number of algebraic numbers lying in these circles is bounded from below by $c_3(n)Q^5 r_1^2 r_2^2$.

Keywords: algebraic numbers, diophantine approximations, Lebesgue measure, Dirichlet's theorem, Minkowski theorem on convex body, Liouville's theorem, Farey fractions, uniform distribution, regular system, distribution of algebraic numbers.

Пусть

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \tag{1}$$

полином с целыми коэффициентами степени $\deg P = n$ и высоты $H = H(P) = \max\limits_{0 \leq j \leq n} |a_j|$. Через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ обозначим корни полинома, $H(\alpha)$ – высоту алгебраического числа, равную модулю максимального коэффициента минимального многочлена алгебраического числа α. Далее $Q \geq 1$ достаточно большое натуральное число, а величины $c_1 = c_1(n), c_2, \ldots$ зависят только от n и не зависят от H и Q, μB – мера Лебега измеримого множества $B \subset \mathbb{C}$.

Введем класс полиномов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(z) \in \mathbb{Z}[z] : \deg P = n \geq 2, H(P) \leq Q\}.$$

© Ламчановская М. В., Берник В. И., 2015.

Нетрудно показать, что $\max\limits_{0\le j\le n}|\alpha_j|<Q+1$ и поэтому все корни полиномов $P(z)\in\mathcal{P}_n(Q)$ лежат в круге $\mathcal{L}$ радиуса $r\le Q+1$. Их распределение в $\mathcal{L}$ трудная задача ввиду сложной зависимости α_j от коэффициентов $P(z)$ в (1). Распределение корней имеет важное значение в теории диофантовых приближений и теории трансцендентных чисел [1–3]. Исследование распределения алгебраических чисел позволило В. Г. Спринджуку доказать известную гипотезу Малера [4].

Данное сообщение посвящено проблеме распределения корней полиномов четвертой степени в кругах малых радиусов. Результаты сообщения позволяют получить регулярность распределения комплексных алгебраических чисел в $\mathbb{C}$ с явной зависимостью радиусов кругов от Q [5].

Л е м м а 1 [6]. *Пусть* $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ *– корни многочлена* $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, $\deg P=n$. *Тогда для любого набора различных корней,* $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_k}$, $1\le i_1<i_2<...<i_k\le n, k\le n$, *справедливо неравенство* $|\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}...\alpha_{i_n}|<c_1(n)\dfrac{H(P)}{|a_n|}$.

Пусть $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ корни многочлена (1). С каждым корнем будем связывать множество

$$S(\alpha_i)=\{z\in\mathbb{C},|z-\alpha_i|=\min_{1\le j\le n}|z-\alpha_j|\}.$$

Везде далее полагаем, что $i=1$ и корни многочлена $P(z)$ упорядочены относительно $\alpha_1:|\alpha_1-\alpha_2|<|\alpha_1-\alpha_3|<...<|\alpha_1-\alpha_n|$.

Л е м м а 2 [1]. Пусть $z\in S(\alpha_1)$. Тогда $|z-\alpha_1|\le 2^{n-1}\dfrac{|P(z)|}{|P'(\alpha_1)|}$.

Обозначим через $K_i(u_i,r_i)$, $i=1,2$, круги с центром в точке u_i радиусами r_i.

Т е о р е м а 1. *Для любого* $Q\ge 1$ *существует шар* $S=K_1(u_1,r_1)\times K_2(u_2,r_2)$, *где* $|u_1-u_2|>\delta>0$, $r_i=Q^{-\mu_i}$, $i=1,2$, $\mu_i\ge 0$, *такой, что в шаре* $K=K_1(w_1,R_1)\times K_2(w_2,R_2)$, $K\subset S$, $u_1\notin K_1(w_1,R_1)$, $u_2\notin K_2(w_2,R_2)$, $R_1<c_2r_1$, $R_2<c_3r_2$, *нет алгебраических точек* $\overline{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2)$, $\deg P\ge 4$, $H(\overline{\alpha})=\max\{H(\alpha_1),H(\alpha_2)\}\le Q$ *при условии:*

а) $\mu_1+\mu_2>2$ *и* $Q>Q_0$;

б) $\mu_1+\mu_2=2$ *и* $0<c_2\le c_3$, *где* c_3 *– достаточно мала.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Обозначим T шар, сопряженный шару K, т. е. $T=T_1(\overline{u}_1,r_1)\times T_2(\overline{u}_2,r_2)$, где T_i, $i=1,2$, круг, сопряженный кругу K_i. Рассмотрим многочлены

$$P_1(z)=z^2+z+1 \text{ с корнями } u_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\overline{u}_1=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

и

$$P_2(z)=z^2-z+2 \text{ с корнями } u_2=\frac{1+\sqrt{7}i}{2},\overline{u}_2=\frac{1-\sqrt{7}i}{2}.$$

Образуем шары $K_1(u_1,r_1)\times K_2(u_2,r_2)$ и $T_1(\overline{u}_1,r_1)\times T_2(\overline{u}_2,r_2)$. Пусть α_1,α_2 корни минимального многочлена $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0$, $P(\alpha_1)=P(\alpha_2)=0$, $\deg P\ge 4$, $H(P)\le Q$. Предположим, что $\overline{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2)\in K$, тогда $\overline{\beta}=(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2)\in T$. Обозначим $P_3(z)=P_1(z)P_2(z)=z^4+2z^2+z+1$. Найдем $R(P,P_3)$ – результант многочленов $P(z)$ и $P_3(z)$. Так как $P(z)$ и $P_3(z)$ не имеют общих корней, то

$$1\le|R(P,P_3)|=a_n^4|\alpha_1-u_1||\alpha_2-u_2||\alpha_3-u_3||\alpha_4-u_4|L(P,P_3)\le 16c_2^2c_3^2a_n^4Q^{-2(\mu_1+\mu_2)}L(P,P_3), \quad (2)$$

где $\alpha_3=\overline{\alpha}_1,\alpha_4=\overline{\alpha}_2,u_3=\overline{u}_1,u_4=\overline{u}_2$, $L(P,P_3)=\prod\limits_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le 4}}|\alpha_i-u_j|$, $i\ne j$.

По лемме 1 $|L(P,P_3)|<c_4(Ha_n^{-1})^4<c_4Q^4a_n^{-4}$ и поэтому (2) можно оценить как

$$1\le|R(P,P_3)|\le 16c_2^2c_3^2c_4Q^{4-2(\mu_1+\mu_2)}. \quad (3)$$

Если $\mu_1+\mu_2>2$, то при достаточно большой величине Q неравенство (3) противоречиво.

Если $\mu_1+\mu_2=2$, то при $c_2c_3<\dfrac{1}{4}\sqrt{c_4^{-1}}$ неравенство (3) противоречиво. Следовательно, в шаре K нет алгебраических чисел $\overline{\alpha}$, $\deg\alpha\ge 4$, $H(\overline{\alpha})\le Q$.

Найдем в кругах каких радиусов обязательно будут алгебраические числа. Для упрощения дальнейших оценок будем считать, что $z, u \in K(0,1)$.

Т е о р е м а 2. *Если* $\max \mu_i \le \frac{1}{4}$, $i = 1, 2$, *то при достаточно большой величине* c_5 *в шаре* $K = K_1(z, r_1) \times K_2(u, r_2)$, $r_i > c_5 Q^{-\mu_i}$, $i = 1, 2$, $\mu_i \ge 0$, *существует не менее* $c_6 Q^{5-2(\mu_1+\mu_2)}$ *точек с алгебраическими координатами четвертой степени и высоты* $H(\overline{\alpha}) < c_7 Q$.

Теорема 2 может быть обобщена на алгебраические числа произвольной степени *n*. Для этого необходимо получить оценки решений системы неравенств (14) для многочленов степени $n-1$ и при малых значениях производной воспользоваться оценками величин $|z - \alpha|$ по второй производной как в [1].

Изложим схему доказательства теоремы 2. Пользуясь принципом ящиков Дирихле нетрудно доказать, что при любом $z \in K$ найдется полином $P(z) \in \mathcal{P}_4(Q)$, для которого верна система неравенств

$$\begin{cases} |P(z)| < c_6 Q^{-\frac{1}{4}} \\ |P(u)| < c_6 Q^{-\frac{1}{4}}. \end{cases} \tag{4}$$

Если к системе (4) добавить условие

$$\min(P'(z), P'(u)) > \delta_0 Q, \delta_0 > 0,$$

то из леммы 2 получим существование корней α_1, α_2 и полинома $P(z)$ таких, что

$$\begin{cases} |z - \alpha_1| < 4 c_6 \delta_0^{-1} Q^{-\frac{5}{4}} \\ |u - \alpha_2| < 4 c_6 \delta_0^{-1} Q^{-\frac{5}{4}} \end{cases}$$

и искомые алгебраические числа в кругах получены.

Осталось доказать, что система неравенств (4) с дополнительными условием

$$\min(P'(z), P'(u)) \le \delta_0 Q \tag{5}$$

разрешима только на множестве малой меры. Пусть далее

$$|u - z| > \delta. \tag{6}$$

Т е о р е м а 3. *Обозначим* $\mathcal{L}_4(Q)$ *множество* $z \in K_1(z_1, r_1)$, $u \in K_2(u_2, r_2)$, $|z| > \delta, |u| > \delta$, *для которых система неравенств (4), (5) имеет решение в полиномах* $P(z) \in \mathcal{P}_4(Q)$. *Тогда* $\mu \mathcal{L}_4(Q) < \frac{1}{4} \mu K_1 \mu K_2$.

Теорему 3 можно рассматривать как обобщение теоремы Малера–Спринджука на области малой меры.

Схема доказательства теоремы 3. Из условия (4), (6) и леммы 2 при $z \in S(\alpha_1)$, $u \in S(\alpha_2)$ следует, что

$$\begin{cases} |z - \alpha_1| < 2^{-3} c_6 Q^{-\frac{1}{4}} |P'(\alpha_1)|^{-1} \\ |u - \alpha_2| < 2^{-3} c_6 Q^{-\frac{1}{4}} |P'(\alpha_2)|^{-1}. \end{cases}$$

Оценим значение $|P'(\alpha_1)| = a_n \prod_{j=2}^{n} |\alpha_i - \alpha_j|$. Из неравенств $|z - \alpha_1| < \frac{\delta}{4}$, $|u - \alpha_2| < \frac{\delta}{4}$ и (6) имеем $c_7(\delta) a_4 < |P'(\alpha_1)| < c_8(\delta) a_4$. Отсюда

$$\begin{cases} |z - \alpha_1| < c_9 a_n^{-1} Q^{-\frac{1}{4}} \\ |u - \alpha_2| < c_9 a_n^{-1} Q^{-\frac{1}{4}}. \end{cases} \tag{7}$$

При фиксированном $P(z)$ из (7) следует, что мера $\mu\mathcal{L}_4(Q)$ тех (z,u), удовлетворяющих системе (4), (5), не превосходит

$$\mu\mathcal{L}_4(Q) < 2^4 c_{10}^4 a_n^{-4} Q^{-1}. \tag{8}$$

Оценим количество многочленов со старшими коэффициентом a_4 с условием $|a_j| \le a_4, 0 \le j \le 3$, для которых верна система неравенств (4), (5).

Пусть d_1 – центр круга K_1, а d_2 – центр круга K_2. Тогда любую точку (z,u) можно записать в виде

$$\begin{cases} z = d_1 + \theta_1 r_1 \\ z = d_2 + \theta_2 r_2, \end{cases} \tag{9}$$

где $|\theta_j| \le 1, j = 1,2$. Подставим z и u из (9) в систему (4). Получим

$$\begin{cases} |P(d_1)| < c_{11}\left(Q^{-\frac{1}{4}} + a_4 Q^{-\mu_1}\right) \\ |P(d_2)| < c_{12}\left(Q^{-\frac{1}{4}} + a_4 Q^{-\mu_2}\right). \end{cases} \tag{10}$$

Пусть $\mu_1 \ge \mu_2$. Поделим квадрат со стороной $2Q^{-\mu_2}$ на квадраты со стороной $2Q^{-\mu_1}$. Количество таких квадратов не превосходит

$$c_{13} Q^{2(\mu_1 - \mu_2)}. \tag{11}$$

Система неравенств (10) в квадратах со сторонами $2Q^{-\mu_1}$ примет вид

$$\begin{cases} |P(d_1)| < c_{14}\left(Q^{-\frac{1}{4}} + a_4 Q^{-\mu_1}\right) \\ |P(d_2)| < c_{15}\left(Q^{-\frac{1}{4}} + a_4 Q^{-\mu_1}\right). \end{cases} \tag{12}$$

Теперь, если $a_4 > Q^{\mu_1}, \mu_1 \le \frac{1}{4}$, то систему неравенств (12) можно переписать в виде

$$\begin{cases} |P(d_1)| < c_{16} a_4 Q^{-\mu_1} \\ |P(d_2)| < c_{17} a_4 Q^{-\mu_1}. \end{cases} \tag{13}$$

Зафиксируем a_4 и набор (a_0, a_1, a_2, a_3), для которого выполняется (13). Пусть (l_0, l_1, l_2, l_3) другой набор коэффициентов с условиями (13). Многочлен с коэффициентами a_j обозначим $P_1(z)$, а с коэффициентами l_j обозначим $P_2(z)$.

Для многочлена $R(z) = P_2(z) - P_1(z)$ выполняются неравенства

$$\begin{cases} |R(d_1)| < \left|(l_3 - a_3)d_1^3 + (l_2 - a_2)d_1^2 + (l_1 - a_1)d_1 + (l_0 - a_0)\right| < 2c_{16} a_4 Q^{-\mu_1} \\ |R(d_2)| < \left|(l_3 - a_3)d_2^3 + (l_2 - a_2)d_2^2 + (l_1 - a_1)d_2 + (l_0 - a_0)\right| < 2c_{17} a_4 Q^{-\mu_1}. \end{cases} \tag{14}$$

Запишем $d_1 = s_1 + it_1, d_2 = s_2 + it_2, s_i, t_i \in \mathbb{R}, i = 1,2$, и перейдем от системы неравенств (14) к системе неравенств относительно s_i и t_i. Заменим получившуюся систему неравенств на линейную систему неравенств относительно целых чисел $b_3 = (l_3 - a_3)$, $b_2 = (l_2 - a_2)$, $b_1 = (l_1 - a_1)$, $b_0 = (l_0 - a_0)$. Определителем этой системы будет нулевой многочлен третьей степени $V(\overline{s}, \overline{t})$ от четырех переменных s_1, s_2, t_1, t_2. Исключим в комплексном пространстве $\mathbb{C}^2$ множество точек с условием $|V(\overline{s}, \overline{t})| \le \delta$ с мерой меньшей $c_{18}\delta_1$ ($\delta_1 \to 0$ при $\delta \to 0$).

Разрешим систему уравнений по правилу Крамера относительно переменных $b_k, 0 \le k \le 3$:

$$|b_k| = \frac{|\Delta_k|}{|V(\overline{s}, \overline{t})|} < c_{19} a_4 Q^{-\mu_1}. \tag{15}$$

Ясно, что количество целых b_k, удовлетворяющих (15), не превосходит $2c_{19}a_4Q^{-\mu_1}$, а количество векторов $\overline{b} = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ не превосходит $c_{20}a_4^4Q^{-4\mu_1}$. Просуммируем меру $\mu\mathcal{L}_4(Q)$ из (8) по всем векторам $\overline{b}$. Получим

$$\sum_{\overline{b}} \mu\mathcal{L}_4(Q) < c_{21}Q^{-1-4\mu_1}. \tag{16}$$

Найдем сумму мер в (16) по всем кругам K_1 и K_2, воспользовавшись (11). Имеем

$$\sum_{\substack{K_i \\ i=1,2}} \sum_{\overline{b}.} \mu\mathcal{L}_4(Q) < c_{22}Q^{-1-2(\mu_1+\mu_2)} < c_{23}Q^{-1}\mu K_1 \mu K_2.$$

Так как $|a_4| < c_{24}\delta_0 Q$, то окончательно получим

$$\sum_{a_4} \sum_{\substack{K_i \\ i=1,2}} \sum_{\overline{b}.} \mu\mathcal{L}_4(Q) < c_{25}\delta_0 \mu K_1 \mu K_2.$$

Выберем $\delta_0 < \frac{1}{4}c_{25}^{-1}$. Теорема доказана.

Список использованной литературы

1. *Спринджук, В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск: Наука и техника, 1967. – 184 с.

2. *Гельфонд, А. О.* Трансцендентные и алгебраические числа / А. О. Гельфонд. – М., 1952.

3. *Бересневич, В. В.* Совместные приближения нуля целочисленным многочленом, его производной и малые значения дискриминантов / В. В. Бересневич, В. И. Берник, Ф. Гётце // Докл. НАН Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 2. – С. 26–27.

4. *Mahler, K.* Über das Maß der Menge aller S-Zahlen / K. Mahler // Math. Ann. – 1932. – Vol. 106. – P. 131–139.

5. *Bugeaund, Y.* Approximation by Algebraic Numbers / Y. Bugeaund // Cambridge Tracts in Math. – 2004. – Vol. 160.

6. *Фельдман, Н. И.* Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел / Н. И. Фельдман // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1951. – Т. 15, № 1. – С. 53–74.

Поступило в редакцию 22.06.2015

Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **ноябрь–декабрь** **Том 59 № 6**

УДК 511.42

А. С. КУДИН

ОБ ОЦЕНКЕ СВЕРХУ КОЛИЧЕСТВА МНОГОЧЛЕНОВ С ОГРАНИЧЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В КОРНЕ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
kunixd@gmail.com

Получена оценка сверху количества многочленов ограниченной степени и высоты из специального класса, имеющих на заданном интервале корень, в котором производная многочлена мала. Данная оценка улучшает известные к настоящему времени и получена с использованием методов метрической теории чисел.

Ключевые слова: диофантовы приближения, размерность Хаусдорфа, приближения нуля значениями полиномов, малая производная в корне.

A. S. KUDIN

ON THE UPPER BOUND OF THE AMOUNT OF POLYNOMIALS WITH BOUNDED DERIVATIVE AT A ROOT

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
kunixd@gmail.com

In the article we obtain an upper bound of the amount of integral polynomials from a special class of bounded degree and height with small value of derivative at a root of the polynomial on a given interval.

Keywords: diophantine approximation, hausdorff dimension, approximations of zero by values of polynomials, small derivative at a root.

Многие задачи в теории трансцендентных чисел и теории диофантовых приближений связаны с исследованием свойств множеств действительных, комплексных, и p-адических чисел, которые для бесконечного числа полиномов из некоторого класса $\mathcal{P} \subset \mathbb{Z}[x]$ удовлетворяют неравенствам

$$|P(x)| < H(P)^{-w_1}, |P(z)| < H(P)^{-w_2}, |P(\omega)| < H(P)^{-w_3}, \tag{1}$$

где $w_i > 0, x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}, \omega \in \mathbb{Q}_p$. Эти множества имеют сложную структуру и поэтому их аппроксимируют более простыми множествами: действительными интервалами, комплексными кругами, p-адическими цилиндрами [1; 2].

Пусть $I \subset (-1/2, 1/2)$ – интервал, $x \in I$. Пусть $P(x) = a_n x^n + ... + a_0$ – целочисленный полином степени n и $H(P)$ – его высота, $H(P) = \max_{0 \le i \le n} |a_i|$. Упорядочим корни $\alpha_1, ..., \alpha_n$ полинома P так, чтобы $|x - \alpha_1| \le ... \le |x - \alpha_n|$. Пусть $Q > Q_0$, где Q_0 достаточно велико, и $c_1, c_2, ...$ – величины, которые зависят только от n. Для обозначения асимптотических соотношений между величинами будем использовать символ Виноградова: $f \ll g$ означает, что $f \le c_0 g$ для некоторой величины c_0, которая зависит только от n. Также запись $f \asymp g$ означает асимптотическую эквивалентность f и g, т. е. $f \ll g \ll f$. В дальнейшем мы будем рассматривать полиномы из множества $\mathcal{P}_n(Q) = \{P \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \le n, H(P) \le Q\}$.

© Кудин А. С., 2015.

Решения первого неравенства (1) лежат [1] в интервалах вида $|x-\alpha_1| < 2^{n-1}|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1}$, которые могут быть велики при малых значениях $|P'(\alpha_1)|$. Решение этой проблемы было предложено Р. Бейкером [3]. Для $v \ge 0$ введем обозначение $\tilde{\mathcal{P}}_n(Q,v) = \{P \in \mathcal{P}_n(Q) : \exists\, x \in I, |P'(\alpha_1)| < Q^{1-v}\}$. Бейкер доказал, что $\tilde{\mathcal{P}}_n(Q,v) \ll Q^{n+1-\min(v,1)}$, и это позволило ему найти при больших значениях $w_1 > n$ точную оценку сверху размерности Хаусдорфа множества действительных чисел, которые удовлетворяют первому неравенству (1) для бесконечного числа полиномов $P \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P = n$.

В данной работе мы получаем обобщение результата Бейкера для специального класса полиномов и любых значений v. Центральным моментом доказательства Спринджуком проблемы Малера и ее обобщений является рассмотрение неравенства (1) для полиномов $P(x)$, у которых $|P'(\alpha_1)| \asymp |a_n||\alpha_1-\alpha_2|$. Обозначим как $\mathcal{P}_n(Q,v)$ множество ненулевых полиномов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, которые имеют корень $\alpha_1 \in I$ с условием $|P'(\alpha_1)| < Q^{1-v}$ и при этом $|P'(\alpha_1)| \asymp |a_n||\alpha_1-\alpha_2|$. Очевидно, что $\mathcal{P}_n(Q,v) \subset \tilde{\mathcal{P}}_n(Q,v)$. В работе будет доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Существует положительная константа* $c_1 = c_1(n)$ *такая, что при* $1 < v \le \dfrac{n}{2}$ *и* $Q > Q_0(n,v,I)$ *выполняется* $\#\mathcal{P}_n(Q,v) < c_1 Q^{n+1-v}$.

В доказательстве теоремы 1 будут использоваться следующие утверждения.

Л е м м а 1. *Пусть* $\delta > 0$ *– некоторое действительное число, n – натуральное,* $Q > Q_0(n,\delta)$ *– достаточно большое действительное число. Далее пусть* $P_1(x), P_2(x) \in \mathcal{P}_n(Q^{\mu})$, $\mu > 0$, *– полиномы без общих корней. Тогда, если для всех x из некоторого интервала* $I \subset (-n,n)$, $|I| = Q^{-\eta}$, $\eta > 0$, *выполняются неравенства* $\max(|P_1(x)|, |P_2(x)|) < Q^{-\tau}$, $\tau > 0$, *то*

$$\tau + \mu + 2\max(\tau + \mu - \eta, 0) < 2\mu n + \delta.$$

Л е м м а 2. *Пусть* $\delta > 0$ *– некоторое действительное число,* n_1, n_2 *– натуральные числа,* $Q > Q_0(n,\delta)$ *– достаточно большое действительное число. Далее пусть* $P_1(x) \in \mathcal{P}_{n_1}(Q^{\mu_1})$, $P_2(x) \in \mathcal{P}_{n_2}(Q^{\mu_2})$, $\mu_1, \mu_2 > 0$, *– полиномы без общих корней. Тогда, если для некоторого трансцендентного* α *выполняются неравенства* $|P_1(\alpha)| < Q^{-\tau_1}$, $|P_2(\alpha)| < Q^{-\tau_2}$, *то*

$$\min(\tau_1, \tau_2) < n_1\mu_2 + n_2\mu_1 + \delta.$$

Л е м м а 3. *Пусть* $t_1(x), ..., t_N(x)$, $N \gg Q^{\tau}$, $\tau > 0$, *– целочисленные полиномы степени не более n, среди которых нет двух без общих корней. Тогда из них можно выбрать полиномы* $s_1(x), ..., s_M(x)$, $M \gg Q^{\tau}$, *которые представимы в виде* $s_i(x) = k_i(x)d(x)$, *где все* $k_i(x)$ *не имеют общих корней с* $d(x)$, *а также среди* $k_i(x)$ *найдутся хотя бы два без общих корней.*

Леммы 1 и 3 доказаны в [4], лемма 2 доказана в [5].

Л е м м а 4. *Пусть* $\theta_1, \theta_2, s_0, t_0$ *– действительные числа,* $s_0, t_0 > 0$. *Тогда система неравенств*

$$\begin{cases} (s_0 - s)(t_0 - t) \ge \theta_1, \\ (s_0 - s)t + s(t_0 - t) \ge \theta_2 \end{cases}$$

не имеет решений $0 \le s \le s_0$, $0 \le t \le t_0$, *если*

$$\begin{cases} 2\theta_2 > s_0 t_0, \\ \theta_1 + \theta_2 > s_0 t_0. \end{cases} \tag{2}$$

Л е м м а 5. *Пусть* s_0, t_0 *– действительные числа,* $s_0 \ge 2$, $t_0 > 0$. *Тогда*

$$\max_{\substack{1 \le s \le s_0 - 1 \\ 0 \le t \le t_0}} \min(t(s+1), (t_0 - t)(s_0 - s + 1)) \le \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2}{s_0}\right) t_0 s_0.$$

Доказательства лемм 4 и 5 не сложны.

Опишем схему доказательства теоремы 1. Предположим, что верно противное, т. е. $\#\mathcal{P}_n(Q,v) \ge c_1 Q^{n+1-v}$. Разобъем интервал I на интервалы I_i, $|I_i| = Q^{-v}$, и будем говорить, что полином $P \in \mathcal{P}_n(Q,v)$ принадлежит интервалу I_i, если у него найдется корень $\alpha_1 \in I_i$, для которого $|P'(\alpha_1)| < Q^{1-v}$ и $|P'(\alpha_1)| \asymp |a_n||\alpha_1 - \alpha_2|$. Если P принадлежит нескольким интервалам I_i, будем считать, что он принадлежит лишь одному их них. Обозначим множество полиномов, которые принадлежат данному интервалу I_i, как $\mathcal{P}_n(Q,v,I_i)$. Используя ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, оценим $|P(x)|$ и $|P'(x)|$ на интервале I_i:

$$|P(x)| \le |P'(\alpha_1)||x-\alpha_1| + \frac{1}{2}|P''(\xi_1)||x-\alpha_1|^2 \le Q^{1-v}Q^{-v} + n^3 Q^1 Q^{-2v} \ll Q^{1-2v}, \tag{3}$$

$$|P'(x)| \le |P'(\alpha_1)| + |P''(\xi_2)||x-\alpha_1| \le Q^{1-v} + n^3 Q^1 Q^{-v} \ll Q^{1-v}, \tag{4}$$

где $x \in I_i$, $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha_1, x)$.

Пусть $\rho = \rho(l) = lT^{-1}$, где $0 \le l \le l_0$ – целое число, и $l_0 = l_0(n)$, $T = T(n)$ – достаточно большие целые числа. Нетрудно доказать, что существует $0 \le \rho \le v - T^{-1}$ такое, что среди интервалов I_i найдется не менее $c_2 Q^{v-\rho-T^{-1}}$ интервалов J_i таких, что $\#\mathcal{P}_n(Q,v,J_i) \ge c_3 Q^{n+1-2v+\rho}$, где $c_2 = c_2(n) = 2^{-1} l_0(n)^{-1}$ и $c_3 = c_3(n) = 2^{-1} c_1(n)$. Рассмотрим каждый интервал J_i. Представим $n+1-2v+\rho$ в виде $n+1-2v+\rho = k + \eta_1 + \eta_2$, где $0 \le k \le n-2v$ – целое число и $\eta_1, \eta_2 > 0$ – действительные числа. С помощью принципа ящиков Дирихле получим из $c_3 Q^{n+1-2v+\rho}$ полиномов P степени не более n, принадлежащих J_i, полиномы R степени не более $m = n - k$, количество которых не менее $c_4 Q^{\eta_2}$, а также используем η_1 для уменьшения их высоты. Очевидно, что мы можем брать любое натуральное $m \in [2v, n]$. Также, очевидно, что $m \ge 3$ и $m+1+\rho = 2v + \eta_1 + \eta_2$, откуда вытекает $\eta_1 + \eta_2 \ge 1$. Возьмем $\eta_2 = 2^{-5} n^{-1}$. Коэффициенты $a_2, ..., a_n$ полиномов P принимают значения из интервалов $L_e = [-Q, Q]$, $e = 2, ..., n$, которые мы покроем интервалами Δ_{e,f_e}. Пусть $|\Delta_{e,f_e}| = Q^{1-\sigma}$ для $e = 2, ..., m$ и $|\Delta_{e,f_e}| = 1$ для $e = m+1, ..., n$, где $\sigma = \eta_1 (m-1)^{-1}$. Ясно, что количество Δ_{e,f_e} в покрытии не превосходит $\lceil |L_e| / |\Delta_{e,f_e}| \rceil$, откуда следует $\#\{\Delta_{e,f_e}\} \le \lceil 2Q^{\sigma} \rceil \le 4Q^{\sigma}$ для $e = 2, ..., m$ и $\#\{\Delta_{e,f_e}\} \le 2Q$ для $e = m+1, ..., n$. Таким образом, множество параллелепипедов $\Delta_{2,f_2} \times ... \times \Delta_{n,f_n}$ образует покрытие параллелепипеда $L_2 \times ... \times L_n$ с количеством элементов $\#\{\Delta_{2,f_2} \times ... \times \Delta_{n,f_n}\} \le 2^{2(n-1)} Q^{k+\eta_1}$. Пусть $c_3 \ge 2^{2(n-1)+1} c_4$, тогда

$$\#\mathrm{P}_n(Q,v,J_i) \ge \#\{\Delta_{2,f_2} \times ... \times \Delta_{n,f_n}\} 2c_4 Q^{\eta_2},$$

откуда следует, что существует параллелепипед $\Delta_{2,f_2} \times ... \times \Delta_{n,f_n}$, в который попало не менее $2c_4 Q^{\eta_2}$ различных полиномов P_j. Получим не менее $c_4 Q^{\eta_2}$ различных ненулевых полиномов $R_j(x) = P_j(x) - P_0(x)$, для которых с учетом (3) и (4) справедливо

$$\begin{cases} \deg R_j \le m, \\ \max(|a_m|, ..., |a_2|) \le Q^{1-\sigma}, \\ |R(x)| \ll Q^{1-2v}, \forall x \in J_i, \\ |R'(x)| \ll Q^{1-v}, \forall x \in J_i. \end{cases} \tag{5}$$

Если $1-\sigma < 0$, то $\deg R_j(x) \le 1$. Так как $|a_1| = |R'(x)| \ll Q^{1-v}$, то $a_1 = 0$ при $Q > Q_0$. Аналогично, $a_0 = 0$. Получаем противоречие. Следовательно, $1-\sigma \ge 0 > 1-v$, откуда с учетом $Q^{1-v} \gg |R'(x)| = |ma_m x^{m-1} + ... + 2a_2 x + a_1|$, получаем $|a_1| \ll Q^{1-\sigma} + Q^{1-v} \ll Q^{1-\sigma}$. Аналогично, $|a_0| \ll Q^{1-\sigma}$. Таким образом, $H(R_j) \ll Q^{1-\sigma}$. Из оценок для $H(R_j)$ и $|R(x)|$ следует, что для $\varepsilon_1 = 2^{-6} n^{-2}$ при $Q > Q_0(n)$ справедливо

$$\begin{cases} H(R_j) \le c_5 Q^{1-\sigma} \le Q^{\varepsilon_1} Q^{1-\sigma}, \\ |R(x)| \le c_6 Q^{1-2v} \le Q^{\varepsilon_1} Q^{1-2v}. \end{cases} \tag{6}$$

Предположим, что среди полиномов R_j найдутся два полинома без общих корней. Применяя для них лемму 1 и используя равенство $1-2v=-m-\rho+\eta_1+\eta_2$, получим при $\delta_1=2^{-6}n^{-2}$ и $Q>Q_0(n)$ неравенство

$$3((m+\rho-\eta_1-\eta_2-\varepsilon_1)+(1-\sigma+\varepsilon_1))-2v<2m(1-\sigma+\varepsilon_1)+\delta_1,$$

которое с помощью эквивалентных преобразований приведем к виду

$$\rho(2m-3)+(m-3)+2v<\delta_1(m-1)+\eta_2(2m-3)+\varepsilon_1(2m^2-2m). \tag{7}$$

Так как $\rho(2m-3)+(m-3)+2v>2$ и $2\geq\delta_1(m-1)+\eta_2(2m-3)+\varepsilon_1(2m^2-2m)$, неравенство (7) противоречиво.

В случае, когда среди полиномов R_j не существует двух полиномов без общих корней, из леммы 3 следует, что среди R_j найдется не менее $c_5Q^{\eta_2}$ полиномов, представимых в виде $R_j(x)=k_j(x)d(x)$, где $k_j(x)$ не имеют общих корней с $d(x)$, и найдутся $k_1(x), k_2(x)$ без общих корней. Введем обозначения $t_0=1-\sigma+\varepsilon_1$ и $s_0=m$. Пусть $\deg d(x)=s$ и $H(d(x))=Q^t$. Тогда из (5) и (6) вытекает $\deg k_j(x)\leq s_0-s$ и $H(k_j(x))\leq Q^{t_0-t}$. Из определения $\mathrm{P}_n(Q,v)$ следует, что полиномы $k_1(x)$, $k_2(x)$, и $d(x)$ имеют корни на интервале J_i. Раскладывая их в ряд Тейлора в окрестности этих корней, для $\delta_2=2^{-6}n^{-2}$ получим при $Q>Q_0(n)$ оценки

$$\begin{cases}\left|k_j(x)\right|\leq c_6(n)Q^{t_0-t}Q^{-v}\leq Q^{t_0-t-v+\delta_2},\ \forall x\in J_i,\ j=1,2,\\ \left|d(x)\right|\leq c_7(n)Q^tQ^{-v}\leq Q^{t-v+\delta_2},\ \forall x\in J_i.\end{cases}$$

Применим лемму 2 к полиномам $k_1(x)$ и $d(x)$ в некоторой трансцендентной точке интервала J_i. Заметим, что $t_0+\delta_2=1-\sigma+\varepsilon_1+\delta_2\leq 1$, откуда и из $-\tau_1=t_0-t-v+\delta_2$ и $-\tau_2=t-v+\delta_2$ получаем

$$v-1\leq\min(\tau_1,\tau_2)<(s_0-s)t+s(t_0-t)+\delta_2. \tag{8}$$

Далее применим лемму 1 к полиномам $k_1(x), k_2(x)$ на интервале J_i и получим неравенство

$$v-\delta_2<2(s_0-s)(t_0-t)+\delta_2. \tag{9}$$

Неравенства (8) и (9) дают систему неравенств

$$\begin{cases}\theta_1=\dfrac{v}{2}-\delta_2<(s_0-s)(t_0-t),\\ \theta_2=v-1-\delta_2<(s_0-s)t+s(t_0-t).\end{cases} \tag{10}$$

Пусть $\rho=\xi v$. Докажем, что при $\xi\geq 1/2$ система неравенств (10) противоречива. Применим лемму 4. Если $\theta_1\leq\theta_2$, что эквивалентно $v\geq 2$, то из второго неравенства системы (2) следует первое. Запишем второе неравенство системы (2):

$$m(1-\sigma+\varepsilon_1)=m\left(\frac{2v-\rho-2+\eta_2}{m-1}+\varepsilon_1\right)<\frac{3}{2}v-1-2\delta_2,$$

которое тождественно

$$v(1/2m-\xi m+3/2)<m+1-\delta_2(2m-2)-\eta_2m-\varepsilon_1(m^2-m).$$

Так как $\xi\geq 1/2$ и $v\geq 0$, достаточно, чтобы выполнялось

$$\frac{3}{2}v<m+1-\delta_2(2m-2)-\eta_2m-\varepsilon_1(m^2-m).$$

Последнее неравенство истинно, так как $2v\leq m$ и $1>\delta_2(2m-2)+\eta_2m+\varepsilon_1(m^2-m)$.

Если $\theta_1>\theta_2$, что эквивалентно $v<2$, то из первого неравенства системы (2) следует второе. Запишем первое неравенство системы (2):

$$m(1-\sigma+\varepsilon_1)=m\left(\frac{2v-\rho-2+\eta_2}{m-1}+\varepsilon_1\right)<2v-2-2\delta_2,$$

что эквивалентно

$$v(2-\xi m)<2-\delta_2(2m-2)-\eta_2 m-\varepsilon_1(m^2-m).$$

Далее, $\xi\geq 1/2$, $m\geq 3$, и $v\geq 0$, поэтому достаточно, чтобы выполнялось

$$\frac{1}{2}v<2-\delta_2(2m-2)-\eta_2 m-\varepsilon_1(m^2-m).$$

Последнее неравенство истинно, так как $v<2$ и $1>\delta_2(2m-2)+\eta_2 m+\varepsilon_1(m^2-m)$.

Докажем, что при $\xi\leq 2/3$ также получаем противоречие. Определим множество полиномов

$$\tilde{\mathcal{P}}=\left\{P\in\mathcal{P}_n(Q):\deg P=s,\ H(P)\leq Q^t,\ (s+1)t\leq\frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{s_0}\right)s_0t_0\right\}$$

и получим оценку его мощности

$$\#\tilde{\mathcal{P}}\leq\sum_{s=0}^{n}c_8(n)Q^{(s+1)t}\leq c_9(n)Q^{\frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{s_0}\right)s_0t_0}.$$

Согласно лемме 5, хотя бы один полином из $k_1(x)$ и $d(x)$ принадлежит множеству $\tilde{\mathcal{P}}$, а так как $k_1(x)$ и $d(x)$ имеют корни на интервале J_i, то количество интервалов J_i не превосходит $n(\#\tilde{\mathcal{P}})$. Таким образом, получаем неравенство

$$c_2(n)Q^{v-\rho-T^{-1}}\leq\#\{J_i\}\leq nc_9(n)Q^{\frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{s_0}\right)s_0t_0},$$

откуда при $\delta_3=2^{-6}n^{-2}$ и $Q>Q_0(n)$ следует $v-\rho-T^{-1}\leq\frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{s_0}\right)t_0s_0+\delta_3$. Запишем противоположное неравенство

$$v-\rho-T^{-1}>\frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{m}\right)m(1-\sigma+\varepsilon_1)+\delta_3,$$

и с помощью эквивалентных преобразований получим

$$m\left(v-\frac{3}{2}\rho+1\right)>4v-3\rho-2+2\delta_4,$$

где $\delta_4=(T^{-1}+\delta_3)(m-1)+\frac{1}{4}(m+2)(\eta_2+\varepsilon_1(m-1))$. Так как $\rho\leq 2/3v$ и $2v\leq m$, то достаточно, чтобы выполнялось

$$2v\left(v-\frac{3}{2}\rho+1\right)>4v-3\rho-2+2\delta_4,$$

что эквивалентно $2v^2-2v+2>2\delta_4+\rho(3v-3)$. Далее, $v>1$ и $\rho\leq 2/3v$, поэтому достаточно доказать неравенство $2v^2-2v+2>2\delta_4+2/3v(3v-3)$, которое тождественно

$$1>\delta_4=(T^{-1}+\delta_3)(m-1)+\frac{1}{4}(m+2)(\eta_2+\varepsilon_1(m-1)).$$

Последнее неравенство истинно при $T(n)=2^5n$.

Список использованной литературы

1. *Спринджук, В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск, 1967.

2. *Bernik, V.* A divergent Khintchine theorem in the real, complex, and p-adic fields / V. Bernik, N. Budarina, D. Dickinson // Lithuanian Mathematical J. – 2008. – Vol. 48, N 2. – P. 158–173.

3. *Baker, R.* Sprindzuk's theorem and hausdorff dimension / R. Baker // Mathematika. – 1976. – Vol. 23, N 2. – P. 184–197.

4. *Bernik, V.* Application of Hausdorff Dimension in the theory of Diophantine Approximation / V. Bernik // Acta Arithmetica. – 1983. – Vol. 42, N 3. – P. 219–253.

5. *Гельфонд, А. О.* Трансцендентные и алгебраические числа / А. О. Гельфонд. – М., 1952.

Поступило в редакцию 25.05.2015

Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **ноябрь–декабрь** **Том 59 № 6**

УДК 519.1

О. И. ДУГИНОВ[1], И. Г. КУЗНЕЦОВА[2]

ЗАДАЧА МИНИМАЛЬНОГО ПОПОЛНЕНИЯ ДВУДОЛЬНОГО ГРАФА

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

[1]Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
oduginov@gmail.com
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
irene.kuzn@gmail.com

Рассматривается графовая задача, в которой задан двудольный граф с выделенной долей и требуется добавить в граф наименьшее число дополнительных ребер так, что множество вершин выделенной доли получившегося графа можно разбить на заданное число непустых множеств, каждое из которых содержит только вершины с одинаковыми окружениями. В работе установлено, что задача является *NP*-трудной в классе P_4-свободных двудольных графов и предлагается алгоритм, который решает задачу в классе $2K_2$-свободных двудольных графов.

Ключевые слова: пополнение двудольного графа, классы графов, вычислительная сложность.

O. I. DUGINOV[1], I. G. KOUZNETSOVA[2]

CLUSTERING MINIMUM BICLIQUE COMPLETION OF A BIPARTITE GRAPH

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
oduginov@gmail.com
[2]Belarusian State University, Minsk, Belarus
irene.kuzn@gmail.com

In this article we show that the clustering minimum biclique completion problem is *NP*-complete in the class of P_4-free bipartite graphs. We have also proposed a dynamic programming algorithm for that problem restricted to $2K_2$-free bipartite graphs.

Keywords: clustering minimum biclique completion problem, graph classes, computational complexity.

В настоящей работе изучается следующая задача: для заданных двудольного графа с выделенной долей и натурального числа p требуется найти минимальное число добавлений в граф отсутствующих в нем ребер (между вершинами из разных долей) так, что множество вершин выделенной доли этого графа можно разбить ровно на p непустых множеств с условием, что любые две вершины выделенной доли, попадающие в одно множество разбиения, имеют одинаковые окружения. Эта задача принадлежит классу задач модификации графа и возникает в области телекоммуникационных сетевых технологий.

Теоретико-графовая терминология и предварительные сведения. Рассматриваются только неориентированные графы $G = (V, E)$ без кратных ребер и петель с множеством вершин $V = VG$ и множеством ребер $E = EG$. Используется стандартная теоретико-графовая терминология (см., напр., [1]). Множество вершин графа G, смежных с вершиной $v \in V$, называется *окружением* вершины v и обозначается через $N(v)$. Пусть U – подмножество вершин графа G. Тогда множество всех вершин графа, смежных хотя бы с одной вершиной из U, называется *окружением* множества U и обозначается через $N(U)$. Подграф графа G, порожденный множеством вершин U, обозначается через $G[U]$. Пусть H – некоторый граф. Граф G называется *H-свободным*, если он не содержит порожденных подграфов, изоморфных графу H.

© Дугинов О. И., Кузнецова И. Г., 2015.

Граф $G = (V, E)$ называется *двудольным*, если его множество вершин может быть разбито на два подмножества $V = X \cup Y$ таким образом, что каждое ребро графа G соединяет вершины из разных подмножеств X, Y. Множества X, Y называют *долями* графа G; используют обозначение $G = (X \cup Y, E)$. Двудольный граф $G = (X \cup Y, E)$ называется *полным двудольным*, если каждая вершина из множества X соединена ребром с каждой вершиной из множества Y, т. е. $E = \{\{x, y\} : x \in X, y \in Y\}$.

Любой двудольный граф $G = (X \cup Y, E)$ может быть дополнен до полного двудольного графа путем добавления в него недостающих ребер, т. е. ребер из множества $\{\{x, y\} : x \in X, y \in Y\} \setminus E$. Число ребер, которое необходимо при этом добавить к графу G, будем называть *недостатком* графа G и обозначать как $c(G)$. Таким образом, $c(G) = |X| \cdot |Y| - |E|$.

Пусть $G = (X \cup Y, E)$ – двудольный граф с непустой долей X и p – натуральное число, не превосходящее $|X|$. Рассмотрим разбиение множества X

$$X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_p,$$

где $X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$, на p непустых множеств $X_1, X_2, \ldots, X_p$. *Стоимостью* разбиения будем называть сумму недостатков двудольных графов $G[X_i \cup N(X_i)]$, $i = \overline{1, p}$. Так как граф G двудольный с долями X, Y и семейство множеств $X_1, X_2, \ldots, X_p$ образует разбиение множества X, то

$$\sum_{i=1}^{p} c(G[X_i \cup N(X_i)]) = \sum_{i=1}^{p} |X_i| \cdot |N(X_i)| - |E|.$$

Величиной разбиения множества X на p непустых множеств $X_1, X_2, \ldots, X_p$ будем называть сумму $\sum_{i=1}^{p} |X_i| \cdot |N(X_i)|$. Таким образом, стоимость разбиения множества X на p множеств меньше величины этого разбиения ровно на число ребер в графе G. Минимальную стоимость (величину) разбиения множества X на p множеств будем обозначать через $\xi_p(G)$ (соответственно, $\zeta_p(G)$). Легко видеть, что

$$\xi_p(G) = \zeta_p(G) - |E|. \tag{1}$$

С параметром $\xi_p(G)$ связана задача, которая в виде задачи распознавания свойств формулируется следующим образом:

Пополнение до разбиения на биклики

Условие: Заданы двудольный граф $G = (X \cup Y, E)$, натуральные числа p, k.

Вопрос: Существует ли разбиение множества X на p непустых множеств, стоимость которого не превосходит k?

Отметим, что сформулированный выше вопрос равносилен следующему: верно ли, что $\xi_p(G) \leq k$? В оптимизационной версии этой задачи для заданных двудольного графа $G = (X \cup Y, E)$ и натурального числа p требуется найти разбиение наименьшей стоимости множества X на p непустых множеств. Задача *NP*-полна даже для фиксированного $p = 2$ [2]. Эта задача, по-видимому, впервые была сформулирована в диссертации Н. Форе [3] и широко изучается в ряде работ [2–6]. Отметим также, что взвешенная версия этой задачи изучается в [7].

Цель настоящей работы – изучение вычислительной сложности рассматриваемой задачи в подклассах двудольных графов. Мы покажем, что задача является *NP*-полной в классе P_4-свободных двудольных графов (здесь P_4 – простая цепь на четырех вершинах) и дадим алгоритм с трудоемкостью $O(p|X|^4|Y|)$, который находит разбиение наименьшей стоимости множества X на p непустых множеств для $2K_2$-свободного двудольного графа $G = (X \cup Y, E)$ (здесь граф $2K_2$ – граф с множеством вершин $\{a, b, c, d\}$ и множеством ребер $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$).

В виду тесной связи параметров $\xi_p(G)$, $\zeta_p(G)$ целесообразно рассмотреть задачу, связанную с параметром $\zeta_p(G)$, которая в виде задачи распознавания формулируется следующим образом:

Мин. сумма произведений мощностей множеств и их окружений

Условие: Заданы двудольный граф $G = (X \cup Y, E)$ и натуральные числа p, k.

Вопрос: Существует ли разбиение множества X на p непустых подмножеств, величина которого не превосходит k? Эквивалентно, верно ли, что $\zeta_p(G) \leq k$?

Нетрудно видеть, что эта задача принадлежит классу *NP*. Из равенства (1) следует, что задача «Мин. сумма произведений мощностей множеств и их окружений» и задача «Пополнение до разбиения на биклики» полиномиально изоморфны, что означает, по определению, существование такой биективной функции f, что f реализует полиномиальное сведение первой задачи ко второй, а обратная функция f^{-1} реализует полиномиальное сведение второй задачи к первой (см. [8, с. 200]).

NP-полнота задач, ограниченных классом P_4-свободных двудольных графов. В этом разделе покажем, что задача «Мин. сумма произведений мощностей множеств и их окружений» является NP-полной даже будучи ограниченной классом P_4-свободных двудольных графов.

Напомним, что P_4-свободные двудольные графы – двудольные графы, не содержащие порожденных подграфов, изоморфных простой цепи P_4. Известно, что структура P_4-свободных двудольных графов проста, а именно [9, следствие 2.2], двудольный граф является P_4-свободным тогда и только тогда, когда каждая его компонента связности изоморфна полному двудольному графу (возможно с пустой одной долей).

Т е о р е м а 1. *Задача «Мин. сумма произведений мощностей множеств и их окружений» в классе P_4-свободных двудольных графов является NP-полной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим задачу «Мин. сумма произведений мощностей множеств и их окружений» в случае, когда заданный двудольный граф $G = (X \cup Y, E)$ является P_4-свободным. Заметим, что если число p не меньше чем число компонент связности в графе G, то минимальная величина разбиения множества X на p непустых множеств равна $|E|$. Мы ограничимся только случаем, когда число p меньше чем число компонент связности графа G.

Нетрудно видеть, что задача «Мин. сумма произведений мощностей множеств и их окружений», ограниченная классом P_4-свободных двудольных графов, принадлежит классу NP. Построим полиномиальное сведение от специального NP-полного случая задачи

4-Разбиение

Условие: Заданы множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{4p}\}$, элементами которого являются натуральные числа, и натуральное число b, причем

$$\frac{b}{5} < a_i < \frac{b}{3}, \forall i \in \{1, 2, ..., 4p\}$$

и

$$\sum_{i=1}^{4p} a_i = pb. \tag{2}$$

Вопрос: Можно ли множество индексов $I = \{1, 2, \ldots, 4p\}$ разбить на p непустых множеств $I_1, I_2, \ldots, I_p$ так, что

$$\sum_{i \in I_j} a_i = b \tag{3}$$

для каждого $j \in \{1, 2, ..., p\}$?

Известно [8, с. 125], что эта задача NP-полна даже в случае, когда значения всех числовых параметров ограничены сверху числом $2^{16}|A|^4 = 2^{24}p^4$.

Построим полиномиальное сведение от задачи «4-разбиение» с ограниченными числовыми параметрами. По множеству A построим двудольный граф $G = (X \cup Y, E)$, который состоит из $4p$ компонент связности $G_1, G_2, \ldots, G_{4p}$, и при этом каждая компонента связности G_i изоморфна полному двудольному графу, обе доли которого содержат по a_i вершин. Положим $k = pb^2$. Отметим, что граф G является P_4-свободным двудольным графом и может быть построен за полиномиальное время в виду ограниченности элементов множества A.

Утверждается, что существует разбиение множества индексов $I = \{1, 2, \ldots, 4p\}$

$$I = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_p \tag{4}$$

такое, что для каждого множества I_j, $j \in \{1, 2, ..., p\}$, выполняется равенство (3) тогда и только тогда, когда $\zeta_p(G) \le k$.

Пусть существует такое разбиение (4). Рассмотрим разбиение доли X графа G на p непустых множеств $X_1, X_2, \ldots, X_p$, где

$$X_j = X \cap \left(\bigcup_{i \in I_j} VG_i \right)$$

для каждого $j \in \{1, 2, ..., p\}$. Таким образом, каждое множество X_j состоит из всех вершин доли X, принадлежащих компонентам связности $\{G_i : i \in I_j\}$. Так как каждая компонента связности G_i представляет собой полный двудольный граф, в обеих долях которого содержится по a_i вершин, то

$$|X_j| = |N(X_j)| = \sum_{i \in I_j} a_i = b$$

для каждого $j \in \{1, 2, ..., p\}$. Величина рассматриваемого разбиения множества X равна

$$\sum_{j=1}^{p} |X_j| \cdot |N(X_j)| = pb^2 = k.$$

Из существования разбиения X на p непустых множеств величины k немедленно следует неравенство $\zeta_p(G) \le k$.

Обратно, пусть для графа G выполняется $\zeta_p(G) \le k$. Это означает, что существует разбиение доли X графа G на p непустых множеств

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_p, \tag{5}$$

величина которого не больше чем k, т. е.

$$\sum_{j=1}^{p} |X_j| \cdot |N(X_j)| \le k. \tag{6}$$

Если среди компонент связности графа G есть хотя бы одна компонента G_t, $t \in \{1, 2, ..., 4p\}$, такая, что вершины из множества $VG_t \cap X$ содержатся в нескольких различных элементах разбиения (5), то преобразуем это разбиение так, что величина его не возрастет и все вершины из множества $VG_t \cap X$ будут принадлежать только одному элементу разбиения.

Пусть G_t – компонента связности графа G такая, что вершины из множества $VG_t \cap X$ содержатся в множествах $X_1, X_2, \ldots, X_q$, где $2 \le q \le p$, и не содержатся в множествах $X_{q+1}, X_{q+2}, \ldots, X_p$. Всюду далее предполагаем, что $t > p$ (если это не так, то всегда можно перенумеровать компоненты связности $G_1, G_2, \ldots, G_{4p}$ соответствующим образом). Пусть s – число множеств $X_1, X_2, \ldots, X_q$, содержащих только вершины из множества $VG_t \cap X$. Тогда возможны только следующие два случая.

С л у ч а й 1. Пусть $s = 0$. Среди множеств $X_1, \ldots, X_q$ найдем множество, скажем X_{q*}, окружение которого состоит из наименьшего числа вершин. Сейчас переместим из каждого множества X_i, $i \in \{1, 2, ..., q\} \setminus \{q^*\}$, все вершины, принадлежащие множеству $VG_t \cap X$, в множество X_{q*}. Нетрудно видеть, что в результате такого преобразования множества $X_1, \ldots, X_p$ по-прежнему будут образовывать разбиение множества X на p непустых множеств и $VG_t \cap X \subset X_{q*}$. Покажем, что такое преобразование не увеличит величину разбиения. Рассмотрим разбиение (5) до преобразования, произвольное множество X_i, где $i \in \{1, 2, ..., q\} \setminus \{q^*\}$, и любую вершину $v \in X_i \cap VG_t$. Пусть для определенности $I < q^*$. Величина исходного (до преобразования) разбиения равна

$$\left(|X_1| \cdot |N(X_1)| + \ldots + |X_i| \cdot |N(X_i)| + \ldots + |X_{q*}| \cdot |N(X_{q*})| + \ldots + |X_q| \cdot |N(X_q)| \right) + \sum_{\ell=q+1}^{p} |X_\ell| \cdot |N(X_\ell)|.$$

При перемещении вершины v из X_i в X_{q*} в этой сумме изменятся только два слагаемых, а именно слагаемое $|X_i| \cdot |N(X_i)|$ уменьшится и станет таким $(|X_i| - 1) \cdot |N(X_i)|$ или таким $(|X_i| - 1) \cdot \left(|N(X_i)| - a_t \right)$ (в случае когда вершина v является единственной вершиной из множества $VG_t \cap X$, принадлежащей множеству X_i), а слагаемое $|X_{q*}| \cdot |N(X_{q*})|$ увеличится и станет таким $(|X_{q*}| + 1) \cdot |N(X_{q*})|$. Так как $|N(X_{q*})| \le |N(X_i)|$, то при перемещении вершины v из X_i в X_{q*} сумма не увеличится, а значит и величина разбиения не увеличится. Так как величина

разбиения не увеличивается при перемещении одной (любой) вершины $v \in X_i \cap VG_t$, где $i \in \{1, 2, ..., q\} \setminus \{q^*\}$, то величина разбиения не увеличится и при перемещении всех таких вершин (поочередно друг за другом).

С л у ч а й 2. Пусть $s > 0$. Для определенности будем предполагать, что $X_i \subset VG_t \cap X$ для каждого $i \in \{1, 2, ..., s\}$ и $X_i \setminus (VG_t \cap X) \neq \varnothing$ для каждого $i \in \{s+1, s+2, ..., q\}$. Рассмотрим подмножества $X'_1, X'_2, ..., X'_p$ множества X, где

$$X'_i = \begin{cases} VG_t \cap X, \text{ если } i = 1, \\ X_i \setminus \left(VG_t \cap X\right), \text{ если } i \in \{2, 3, ..., q\}, \\ X_i, \text{ если } i \in \{q+1, q+2, ..., p\}. \end{cases}$$

При этом возможно, что некоторые из множеств $X'_2, X'_3, ..., X'_q$ являются пустыми.

П о д с л у ч а й 2.1. Если $s = 1$, то множества $X'_1, X'_2, ..., X'_p$ непусты и образуют разбиение множества X на p непустых множеств и $VG_t \cap X = X'_1$. Покажем, что величина нового разбиения $X = X'_1 \cup X'_2 \cup ... \cup X'_p$ меньше чем величина исходного разбиения $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_p$. Мощности множеств и их окружений исходного разбиения и нового разбиения связаны следующими соотношениями:

$$|X'_1| = |X_1| + \sum_{i=2}^{q} (|X_i| - |X'_i|), \tag{7}$$

$$|X'_i| < |X_i|, \ \forall i \in \{2, 3, ..., q\}, \tag{8}$$

$$\left|N(X_i)\right| = \begin{cases} \left|N(X'_i)\right|, \text{ если } i = 1, \\ \left|N(X'_i)\right| + \left|N(X'_1)\right|, \text{ если } i \in \{2, 3, ..., q\}, \\ \left|N(X'_i)\right|, \text{ если } i \in \{q+1, q+2, ..., p\}. \end{cases} \tag{9}$$

Из (7)–(9) следует, что величина разбиения $X = X'_1 \cup X'_2 \cup ... \cup X'_p$ равна

$$\sum_{i=1}^{q} \left|X'_i\right| \cdot \left|N(X'_i)\right| + \sum_{i=q+1}^{p} |X_i| \cdot |N(X_i)| = \left(|X_1| + \sum_{i=2}^{q} (|X_i| - |X'_i|) \right) \cdot |N(X'_1)| + \sum_{i=2}^{q} |X'_i| \cdot |N(X'_i)| +$$

$$\sum_{i=q+1}^{p} |X_i| \cdot |N(X_i)| < \left(|X_1| + \sum_{i=2}^{q} (|X_i| - |X'_i|) \right) \cdot |N(X'_1)| + \sum_{i=2}^{q} |X_i| \cdot |N(X'_i)| + \sum_{i=q+1}^{p} |X_i| \cdot |N(X_i)| =$$

$$\sum_{i=1}^{q} |X_i| \cdot |N(X_i)| - \sum_{i=2}^{q} |X'_i| \cdot |N(X'_1)| + \sum_{i=q+1}^{p} |X_i| \cdot |N(X_i)| \leq \sum_{i=1}^{p} |X_i| \cdot |N(X_i)|.$$

Тем самым установлено, что величина нового разбиения меньше чем величина исходного разбиения.

П о д с л у ч а й 2.2. Пусть $s \geq 2$. Тогда среди множеств $X'_1, X'_2, ..., X'_q$ ровно (s – 1) пусты. Пустыми множествами являются множества $X'_2, X'_3, ..., X'_s$. Так как граф G состоит из $4p$ компонент связности, то обязательно найдутся p компонент связности графа G, среди которых нет компоненты G_t, такие, что в любом множестве X'_i, $i \in \{s+1, s+2, ..., p\}$, найдется хотя бы одна вершина, которая не содержится ни в одной из этих p компонент. Пусть для определенности эти p компонент связности графа G – это компоненты G_1, G_2, …, G_p (среди этих компонент связности нет компоненты связности G_t, поскольку $t > p$). Таким образом, $X'_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{p} VG_j \cap X\right) \neq \varnothing$ для любого $i \in \{s+1, s+2, ..., p\}$. Рассмотрим подмножества $X''_1, X''_2, ..., X''_p$ множества X, где

$$X''_i = \begin{cases} X'_1, \text{ если } i = 1, \\ VG_{i-1} \cap X, \text{ если } i \in \{2, 3, ..., s\}, \\ X'_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{s-1} VG_j \cap X\right), \text{ если } i \in \{s+1, s+2, ..., p\}. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что множества $X''_1, X''_2, ..., X''_p$ образуют разбиение множества X на p непустых множеств и $VG_t \cap X = X''_1$. Покажем, что величина разбиения $X = X''_1 \cup X''_2 \cup ... \cup X''_p$ не больше чем величина разбиения $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_p$. Тот факт, что величина разбиения $X = X'_1 \cup X'_2 \cup ... \cup X'_p$ не больше чем величина разбиения $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_p$ доказан в подслучае 2.1. Величина разбиения $X = X''_1 \cup X''_2 \cup ... \cup X''_p$ не больше чем величина разбиения $X = X'_1 \cup X'_2 \cup ... \cup X'_p$, так как стоимость разбиения $X = X''_1 \cup X''_2 \cup ... \cup X''_p$ не больше чем стоимость разбиения $X = X'_1 \cup X'_2 \cup ... \cup X'_p$.

Итеративно применяя последовательно друг за другом описанное преобразование разбиения $X_1, X_2, \ldots, X_p$ множества X для каждой компоненты связности G_t графа G такой, что вершины $VG_t \cap X$ содержатся в нескольких различных множествах $X_1, X_2, \ldots, X_p$, получим разбиение $X'_1, X'_2, ..., X'_p$ множества X на p непустых множеств, величина которого не больше величины исходного разбиения $X_1, \ldots, X_p$, и все вершины каждой компоненты связности графа G, принадлежащие множеству X, содержатся ровно в одном из множеств $X'_1, X'_2, ..., X'_p$, т. е. для любого $t \in \{1, 2, ..., 4p\}$ существует $i \in \{1, 2, ..., p\}$ такое, что $VG_t \cap X \subseteq X'_i$.

Рассмотрим подмножества $I_1, I_2, \ldots, I_p$ множества $I = \{1, 2, \ldots, 4p\}$, где

$$I_j = \{i \in \{1, 2, ..., 4p\} : VG_i \cap X \subseteq X'_j\}$$

для каждого $j \in \{1, 2, ..., p\}$. Из того, что $X'_1, X'_2, ..., X'_p$ – непустые множества и при этом *все* вершины любой компоненты связности графа G, принадлежащие множеству X, содержатся ровно в одном из этих множеств следует, что множества $I_1, I_2, \ldots, I_p$ непустые и образуют разбиение множества I. Покажем, что для каждого множества I_j, $j \in \{1, 2, ..., p\}$, выполняется равенство (3). Для этого сделаем ряд наблюдений. Заметим, что для каждого $j \in \{1, 2, ..., p\}$

$$|X'_j| = |N(X'_j)| = \sum_{i \in I_j} a_i. \tag{10}$$

Это следует из свойств множеств $X'_1, X'_2, ..., X'_p$. Учитывая равенство (10), неравенство (6) и тот факт, что величина разбиения $X = X'_1 \cup X'_2 \cup ... \cup X'_p$ не больше чем величина разбиения $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_p$, получаем

$$\sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i \in I_j} a_i \right)^2 = \sum_{j=1}^{p} |X'_j| \cdot |N(X'_j)| \le \sum_{j=1}^{p} |X_j| \cdot |N(X_j)| \le k = pb^2. \tag{11}$$

Пусть теперь

$$\sum_{i \in I_j} a_i = b + \varepsilon_j, \ \ \forall j \in \{1, 2, ..., p\},$$

где ε_j – это целое число, которое показывает то насколько сумма $\sum_{i \in I_j} a_i$ отличается от числа b. Учитывая (2), получаем

$$pb = \sum_{i=1}^{4p} a_i = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i \in I_j} a_i \right) = \sum_{j=1}^{p} (b + \varepsilon_j) = pb + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j.$$

Следовательно, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_p = 0$. Учитывая (11), получаем

$$pb^2 \ge \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i \in I_j} a_i \right)^2 = \sum_{j=1}^{p} (b + \varepsilon_j)^2 = pb^2 + \underbrace{2b \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j}_{0} + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j^2.$$

Откуда немедленно следует, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = ... = \varepsilon_p = 0$. Тем самым показано, что для каждого множества I_j, $j = \overline{1, p}$, выполняется равенство (3). Теорема доказана.

Учитывая равенство (1), получаем

С л е д с т в и е. *Задача «Пополнение до разбиения на биклики» в классе P_4-свободных двудольных графов является NP-полной.*

Задача в классе $2K_2$-свободных двудольных графов. Напомним, что граф $2K_2$ представляет собой дизъюнктное объединение двух графов изоморфных K_2, где K_2 – полный граф на двух вершинах. Класс $2K_2$-свободных двудольных графов является пересечением двудольных графов и графов, которые не содержат порожденных подграфов, изоморфных графу $2K_2$. Известно (см., напр., [10; 11]), что $2K_2$-свободные двудольные графы – это в точности двудольные графы, вершины любой доли которых могут быть упорядочены таким образом, что окружение каждой вершины v упорядоченной доли содержится в окружении вершины, которая предшествует вершине v, если такая имеется. Точнее, двудольный граф $G=(X\cup Y,E)$ не содержит порожденных подграфов, изоморфных графу $2K_2$, тогда и только тогда, когда существует биективная функция $\pi:\{1,2,...,|X|\}\to X$ такая, что

$$N(\pi(1))\supseteq N(\pi(2))\supseteq ...\supseteq N(\pi(|X|)). \tag{12}$$

Здесь функция π реализует упорядочение вершин доли X с указанным выше свойством. Отметим, что существование такой функции π влечет наличие биективной функции, которая реализует упорядочение вершин доли Y с тем же свойством. Существует линейный алгоритм распознавания $2K_2$-свободных двудольных графов [11]. Более того, этот алгоритм в случае, если заданный граф не содержит порожденных подграфов, изоморфных графу $2K_2$, дополнительно возвращает упорядочение π вершин доли X, которое удовлетворяет условию (12).

Л е м м а. *Пусть $G=(X\cup Y,E)$ – непустой двудольный граф, для которого существует биективная функция $\pi:\{1,2,...,|X|\}\to X$ такая, что выполняется (12). Тогда существует наименьшее разбиение (разбиение с наименьшей стоимостью) множества X на p непустых множеств такое, что $X_i=\{\pi(1),\pi(2),...,\pi(s)\}$ для некоторых $i\in\{1,2,...,p\}$ и натурального числа s, удовлетворяющего неравенству $1\le s\le|X|-p+1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если в двудольном графе G есть изолированные вершины, принадлежащие доле Y, удалим их. Очевидно, это никак не повлияет на стоимость любого разбиения множества X на p непустых множеств. Отсутствие изолированных вершин в доле Y гарантирует, что $N(\pi(1))=Y$.

Рассмотрим наименьшее разбиение множества X на p непустых множеств X_1, X_2, …, X_p. Не теряя общности, допустим, что $\pi(1)\in X_1$. Если $X_1=\{\pi(1),\pi(2),...,\pi(|X_1|)\}$, то лемма доказана. В противном случае существуют два натуральных числа a, b такие, что $1<a<b\le|X|$ и $\pi(a)\notin X_1$, $\pi(b)\in X_1$. Пусть $\pi(a)\in X_j$, $j\ne 1$. Преобразуем рассматриваемое разбиение, поменяв местами вершины $\pi(a)$ и $\pi(b)$. В результате получим разбиение множества X на p непустых множеств $X'_1,X'_2,...,X'_p$, где

$$X'_i:=\begin{cases}\left(X_i\setminus\{\pi(b)\}\right)\cup\{\pi(a)\}, \text{ если } i=1,\\ \left(X_i\setminus\{\pi(a)\}\right)\cup\{\pi(b)\}, \text{ если } i=j,\\ X_i, \text{ если } i\ne 1, i\ne j.\end{cases}$$

Утверждается, что стоимость получившегося разбиения не больше чем стоимость разбиения $X=X_1\cup X_2\cup...\cup X_p$. Для того чтобы это доказать, достаточно показать, что

$$c(G[X'_1\cup N(X'_1)])+c(G[X'_j\cup N(X'_j)])\le c(G[X_1\cup N(X_1)])+c(G[X_j\cup N(X_j)]). \tag{13}$$

Так как $\pi(1)\in X_1$ и $\pi(1)\in X'_1$, то $N(X_1)=N(X'_1)=Y$. Учитывая это и тот факт, что $N(\pi(b))\subseteq N(\pi(a))$, имеем

$$c(G[X'_1\cup N(X'_1)])=c(G[X_1\cup N(X_1)])-\left|N(\pi(a))\setminus N(\pi(b))\right|. \tag{14}$$

Так как $N(\pi(b))\subseteq N(\pi(a))$, то $N(X'_j)\subseteq N(X_j)$ и

$$c(G[X'_j\cup N(X'_j)])\le c(G[X_j\cup N(X_j)])+\left|N(\pi(a))\setminus N(\pi(b))\right|. \tag{15}$$

Из соотношений (14) и (15) немедленно следует неравенство (13).

Осуществив преобразования разбиения X_1, X_2, …, X_p множества X такого типа последовательно друг за другом для каждой пары натуральных чисел a, b таких, что $1 < a < b \le |X|$ и $\pi(a) \notin X_1$, $\pi(b) \in X_1$, получим разбиение наименьшей стоимости множества X на p непустых множеств, из которых одно состоит из вершин $\pi(1), \pi(2), ..., \pi(s)$ для некоторого натурального числа s такого, что $1 \le s \le |X| - p + 1$. Лемма доказана.

Используя математическую индукцию по числу множеств, на которые разбивается множество X, можно показать, что для любого $2K_2$-свободного двудольного графа $G = (X \cup Y, E)$ существует наименьшее разбиение множества X на p непустых множеств X_1, X_2, …, X_p следующего вида

$$\begin{aligned} &X_1 = \{\pi(1), \pi(2), ..., \pi(s_1)\}, \\ &X_2 = \{\pi(s_1+1), \pi(s_1+2), \ldots, \pi(s_2)\}, \\ &\ldots \\ &X_p = \{\pi(s_{p-1}+1), \pi(s_{p-1}+2), \ldots, \pi(|X|)\}, \end{aligned} \tag{16}$$

где $1 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_{p-1} < |X|$. Следовательно, для того чтобы найти разбиение наименьшей стоимости множества X на p непустых множеств достаточно осуществить перебор (p – 1)-элементных последовательностей из множества

$$\{(s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}) : 1 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_{p-1} < |X|\}.$$

Существует алгоритм, который находит наименьшее разбиение доли X на p непустых множеств вида (16) за время $O(p|X|^4|Y|)$. Для любой четверки натуральных чисел (i, j, ℓ, q) такой, что $1 \le i \le \ell \le j \le |X|$, $1 \le q \le p$, $j - i + 1 \ge q$, $j - \ell \ge q - 1$, через $f(i, j, \ell, q)$ обозначим наименьшую стоимость разбиения множества вершин $\{\pi(i), \pi(i+1), \ldots, \pi(j)\}$ на q непустых множеств, среди которых, при условии что $q \ge 2$, обязательно имеется множество, состоящее только из вершин $\pi(i), \pi(i+1), ..., \pi(\ell)$.

Алгоритм последовательно вычисляет значения всех величин $f(i, j, \ell, q)$ в порядке роста значений q, используя следующее рекуррентное соотношение: если $q = 1$, то для любого ℓ значение $f(i, j, \ell, q)$ равно недостатку подграфа графа G, который порожден множеством вершин $\{\pi(i), \pi(i+1), \ldots, \pi(j)\} \cup N(\{\pi(i), \pi(i+1), \ldots, \pi(j)\})$, причем этот недостаток может быть найден за время $O(|X||Y|)$; если $q \ge 2$, то

$$f(i, j, \ell, q) = \sum_{t=i}^{\ell} \left(|N(\pi(i))| - |N(\pi(t))| \right) + \min_{\ell'} f(\ell+1, j, \ell', q-1),$$

где минимум берется по всем натуральным числам ℓ' таким, что $\ell + 1 \le \ell' \le j - (q-2)$. В этой формуле первое слагаемое – недостаток подграфа графа G, который порожден множеством вершин $\{\pi(i), \pi(i+1), ..., \pi(\ell)\} \cup N(\{\pi(i), \pi(i+1), ..., \pi(\ell)\})$, второе слагаемое – наименьшая стоимость разбиения множества вершин $\{\pi(\ell+1), \pi(\ell+2), ..., \pi(j)\}$ на $q - 1$ непустых множеств, среди которых, при условии $q \ge 3$, существует множество, состоящее из вершин $\pi(\ell+1), \pi(\ell+2), ..., \pi(\ell')$ по всем ℓ' таким, что $\ell + 1 \le \ell' \le j - (q-2)$. Наименьшая стоимость разбиения X на p непустых множеств может быть найдена так:

$$\xi_p(G) = \min_{\ell} f(1, |X|, \ell, p),$$

где минимум берется по всем натуральным числам ℓ, не превосходящим $|X| - p + 1$. Оценим трудоемкость этого алгоритма в предположении, что граф представлен в виде списков смежности. В ходе работы алгоритма значения $f(i, j, \ell, q)$ вычисляются для четверок (i, j, ℓ, q), которых не более чем $p|X|^3$. Вычисление значения $f(i, j, \ell, q)$ для одной четверки (i, j, ℓ, q) потребует $O(|X||Y|)$ времени. Следовательно, трудоемкость алгоритма составляет $O(p|X|^4|Y|)$.

Заключение. В работе показано, что задача «Пополнение до разбиения на биклики» является *NP*-полной в классе P_4-свободных двудольных графов. Тем самым установлено, что эта задача *NP*-полна в таких широко изучаемых надклассах P_4-свободных двудольных графов, как двудольные перестановочные графы, двудольные хордальные графы, двудольные дистанционно-наследственные графы, P_5-свободные двудольные графы, $S_{1,2,3}$-свободные двудольные графы. Также предлагается алгоритм для решения этой задачи в классе $2K_2$-свободных двудольных графов.

Авторы благодарят В. В. Лепина за обращение их внимания на рассматриваемую в работе задачу и за полезные замечания, которые способствовали значительному улучшению работы. Первый автор был поддержан Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (проект № Ф14РА-004).

Список использованной литературы

1. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев [и др.]. – М.: Наука, 1990.

2. Biclique completion problems for multicast network design / N. Faure [et al.] // Discrete Optimization. – 2007. – Vol. 4. – P. 360–377.

3. *Faure, N.* Contribution á la resolution de problèmes de regroupement de sessions multicasts: PhD thesis / N. Faure. – Universitè Paris VI, 2006 (in French).

4. *Gualandi, S.* Proceedings of the 6th International Conference on Integration of AI and OR Techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimization Problems / S. Gualandi. – Pittsburgh, USA: Springer Berlin Heidelberg, 2009. – P. 87–101.

5. *Gualandi, S.* A branch-and-price approach to k-clustering minimum biclique completion problem / S. Gualandi, F. Maffioli, C. Magni // International transactions in operational research. – 2013. – Vol. 20. – P. 101–117.

6. *Magni, C.* Biclique completion problem: models and algorithms: MSc thesis / C. Magni. – Politecnico di Milano, 2009.

7. *Gualandi, S.* Weighted Biclique Completion via CP-SDP Randomized Rounding / S. Gualandi, F. Malucelli // Proceedings of the European Workshop on Mixed Integer Nonlinear Programming. – Marseille, France, 2010. P. 223–230.

8. *Гэри, М.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. – М.: Мир, 1982.

9. *Babel, L.* Recognizing the P4-structure of bipartite graphs / L. Babel, A. Brandstädt, V. B. Le // Discrete Applied Mathematics. – 1999. – Vol. 93. – P. 157–168.

10. *Feder, T.* Approximating the minimum chain completion problem / T. Feder, H. Mannila, E. Terzi // Information Processing Letters. – 2009. – Vol. 109. – P. 980–985.

11. *Heggernes, P.* Linear-time certifying recognition algorithms and forbidden induced subgraphs / P. Heggernes, D. Kratsch // Nordic J. of Computing. – 2007. – Vol. 14. – P. 87–108.

Поступило в редакцию 08.07.2015

Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **ноябрь–декабрь** **Том 59 № 6**

УДК 517.955

Академик В. И. КОРЗЮК, М. Т. ДЖЕНАЛИЕВ, И. С. КОЗЛОВСКАЯ

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЛАБО НАГРУЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
korzyuk@bsu.by; Kozlovskaja@bsu.by; muvasharhan@gmail.com

В сообщении рассмотрены три смешанные задачи в цилиндрической области для линейного гиперболического уравнения второго порядка, оператор которого слабо нагружен оператором такого же вида. Оператор, который нагружает исходный, имеет достаточно малые коэффициенты. Это требование выражается через оценки характеристического полинома. Изучение задач сводится к операторным уравнениям, которые рассмотрены в подходящих функциональных пространствах. Методами функционального анализа доказываются существование и единственность сильных решений.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, метод энергетических неравенств, операторы осреднения с переменным шагом, нагруженный оператор.

V. I. KORZYUK, M. T. DZHENALIEV, I. S. KOZLOVSKAYA

BOUNDARY PROBLEMS FOR A WEAKLY LOADED OPERATOR OF THE SECOND-ORDER HYPERBOLIC EQUATION IN THE CYLINDRICAL AREA

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
korzyuk@bsu.by; Kozlovskaja@bsu.by; muvasharhan@gmail.com

This article considers three mixed problems in the cylindrical area for the second-order linear hyperbolic equation with an operator which is weakly loaded with an operator of the same type. Coefficients of the loading operator are small enough. This demand is expressed through the estimates of the characteristic polynomial. The research of problems reduces to solving operator equations in suitable functional spaces. Existence and uniqueness of strong solutions were proved with the use of functional analysis methods.

Keywords: differential equations, energy inequality method, mollifiers with variable step, loaded operator.

Введение. Изучение граничных задач для нагруженных уравнений связано с многочисленными приложениями. Такого рода задачи являются объектом исследования во многих работах [1–9].

Следует отметить, что в упомянутых работах, в основном, рассмотрены граничные задачи для нагруженного уравнения теплопроводности. В данной работе предложена попытка сделать это для уравнения гиперболического типа с использованием метода энергетических неравенств и операторов осреднения с переменным шагом [10; 11]. В [10] под названием обобщенно-классического решения смешанных задач для гиперболических уравнений (параграф 3.6) рассмотрены граничные задачи в цилиндрической области с условиями Дирихле, Неймана (с производной по конормали) и условиями через производные по касательным направлениям. В данной работе изучаются эти задачи для аналогичного уравнения со слабо нагруженным оператором.

Под названием «слабо нагруженный оператор» имеется в виду оператор, коэффициенты которого достаточно малы по сравнению с коэффициентами основного оператора уравнения. Это будет выражаться в процессе вывода энергетического неравенства и доказательства существования решений рассматриваемых задач.

© Корзюк В. И., Дженалиев М. Т., Козловская И. С., 2015.

1. Постановка задачи. Относительно функции $u:\mathbb{R}^{n+1}\supset Q\ni \mathbf{x}\to u(\mathbf{x})\in\mathbb{R}$ в цилиндрической области $Q=(0,T)\times\Omega$ независимых переменных $\mathbf{x}=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ рассмотрим нагруженное линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$Lu(\mathbf{x})=\frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_0^2}-A^{(0)}u(\mathbf{x})-B^{(0)}u(t,\mathbf{x}')+A^{(1)}u(\mathbf{x})+B^{(1)}u(t,\mathbf{x}')=f(\mathbf{x}). \tag{1}$$

Здесь $\mathbb{R}^{n+1}-(n+1)$-мерное евклидово пространство, $A^{(0)}u(\mathbf{x})=\sum\limits_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{(ij)}(\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right)$,

$A^{(1)}u(\mathbf{x})=\sum\limits_{i=0}^{n}a^{(i)}(\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}+\tilde{a}(\mathbf{x})u(\mathbf{x}), B^{(0)}u=\sum\limits_{i,j=1}^{n}b^{(ij)}(t,\mathbf{x}')\frac{\partial^2 u(t,\mathbf{x}')}{\partial x_i\partial x_j}$, $B^{(1)}u(t,\mathbf{x}')=\sum\limits_{i=0}^{n}b^{(i)}(t,\mathbf{x}')\frac{\partial u(t,\mathbf{x}')}{\partial x_i}+$ $b^{(0)}(t,\mathbf{x}')u(t,\mathbf{x}')$, Ω – ограниченная область $\mathbb{R}^n$ переменных $\mathbf{x}'\in\mathbb{R}^n$ с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$.

Предположим, что (1) является гиперболическим относительно направления $\boldsymbol{\eta}=(1,0,0,\ldots,0)$. Для этого потребуем выполнения условия положительности квадратичной формы, составленной из коэффициентов $a^{(ij)}$ оператора $A^{(0)}$, т. е.

$$\sum_{i,j=1}^{n}a^{(ij)}(\mathbf{x})\xi_i\xi_j\ge\alpha^{(0)}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2=\alpha^{(0)}|\boldsymbol{\xi}|^2$$

для любого вектора $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ и некоторого положительного числа $\alpha^{(0)}$ равномерно относительно $\mathbf{x}\in\overline{\Omega}$, $\overline{\Omega}$ – замыкание области Ω.

Коэффициенты оператора $A^{(0)}$ удовлетворяют относительно индексов условию симметрии $a^{(ij)}=a^{(ji)}$ для любых $i,\ j=\overline{1,n}$. Кроме того, $a^{(ij)}\in C^2(\overline{Q})$, а $a^{(k)},\tilde{a}\in C^1(\overline{Q}),\ k=\overline{0,n}$, где $C(\overline{Q})$ – множество непрерывных функций, а $C^s(\overline{Q})$ $(s=1,2)$ – множество непрерывно дифференцируемых функций до порядка s включительно, заданных на замыкании $\overline{Q}$ области Q.

Отсюда из условия $a^{(ij)}\in C(\overline{Q})$ следует неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n}(a^{(ij)}(\mathbf{x}))\xi_i\xi_j\le\alpha^{(1)}|\boldsymbol{\xi}|^2$$

для любого $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ и любой точки $x\in\overline{Q}$, где $\alpha^{(1)}$ – некоторое положительное число. Очевидно, имеется соотношение $\alpha^{(0)}\le\alpha^{(1)}$ между константами $\alpha^{(j)}$, $j=0,1$. Для коэффициентов оператора $A^{(1)}$ из того, что $a^{(k)},\ \tilde{a}\in C^1(\overline{Q}),\ k=\overline{0,n}$, справедливы оценки

$$\sum_{k=0}^{n}a^{(k)}\xi_k\le\alpha^{(2)}|\boldsymbol{\xi}|^2,\ |\tilde{a}(\mathbf{x})|\le\alpha^{(3)}$$

для всех $x\in\overline{Q}$, где $\alpha^{(j)}$, $j=2,3,$ – некоторые положительные константы.

Аналогичные условия имеют место относительно коэффициентов операторов $B^{(0)}$ и $B^{(1)}$. Выполняются условия симметрии $b^{(ij)}=b^{(ji)}$, $(i,j=\overline{1,n})$, $b^{(ij)}\in C^2(\overline{\Omega})$, $b^{(i)}\in C^1(\Omega)$, $(i=\overline{0,n})$ и неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n}b^{(ij)}(t,\mathbf{x}')\xi_i\xi_j\le\beta^{(0)}|\boldsymbol{\xi}|^2=\beta^{(0)}\sum_{i,j=1}^{n}\xi_{ij}^2, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\xi}=(\xi_{11},\ldots,\xi_{ij},\ldots,\xi_{nn})$, $\beta^{(0)}$ – положительная постоянная.

Справедлива аналогичная оценка и для оператора $B^{(1)}$, а именно:

$$(B^{(1)}u(t,\mathbf{x}'))^2\le\beta^{(1)}\left[\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2(t,\mathbf{x}')+u(t,\mathbf{x}')\right] \tag{3}$$

для некоторого положительного числа $\beta^{(1)}$ и любых функций $u\in C^1(\overline{Q})$.

К уравнению (1) присоединяются условия Коши

$$l_0u=u(0,\mathbf{x}')=\varphi(\mathbf{x}'),\ l_1u=\frac{\partial u(0,\mathbf{x}')}{\partial x_0}=\psi(\mathbf{x}') \tag{4}$$

и одно из граничных условий

$$u\big|_{\Gamma} = 0, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbb{N}}\right|_{\Gamma} = 0, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \tau^{(1)}}\right|_{\Gamma} = \ldots = \left.\frac{\partial u}{\partial \tau^{(n)}}\right|_{\Gamma} = 0, \ \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\mathbf{x})\nu_i\nu_j \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} u ds \le 0, \tag{7}$$

где $\Gamma = (0, T) \times \partial\Omega$,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{N}}\right|_{\Gamma} = \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i \Bigg|_{\Gamma},$$

$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ – единичный вектор внешней относительно Q нормали, $\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(n)}$ – n линейно независимых касательных векторов, заданных почти всюду в точках гиперповерхности Г.

Таким образом, имеем следующие граничные (смешанные) задачи для нагруженного гиперболического уравнения (1):

первую смешанную задачу **МР1** с граничными условиями Дирихле на боковой поверхности Г (1), (4), (5);

вторую смешанную задачу **МР2** – (1), (4), (6);

третью смешанную задачу **МР3** – (1), (4), (7).

Отметим, что могут рассматриваться смешанные задачи со смешанными на Г граничными условиями вида (5)–(7). В этом случае Г состоит из конечного числа частей и на каждой из этих частей задается какое-нибудь из условий (5)–(7).

2. Функциональные пространства и формулировка задач в операторном виде.

Задачи **МР1**–**МР3** отличаются друг от друга граничными условиями (5)–(7). С учетом этих условий введем подмножества множества $C^2(\bar{Q})$.

Обозначим через $C^2(\bar{Q}; (s))$, $s = 5, 6, 7,$ подмножество функций из $C^2(\bar{Q})$, которые удовлетворяют условиям (s).

Для функций $w : \mathbb{R}^n \supset \Omega \ni \mathbf{x}' \to w(\mathbf{x}') \in \mathbb{R}$, заданных на $\Omega^{(0)} = \{\mathbf{x} \in \bar{Q} \big| x_0 = 0\}$, рассмотрим сужения условий (5)–(7), а именно

$$w\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \mathbf{N}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \ \left.\frac{\partial w}{\partial \mathbf{N}}\right|_{\partial\Omega} = \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(0, \mathbf{x}')\nu_i \frac{\partial w}{\partial x_j}, \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \tilde{\tau}^{(1)}}\right|_{\partial\Omega} = \ldots = \left.\frac{\partial u}{\partial \tilde{\tau}^{(n-1)}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \ \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}(0, \mathbf{x}')\nu_i\nu_j \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} w ds \le 0, \tag{10}$$

где $\tilde{\tau}^{(1)}, \ldots, \tilde{\tau}^{(n-1)}$ – линейно независимые касательные к гиперповерхности $\partial\Omega$ единичные векторы; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ – единичный вектор внешней относительно области Ω нормали в точках $\mathbf{x}'$ гиперповерхности $\partial\Omega$.

Обозначим через $C^2(\Omega; (s))$, $s = 8, 9, 10,$ подмножество функций из множества $C^2(\bar{\Omega})$, которые удовлетворяют условиям (s).

Обозначим через $H^2(\Omega)$ пространство Соболева квадратично суммируемых по Лебегу вместе с квадратично суммируемыми обобщенными производными до второго порядка включительно функций, заданных в области Ω. Пусть $H^2(\Omega, (s))$ $(s = 8, 9, 10)$ подпространства пространства $H^2(\Omega)$, элементы которого удовлетворяют граничным условиям (s), $s \in \{8, 9, 10\}$.

У с л о в и е. *Граница $\partial\Omega$ является кусочно-гладкой и такой, что пространства $H^2(\Omega, (s))$ $(s = 8, 9, 10)$ можно получить путем замыкания соответствующих множеств $C^2(\bar{\Omega}; (3, s))$ по норме пространства $H^2(\Omega)$.*

Пусть $H^1(\Omega, (s))$ $(s = 8, 9, 10)$ замыкания соответствующих множеств $C^2(\bar{\Omega}; (s))$ по норме пространства $H^1(\Omega)$.

Для функций $u \in C^2(\bar{Q})$ рассмотрим норму, которая задается выражением

$$\|u\|_B = \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\right\|_{L_2(Q)} + \sup_{0\le x_0\le T}\left(\|u\|_{H^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_i}\right\|_{L_2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_0}\right\|_{L_2(\Omega)}\right)(x_0). \tag{11}$$

Введем банаховы пространства $B^{(s)}(Q)$, $s=\overline{1,3}$, путем замыкания множеств $C^2(\bar{Q};(s+4))$ по норме, определяемой выражением (11).

Обозначим через $\mathfrak{A}^1(Q)$ гильбертово пространство квадратично суммируемых по Лебегу функций u, для которых существуют обобщенные производные $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(Q)$, $i=\overline{1,n}$. Скалярное произведение и норма определяются выражениями

$$(u,v)_{\mathfrak{A}^1(Q)} = (u,v)_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{L_2(Q)}, \ \|u\|_{\mathfrak{A}^1(Q)} = (u,u)^{1/2}_{\mathfrak{A}^1(Q)}, \ u,v \in \mathfrak{A}^1(Q). \tag{12}$$

Пусть $\overset{\circ}{\mathfrak{A}}{}^1(Q)$ – подпространство пространства $\mathfrak{A}^1(Q)$, полученное замыканием множества $C^2(\bar{Q};(5))$ по норме (12).

Введем операторы $\mathbf{L}^s$, $s=\overline{1,3}$, которые определяются следующим образом:

$$\mathbf{L}^s : B^{(s)}(Q) \ni u \to \mathbf{L}^{(s)}u = \{\mathcal{L}u, l_0 u, l_1 u\} \in \mathbf{H}^s = \overset{\circ}{\mathfrak{A}}{}^1(Q) \times H^2(\Omega;(k)) \times H^1(\Omega;(k)), k = 8, 9, 10.$$

Теперь каждую задачу **MPs**, $s=\overline{1,3}$, можно рассматривать как операторное уравнение

$$\mathbf{L}^{(s)}u = \mathbf{F}^{(s)}, \ s=\overline{1,3}, \tag{13}$$

с областью определения $\mathcal{D}(\mathbf{L}^{(s)}) = \{C^2(\bar{Q};(s+4)) \big| \mathcal{L}u\big|_\Gamma = 0\}$, где $\mathbf{F}^{(s)} = \{f(x), \varphi(\mathbf{x}'), \psi(\mathbf{x}')\} \in \mathbf{H}^{(s)}$.

3. Энергетические неравенства. Докажем энергетические неравенства для операторов $\mathbf{L}^s$, $s=\overline{1,3}$, уравнений (13) для функций из $\mathcal{D}(\mathbf{L}^{(s)})$. На основании этих неравенств вводится расширение операторов $\mathbf{L}^s$, до замкнутых $\overline{\mathbf{L}^{(s)}}$, путем замыкания, а затем доказываются теоремы существования и единственности сильных решений.

Т е о р е м а 1. *Пусть выполняется условие и ограничения гладкости в п. 1 на коэффициенты уравнения (1). Тогда при достаточно малых* $\beta^{(0)}$ *и* $\beta^{(1)}$ *справедливы энергетические неравенства*

$$\|u\|_B \le c\left\|\mathbf{L}^{(s)}u\right\|_{\mathbf{H}^{(s)}} \tag{14}$$

для любой функции u из соответствующей области $\mathcal{D}(\mathbf{L}^{(s)})$ *и каждого оператора* $\mathbf{L}^{(1)}$, $\mathbf{L}^{(2)}$ *и* $\mathbf{L}^{(3)}$, *где положительная константа c не зависит от u.*

Для доказательства теоремы 1 рассматривается выражение $\mathcal{L}u\frac{\partial}{\partial x_0}A^{(0)}(u)$, которое представим в виде

$$2\left(Lu\frac{\partial}{\partial x_0}A^{(0)}(u)\right)(\mathbf{x}) = 2\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{(ij)}\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_j}\right)(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\mathfrak{A}^{(0)}(u,u)(\mathbf{x})\right) +$$

$$\mathfrak{A}^{(1)}(u,u)(\mathbf{x}) + 2\frac{\partial}{\partial x_0}\left(A^{(0)}uA^{(1)}u\right)(\mathbf{x}) - \mathcal{B}^{(0)}(u,u)(t,\mathbf{x}) + \mathcal{B}^{(1)}(u,u)(t,\mathbf{x}),$$

где

$$\mathfrak{A}^{(0)}(u,u)(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{(ij)}\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_j}\right)(\mathbf{x}) + (A^{(0)}u)^2(\mathbf{x});$$

$$\mathfrak{A}^{(1)}(u,u)(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n}\left[\frac{\partial a^{(ij)}}{\partial x_0}\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_j} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial a^{(ij)}}{\partial x_0}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right](\mathbf{x}) - 2\left(A^{(0)}u\frac{\partial}{\partial x_0}A^{(1)}u\right)(\mathbf{x});$$

$$\mathcal{B}^{(0)}(u,u) = 2B^{(0)}u(t,\mathbf{x}')A^{(0)}u(\mathbf{x}');$$

$$\mathcal{B}^{(1)}(u,u) = 2B^{(1)}u(t,\mathbf{x}')A^{(0)}u(\mathbf{x}').$$

С другой стороны,

$$\left(\mathcal{L}u\frac{\partial}{\partial x_0}A^{(0)}u\right)(\mathbf{x})=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathcal{L}u\frac{\partial}{\partial x_0}\left(a^{(ij)}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right)(x)-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_0}\left(a^{(ij)}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(\mathbf{x}). \qquad (15)$$

Обозначим через $Q(\tau)$ подобласть области Q высотой τ, т. е. $Q^{(\tau)}=(0,\tau)\times\Omega,\ 0<\tau<T$. Равенство (15) интегрируем по подобласти $Q^{(\tau)}$ области Q, используя при этом граничное условие $(s+4)$ в зависимости от оператора $\mathbf{L}^s$, $s=\overline{1,3}$.

Затем в левых и правых частях полученных равенств делаем соответствующие оценки. В результате получим доказываемые неравенства (14).

4. Существование и единственность сильных решений смешанных задач MPs, $s=\overline{1,3}$. На основании критерия замыкаемости оператора непосредственной проверкой доказывается, что все операторы $\mathbf{L}^{(s)}:B^{(s)}(Q)\to\mathbf{H}^{(s)}$ допускают замыкания $\overline{\mathbf{L}^{(s)}}$. В дальнейшем будем рассматривать операторы $\overline{\mathbf{L}^{(s)}}$ [10].

О п р е д е л е н и е. Решения операторных уравнений

$$\overline{\mathbf{L}^{(s)}}u=\mathbf{F}^{(s)},\ \mathbf{F}^{(s)}\in\mathbf{H}^{(s)},\ s=\overline{1,3},$$

будем называть сильными решениями или в нашем случае пространств $B^{(s)}(Q)$ – обобщенно-классическими решениями смешанных задач **MPs**, $s=\overline{1,3}$.

Путем предельного перехода для операторов $\overline{\mathbf{L}^{(s)}}$, $s=\overline{1,3}$, из энергетического неравенства (14) получаем энергетическое неравенство

$$\|u\|_B\le c\left\|\overline{\mathbf{L}^{(s)}}u\right\|_{\mathbf{H}^{(s)}} \qquad (16)$$

для любых $u\in D\left(\overline{\mathbf{L}^{(s)}}\right)$, где положительная постоянная c та же, что и в неравенстве (14).

Т е о р е м а 2. *Пусть выполняется условие и ограничения гладкости в п. 2 на коэффициенты уравнения (1). Тогда для любых функций* $f\in\overset{\circ}{\mathfrak{A}}{}^1(Q)$, $\varphi\in H^2(\Omega,(3,s))$ *и* $\psi\in H^1(\Omega,(3,s))$, $s=\overline{1,3}$, *существует и единственно обобщенно-классическое решение* $u\in B^{(s)}(Q)$ *соответствующей смешанной задачи* ***MPs*** ($s=\overline{1,3}$) *и справедлива оценка*

$$\|u\|_B\le c\left(\|f\|_{\mathfrak{A}^1(Q)}+\|\varphi\|_{H^2(\Omega)}+\|\psi\|_{H^1(\Omega)}\right). \qquad (17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Единственность и оценка (17) для обобщенно-классического решения каждой задачи **MPs**, если оно существует, следуют из энергетического неравенства (16).

Как известно, [10, т. 3.2.2], доказательство существования сильного решения, согласно определению, сводится к доказательству равенства $\Re\left(\overline{\mathbf{L}^{(s)}}\right)=\Re\left(\mathbf{L}^{(s)}\right)$, т. е. к доказательству плотности множества значений $\Re\left(\mathbf{L}^{(s)}\right)$ оператора $\mathbf{L}^{(s)}$ в пространстве $\mathbf{H}^{(s)}$. Доказательство данного утверждения сводится к следующему: равенство

$$(\mathbf{L}^{(s)}u,\mathbf{v})_{\mathbf{H}^{(s)}}=(\mathcal{L}u,v)_{\mathfrak{A}^1(Q)}+(l_0u,v^{(0)})_{H^2(\Omega)}+(l_1u,v^{(1)})_{H^1(\Omega)}=0 \qquad (18)$$

для любой функции $u\in\mathcal{D}(\mathbf{L}^{(s)})$ выполняется тогда и только тогда, если $v=0$ в $\overset{\circ}{\mathfrak{A}}{}^1(Q)$, $v^{(0)}=0$ в $H^2(\Omega,(3,s))$ и $v^{(1)}=0$ в $H^1(\Omega,(3,s))$ для $s=\overline{1,3}$ в отдельности.

Обозначим через $\mathcal{L}_0$ главную часть оператора $\mathcal{L}$. Кроме того, через $\overset{\circ}{\mathcal{D}}(\mathbf{L}^{(s)})$ обозначим подмножество множества $\mathcal{D}(\mathbf{L}^{(s)})$, для элементов u которого $l_0u=l_1u=0$. В наших обозначениях пусть $\overset{\circ}{\mathbf{L}}{}_0^{(s)}=\{\overset{\circ}{\mathcal{L}}_0,l_0,l_1\}$.

Теперь в частном случае уравнение (18) можно представить в виде

$$(\mathcal{L}_0 u, v)_{\mathfrak{A}^1(Q)} = (\mathcal{L}_0 u, v)_{L_2(Q)} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{L}_0 u, \frac{\partial}{\partial x_j} v \right)_{L_2(Q)} = 0, \tag{19}$$

где u – произвольная функция из $\overset{\circ}{\mathcal{D}}\left(\overset{\circ}{\mathbf{L}}{}_0^{(s)}\right)$. В равенстве (19) значения $\mathcal{L}_0 u$ и $\partial / \partial x_j \mathcal{L}_0 u$ линейно независимы. Поэтому, если множества $\left\{ \mathcal{L}_0 u \middle| u \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}\left(\overset{\circ}{\mathbf{L}}{}_0^{(s)}\right) \right\}$ и $\left\{ \partial / \partial x_j \mathcal{L}_0 u \middle| u \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}\left(\overset{\circ}{\mathbf{L}}{}_0^{(s)}\right) \right\}$, $j = \overline{1, n}$, являются плотными в $L_2(Q)$, то из равенства (19) следуют условия ортогональности для каждого слагаемого, т. е. равенства

$$(\mathcal{L}_0 u, v)_{L_2(Q)} = 0, \ \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{L}_0 u, \frac{\partial}{\partial x_j} v \right)_{L_2(Q)} = 0, \ j = \overline{1, n}. \tag{20}$$

Согласно утверждению 3.4.5 [10], вместо равенств (20) можно рассматривать в эквивалентном виде равенства

$$(\mathcal{J}_{(k)} \mathcal{L}_0 u, v)_{L_2(Q)} = 0, \ \left(J_{(k)} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{L}_0 u, \frac{\partial}{\partial x_j} w^{(j)} \right)_{L_2(Q)} = 0, \ j = \overline{1, n}, \tag{21}$$

которые выполняются для любой функции $u \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}\left(\overset{\circ}{\mathbf{L}}{}_0^{(s)}\right)$ и некоторых элементов v, $w^{(j)}$ из пространства $L_2(Q)$. В (21) $J_{(k)}$ – соответствующие операторы осреднения с переменным шагом [12–14; 10], учитывающие граничные условия на границе ∂Q области Q рассматриваемых задач **MPs**, $s = \overline{1, 3}$.

Таким образом, далее доказательство теоремы 2 базируется на доказательстве плотности множеств $\left\{ \mathcal{J}_{(k)} \mathcal{L}_0 u \middle| u \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(\mathbf{L}_0^{(s)}) \right\}$ и $\left\{ J_{(k)} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{L}_0 u \middle| u \in \overset{\circ}{D}(\mathbf{L}_0^{(s)}) \right\}$, $j = \overline{1, n}$, в пространстве $L_2(Q)$. Сформулируем данный желаемый результат в виде леммы.

Л е м м а. *Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда равенства (21) для элементов* v, $w^{(j)}$, $j = \overline{1, n}$, *из пространства* $L_2(Q)$ *и любых функций* $u \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(\mathbf{L}_0^{(s)})$ *имеют место тогда и только тогда, когда* $v = w^{(j)} = 0$ *в* $L_2(Q)$.

Таким образом, из утверждения леммы, согласно утверждению 3.4.5 из [10], множества $\left\{ \mathcal{L}_0 u \middle| u \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(\mathbf{L}_0^{(s)}) \right\}$, $\left\{ \partial / \partial x_j \mathcal{L}_0 u \middle| u \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(\mathbf{L}_0^{(s)}) \right\}$ являются плотными множествами в $L_2(Q)$. Следовательно, как было сказано ранее, из равенства (19) следуют соотношения (20). А из леммы и (20) имеем $v = 0$, $\partial / \partial x_j v = 0$, т. е. $v = 0$ в $\mathfrak{A}^1(Q)$.

Так как $v = 0$ в $\mathfrak{A}^1(Q)$, то имеет место (19) и равенство (18) уже имеет вид

$$(l_0 u, v^{(0)})_{H^2(\Omega)} + (l_1 u, v^{(1)})_{H^1(\Omega)} = 0$$

для любой функции $u \in \mathcal{D}(\mathbf{L}_0^{(s)})$. Поскольку операторы l_0 и l_1, $\partial / \partial x_j l_k$ и $\partial^2 / \partial x_j \partial x_k l_0$, $j, k = \overline{1, n}$, линейно независимы и множества их значений плотны в $L_2(\Omega)$ для $\mathcal{D}(l_i) = \mathcal{D}(\mathbf{L}^{(3)})$, то $v^{(0)} = 0$ в $H^2(\Omega, (3, s))$, а $v^{(1)} = 0$ в $H^1(\Omega, (3, s))$ для $s = \overline{1, 3}$.

В общем случае оператора $\mathbf{L}^{(s)}$ равенство $\overline{\mathfrak{R}(\mathbf{L}^{(s)})} = H$ можно доказать методом вывода энергетического неравенства для формально сопряженной задачи с помощью операторов осреднения с переменным шагом или методом продолжения по параметру [10, т. 3.2.3] или [11].

Список использованной литературы

1. *Нахушев, А. М.* Нагруженные уравнения и их приложения / А. М. Нахушев // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, № 1. – С. 86–94.

2. *Нахушев, А. М.* Уравнения математической биологии / А. М. Нахушев. – М., 1995.

3. *Дженалиев, М. Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений / М. Т. Дженалиев. – Алматы, 1995.

4. *Дженалиев, М. Т.* О нагруженных уравнениях с периодическими граничными условиями / М. Т. Дженалиев // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, № 1. – С. 48–54.

5. *Кожанов, А. И.* Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче / А. И. Кожанов // Мат. заметки. – 2004. – Т. 76, вып. 6. – С. 84–91.

6. *Дженалиев, М. Т.* Граничные задачи для спектрально-нагруженных параболических операторов / М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов // Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск, 2007. – С. 114–127.

7. *Дженалиев, М. Т.* Об одной граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности. I / М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 4. – С. 498–508.

8. *Дженалиев, М. Т.* Об одной граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности. II / М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 788–794.

9. *Дженалиев, М. Т.* О граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности / М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов // Сиб. мат. журн. – 2006. – Т. 47, № 3. – С. 527–547.

10. *Корзюк, В. И.* Метод энергетических неравенств и операторов осреднения. Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / В. И. Корзюк. – Минск: Изд. центр БГУ, 2013. – 460 с.

11. *Корзюк, В. И.* Уравнения математической физики / В. И. Корзюк. – Минск: Изд. центр БГУ, 2011. – 460 с.

12. *Deny, J.* Les espaces du type de Beppo Levi / J. Deny, J. L. Lions // Ann. Inst. Fourier. – 1953–1954. – Vol. 5. – P. 305–370.

13. *Burenkov, V. I.* Sobolev Spaces on Domains / V. I. Burenkov. – Stuttgard, 1998. – 312 p.

14. *Буренков, В. И.* Приближение бесконечно дифференцируемыми функциями с сохранением граничных значений / В. И. Буренков // Тр. МИ АН СССР. – 1987. – Т. 180. – С. 68–70.

Поступило в редакцию 15.07.2015

Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **ноябрь–декабрь** **Том 59 № 6**

ИНФОРМАТИКА

УДК 004.9, 004.94

Академик А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ, А. А. КОЛЯДА

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МИНИМАЛЬНО ИЗБЫТОЧНОГО МОДУЛЯРНОГО КОДА

Институт прикладных физических проблем имени А. Н. Севченко Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь,
shabinskaya@rambler.ru; razan@tut.by

Сообщение посвящено проблематике оптимизации интегрально-характеристической базы модулярной арифметики (МА). Показано, что при минимальной кодовой избыточности данная задача успешно решается для класса немодульных операций, которые реализуются с помощью интервально-индексных характеристик и интервально-модулярной формы целых чисел. Предложен новый расширенный алгоритм расчета интегральных характеристик минимально избыточного модулярного кода, позволяющий строить конфигурации МА как на диапазонах неотрицательных чисел, так и на симметричных диапазонах. При длине минимально избыточного модулярного кода от 8 до 64 цифр синтезированный алгоритм превосходит известные аналоги для вычислений, связанных с интервально-индексными характеристиками в 6–34,4 раз по временным затратам и в 3,5–31,5 раз по затратам табличной памяти.

Ключевые слова: модулярная арифметика, минимально избыточный модулярный код, интегральные характеристики модулярного кода.

A. F. CHERNYAVSKY, A. A. KOLYADA

CALCULATION OF THE INTEGRAL CHARACTERISTICS OF MINIMALLY REDUNDANT MODULAR CODE

A. N. Sevchenko Institute of Applied Physics Problems of the Belarusian State University, Minsk, Belarus
shabinskaya@rambler.ru; razan@tut.by

The article is devoted to a perspective of optimization of the integrated and characteristic base of modular arithmetics (MA). It is shown that at the minimum code redundancy, this problem is successfully solved for a class of non-modular operations which are realized by means of interval and index characteristics and the interval and modular form of integers. Proposed is a new expanded algorithm of calculation of integrated characteristics of the minimally reductant modular code allowing one to build MA configurations both over the ranges of non-negative numbers and over the symmetric ranges. With a length of the minimally redundant modular code from 8 to 64 figures, the synthesized algorithm is superior to the known analogs for calculations connected with interval and index characteristics in time-consuming by a factor of 6–34.4 and in table memory-consuming by a factor 3.5–31.5.

Keywords: modular arithmetics, minimally redundant modular code, integral characteristics of minimally redundant modular code.

Введение. В настоящее время арифметика модулярных систем счисления (МСС) активно применяется в таких областях, как цифровая обработка сигналов, обработка изображений, защита информации, распределенные инфокоммуникационные технологии, связь, облачные вычисления в ряде других современных приложений [1–7]. Это обусловлено тем, что, благодаря кодовому параллелизму, МСС имеют ряд фундаментальных преимуществ над позиционными системами счисления. К таким преимуществам, в частности, относятся:

независимость длительности модульных (кольцевых) операций от количества оснований, а значит и от длины кода МСС;

© Чернявский А. Ф., Коляда А. А., 2015.

высокая скорость вычислений в диапазонах больших чисел;

эффективность модулярных кодовых конструкций с контролем ошибок и сбойных ситуаций;

уникальность адаптационных свойств модулярной арифметики (МА) к технологиям электроники, табличным реализациям, реализациям на программируемых логических интегральных схемах, а также к передовым параллельным вычислительным технологиям, например, к технологиям на основе искусственных нейронных сетей;

гибкость базовых механизмов реконфигурирования МА-структур.

Известные разработки по теории и приложениям модулярной вычислительной технологии ориентированы на реализацию как перечисленных, так и других ключевых достоинств МСС в максимальной мере. Центральное место в рамках сформулированной стратегии отводится исследованиям по оптимизации методов и алгоритмов выполнения в МСС немодульных операций. Эффективную компьютерно-арифметическую базу для решения оптимизационных проблем МА составляет арифметика минимально избыточных МСС (МИМСС) [8].

Главным фактором, оказывающим наибольшее влияние на качественные показатели алгоритмов немодульных операций, является уровень вычислительной сложности расчетных соотношений для базовых интегральных характеристик модулярного кода (МК) и связанных с ними форм целых чисел (ЦЧ) [9; 10]. Приоритетные позиции в этом отношении принадлежат интервально-индексным характеристикам и интервально-модулярной форме (ИМФ) ЦЧ. При минимально избыточном модулярном кодировании указанная интегрально-характеристическая база позволяет синтезировать немодульные процедуры, которые в сравнении с неизбыточными аналогами обеспечивают значительное упрощение операций, требующих детектирования местоположения ЦЧ в диапазонах МСС, ряда других операций. К таким операциям относятся масштабирование, деление (общий случай), определение знака числа, контроль переполнения, обнаружение и исправление ошибок с помощью корректирующих МК.

В настоящем сообщении представлен новый алгоритм расчета интегральных характеристик минимально избыточного МК (МИМК), который является эффективной основой для построения конфигураций арифметики МСС, охватывающих практически весь спектр современных МА-приложений.

Итегрально-характеристическая база МСС с диапазонами неотрицательных целых чисел. Введем обозначения:

$\lfloor a \rfloor$ и $\lceil a \rceil$ – наибольшее и наименьшее ЦЧ соответственно не большее и не меньшее вещественной величины a.

$\mathbf{Z}_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $\mathbf{Z}_m^- = \{-\lfloor m/2 \rfloor, -\lfloor m/2 \rfloor + 1, \ldots, \lceil m/2 \rceil - 1\}$ – множества наименьших неотрицательных и абсолютно наименьших вычетов по натуральному модулю m.

$|A|_m$ – элемент кольца $\mathbf{Z}_m$, сравнимый с A (в общем случае рациональным числом) по модулю m.

$\mathrm{sn}(a)$ – знаковая функция вида $\mathrm{sn}(a) = \begin{cases} 0, & \text{если } a \geq 0, \\ 1, & \text{если } a < 0. \end{cases}$

$\mathbf{M}_l = \{m_1, m_2, \ldots, m_l\}$ – базис МСС, состоящий из $l > 1$ попарно простых модулей (оснований).

$M_j = \prod_{s=1}^{j} m_s$, $M_{i,j} = M_j / m_i \; (i = \overline{1, j})$ – константы МСС с базисом $\mathbf{M}_j$ $(1 < j \leq l)$.

В МСС с базисом $\mathbf{M}_l$ ЦЧ X представляется кодом $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_l)(\chi_i = |X|_{m_i};\ i = \overline{1, l})$. Максимальная мощность множества $\mathbf{D}_l$ чисел, на котором отображение $X \to (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_l)$ взаимно однозначно составляет M_l элементов. В этом случае $\mathbf{D}_l$ выполняет роль диапазона МСС с базисом $\mathbf{M}_l$. Обычно в качестве диапазонов используют $\mathbf{Z}_{M_l}$ или $\mathbf{Z}_{M_l}^-$.

Из Китайской теоремы об остатках следует, что ЦЧ $X \in \mathbf{D}_l$ может быть получено по своему МК $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_l)$ с помощью равенства

$$X = \sum_{i=1}^{l-1} M_{i,l-1} \left| M_{i,l-1}^{-1} \chi_i \right|_{m_l} + M_{l-1} I_l(X), \tag{1}$$

где $I_l(X)$ – интервальный индекс (ИИ) числа X относительно базиса $\mathbf{M}_l$ [8; 9].

Выражение (1) называется интервально-модулярной формой ЦЧ X.

Компоненты $\hat{I}_l(X) = |I_l(X)|_{m_l}$ и $J_l(X) = \lfloor I_l(X) / m_l \rfloor$ представления ИИ $I_l(X)$ вида

$$I_l(X) = \hat{I}_l(X) + m_l J_l(X) \tag{2}$$

называется компьютерным и главным ИИ ЦЧ X относительно базиса **M**_l.

Справедливо следующее утверждение

Т е о р е м а 1. *Для ИИ $I_l(X)$ произвольного элемента $X = (\chi_1, \chi_2, ..., \chi_l)$ диапазона $\mathbf{Z}_{M_l}$ МСС с основаниями $m_1, m_2, ..., m_{l-1}, m_l \geq l - 2$ верна формула*

$$I_l(X) = \hat{I}_l(X) - m_l \Theta_l(X), \tag{3}$$

где

$$\hat{I}_l(X) = \left| \sum_{i=1}^{l} R_{i,l}(\chi_i) \right|_{m_l}; \tag{4}$$

$$R_{i,l}(\chi_i) = |-m_i^{-1}| M_{i,l-1}^{-1} \chi_i |_{m_i} |_{m_l} \quad (i = \overline{1, l-1}), \quad R_{l,l}(\chi_l) = \left| \frac{\chi_l}{M_{l-1}} \right|_{m_l}; \tag{5}$$

$\Theta_l(X)$ – *минимальная интегральная характеристика МК (ИХМК) l-го порядка вида* $(\Theta_l(X) \in \{0, 1\})$.

Наряду с интервально-индексными характеристиками $I_l(x)$, $\hat{I}_l(x)$, $J_l(x)$ и минимальными ИХМК $\Theta_l(X)$ при разработке методов выполнения немодульных операций используются и другие характеристики. В частности, интервальный номер $N_l(X) = \lfloor X / M_l \rfloor$ ЦЧ X относительно базиса **M**_l ($l \geq 1$) и цифры полиадического кода $\langle x_l x_{l-1} \ldots x_1 \rangle$ числа $|X|_{M_l}$, которые определяются его полиадической формой

$$|X|_{M_l} = \sum_{i=1}^{l} M_{i-1} x_i \quad (M_0 = 1;\ x_i \in \mathbf{Z}_{m_i}). \tag{6}$$

Для данных ИХМК верны нижеследующие утверждения.

Т е о р е м а 2. *Для интервального номера $N_l(X)$ произвольного неотрицательного ЦЧ X относительно модулей $m_1, m_2, ..., m_{l-1}, m_l \geq l - 2$ имеет место равенство $N_l(X) = J_l(X) + \Theta_l(X)$, где $J_l(X)$ – главный ИИ числа X, а $\Theta_l(X)$ – отвечающая ему минимальная ИХМК l-го порядка* $(\Theta_l(X) \in \{0, 1\})$.

Т е о р е м а 3. *Пусть в МСС с базисом $M_k = \{m_1, m_2, ..., m_k\}$ задан произвольный элемент $X = (\chi_1, \chi_2, ..., \chi_k)$ диапазона $\mathbf{Z}_{M_k}$ и пусть*

$$L_l(X) = \sum_{i=1}^{l-1} M_{i,l-1} \left| M_{i,l-1}^{-1} \chi_i \right|_{m_i} + M_{i,l-1} \hat{I}_l(X) \quad (2 \leq l \leq k), \tag{7}$$

$\hat{I}_l(X)$ *определяется согласно (4), (5). Тогда для коэффициентов полиадической формы числа X (см. (6))*

$$X = \sum_{i=1}^{k} M_{i-1} x_i \quad (x_i \in \mathbf{Z}_{m_i}), \tag{8}$$

верны формулы

$$x_1 = \chi_1,\ x_2 = \hat{I}_2(X),\ x_3 = \hat{x}_3,\ \hat{x}_l = |\hat{x}_l + \Theta_{l-1}(X)|_{m_l} \quad (l = \overline{4, k}),$$

где $\hat{x}_l = \left| J_{l-1}(L_l(X)) \right|_{m_l}$ $(l = \overline{3, k})$; $J_{l-1}(L_l(X))$ – *главный ИИ ЦЧ (7) $L_l(X)$ в МСС с базисом M_l, вычисляемый по правилу* $J_{l-1}(L_l(X)) = \hat{\rho}_{l-1}(X) + \hat{I}_l(X)$; $\hat{\rho}_{l-1}(X) = \left\lfloor m_{l-1}^{-1} \sum_{i=1}^{l-1} R_{i,l-1}(\chi_i) \right\rfloor$; *вычеты $R_{i,l-1}(\chi_i)$ определяются по формулам (5) заменой l на $(l - 1)$; $\Theta_{l-1}(X)$ – минимальная ИХМК $(l - 1)$-го порядка, которая при $m_{l-1} \geq l - 3$ принимает значения 0 или 1.*

Основой для расчета минимальных ИХМК по разработанной интервально-индексной технологии служат приводимые ниже теоремы, а также операция сужения ИМФ ЦЧ [8–10].

Т е о р е м а 4. *Для минимальной ИХМК* $\Theta_l(X)$*, отвечающей числу X в МСС с основаниями* $m_1, m_2, ..., m_{l-1}, m_l \geq l-2$ $(l > 1)$*, справедлива формула* $\Theta_l(X) = 1 - \mathrm{sn}(Z_l(X))$*, где* $Z_l(X) = L_l(X) - M_l$*; ЦЧ* $L_l(X)$ *определяется соотношением (7).*

Т е о р е м а 5. *Пусть числу X по базису* **M**_*k отвечает МК* $(\chi_1, \chi_2, ..., \chi_k)$ *и пусть* $J_l(X)$ *– главный ИИ ЦЧ X относительно* $m_1, m_2, ..., m_{l-1}, m_l \geq l-2$ $(2 \leq l \leq k)$*. Знаки чисел X и* $J_l(X)$ *совпадают при* $l = 2$*, а также при* $l > 2$*, если* $J_l(X) \neq -1$.

Интегрально-характеристическая база МИМСС. Как известно [8; 11], использование в числовых системах кодовой избыточности, как правило, позволяет улучшить их арифметические и иные свойства. Так называемое минимально избыточное модулярное кодирование, определяемое базисом **M**_*k*, предусматривает применение диапазонов, мощность которых меньше мощности соответствующих диапазонов неизбыточной (классической) МСС с тем же базисом **M**_*k*. Сущность реализуемого принципа раскрывает нижеследующее утверждение.

Т е о р е м а 6. Для того, чтобы в МСС с попарно простыми основаниями $m_1, m_2, \ldots, m_k$ ИИ $I_k(X)$ каждого элемента $X = (\chi_1, \chi_2, ..., \chi_k)$ диапазонов $\mathbf{D} = \mathbf{Z}_{2M}^{-} = \{-M, -M+1, ..., M-1\}$ и $\mathbf{Z}_M = \{0, 1, \ldots, M-1\}$ $(M = m_0 M_{k-1}$; m_0 – вспомогательный модуль) полностью определялся компьютерным ИИ – вычетом $\hat{I}_k(X) = |I(X)|_{m_k}$ (см. (2)) необходимо и достаточно, чтобы *k*-е основание удовлетворяло условиям $m_k \geq 2m_0 + k - 2$ и $m_k \geq m_0 + k - 2$ $(m_0 \geq k-2)$, при этом для $I_k(X)$, справедливо расчетное соотношение

$$I_k(X) = \hat{I}_k(X) - m_k \ \mathrm{sn}(m_0 - 1 - \hat{I}_k(X)) = \begin{cases} \hat{I}_k(X), & \text{если } \hat{I}_k(X) < m_0, \\ \hat{I}_k(X) - m_k, & \text{если } \hat{I}_k(X) \geq m_0, \end{cases} \tag{9}$$

где $\hat{I}_k(X)$ вычисляется согласно (4), (5) при $l = k$.

Главное преимущество МИМСС над неизбыточными аналогами заключается в значительном упрощении вычисления интервально-индексной характеристики $I_k(X)$. Сравнение формул (3) и (9) показывает, что переход от неизбыточного к минимально избыточному кодированию позволяет заменить в расчетном соотношении для ИИ $I_k(X)$ минимальную ИХМК $\Theta_k(X)$, определяемую по общей схеме в рамках трудоемкой процедуры сужения ИМФ ЦЧ (см. теоремы 4, 5) [8–10], на характеристику $\mathrm{sn}(m_0 - 1 - \hat{I}_k(X))$, которая имеет тривиальную вычислительную структуру. При табличной реализации (9) расчет ИИ $I_k(X)$ осуществляется за одну модульную операцию.

Другим важным достоинством МИМСС является простота оперирования в симметричных диапазонах. В отличие от неизбыточных МСС [10] идентификация отрицательной и неотрицательной компонент рабочего диапазона $\mathbf{Z}_{2M}^{-}$ МИМСС выполняется с помощью интервального номера $N(X) = \lfloor X / M \rfloor$, формируемого в соответствии с теоремой 2 по главному ИИ $J(x) = \lfloor I_k(X) / m_0 \rfloor$ и минимальной ИХМК $\Theta(X)$, отвечающих числу $X \in \mathbf{Z}_{2M}^{-}$ в МСС с базисом $\{m_1, m_2, \ldots, m_k - 1, m_0\}$ и диапазоном $\mathbf{Z}_M$ без использования четного модуля m_k. Необходимость в данном ограничении отпадает.

Для расчета интегральных характеристик МИМК целиком применимы несколько модифицированные методологические и алгоритмические средства, разработанные для неизбыточных МСС [9; 10]. Требуемые изменения связаны с упрощением вычисления в МИМСС интервально-индексной характеристики $I_k(X)$. Наряду с теоремой 6 основой минимально избыточной версии процедуры расчета ИХМК – РИХ_1–РИХ_7, синтезированной в [10], служат ИМФ (1), евклидовы составляющие $\hat{I}(X) = |I_k(X)|_{m_0}$ и $J(X) = \lfloor I_k(X) / m_0 \rfloor$ ИИ $I_k(X)$ относительно вспомогательного модуля m_0 (см. (2)), а также интервальный номер $N(X)$ и минимальная ИХМК $\Theta(X)$, которые с учетом теорем 1, 2, 4, 5 дают следующие базовые соотношения:

$$X = \sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1} \left| M_{i,k-1}^{-1} \chi_i \right|_{m_k} + M_{k-1} \hat{I}(X) + M \cdot J(X) \ \ (X \in \mathbf{Z}_{2M}^{-});$$

$$X = \sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1} \left| M_{i,k-1}^{-1} \chi_i \right|_{m_k} + M_{k-1} I_k(X) \left(|X|_M + M(J(X) + \Theta(X) \right) =$$

$$|X|_M + M \cdot N(X) \ \ (I_k(|X|_M) = \hat{I}(X) - m_0 \Theta(X);$$

$$N(X) = \lfloor X / M \rfloor = J(X) + \Theta(X));$$

$$\mathrm{sn}(X) = \mathrm{sn}(N(X)) = \mathrm{sn}(J(X) + \Theta(X)).$$

Алгоритм расчета интегральных характеристик минимально избыточного модулярного кода. На основании изложенных теоретических положений технологии вычисления ИХМК для расчета характеристик кода МИМСС синтезирован новый расширенный алгоритм, который заключается в нижеследующем.

Параметры алгоритма: попарно простые модули $m_1, m_2, \ldots, m_k$ базовой МИМСС с диапазоном $\mathbf{Z}_{2M}^{-} = \{-M+1, ..., M-1\}$ ($M = m_0\ M_{k-1}$), удовлетворяющие условиям $m_l \geq l-1$ ($l = \overline{2, k-1}$), $m_k \geq 2m_0 + k - 2$, $m_0 \geq k - 2$.

Входные данные: МИМК $(\chi_1, \chi_2, ..., \chi_k)$ произвольного элемента X диапазона $\mathbf{Z}_{2M}^{-}$ по базису $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$.

Выходные данные:

минимальные ИХМК $\Theta_l(X)$ ($l = \overline{3, k}$) и $\Theta(X)$, отвечающие числу X в МСС с базисами $\{m_1, m_2, \ldots, m_l\}$ и $\{m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}, m_0\}$ соответственно;

ИИ $I_k(X)$ и знак $\mathrm{sn}(X)$ элемента X диапазона $\mathbf{Z}_{2M}^{-}$;

ИИ $I_k(|X|_{M_k})$ и полиадический код $\langle x_k x_{k-1} ... x_1 \rangle$ ЦЧ $|X|_{M_k} \in \mathbf{Z}_{M_k}$;

ИИ $I_k(|X|_M)$ и полиадический код $\langle x\, x_{k-1} ... x_1 \rangle$ ЦЧ $|X|_M$, рассчитанные по базису $\{m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}, m_0\}$.

Предварительно получаемые данные:

таблицы ТПi интервального индекса, которые в соответствии с (5) генерируются по правилам: $\text{ТП}i[c] = R_{i,k}(\chi) = |-m_i^{-1}|\, M_{i,k-1}^{-1}\chi|_{m_i}|_{m_k}$ ($\chi = \overline{0, m_i - 1}$, $i = \overline{1, k-1}$), $\text{ТП}k[c] = R_{k,k}(\chi) = \left|\dfrac{\chi}{M_{k-1}}\right|_{m_k}$ ($\chi = \overline{0, m_k - 1}$);

коэффициенты нормировки цифр МК

$$C_{i,l-1} = \left|M_{i,l-1}^{-1}\right|_{m_i},\ C_{l,l} = \left|M_{l-1}^{-1}\right|_{m_l} \quad (i = \overline{1, l-1};\ l = \overline{2, k-1}).$$

Тело алгоритма расчета интегральных характеристик МИМК

РИХ_МИМК.1. Для МИМК $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k)$ получить наборы вычетов $R_l = \{R_{1,l}(\chi_1), R_{2,l}(\chi_2), ..., R_{l-1,l}(\chi_{l-1}), R_{l,l}(\chi_l)\}$ ($l = \overline{2, k-1}$), где

$$R_{i,l}(\chi_i) = \left|-m_i^{-1}\left|C_{i,l-1}\,\chi_i\right|_{m_i}\right|_{m_l} \quad (i = \overline{1, l-1}),\ R_{l,l}(\chi_l) = \left|C_{l,l}\,\chi_l\right|_{m_l}.$$

РИХ_МИМК.2. Рассчитать характеристики $\hat{I}_l(X)$, $\hat{\rho}_l(X)$ ($l = \overline{2, k-1}$), а также $\hat{I}_k(X)$, следуя схемам

$$\left\langle s_l = \sum_{i=1}^{l} R_{i,l}(\chi_i),\ \hat{I}_l(X) = |s_l|_{m_l},\ \hat{\rho}_l(X) = \lfloor s_l / m_l \rfloor \right\rangle;$$

$$\left\langle s_k = \sum_{i=1}^{k} \text{ТП}i[\chi_i],\quad \hat{I}_k(X) = |s_k|_{m_k} \right\rangle.$$

РИХ_МИМК.3. С помощью (8) для X найти ИИ $I_k(X)$ и его эвклидовы составляющие $\hat{I}(X) = |I_k(X)|_{m_0}$, $J(X) = \lfloor I_k(X) / m_0 \rfloor$, реализуя действия:

РИХ_МИМК.3А. При $\hat{I}_k(X) < m_0$ положить $I_k(X) = \hat{I}_k(X)$, $\hat{I}(X) = \hat{I}_k(X)$, $J(X) = 0$ и перейти к РИХ_МИМК.4.

РИХ_МИМК.3Б. Интервально-индексным характеристикам $I_k(X)$, $\hat{I}(X)$ и $J(X)$ присвоить значения $I_k(X) = \hat{I}_k(X) - m_k$, $\hat{I}(X) = I_k(X) + m_0$, $J(X) = -1$.

РИХ_МИМК.3В. В случае $\hat{I}(X) < 0$ выполнить корректирующие операции: $\hat{I}(X) = \hat{I}(X) + m_0$, $J(X) = -2$.

РИХ_МИМК.4. Для каждого $l \in \{3, 4, ..., k\}$ выполнить:

РИХ_МИМК.4А. Найти $\hat{x}_l = \hat{\rho}_{l-1}(X) + \hat{I}_l(X)$, $J_{l-1} = \hat{x}_l - m_l$.

РИХ_МИМК.4Б. Обнулить булеву переменную S_l, а при $l \neq 3$ и переменную δ_l;

РИХ_МИМК.4В. Если $J_{l-1} \geq 0$, то положить $\hat{x}_l = J_{l-1}$, $S_l = 1$ и перейти РИХ_МИМК.5.

РИХ_МИМК.4Г. При $J_{l-1} = -1$ ($l \neq 3$) переменной δ_l; присвоить значение $\delta = 1$.

РИХ_МИМК.5. Реализовать операционную последовательность:

РИХ_МИМК.5А. Получить $\hat{x} = \hat{\rho}_{k-1}(X) + \hat{I}(X)$, $J = \hat{x} - m_0$.

РИХ_МИМК.5Б. Обнулить булевы переменные S и δ ($S = \delta = 0$).

РИХ_МИМК.5В. Если $J \geq 0$, то положить $\hat{x} = J$, $S = 1$ и перейти к РИХ_МИМК.6.

РИХ_МИМК.5Г. В случае, когда $J = -1$, переменной δ присвоить значение $\delta = 1$.

РИХ_МИМК.6. Принимая во внимание равенство $\Theta_2(X) = 0$, сформировать минимальные ИХМК $\Theta_3(X), \Theta_4(X), ..., \Theta_{l-1}(X), \Theta_l(X), \Theta(X)$ согласно правилам $\Theta_l(X) = S_l \vee \delta_l \Theta_{l-1}(X)$ ($l = \overline{3, k}$); $\Theta(X) = S \vee \delta\Theta_{k-1}(X)$.

РИХ_МИМК.7. В дополнение к вычисленным ИХМК, определить:

знак $\mathrm{sn}(X) = \mathrm{sn}(J(X) + \Theta(X))$ ЦЧ $X \in \mathbf{Z}_{\bar{2}M}$;

ИИ $I_k(|X|_{M_k}) = \hat{I}_k(X) - m_k\Theta_k(X)$ и цифры $x_1 = \chi_1$, $x_2 = \hat{I}_2(X)$, $x_3 = \hat{x}$, $x_l = \begin{cases} 0, & \text{если } \delta_l\Theta_{l-1}(X) = 1, \\ \hat{x}_l + \Theta_{l-1}(X), & \text{если } \delta_l\Theta_{l-1}(X) = 0, \end{cases}$ ($l = \overline{4, k}$), полиадического кода $\langle x_k\, x_{k-1} ... x_1 \rangle$ числа $|X|_{M_k} = (\chi_1, \chi_2, ..., \chi_k)$;

ИИ $I_k(|X|_M) = \hat{I}(X) - m_0\Theta(X)$ и старшую k-ю цифру $x = \begin{cases} 0, & \text{если } \delta\Theta_{k-1}(X) = 1, \\ \hat{x} + \Theta_{k-1}(X), & \text{если } \delta\Theta_{k-1}(X) = 0, \end{cases}$ полиадического кода $\langle x_k\ x_{k-1} ... x_1 \rangle$ элемента $|X|_M$ диапазона $\mathbf{Z}_M$.

РИХ_МИМК.8. Завершить работу алгоритма.

Реализуемый в алгоритме РИХ_МИМК.1–РИХ_МИМК.8 инструментарий вспомогательного модуля m_0, открывающий принципиально новые возможности для расширения набора базовых ИХМК при разработке немодульных процедур, может быть обобщен и на вспомогательные модули, кратные модулю m_0, в частности, на модуль вида $2m_0$. Это позволяет оперировать не только в диапазонах $\mathbf{Z}_{\bar{2}M}$, $\mathbf{Z}_{\bar{M}}$, но и в диапазоне $\mathbf{Z}_{2M}$, в том числе на его составных компонентах $\mathbf{Z}_M$ и $\mathbf{Z}_{2M} \setminus \mathbf{Z}_M$.

Из алгоритма РИХ_МИМК.1–РИХ_МИМК.8 видно, что благодаря использованию кодовой избыточности вычислительная сложность расчетных соотношений для интервально-индексных характеристик $I_k(X)$, $\hat{I}(X)$, $J(X)$, а следовательно, и интервального номера $N(X)$ ЦЧ X в сравнении с неизбыточными аналогами [9; 10] существенно уменьшается. Получение в рамках алгоритмов РИХ.1–РИХ.5 и РИХ_1–РИХ_7 ИИ $I_k(X)$ ЦЧ X, заданного неизбыточным МК $(\chi_1, \chi_2, ..., \chi_k)$ требует $0{,}5(k^2 + 5k - 12)$ модульных операций (МО) и $0{,}5k(k - 1)$ таблиц для хранения вычетов. Соответствующие затраты на вычисление ИИ в МИМСС согласно теореме 6 составляют k МО и k таблиц для вычетов. Таким образом, коэффициенты повышения эффективности за счет использования минимальной избыточности в случае расчета ИИ принимают значения: $K_{\text{МО, ИИ}} = (k^2 + 5k - 12) / (2k)$ для числа МО и $K_{\text{Т, ИИ}} = (k - 1) / 2$ для количества необходимых таблиц. Например, при k = 8; 16; 32; 64 аналитические оценки дают $K_{\text{МО, ИИ}}$ = 6; 10,125; 18,3125; 34,40625 и $K_{\text{Т, ИИ}}$ = 3,5; 7,5; 15,5; 31,5.

Из приведенных данных ясно, что указаны показатели эффективности алгоритмических структур, базирующихся на ИИ, с увеличением числа k оснований МИМСС возрастают, асимптотически приближаясь к порогу k / 2. Именно это обстоятельство и является определяющим фактором, который обеспечивает версиям МИМА с преимущественным использованием интервально-индексных характеристик, приоритетные позиции, особенно в области быстрых вычислений на диапазонах больших чисел.

Заключение. Основные результаты представленной в настоящей статье разработки по проблематике оптимизации немодульных операций в МСС состоят в нижеследующем.

1. Для МИМСС сформирована интегрально-характеристическая база, которая оптимизирована по критериям вычислительной сложности и функциональным возможностям. Ключевыми ее составляющими являются интервально-индексные характеристики (ИИ, компьютерный ИИ и главный ИИ), минимальные ИХМК, а также интервально-модулярные формы ЦЧ.

2. Максимальный уровень уменьшения сложности времени реализации созданная интегрально-характеристическая база обеспечивает в классе немодульных процедур, которые требуют вычислений с использованием ИМФ чисел. Прежде всего, к таким процедурам относятся расширение МИМК, масштабирование, деление (общий случай), контроль ошибок и т. п.

3. Являясь симметрической ИХМК, интервальный индекс позволяет существенно упростить оперирование в симметричных диапазонах, в частности, операции детектирования знака числа и контроль переполнения. Ключевую роль при этом выполняет также и минимальная ИХМК, формируемая по базису $\{m_1, m_2, ..., m_{k-1}, m_0\}$. Таким образом, созданная интегрально-характеристическая база МИМСС может служить основой конфигураций МА, ориентированных как на диапазоны неотрицательных ЦЧ, так и на симметричные диапазоны.

4. На основе построенной интегрально-характеристической базы предложен новый высокоэффективный алгоритм расчета интегральных характеристик МИМК. В сравнении с неизбыточными аналогами [9; 10] данный алгоритм за счет использования минимальной кодовой избыточности обеспечивает сокращение временных затрат и затрат табличной памяти для вычислений, связанных с ИИ, соответственно в $K_{\text{МО, ИИ}} = (k^2 + 5k - 12) / (2k)$ и $K_{\text{Т, ИИ}} = (k - 1) / 2$ раз. При k = 8; 16; 32; 64 указанные аналитические оценки дают $K_{\text{МО, ИИ}}$ = 6; 10,125; 18,3125; 34,40625 и $K_{\text{Т, ИИ}}$ = 3,5; 7,5; 15,5; 31,5. С увеличением k приведенные показатели эффективности разработанного алгоритма возрастают, асимптотически приближаясь к порогу k / 2.

Список использованной литературы

1. *Червяков, Н. И.* Применение искусственных нейронных сетей и системы остаточных классов в криптографии / Н. И. Червяков. – М.: Физматлит, 2012. – 280 с.

2. Умножение и возведение в степень по большим модулям с использованием минимально избыточной модулярной арифметики / А. Н. Каленик [и др.] // Информационные технологии. – 2012. – № 4. – С. 37–44.

3. Применение таблично-сумматорной вычислительной технологии для позиционно-модулярного кодового преобразования по схеме Горнера / А. А. Коляда [и др.] // 1-ая Международная конференция «Параллельная компьютерная алгебра и её приложения в новых инфокоммуникационных системах»: сб. науч. тр. − Ставрополь: Издательско-информационный центр «Фабула», 2014. – С. 247–252.

4. *Schinianakis, D.* Multifunction recidue architectures for cryptography / D. Schinianakis, T. Stouraitis // IEEE Trans. Circuits and Syst. I. – 2014. – Vol. 61, N 4. – P. 1156–1169.

5. *Червяков, Н. И.* Реализация модулярного вейвлет-преобразования в нейросетевом базисе / Н. И. Червяков, П. А. Ляхов // Нейрокомпьютеры: разраб., применение. – 2011. – № 11. – С. 18–25.

6. *Червяков, Н. И.* Реализация КИХ-фильтров в системе остаточных классов / Н. И. Червяков, П. А. Ляхов // Нейрокомпьютеры: разраб., применение. – 2012. – № 5. – С. 15–24.

7. *Червяков, Н. И.* Проектирование КИХ-фильтров в системе остаточных классов с модулями специального вида / Н. И. Червяков, П. А. Ляхов // Нейрокомпьютеры: разраб., применение. – 2014. – № 9. – С. 52–60.

8. *Коляда, А. А.* Модулярные структуры конвейерной обработки цифровой информации / А. А. Коляда, И. Т. Пак. – Минск: Университетское, 1992. – 256 с.

9. *Коляда, А. А.* Интегрально-характеристическая база модулярных систем счисления / А. А. Коляда, А. Ф. Чернявский // Информатика. – 2013. – № 1. – С. 106–119.

10. *Коляда, А. А.* Интервально-индексный метод четного модуля для расчета интегральных характеристик кода неизбыточной МСС с симметричным диапазоном / А. А. Коляда, А. Ф. Чернявский // Докл. НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 1. – С. 38–45.

11. *Sengupta, Avik.* Redundant Number System Based Space-Time Block Codes / Avik Sengupta, Natarajan Balasobramariam // Phisycal communication. – 2014. – Vol. 12, N 9. – P. 1–15.

Поступило в редакцию 01.07.2015

Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **ноябрь–декабрь** **Том 59 № 6**

ФИЗИКА

УДК 530.12, 535

Е. А. ТОЛКАЧЕВ

КАЛИБРОВОЧНАЯ СВОБОДА УРАВНЕНИЙ МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ: ДВУХПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ПОДХОД

(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь
tea@dragon.bas-net.by

В рамках преметрической электродинамики показано, что макроскопические полевые уравнения инвариантны относительно обобщенных калибровочных преобразований типа Кабиббо–Феррари, частным случаем которых являются «преобразования Сердюкова–Федорова». Однако инвариантность полной системы уравнений, включающей линейные уравнения связи общего вида и потенциалы, имеет место только при выполнении дополнительного условия, которое найдено в наиболее общей форме.

Ключевые слова: калибровочные преобразования, уравнения макроскопической электродинамики, потенциалы, дифференциальные формы.

E. A. TOLKACHEV

GAUGE FREEDOM OF THE MACROSCOPIC ELECTRODYNAMICS EQUATIONS: THE TWO-POTENTIAL APPROACH

B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
tea@dragon.bas-net.by

Within the framework of premetric electrodynamics, it is shown that the macroscopic field equations are invariant under generalized gauge transformations of Cabibbo–Ferrari type, the special case of which are the “Serdyukov–Fedorov transformations”. However, the invariance of the complete system of equations, including the linear equations of general form and potentials, takes place only under the additional condition that has been found in most general form.

Keywords: gauge transformations, macroscopic electrodynamics equations, potentials, differential forms.

Введение. В последние полтора десятка лет возобновился интерес [1–5] к проблеме выбора наиболее адекватного вида материальных уравнений макроскопической электродинамики. При этом адекватность понимается в двух смыслах. В работах [1; 2], развивающих так называемый преметрический подход, требуется адекватность математическому аппарату теории при сохранении максимальной общности. В других статьях, например, в [3], во главу угла ставится адекватность уравнений связи физическим свойствам сред. Работы [4; 5] продолжают давнюю дискуссию [6] о возможности обоснования феноменологического вывода наиболее общих линейных уравнений связи на основе использования известной недоопределенности полевых уравнений макроскопической электродинамики, которая демонстрируется с помощью подстановок [6–8], которые автор именует «преобразования Сердюкова–Федорова». При этом физический смысл этих преобразований по-прежнему остается невыясненным.

В настоящей работе в рамках преметрического формализма показано, что согласованная система уравнений макроскопической электродинамики с линейными уравнениями связи общего вида инвариантна относительно обобщенных калибровочных преобразований типа Кабиббо

© Толкачев Е. А., 2015.

и Феррари [9], частным случаем которых являются «преобразования Сердюкова–Федорова». Указанная инвариантность возможна только при выполнении условия нулевого поля, которое найдено в наиболее общей форме, в микроскопическом пределе воспроизводящей известные выражения [9; 10].

Основная часть. Известно, что система уравнений макроскопической электродинамики состоит из 8 динамических уравнений относительно 12 неизвестных функций – индукций и средних полей, которые связаны 6 материальными уравнениями. В большинстве работ по макроскопике, включая и процитированные [4–8], не уделяется должного внимания переопределенности этой системы. Стандартное решение проблемы двух лишних уравнений достигается добавлением еще 6 уравнений и 4 неизвестных – определением полей через скалярный и векторный потенциалы, что обращает 4 полевых уравнения в тождества и уравнивает число уравнений и неизвестных функций – 16 на 16. Только это делает систему формально согласованной и открывает возможность для построения ее лагранжиана и исследования стандартными методами, включая нахождение сохраняющихся величин.

Поскольку отличительной чертой методов Ф. И. Федорова была ковариантность и максимальная общность, то уместно представить описанную конструкцию в преметрическом формализме [3], использующем язык дифференциальных форм. При этом фарадеевская пара уравнений для полей B, E записывается через внешнюю производную обычной 2-формы, а максвелловская – для H и D, как внешняя производная твистированной 2-формы. Напомним, что законы преобразования тензорных коэффициентов твистированных форм при замене координат включают дополнительное умножение на знак детерминанта якобиана, что позволяет сохранить инвариантность теории относительно отражений пространственных координат. Тогда полная система уравнений макроскопической электродинамики с линейными уравнениями связи общего вида выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} dF = d(E \wedge dt + B) = 0, \quad (\partial_{[k} F_{lm]} = 0), \\ dH = d(-H \wedge dt + D) = J, \quad (\partial_{[k} H_{lm]} = J_{klm}), \\ H = \kappa[F], \quad (H_{ij} = \kappa_{ij}{}^{lm} F_{lm}), \\ F = dA, \quad (F_{lm} = \partial_l A_m - \partial_m A_l), \end{gathered} \tag{1}$$

где все индексы пробегают значения от 1 до 4; $F = F_{lm} dx^l \wedge dx^m / 2$ – 2-форма напряженностей; $A = A_l \wedge dx^l$ – 1-форма потенциала; $H = H_{lm} dx^l \wedge dx^m / 2$ – твистированная 2-форма индукций; $J = J_{klm} dx^k \wedge dx^l \wedge dx^m / 6$ – твистированная 3-форма тока. Наконец, κ – $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$-форма материальных параметров, коэффициентами которой является антисимметричный по раздельным перестановкам верхних и нижних индексов материальный тензор $\kappa_{ij}{}^{lm}$. Очевидно, что предполагается локальное (1 + 3) расщепление четырехмерного дифференцируемого многообразия. Соответственно, E и H – пространственные 1-формы, а B и D – пространственные 2-формы, сопоставляемые полям и индукциям. Тензорная запись уравнений дана в круглых скобках.

Буква d в уравнениях обозначает операцию внешнего дифференцирования, обладающую замечательным свойством – $d^2 = 0$. В силу этого система (1) не изменяется, например, при стандартных калибровочных преобразованиях потенциала $A \to A + d\lambda$, где λ – 0-форма, т. е. скалярная дифференцируемая функция пространственных координат и времени. Не ограничивая общности можно подчинить потенциал, по крайней мере, одному калибровочному условию, например, потребовать $A_0 = 0$. Также нетрудно видеть, что два первых уравнения в (1) остаются неизменными при преобразованиях вида

$$F \to F' = F - dP, \quad H \to H' = H - dQ. \tag{2}$$

Расписывая (2) по компонентам в пространстве Минковского имеем лоренц-ковариантное обобщение «преобразований Сердюкова–Федорова»

$$\begin{gathered} \underline{E}' = \underline{E} + \dot{\underline{P}} + \mathrm{grad} P_0, \quad \underline{B}' = \underline{B} - \mathrm{rot} \underline{P}, \\ \underline{H}' = \underline{H} + \dot{\underline{Q}} + \mathrm{grad} Q_0, \quad \underline{D}' = \underline{D} + \mathrm{rot} \underline{Q}, \end{gathered} \tag{3}$$

которое в точности переходит в них в калибровке $P_0 = Q_0 = 0$. Слово «калибровка» здесь употреблено не случайно, поскольку из (1) следует стандартное определение полей

$$\underline{E} = -\dot{\underline{A}} - \mathrm{grad}A_0, \;\; \underline{B} = \mathrm{rot}\underline{A},$$

и очевидно, что первая строка (3) представляет собой сдвиг 4-потенциала на 4-вектор $(-P_0, -\underline{P})$. Легко видеть, что уже только одно это преобразование не может быть произвольным. Продемонстрируем это на простейшем случае. Пусть в калибровке $A_0 = 0$ калибровочные функции $\underline{P} = \pm\underline{A}$, что соответствует «преобразованиям Сердюкова–Федорова» – $\underline{E}' = \begin{matrix} 0 \\ 2\underline{E} \end{matrix}$, $\underline{B}' = \begin{matrix} 0 \\ 2\underline{B} \end{matrix}$. Преобразование, соответствующее верхнему знаку, бессмысленно тривиализует систему (1), поскольку из $F' = d(E' \wedge dt + B') = 0$ вытекает, что $H' = \kappa[F'] = -dQ$ является точной формой и, следовательно, замкнутой, тогда $J' = 0$. Нижний знак порождает двусмысленность. Подстановка $F' = d(E' \wedge dt + B') = 2F$ в (1) влечет за собой либо $H' = \kappa[F'] = 2H - dQ$ и переопределение внешних токов $J' = 2J$, либо $J' = J$ и тогда надо переопределять материальные параметры

$$H' = \kappa'[F'] \equiv \frac{1}{2}\kappa[2F] - dQ = H - dQ.$$

Никакой регулярной процедуры переопределения внешних токов и/или материальных тензоров не существует. Поскольку преобразования Сердюкова–Федорова являются подклассом преобразований потенциалов, то использование 8 независимых P- и Q-функций означает физически недопустимое увеличение числа степеней свободы электромагнитного поля, которое определяется как число независимых компонент потенциала. Радикальный выход состоит в ограничении класса функций градиентными преобразованиями $P = d\alpha, Q = d\gamma$, не порождающими преобразований полей и индукций. Однако необходимого эффекта можно достигнуть и с помощью более слабых ограничений, подчинив P- и Q-функции дополнительным связям, которые, как и в двухпотенциальном подходе [9; 10] к микроскопическим уравнениям Максвелла, будем называть условиями нулевого поля.

Для того чтобы найти их достаточно переписать (1) в виде четырех уравнений относительно 4-потенциала, которые собственно и описывают все явления макроскопической электродинамики

$$d\{\kappa[dA]\} = J. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (4) инвариантно относительно обобщенных калибровочных преобразований (2) $d\{\kappa[d(A - P)] + dQ\} = J$, только при условии

$$\kappa[dP] - dQ = 0. \tag{5}$$

Это и есть искомое условие нулевого поля в макроскопической электродинамике с линейными уравнениями связи общего вида. Уравнение (5) имеет не только упомянутые выше тривиальные решения $P = d\alpha, Q = d\gamma$. Действуя на него операцией внешнего дифференцирования, имеем $d\{\kappa[dP]\} = 0$, т. е. среди векторных функций $\underline{P}$ в пространстве Минковского нет, например, подчиняющихся условию $\underline{P} = \underline{A}$, если потенциал $\underline{A}$ является решением уравнения (4) с неравной нулю правой частью. Впрочем, в работах [4–8] отсутствуют внешние источники. Тогда система (1) принимает вид

$$dF = d(E \wedge dt + B) = 0, \; dH = d(-H \wedge dt + D) = 0, \;\; H = \kappa[F]. \tag{6}$$

Ее можно согласовать, требуя либо $F = dA$, либо $-H = dC$. Требование независимости описания от способа выбора потенциала опять приводит к условию нулевого поля

$$dC = \kappa[dA]. \tag{7}$$

Соответственно, преобразования (3) есть сдвиги потенциалов A и C на $(-P)$ и $(-Q)$. Различным средам соответствуют разные классы решений уравнения (7). Именно они могут рассматриваться в качестве аргумента в дискуссии о несводимости одних материальных уравнений к другим.

Соображения на эту тему, высказанные в [4; 5], основаны на некорректном сравнении симметрийных свойств полевых уравнений Ландау–Лифшица, в которые частично подставлены уравнения связи ($\underline{B} = \underline{H}$), с полевыми уравнениями без подстановки в них уравнений связи Федорова.

Вариант двухпотенциального подхода (6), (7) имеет хорошо изученный микроскопический предел [10]. В пространстве Минковского с координатами $(it, \underline{x})$ свободные уравнения Максвелла (6) в тензорной форме имеют вид ($\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$)

$$\partial_l \tilde{F}_{lm} = 0, \;\; \partial_l \tilde{H}_{lm} = 0, \;\; H_{lm} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{lmij}\tilde{F}_{ij},$$

где ε_{lmij} – абсолютно антисимметричный тензор; $\tilde{F}_{lm} = \frac{1}{2}\varepsilon_{lmij}F_{ij}$, $\tilde{\tilde{F}}_{lm} = -F_{lm}$. Первые два уравнения, очевидно, не изменяют своего вида при преобразованиях (3), однако третье уравнение – уравнение связи, имеющее в векторных обозначениях вид $\underline{B} = \underline{H}$, $\underline{E} = \underline{D}$, оставляет только функции, подчиняющиеся условию нулевого поля $\underline{B}(\underline{P}) = \underline{H}(\underline{Q})$, $\underline{E}(\underline{P}) = \underline{D}(\underline{Q})$. Вводя поочередно два потенциала – $F_{lm} = \partial_l A_m - \partial_m A_l$ или $H_{lm} = \partial_l C_m - \partial_m C_l$, вместо (7) имеем условие нулевого поля [10]

$$\partial_l C_m - \partial_m C_l = -\varepsilon_{lmij}\partial_i A_j. \tag{8}$$

Как известно [10], оно связывает две плоские электромагнитные волны. Следовательно, в силу линейности уравнений, ему удовлетворяет и две суперпозиции плоских волн.

Рассмотрим теперь бесконечную изотропную среду с отличными от нуля проницаемостями ε, μ. Как было впервые показано И. Е. Таммом [11], стандартные уравнения связи в покоящейся системе отсчета $\underline{B} = \mu\underline{H}$, $\underline{D} = \varepsilon\underline{E}$ переписываются в ней в ковариантном виде с помощью замены «$\kappa_{1212} = \mu$ (все остальные $\kappa_{12lm} = 0$) и $\kappa_{1414} = -\varepsilon^{-1}$ (все остальные $\kappa_{14lm} = 0$ и т. д.)». С помощью замены

$$\underline{B}' = \mu^{-1/2}\underline{B}, \;\; \underline{E} = \varepsilon^{1/2}\underline{E}, \;\; \underline{H}' = \mu^{1/2}\underline{H}, \;\; \underline{D}' = \varepsilon^{-1/2}\underline{D} \tag{9}$$

уравнения связи опять становятся тривиальными – $\kappa'_{1212} = 1$, $\kappa'_{1414} = -1$, а штрихованные поля удовлетворяют свободным уравнениям Максвелла, в которых скорость света равна $(\sqrt{\varepsilon\mu})^{-1}$. При этом условие нулевого поля формально будет иметь тот же вид (8) и те же решения – плоские волны, но распространяющиеся со скоростью $(\sqrt{\varepsilon\mu})^{-1}$.

Поскольку замена (9) не принадлежит к классу преобразований (3), то с помощью последних без ограничения калибровочных функций условием нулевого поля нельзя провести различие даже между двумя изотропными средами.

Для полноты отметим, что полная аналогия с подходом Каббибо и Феррари достигается при использовании максимально общего представления 2-формы при наличии метрики

$$F = f + dA + \delta\tilde{C},$$

где f – гармоническая 2-форма ($\Box f = 2^{-1}(d\delta + \delta d)f = 0$); δ – понижающий дифференциальный оператор, 1-форма A соответствует стандартному потенциалу; 3-форма $\tilde{C}$ – дуальна второму потенциалу. Этот случай будет рассмотрен отдельно.

Заключение. Во-первых, надо констатировать, что небрежение потенциалами – характерная черта подавляющего числа книг и учебников по макроскопической электродинамике. Как показано выше, это контрпродуктивно даже в чисто классической области. Во-вторых, нельзя не отметить, что эта работа в существенной мере могла быть выполнена еще на стадии подготовки материала для монографий [8] и [10]. Наконец, в контексте вышесказанного, апостериорное присвоение имени Ф. И. Федорова уже поименованным калибровочным преобразованиям выглядит сомнительным. Удручает также, что в методических заметках в УФН [4], заканчивающихся благодарностью ученику, как и в [5], трижды искажены фамилия и инициалы его учителя – Бориса Васильевича Бокутя.

Выражаю благодарность Л. М. Томильчику и Ю. А. Курочкину за полезные комментарии. Работа выполнена при частичной поддержке БРФФИ (грант № Ф14АРМ-029).

Список использованной литературы

1. *Hehl, F. W.* Spacetime metric from local and linear electrodynamics: a new axiomatic scheme / F. W. Hehl, Y. N. Obukhov // arXiv: gr-qc. 2005. – 0508024 v1. – P. 1–27.

2. *Itin, Y.* Backwards on Minkowski's road. From 4D to 3D Maxwellian electromagnetism / Y. Itin, Y. Friedman // arXiv: gr-qc. 2008. – 0807.2625 v1. – P. 1–19.

3. *Starke, R.* Functional Approach to Electrodynamics of Media / R. Starke, G. A. H. Schober // arXiv: cond-mat. mtrl-sci. 2015. – 1401.6800 v5. – P. 1–80.

4. *Виноградов, А. П.* К вопросу о форме материальных уравнений в электродинамике / А. П. Виноградов // УФН 2002. – Т. 172. – № 3. – С. 373–370.

5. *Виноградов, А. П.* Электродинамика композитных материалов / А. П. Виноградов // УРСС: Москва, 2001. – 205 с.

6. *Федоров, Ф. И.* Теория оптической активности кристаллов / Ф. И. Федоров // УФН. – 1972. – Т. 108, вып. 4. – С. 762–764.

7. *Бокуть, Б. В.* О феноменологической теории оптической активности / Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков // ЖЭТФ. – 1971. – Т. 61. – С. 1808–1813.

8. *Федоров, Ф. И.* Теория гиротропии / Ф. И. Федоров. – Минск: Наука и техника, 1974. – 456 с.

9. *Cabibbo, N.* Quantum electrodynamics with Dirac monopoles / N. Cabibbo, E. Ferrari // Nuovo Cimento. – 1962. – Vol. 23, N 6. – P. 1147–1154.

10. *Стражев, В. И.* Электродинамика с магнитным зарядом / В. И. Стражев, Л. М. Томильчик. – Минск: Наука и техника, 1975. – 333 с.

11. *Тамм, И. Е.* Собрание научных трудов / И. Е. Тамм. – Москва: Наука, 1975. – Т. I. – С. 19–67.

Поступило в редакцию 28.09.2015

Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **ноябрь–декабрь** **Том 59 № 6**

УДК 535.317; 681.7

Академик А. П. ШКАДАРЕВИЧ[1], Н. К. АРТЮХИНА[2]

О КЛАССИФИКАЦИОННЫХ ОСНОВАХ ПРОЦЕДУРЫ СТРУКТУРНОГО СИНТЕЗА ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

[1]Научно-технический центр «Лазеры в экологии, медицине и технологии» БелОМО, Минск, Беларусь
shkad@lemt.by
[2]Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь
art49@mail.ru

Представлены классификационные основы синтеза оптических систем: классификация оптических схем, модулей, элементов; их типы; каталогизация оптических систем; методика формализации знаний с помощью таблиц решений; индекс сложности оптической схемы и некоторые эвристические правила формализации перехода от требований технического задания к выбору элементной базы оптической системы.

Ключевые слова: оптотехника, зеркальные системы, коррекция аберраций, расчет оптических схем, объектив, сводка основных параметров системы, качество изображения.

A. P. SHKADAREVICH[1], N. K. ARTIOUKHINA[2]

CLASSIFICATION BASES OF THE STRUCTURAL SYNTHESIS OF OPTICAL SYSTEMS

[1] Scientific-technical center «LEMT», BelOMO, Minsk, Belarus
shkad@lemt.by
[2]Belarussian National Technical University, Minsk, Belarus
art49@mail.ru

Classification bases of the synthesis of optical systems are presented: a classification of optical schemes, modules, elements; their types; cataloguing optical systems; a method of formalization of knowledge by means of decision tables; an index of complexity of an optical scheme, and some heuristic rules of formalization of transition from requirements of a preliminary specification to a choice of the element base of an optical system.

Keywords: calculation optics, mirror systems, aberration correction, optical design, the objective, system summary graphic, image quality.

Введение. Беларусь относится к числу тех немногих стран, где проводятся работы по всему циклу создания оптического прибора, включая расчеты оптических систем (ОС) [1]. В настоящее время произошли большие изменения в методах расчета ОС, связанные, в основном, с компьютеризацией проектирования. Программные комплексы по расчету оптики, обладая большими функциональными возможностями, не охватывают весь спектр задач, возникающих в процессе производства. Этапы, требующие творческого подхода, остаются прерогативой оптика-расчетчика ОС.

Удовлетворение технических требований, предъявляемых к новым разработкам, обеспечивается различными принципиальными схемами, что свидетельствует о существовании нескольких возможных решений. Окончательный выбор базовой схемы ОС предполагает более детальный сравнительный анализ по светосиле, размеру полезного поля изображения, контрасту, массогабаритным характеристикам, точностным требованиям к оптическим поверхностям и их взаимному расположению; имеет определяющее значение для успешной реализации поставленной задачи. В настоящее время проблема формализации процесса проектирования ОС, основой

© Шкадаревич А. П., Артюхина Н. К., 2015.

которой являются вопросы классификации и составления каталогов в связи с большими архивами рассчитанных ОС, очень актуальна.

Цель работы – установить классификационный подход к выбору исходной системы (стартовой точки проектирования); определить некоторые эвристические правила формализации перехода от требований технического задания к выбору элементной базы оптической системы.

Проектирование ОС сочетает формализованные процедуры расчетного характера (расчет хода лучей и др.) и неформализованные (выбор поверхностей, оптических элементов, отдельных характеристик, согласование требований к отдельным элементам). Моделирование оптики разделяют на три основных процедуры: синтез, анализ и оптимизация.

Основная часть. Процедура синтеза ОС (формирование конструкционной модели) использует основные положения теории композиции, под которой можно понимать широкий подход к созданию той или иной системы, допускающий варианты взаимного перемещения элементов в оптической схеме [2]. В процессе выполнения процедуры возможны любые методы генерирования первоначальных значений конструктивных параметров (радиусов оптических поверхностей r, осевых расстояний d, показателей преломления оптических сред n) по заданным оптическим характеристикам (фокусному расстоянию f', масштабу изображения β, суммам Зейделя и т. д.).

Процедуру можно разделить на два уровня: структурный и параметрический синтез. Структурный синтез, в результате которого определяется количество и вид компонентов, составляющих ОС, является в настоящее время весьма эвристической операцией. В процессе параметрического синтеза определяются конкретные числовые значения параметров уже созданной структуры. Параметрический синтез и последующая оптимизация параметров ОС могут выполняться практически в любой современной программной среде типа Opal, Zemax, Code V и др. Например, в ПП Synopsys существует специальная опция «solves», которая по заданным типам поверхностей, толщине линз, расстояниям между ними и оптическим материалам рассчитывает недостающие параметры. Программы оптимизации способны привести заданную оптическую систему к ближайшей оптимальной конфигурации с помощью минимизации определенной оценочной функции. Программные среды представляют пользователям лишь некоторый ограниченный набор возможностей поиска стартовых точек, например, каталоги готовой продукции [3], патентная литература [4]. Для оптической системы любой степени сложности существует множество локальных минимумов оценочной функции; удачный выбор исходной системы на ранних этапах разработки в значительной мере сокращает общее время проектирования.

Предлагается оптимальная структура построения оптической схемы, начиная с одного базового элемента, а затем ее усложнения путем добавления необходимых дополнительных коррекционных элементов. Данный подход ограничивает появление в оптической схеме «лишних» элементов, так как введение в схему очередного элемента обуславливается его функциональным назначением. Важным преимуществом предлагаемого подхода является возможность рассмотрения значительного количества вариантов схем. Задача выбора стартовой точки проектирования решается в виде структурной схемы, представленной как последовательность оптических элементов с указанием их типа и взаимного расположения, которая может быть названа «формулой структурного синтеза объектива» [5]. Формула структурного синтеза несет в себе информацию о количестве, взаимном расположении и типах поверхностей оптических элементов. В качестве элементной базы выбираются оптические элементы с известными свойствами и определенными аберрациями. Задача моделирования оптики решена, если получены формулы структурного синтеза, пригодные для дальнейших манипуляций с ними: определения параметров ОС (параметрический синтез), введения найденных параметров в специализированную программную среду, результатом работы которой и будет оптическая схема, удовлетворяющая требованиям технического задания.

Процедура синтеза начинается с построения классификации оптических систем. Существует множество различных видов классификаций. Наиболее общая компьютерная классификация выполнена по относительному расположению предмета и изображения ОС [6]: предмету (изображению), находящемуся на конечном расстоянии от ОС, присваивается шифр «1», в случае

бесконечности – шифр «0». Она включает четыре класса систем: микроскопы «I–0»; телескопические системы «0–0»; фотообъективы «0–I»; проекционные системы «I–I». При более подробном рассмотрении в каждом из этих классов обнаруживается множество подклассов, которые определяются уточненными классификациями (класс фотообъективов «0–I» можно разделить на $3^7 = 2187$ подклассов и т. д.).

ОС (объекты интеллектуальной собственности) классифицируются в соответствии с принципами, принятыми в патентной литературе. Анализ патентной документации, которая представляет собой исключительно ценный источник информации, необходим для определения уровня техники и новизны создаваемой ОС, хотя полная информация, представляемая в патентах, избыточна для конструкторов, специализирующихся на расчете ОС.

Кроме того, для оценки каждого класса ОС целесообразно применять два вида характеристик: *технические*, которые оперируют с конкретными значениями физических величин и *обобщенные,* необходимые для использования в компьютерном моделировании в различных программных средах.

Классификация схем и модулей необходима для создания базы данных, т. е. каталогизации ОС. Под оптическим модулем будем понимать исторически сложившиеся схемные решения, которые во многих случаях получили имена собственные, обычно по имени изобретателя или числу компонентов. Модули могут использоваться как самостоятельно, так и в составе более сложной оптической схемы. В работе [7] рассмотрен аспект создания каталога (библиотеки) оптических модулей различных классов, встроенного в конфигурацию компьютерного пакета по расчету оптики Opal; предложен алгоритм и установлен путь в архив с проверкой параксиальных характеристик. Такой каталог позволяет наилучшим образом выбирать базовые схемы при минимальном времени на разработку.

В работе [8] представлены разработанные каталоги, содержащие информацию о всех возможных зеркальных схемах в виде таблиц и графиков. Составленные параметрические таблицы позволяют одновременно проанализировать характеристики зеркальных систем, выявить их предельные возможности и сформулировать рекомендации по выбору оптимального исходного варианта для решения конкретной задачи. Таблицы решений позволяют упростить процесс формализации знаний, сведя его к нескольким типовым шагам. К примеру, в работе [9] для описания каталога двухзеркальных систем предложен принцип их построения по ходу 1-го параксиального луча, позволяющий найти все возможные конструкции с действительным или мнимым эквивалентным фокусом $F'_{\text{экв}}$.

Линзовые и зеркальные элементы предлагается классифицировать по различным оптическим параметрам: значению оптической силы, известным аберрационным свойствам, форме поверхности, типу асферизации поверхностей, функциональному назначению и т. д. Накопленный опыт проектирования ОС позволяет выделять ряд малоаберрационных оптических элементов и формулировать условия их применения.

Дальнейшее исследование и классификацию оптических элементов предлагается проводить в области схемотехники ОС (установление кодировки элементов и модулей, описания схематических изображений и т. д.). Примеры некоторых кодировок зеркальных систем приведены в [10].

Анализ и формализация вышеприведенного материала позволили установить соответствующие *технические аспекты классификации*:

классификация оптических систем, модулей и элементов; их типы;

каталогизация оптических модулей ОС;

методика формализации знаний с помощью таблиц решений;

классификационные параметры ОС; индекс сложности оптической схемы.

Важной характеристикой, определяющей выбор исходных схем ОС, является индекс сложности (G), который описывается алгебраической суммой чисел, представляющих собой обобщенные характеристики (классификационные параметры). К примеру, для зеркальных систем имеем сумму параметров (A – светосила системы, Y – поле зрения, F – фокусное расстояние, Q – качество изображения (степень аберрационной коррекции), E – центральное экранирование):

$$G = A + Y + F + Q + E.$$

Обобщенные характеристики определяют соответствующие группы условий (по оптическим характеристикам, назначению ОС, ее конструктивным особенностям). Каждое из перечисленных условий разделим на три диапазона значений и обозначим индексами «0», «1» и «2», которые можно использовать в таблице решений.

Индекс сложности может изменяться в пределах от 0 до 10, при этом «0» соответствует самой простой оптической схеме, а «10» – максимально сложной. Исходя из накопленного опыта, будем считать зеркальную ОС сложной, если индекс больше 5. Для реализации сложных оптических систем обычно требуется создание принципиально нового схемного решения, которое в дальнейшем может быть запатентовано. По совокупности индексов диапазонов в соответствии со значениями каждой из характеристик устанавливают возможную степень сложности в определенных пределах или коэффициенты добротности.

Приведем классификацию зеркальных систем по типу схемных решений и оптическим параметрам с учетом индексов сложности (таблица).

Классификация зеркальных ОС по обобщенным характеристикам

Схемное решение	Степень затенения апертуры, E	Фокусное расстояние f' (м), F	Относительное отверстие $D : f'$, A	Угловое поле 2ω, Y
«0» Центрированная схема	«0» С центральным экранированием	«0» Короткофокусные $f' < 0{,}7$	«0» С малой светосилой $D : f' < 1 : 8$	«0» Узкопольные $2\omega < 30'$
«1» Условно децентрированная схема	«1» С малым центральным экранированием (<5 %)	«1» Длиннофокусные $0{,}7 < f' < 5$	«1» Светосильные $1 : 8 < D : f' < 1 : 2$	«1» Нормальные $30' < 2\omega < 5°$
«2» Децентрированная схема	«2» Без центрального экранирования	«2» Осободлиннофокусные $f' > 5$	«2» Особосветосильные $D : f' > 1 : 2$	«2» Широко угольные $2\omega > 5°$

Заключение. В сообщении рассмотрена структура классификационных подходов для анализа характеристик, предельных возможностей и формулировки рекомендаций по выбору базового модуля, который проводится на основе эвристического опыта с учетом оптических характеристик, конструктивных условий, назначения, коррекционных возможностей и последующей оптимизации. Установлен классификационный подход к выбору стартовой точки проектирования.

Рассмотрены основы структуры построения оптической схемы, ограничивающие появление в оптической схеме «лишних» элементов. Особенностью является возможность начала структуры оптической схемы с установленного базового модуля и последующего ее усложнения путем добавления необходимых дополнительных коррекционных элементов. Определены технические аспекты классификации.

Классификационный подход к каталогам ОС позволит служить одним из основных факторов сокращения сроков новых разработок. Он может использоваться не только отдельными специалистами инженерами-оптиками; большинство оптических компаний рано или поздно приходят к необходимости создания архивов своих разработок и классификации этой информации.

Список использованной литратуры

1. Современные оптико-электронные комплексы как результат внедрения достижений в области оптики / М. М. Мирошников [и др.] // Оптика XXI век: матер. 6-го Междунар. оптического конгресса, Санкт-Петербург, 18–21 окт. 2010: в 3 т. – СПб., 2010. – Ч. 1. – С. 2–6.

2. *Русинов, М. М.* Композиция оптических систем / М. М. Русинов. – Л.: Машиностроение, 1989.

3. Национальный интернет-портал Республики Беларусь [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://en.wikipedia.org/wiki/Edmund_Scientific _Corporation.

4. Национальный интернет-портал Республики Беларусь [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://dictionary.reference.com/ browse/europatent.

5. *Васильев, В. Н.* Основы проектирования экспертных систем компоновки объективов / В. Н. Васильев, И. Л. Лившиц, Д. И. Муромцев. – СПб.: «Наука», 2012.

6. *Артюхина, Н. К.* Теория и расчет оптических систем: учеб. пособие / Н. К. Артюхина; Мин-во образования Респ. Беларусь. – Минск: БНТУ, 2004.

7. *Артюхина, Н. К.* Технические аспекты классификации и каталогизации оптических систем / Н. К. Артюхина, В. А. Марчик // Приборостроение 2014: матер. 7-й МНТК, Минск, 19–21 нояб. 2014 г. / Белорус. нац. техн. ун-т. – Минск, 2014. – С. 240–242.

8. *Артюхина, Н. К.* Теория, методы проектирования и расчет зеркальных систем / Н. К. Артюхина. – Минск: БНТУ, 2009.

9. *Артюхина, Н. К.* Оптотехника двухзеркальных анастигматов / Н. К. Артюхина // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2012. – № 1. – С. 105–111.

10. *Артюхина, Н. К.* Классификация и аберрационный анализ зеркальных анастигматов с монолитом из двух зеркал / Н. К. Артюхина // Вестн. НТУУ «КПИ». Сер. Приборостроение. – 2014. – Вып. 47. – С. 44–52.

Поступило в редакцию 10.08.2015

Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **ноябрь–декабрь** **Том 59 № 6**

УДК 535.37::621.315.592::(661.865.5+661.866.1)

М. С. ЛЕОНЕНЯ[1], Е. В. ЛУЦЕНКО[1], Н. В. РЖЕУЦКИЙ[1], В. Н. ПАВЛОВСКИЙ[1], Г. П. ЯБЛОНСКИЙ[1], Т. Г. НАГИЕВ[2], Б. Г. ТАГИЕВ[2], С. А. АБУШОВ[2], О. Б. ТАГИЕВ[3]

ФОТОЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ В ВИДИМОЙ ОБЛАСТИ СПЕКТРА АКТИВИРОВАННОГО ТРЕХВАЛЕНТНЫМИ ИОНАМИ ПРАЗЕОДИМА ТИОГАЛЛАТА КАЛЬЦИЯ В ИНТЕРВАЛЕ ТЕМПЕРАТУР 10–300 К

[1]Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь
max.leanenia@gmail.com; e.lutsenko@ifanbel.bas-net.by; m.rzheutski@ifanbel.bas-net.by; v.pavlovskii@ifanbel.bas-net.by; g.yablonskii@ifanbel.bas-net.by
[2]Институт физики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан
tural@nagiyev.net; bahadur34@mail.ru; said_abushov@yahoo.com
[3]Филиал МГУ им. М. В. Ломоносова в г. Баку, Баку, Азербайджан
oktay58@mail.ru

Изучена фотолюминесценция (ФЛ) халькогенидного полупроводникового соединения $CaGa_2S_4:Pr^{3+}$ в интервале температур 10–300 К при возбуждении лазерными импульсами наносекундной длительности на длине волны 456 нм. Спектр ФЛ состоит из серии интенсивных линий на 494, 631, 654 и 741 нм, обусловленных электронными переходами в ионах празеодима с уровня $^3P_0$ на $^3H_4$, $^3H_6$, $^3F_2$ и $^3F_4$ соответственно. Установлено, что повышение концентрации ионов празеодима в $CaGa_2S_4$ с 3 до 7 ат. % приводит к двукратному возрастанию интегральной интенсивности ФЛ. Температурное тушение ФЛ соединения $CaGa_2S_4:Pr^{3+}$ в диапазоне 10–300 К составило всего лишь 50 и 75 % для 7 и 3 ат. % празеодима соответственно. Установлено, что при 10 К временные постоянные затухания наиболее интенсивных линий ФЛ находятся в интервале τ_e = 3,5–4,5 мкс с незначительной по вкладу быстрой компонентой длительностью около 1 мкс при 300 К. С повышением температуры от 10 до 300 К наблюдается сокращение времен затухания не более чем на 0,1 мкс и появление в кинетиках затухания ФЛ быстрой компоненты длительностью от 2,15 до 1,1 мкс в интервале от 220 до 300 К.

Ключевые слова: тиогаллат кальция, празеодим, фотолюминесценция, редкоземельный элемент, температурное тушение.

M. S. LEANENIA[1], E. V. LUTSENKO[1], M. V. RZHEUTSKI[1], V. N. PAVLOVSKII[1], G. P. YABLONSKII[1], T. G. NAGHIYEV[2], B. G. TAGIEV[2], S. A. ABUSHEV[2], O. B. TAGIEV[3]

PHOTOLUMINESCENCE OF CALCIUM THIOGALLATE ACTIVATED BY TRIVALENT PRASEODYMIUM IONS IN THE TEMPERATURE RANGE 10–300 K

[1]B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
max.leanenia@gmail.com; e.lutsenko@ifanbel.bas-net.by; m.rzheutski@ifanbel.bas-net.by; v.pavlovskii@ifanbel.bas-net.by; g.yablonskii@ifanbel.bas-net.by
[2]Institute of Physics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan
tural@nagiyev.net; bahadur34@mail.ru; said_abushov@yahoo.com
[3]M. V. Lomonosov department of MSU in Baku, Baku, Azerbaijan
oktay58@mail.ru

The photoluminescence (PL) of the chalcogenide semiconductor compound $CaGa_2S_4:Pr^{3+}$ was studied in the temperature range 10–300 K under nanosecond pulsed laser excitation at 456 nm. The PL spectrum consists of a number of intense lines at 494, 631, 654 and 741 nm, formed by electronic transitions in praseodymium ions from $^3P_0$ to $^3H_4$, $^3H_6$, $^3F_2$ and $^3F_4$ levels, respectively. It was found that the rise in the concentration of praseodymium ions in $CaGa_2S_4:Pr^{3+}$ from 3 to 7 at. % resulted in a double increase of the PL intensity. Temperature quenching only by 50 and 75 % of the PL intensity of $CaGa_2S_4:Pr^{3+}$ with 7 and 3 at. % Pr^{3+} ions concentration, respectively, was obtained in the range 10–300 K. It is shown that at 10 K the decay time constants of the most intense lines of the PL are between 3.9–4.8 μs. The decrease of the PL decay time constants by less than 0.1 μs with increasing the temperature up to 300 K and the appearance of a fast component with a duration constant of about 2.15–1.1 μs in the temperature range 220–300 K were obtained.

Keywords: calcium thiogallate, praseodymium, photoluminescence, rare earth element, temperature quenching.

Введение. Исследование влияния температуры на интенсивность, спектральный состав и кинетику свечения ионов редкоземельных элементов (РЗЭ) в различных полупроводниковых матрицах позволяет получить важную информацию о пригодности новых люминофоров для их использования в светодиодах и лазерных источниках излучения широкого диапазона спектра. Перспективной матрицей, способной содержать большие концентрации ионов РЗЭ, является тиогаллат кальция ($CaGa_2S_4$). Так, в литературе имеются работы по исследованию люминесцентных свойств соединения $CaGa_2S_4$, активированного ионами Eu^{2+}, Ce^{3+}, Er^{3+} [1–5]. Разработаны высокоэффективные люминофоры желтого свечения с максимумом на 555 нм на основе тиогаллата кальция, активированного ионами Eu^{2+} [2; 3]. Они демонстрируют высокую температурную стабильность интенсивности, положения и формы спектра, а также линейность интенсивности ФЛ в широком интервале уровней импульсного оптического возбуждения вплоть до 10^4 Вт/см^2 [3]. Спектры ФЛ активированного ионами Ce^{3+} тиогаллата кальция состоят из двух полос около 465 и 515 нм в сине-зеленой области [4]. Видимое свечение ионов эрбия в $CaGa_2S_4$ характеризуется набором интенсивных линий в зеленой и красной областях спектра [1].

В литературе представлено всего лишь несколько работ [1; 5], посвященных изучению фотолюминесценции (ФЛ) соединения $CaGa_2S_4$, активированного ионами Pr^{3+}, в которых наблюдался линейчатый спектр ФЛ в сине-зеленой и красной областях спектра. Однако детального изучения влияния температуры на спектры и интенсивности полос и линий люминесценции, а также кинетик свечения различных линий в широком интервале температур не проводилось.

В последнее время в литературе появились также работы по успешному получению генерации лазерного излучения в оранжевой и красной областях спектра на переходах в ионе празеодима в различных широкозонных полупроводниковых матрицах при накачке непрерывным излучением синих InGaN-лазеров [6; 7]. Это способствует повышению практического интереса к детальному изучению фотолюминесцентных свойств соединения $CaGa_2S_4$:Pr^{3+} и выявлению перспектив его использования в качестве лазерных активных сред. Для установления возможности использования данного соединения в качестве активных сред и люминофоров для светоизлучающих приборов необходимо изучение стабильности его спектров и интенсивностей отдельных линий в широком интервале температур и уровней возбуждения, а также времен жизни наиболее важных электронных переходов. В настоящей работе представлены результаты изучения влияния температуры на спектры, интенсивность и кинетику фотолюминесценции в видимой области спектра поликристаллических порошков $CaGa_2S_4$:Pr^{3+}.

Материалы и методы исследования. Соединения $CaGa_2S_4$:Pr^{3+} были синтезированы твердофазной реакцией из бинарных компонентов CaS и Ga_2S_3, взятых в стехиометрических соотношениях. Активация ионами Pr^{3+} до уровня в 3 и 7 ат. % проводилась внесением в шихту рассчитанных порций фторида празеодима. Исходная смесь бинарных компонентов помещалась в кварцевую ампулу, откаченную впоследствии до 10^{-4}–10^{-5} мм рт. ст. Синтез проводился при 1000 °С в течение одного часа с последующим 10-часовым отжигом при 800 °С. После синтеза проводился дополнительный отжиг в атмосфере аргона с сероводородом. Синтезированные поликристаллы были измельчены в планетарной шаровой мельнице. Экспериментальные образцы изготовлены нанесением слоев (толщиной порядка 500 мкм) полученных микрокристаллических порошков $CaGa_2S_4$:Pr^{3+} на кварцевые пластинки.

Спектры возбуждения фотолюминесценции (ВФЛ) образцов $CaGa_2S_4$:Pr^{3+} измерялись при возбуждении монохроматизированным излучением ксеноновой лампы при комнатной температуре. Регистрация при этом осуществлялась с помощью монохроматора с фотоэлектронным умножителем, сигнал с которого поступал на синхронный усилитель и оцифровывался. Температурное тушение и кинетики затухания ФЛ в интервале 10–300 К анализировалось по интегральным и разрешенным во времени спектрам свечения помещенных в гелиевый криостат образцов $CaGa_2S_4$:Pr^{3+} при возбуждении излучением второй гармоники перестраиваемого Ti:Al_2O_3 лазера с длительностью импульсов 15 нс и частотой следования 10 Гц. Плотность мощности возбуждения составляла 50 кВт/см^2. Интегральные спектры свечения регистрировались спектрометром, оснащенным линейкой элементов с последовательной зарядовой связью. В случае измерения разрешенных во времени спектров излучение с образцов фокусировалось на вход монохромато-

ра и затем передавалось на стрик камеру. Спектральное и временное разрешение в проведенных экспериментах было 0,07 нм и 0,1 мкс соответственно.

Результаты и их обсуждение. Нелегированный тиогаллат кальция обладает слабым широкополосным свечением в зеленой области с максимумом вблизи 500 нм. Активация соединения $CaGa_2S_4$ ионами празеодима с массовой долей 3 и 7 ат. % приводит к появлению ФЛ в диапазоне длин волн 470–760 нм, характеризующейся набором линий, наиболее интенсивные из которых расположены на 494, 631, 654 и 741 нм и, следовательно, обусловлены свечением ионов Pr^{3+} (рис. 1). Ширина линий в спектрах ФЛ на половине интенсивности колеблется от 2 до 4,5 нм. Повышение доли содержания ионов празеодима в $CaGa_2S_4$ с 3 до 7 ат. % приводит к двукратному возрастанию интегральной интенсивности ФЛ, за исключением падения интенсивности свечения на 10 % в окрестности 611 нм.

В спектрах возбуждения ФЛ на длине волны 494 нм соединения $CaGa_2S_4$:Pr^{3+} при температуре 300 К присутствует широкая полоса в диапазоне 260–360 нм с максимумом около 325 нм и интенсивная узкая линия на 456 нм (рис. 1, вставка, переход *1′*). Полоса в спектрах ВФЛ около 325 нм типична по форме и положению для нелегированного тиогаллата кальция. Возбуждение в эту полосу приводит к возникновению слабого свечения в зеленой области спектра. Следовательно, в спектрах ВФЛ активированного ионами празеодима соединения $CaGa_2S_4$ данная полоса обусловлена поглощением излучения накачки полупроводниковой матрицей тиогаллата кальция и последующей передачей энергии возбуждения ионам празеодима. Максимум в спектрах возбуждения фотолюминесценции (ВФЛ) $CaGa_2S_4$:Pr^{3+}, при регистрации на 494 нм, приходится на длину волны 456 нм. С ростом концентрации ионов Pr^{3+} до 7 ат. % интенсивность линии на 456 нм в спектрах ВФЛ увеличивается по отношению к интенсивности возбуждения на 325 нм, что приводит к более эффективному возбуждению ФЛ через переходы в ионах Pr^{3+}.

Основываясь на результатах, представленных в [1; 5–7] по изучению свечения ионов празеодима в различных матрицах, в том числе и в тиогаллате кальция, линейчатый спектр ФЛ $CaGa_2S_4$:Pr^{3+} в диапазоне длин волн 470–760 нм можно связать с электронными переходами в ионе Pr^{3+}, детальная схема которых представлена на вставке рис. 1. Поглощение на длине волны 456 нм (переход *1′*) соответствует прямому возбуждению носителей с уровня $^3H_4$ на уровень $^3P_2$ ионов Pr^{3+} с последующей безызлучательной релаксацией на уровни $^3P_1$, $^3P_0$ и $^1D_2$.

Электронные переходы с уровня $^3P_0$ на $^3H_4$, $^3H_6$, $^3F_2$ и $^3F_4$ формируют группу наиболее интенсивных линий в спектре ФЛ соединения $CaGa_2S_4$:Pr^{3+} на длинах волн 494 нм (*1*), 631 нм (*4*), 654 нм (*5*) и 741 нм (*7*) соответственно. На порядок более слабое свечение на длинах волн 537 нм (*2*) и 688 нм (*6*) обусловлено переходами с уровня $^3P_1$ на $^3H_5$ и $^3F_3$ соответственно, а на 611 нм (*3*) – переходом $^1D_2 \rightarrow {}^3H_4$. Интенсивность свечения за счет электронного перехода $^1D_2 \rightarrow {}^3H_4$ подвержена концентрационному тушению при повышении доли ионов празеодима в $CaGa_2S_4$ с 3 до 7 ат. %.

Температурное тушение ФЛ соединения $CaGa_2S_4$:Pr^{3+} анализировалось по спектрам свечения при возбуждении излучением на длине волны 456 нм, т. е. при прямом возбуждении ионов празеодима через электронный переход $^3H_4 \rightarrow {}^3P_2$ (рис. 2). Интегральная по диапазону 470–760 нм интенсивность ФЛ соединения $CaGa_2S_4$:Pr^{3+} с массовой долей ионов празеодима 7 ат. % оказалась подвержена тушению всего лишь на 50 % во всем температурном интервале от 10 до 300 К. Для содержания ионов Pr^{3+} в 3 ат. % тушение ФЛ в указанном температурном интервале составило 75 %. В температурном диапазоне 10–300 К соединение $CaGa_2S_4$:Pr^{3+} демонстрирует исключительно высокую стабильность положения спектральных линий: $\Delta\lambda < 0{,}1$ нм.

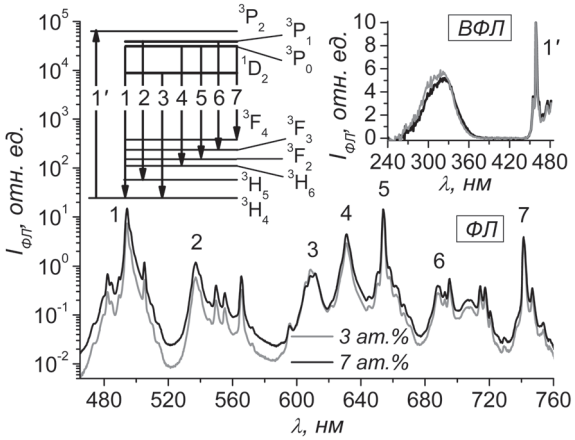


Рис. 1. Спектры ФЛ $CaGa_2S_4$:Pr^{3+} при температуре 300 К и возбуждении на длине волны 456 нм для двух концентраций ионов Pr^{3+} – 3 и 7 ат. %. На вставке слева представлена схема электронных переходов в ионах Pr^{3+} (цифрами указаны переходы, соответствующие линиям в спектрах ФЛ и ВФЛ), справа – спектры ВФЛ при 300 К и регистрации на длине волны 494 нм (нормированы по интенсивности на 456 нм)

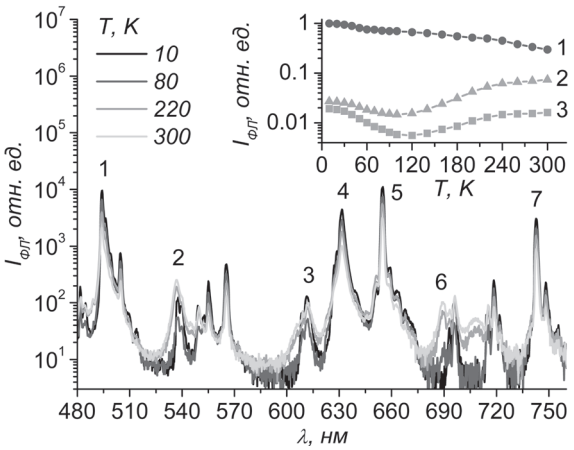


Рис. 2. Спектры ФЛ $CaGa_2S_4:Pr^{3+}$ (7 ат. %) в интервале температур 10–300 К и возбуждении на длине волны 456 нм. На вставке показаны зависимости интегральной интенсивности свечения линий *1*, *2* и *3* от температуры

Интенсивность ФЛ на длине волны 494 нм, определенная интегрированием в узкой окрестности максимума, уменьшается не более чем на 54 % при повышении температуры от 10 до 300 К (рис. 2, вставка, кривая *1*). Ход зависимостей интегральных интенсивностей ФЛ на длинах волн 631 нм (*4*), 654 нм (*5*), 741 нм (*7*) и 494 нм (*1*) в точности совпадает с кривой температурного тушения ФЛ на 494 нм, т. е. группа линий, формируемых электронными переходами с уровня $^3P_0$ на $^3H_4$, $^3H_6$, $^3F_2$ и $^3F_4$, имеет одинаковые зависимости интенсивности ФЛ от температуры. Как показано на рис. 2, зависимости интегральной интенсивности ФЛ на порядок более слабых линий на длинах волн 537 нм (кривая *2*) и 611 нм (кривая *3*) от температуры характеризуются резким спадом в диапазоне от 10 до 120 К с выходом на минимальное значение при 120 К и ростом в интервале от 120 до 300 К. В результате, интенсивность свечения на 537 нм (кривая *2*) при 300 К в три раза выше величины при 10 К, а на 611 нм (кривая *3*) при 300 К равна значению при 10 К. Тем не менее, вклад роста интенсивности свечения на 537 и 611 нм в интервале от 120 до 300 К в общую интегральную ФЛ соединений $CaGa_2S_4:Pr^{3+}$ в диапазоне 470–760 нм незначителен.

Обнаруженные различия температурного тушения ФЛ соединения $CaGa_2S_4:Pr^{3+}$ в интервале 10–300 К на отдельных линиях около 494, 537 и 611 нм могут быть вызваны изменениями в процессах безызлучательной релаксации с уровня $^3H_4$ на уровни $^3P_1$, $^3P_0$ и $^1D_2$.

Для определения влияния температуры на кинетики затухания ФЛ соединений $CaGa_2S_4:Pr^{3+}$ были измерены карты спектрально-временного распределения свечения при температурах 10, 80, 220 и 300 К и возбуждении излучением наносекундной длительности на длине волны 456 нм (рис. 3, вставка). При температурах 10 и 80 К все линии в спектрах ФЛ $CaGa_2S_4:Pr^{3+}$ с массовой долей ионов празеодима 3 и 7 ат. % затухают моноэкспоненциально с постоянной времени τ_e в интервале 3,9–4,8 мкс. Для ФЛ на длине волны 494 нм (переход $^3P_0 \rightarrow {}^3H_4$) при температурах 10 и 80 К постоянные времени затухания τ_e составили 4,73 и 4,7 мкс соответственно (рис. 3). При 220 К в кинетике затухания ФЛ на 494 нм обнаружена быстрая компонента со временем 2,15 мкс на фоне медленной с характерным временем 4,7 мкс. Повышение температуры до 300 К сопровождается уменьшением времени быстрой компоненты до 1,1 мкс с ростом ее вклада в кинетику затухания при значении постоянной времени затухания медленной компоненты 4,65 мкс (рис. 3). Идентичное поведение кинетик затухания ФЛ с ростом температуры характерно для линий на 631, 654 и 741 нм.

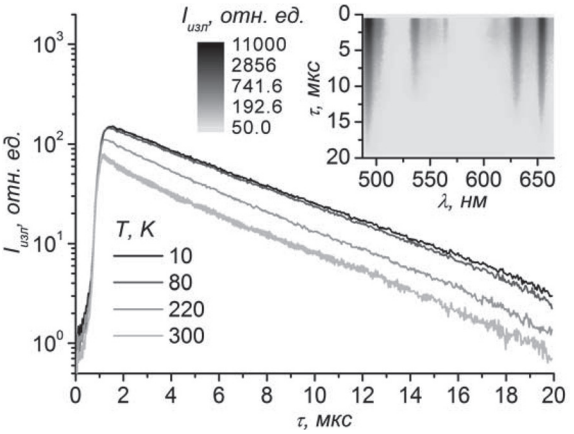


Рис. 3. Кинетики затухания ФЛ $CaGa_2S_4:Pr^{3+}$ (7 ат. %) на длине волны 494 нм при температурах 10, 80, 220 и 300 К. На вставке – карта спектрально-временного распределения ФЛ $CaGa_2S_4:Pr^{3+}$ (7 ат. %) при возбуждении на 456 нм и температуре 10 К

Таким образом, повышение температуры соединения $CaGa_2S_4:Pr^{3+}$ проявляется в небольшом сокращении времени затухания: меньше 0,1 мкс. При температурах выше 220 К становится заметным появление быстрой компоненты в кинетиках ФЛ $CaGa_2S_4:Pr^{3+}$, что может быть связано с термической активацией каналов безызлучательной рекомбинации. Более детальное обсуждение данного эффекта будет возможно после проведения серии планируемых исследований по влиянию уровня возбуждения на эффективность, положения спектров и кинетики свечения соединения $CaGa_2S_4:Pr^{3+}$.

Заключение. Синтезированные в данной работе халькогенидные полупроводниковые соединения $CaGa_2S_4:Pr^{3+}$ с массовой долей ионов празеодима 3 и 7 ат. % обладают ФЛ в диапазоне длин волн 470–760 нм, характеризующейся серией интенсивных линий на 494, 631, 654 и 741 нм. Установлено, что свечение на этих длинах волн обусловлено электронными переходами в ионах празеодима с уровня $^3P_0$ на $^3H_4$, $^3H_6$, $^3F_2$ и $^3F_4$ соответственно. В спектрах возбуждения ФЛ при температуре 300 К присутствует интенсивная узкая линия на 456 нм, определенная как переход с уровня $^3H_4$ на уровень $^3P_2$ ионов Pr^{3+}, и широкая полоса в диапазоне 260–360 нм с максимумом около 325 нм, обусловленная поглощением излучения накачки в матрице тиогаллата кальция и последующей передачей энергии возбуждения ионам празеодима. Установлено, что повышение доли содержания ионов празеодима в $CaGa_2S_4$ с 3 до 7 ат. % приводит к двукратному возрастанию интегральной интенсивности ФЛ в диапазоне 470–760 нм. Температурное тушение ФЛ соединения $CaGa_2S_4:Pr^{3+}$ в диапазоне 10–300 К составило всего лишь 50 % (7 ат. %) и 75 % (3 ат. %). Обнаружена исключительная высокая стабильность положения спектральных линий ФЛ ($\Delta\lambda < 0{,}1$ нм) во всем исследуемом температурном интервале. Установлено, что постоянные затухания наиболее интенсивных линий ФЛ соединения $CaGa_2S_4:Pr^{3+}$ находятся в интервале 3,9–4,8 мкс при 10 К. С повышением температуры от 10 до 300 К наблюдается сокращение времен затухания не более чем на 0,1 мкс и появление в кинетиках затухания ФЛ слабой быстрой компоненты длительностью около 1,1 мкс при 300 К.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики (грант № EIF-BGM-2-BRFTF-1-2012/2013-07/02/1) и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф13АЗ-020).

Список использованной литературы

1. Spectroscopy and Lanthanide Impurity Level Locations in $CaGa_2S_4:Ln^{3+}$ (Ln = Ce, Pr, Tb, Er, Tm) / A. Bessie`re [et al.] // J. of The Electrochemical Society. – 2004. – Vol. 151, iss. 12. – P. 254–260.

2. *Nazarov, M.* Structural and luminescent properties of calcium, strontium and barium thiogallates / M. Nazarov, D. Y. Noh, H. Kim // Materials Chemistry and Physics. – 2008. – Vol. 107. – P. 456–464.

3. Effect of excitation level on the photoluminescence of barium thiogallate activated with europium and cerium ions / V. Z. Zubelevich [et al.] // Zh. Prikl. Spektrosk. – 2011. – Vol. 78, iss. 2. – P. 234–239.

4. Radiative and non-radiative processes of Ce related transitions in $CaGa_2S_4$ and $SrGa_2S_4$ / A. Kato [et al.] // J. of Physics and Chemistry of Solids. – 2003. – Vol. 64. – P. 1511–1517.

5. Photoluminescence of Ce and Pr codoped calcium thiogallate / A. Anedda [et al.] // Physica Status Solidi (C). – 2006. – Vol. 3, iss. 8. – P. 2717–2721.

6. *Gün, T.* Power scaling of laser diode pumped $Pr^{3+}:LiYF_4$ cw lasers: efficient laser operation at 522:6 nm, 545:9 nm, 607:2 nm, and 639:5 nm / T. Gün, P. Metz, G. Huber // Optics Letters. – 2011. – Vol. 36, iss. 6. – P. 1002–1004.

7. Diode pumped laser operation and spectroscopy of $Pr^{3+}:LaF_3$ / F. Reichert [et al.] // Optics Express. – 2012. – Vol. 20, iss. 18. – P. 20387–20395.

Поступило в редакцию 20.07.2015

Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **ноябрь–декабрь** **Том 59 № 6**

ХИМИЯ

УДК 544.77+547.917

В. И. КУЛИКОВСКАЯ, Д. И. ЕГОРОВ, академик В. Е. АГАБЕКОВ

ПОЛУЧЕНИЕ И СВОЙСТВА МИКРОЧАСТИЦ ПЕКТИНАТА КАЛЬЦИЯ, СОДЕРЖАЩИХ МИРАМИСТИН

Институт химии новых материалов НАН Беларуси, Минск, Беларусь
kulikouskaya@gmail.com; matt_l@mail.ru; agabekov@ichnm.basnet.by

Получены микрочастицы пектината кальция с гидродинамическим диаметром 2–6 мкм методом распылительного высушивания. Разработана методика, позволяющая включать в них до 30 масс. % мирамистина. Показано, что в кислой среде (pH 2,0) включенный мирамистин полностью высвобождается через 2 ч. В физиологическом растворе через 48 ч релиз вещества составляет 2/3 от включенного количества. В щелочных средах через 2 сут. из микрочастиц пектината кальция высвобождается менее 5 % мирамистина.

Ключевые слова: микрочастицы, пектинат, мирамистин, эффективность включения, кинетика высвобождения.

V. I. KULIKOUSKAYA, D. I. EGOROV, V. E. AGABEKOV

FABRICATION AND PROPERTIES OF MIRAMISTIN-CONTAINING CALCIUM PECTINATE MICROPARTICLES

Institute of Chemistry of New Materials of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
kulikouskaya@gmail.com; matt_l@mail.ru; agabekov@ichnm.basnet.by

Calcium pectinate microparticles with a hydrodynamic diameter of 2–6 μm were synthesized by the spray drying technique. The approach allowing one to entrap in them up to 30 wt. % of miramistin has been developed. It has been shown that all miramistin entrapped in microparticles fully releases in 2 hours in the acidic medium (pH 2.0). In the physiological solution, about 66 % of miramistin releases in 48 hours. In the alkali solution, less than 5 % of miramistin releases in 2 days.

Keywords: microparticles, pectinate, miramisti, entrapment efficiency, release kinetic.

Введение. В настоящее время разработка носителей для биологически активных веществ на основе полисахаридов, обеспечивающих пролонгированное высвобождение действующего вещества и/или его целевую доставку к органам и тканям, – одно из интенсивно развивающихся направлений в области создания новых лекарственных форм [1–3]. Преимуществом таких форм по сравнению с традиционными является повышение лечебного эффекта за счет уменьшения побочных действий препарата и периодичности его введения. Использование полисахаридов, в частности пектинов, для формирования носителей обусловлено их биосовместимостью, биодеградируемостью и нетоксичностью. Пектины также обладают собственной физиологической активностью, в том числе иммуномодулирующим действием [4], и широко используются в пищевой промышленности в качестве загустителей, желирующих агентов, стабилизаторов.

Среди многочисленных методов получения микрочастиц, основанных на испарении растворителя, технология распылительного высушивания (spray drying) широко используется в фармацевтической промышленности из-за ее несомненных достоинств, к которым относятся быстрота и легкость регулирования процесса, а также отсутствие необходимости дополнительной очистки и обработки получаемых микрочастиц [5; 6].

© Куликовская В. И., Егоров Д. И., Агабеков В. Е., 2015.

Перспективным антибактериальным веществом для лечения различных инфекций является мирамистин. Он оказывает гидрофобное влияние на цитоплазматические мембраны микроорганизмов, тем самым увеличивая проницаемость этих мембран и клеточных стенок и приводя к их разрушению. Активность препарата распространяется на все грамотрицательные и грамположительные, анаэробные и аэробные, аспорогенные и спорообразующие бактерии в виде микробных ассоциаций и монокультур, включая различные штаммы с устойчивостью к антибиотикам. В настоящее время мирамистин используется в виде 0,01 %-ного раствора для местного применения и гидрогелевых пластин с содержанием действующего вещества 0,05 масс. %. Создание его капсулированной формы является важной задачей для фармакологии.

Цель работы – получение микрочастиц пектината кальция, содержащих мирамистин, и изучение кинетики высвобождения из них действующего вещества в растворах, моделирующих физиологические среды человеческого организма.

Экспериментальная часть. Микрочастицы пектина получали методом распылительного высушивания. Водный раствор пектина (Herbstraith & Fox, AB 901, степень этерификации 34–42 %) с концентрацией 7,5 мг/мл подвергался распылению на лабораторной установке Labultima LU 222 Advanced (диаметр сопла 0,7 мм). Условия получения пектиновых частиц: температура воздуха на входе в сушильную камеру 200 °С и на выходе из нее 70 °С, скорость подачи воздуха 100 м^3/мин, а раствора 3 мл/мин. Полученные микросферы пектина диспергировали в этаноле и по каплям добавляли 0,1 М водный раствор $CaCl_2$, формируя микрочастицы пектината кальция (ПектСа МЧ).

Мирамистин включали в микрочастицы пектината кальция путем сорбции. Для этого 25 мг полисахаридных микрочастиц диспергировали в 1,5 мл водного раствора мирамистина, выдерживали 2 ч и центрифугировали (IKA mini G, 6000 об/мин, 10 мин). В супернатанте спектрофотометрически (Solar CM 2203, Беларусь) определяли количество не включенного мирамистина по предварительно построенному калибровочному графику $A_{\lambda\,=\,260\text{ нм}} = f(C_{\text{мирамистина}})$ (рис. 1, кривая *1*). При сорбции его концентрацию варьировали в диапазоне от 0,3 до 9,6 мг/мл.

Эффективность включения (ЭВ) и массовую долю (ω) мирамистина в микрочастицах рассчитывали по формулам

$$\text{ЭВ} = \frac{m_0 - m_1}{m_0} 100\,\%,$$

где m_1 – масса мирамистина в супернатанте, мг; m_0 – исходная масса мирамистина, мг;

$$\omega = \frac{m_0 - m_1}{m_\text{ч}} 100\,\%,$$

где $m_\text{ч}$ – масса лиофильного порошка микрочастиц пектината кальция с мирамистином, мг.

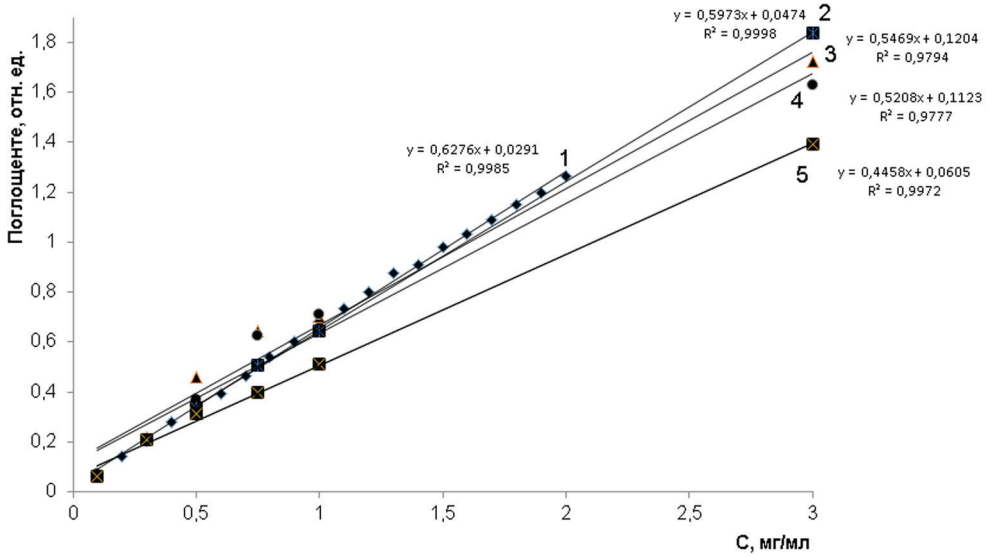
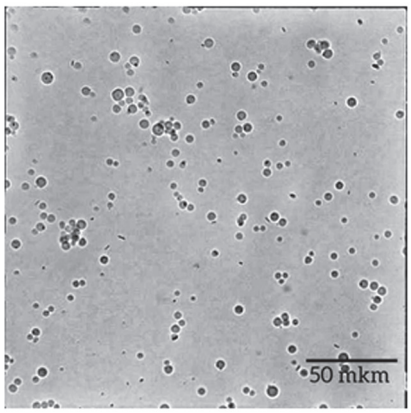


Рис. 1. Зависимость поглощения мирамистина при 260 нм от его концентрации в водном растворе (*1*), соляной кислоте (*2*), фосфатном буфере (*3*), гидроксиде натрия (*4*) и 0,9 %-ном хлориде натрия (*5*)

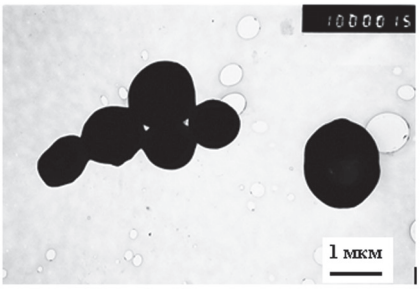
Закономерности высвобождения мирамистина из микрочастиц пектината кальция изучали в физиологическом растворе (0,9 % NaCl, pH 5,5, I = 0,16 моль/кг), фосфатном (PBS, pH 7,4, I = 0,17 моль/кг) буфере, а также в кислой (HCl, pH 2, I = 0,01 моль/кг) и щелочной (NaOH, pH 9, $I = 1 \cdot 10^{-5}$ моль/кг) средах. К влажному осадку микрочастиц пектината кальция с мирамистином (65 мг в пересчете на сухое вещество) добавляли 10 мл модельного раствора, через определенные промежутки времени образцы центрифугировали (6000 об/мин, 10 мин), отбирали 5 мл супернатанта и добавляли 5 мл свежей среды. В супернатанте спектрофотометрически определяли количество высвободившегося мирамистина по соответствующему калибровочному графику (рис. 1, кривые *2–5*).

Гидродинамический диаметр и ζ-потенциал частиц измеряли на анализаторе Zetasizer Nano ZS (Malvern, Великобритания). Оптические микрофотографии пектинатных частиц получали на оптическом микроскопе Микро МБ (Planar, Беларусь) в камере Горяева. Размеры частиц и морфологию их поверхности также исследовали с помощью просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ) на микроскопе JEM-100 CX (Япония). Частицы адсорбировали на коллодиевую пленку, нанесенную на медную сеточку, и сушили при комнатной температуре.

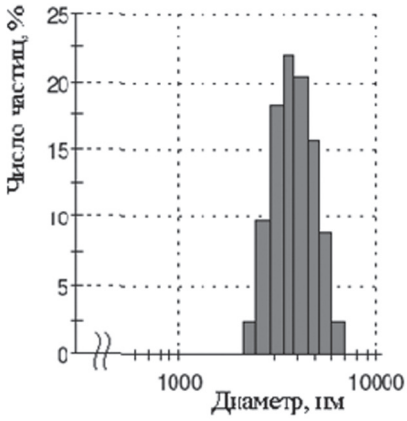
Результаты и их обсуждение. Полимерные микрочастицы, получаемые методом распылительного высушивания, обладают теми же физико-химическими свойствами, что и исходное вещество. Следовательно, микрочастицы пектина, как и сам полисахарид, растворимы в воде и непригодны для использования в качестве контейнеров биологически активных веществ. С целью получения полисахаридных микросфер, нерастворимых в воде, микрочастицы пектина были дополнительно обработаны раствором хлорида кальция. Известно, что катионы кальция взаимодействуют с макромолекулами пектина с образованием координационных связей с двумя гидроксильными и электростатических с карбоксильными группами полисахарида, что приводит к формированию геля [7]. Синтезированные микрочастицы пектината кальция нерастворимы в воде и имеют сферическую форму (рис. 2, *а*). Гидродинамический диаметр частиц составляет ~2–6 мкм (рис. 2, *в*), а их размер в высушенном состоянии уменьшается до 1–2 мкм (рис. 2, *б*). Полученные микрочастицы заряжены отрицательно: значение их дзета-потенциала по абсолютной



а



б



в

Рис. 2. Оптическое изображение (*а*) и ПЭМ-изображение (*б*) микрочастиц пектината кальция и их распределение по гидродинамическому диаметру (*в*)

величине составляет 7,7 мВ. Следовательно, они могут быть использованы для включения положительно заряженного мирамистина.

При сорбции мирамистина в микрочастицы пектината кальция изменение концентрации его водного раствора от 0,3 до 0,8 мг/мл приводит к увеличению эффективности включения от 77,9 до 99,5 % (рис. 3). Дальнейшее повышение содержания мирамистина не влияет на ЭВ и для всего изученного концентрационного диапазона (0,8–9,6 мг/мл) составляет >97,0 % (рис. 3). Высокие значения ЭВ мирамистина обусловлены, вероятно, тем, что его включение в микрочастицы пектината кальция происходит не только механически, но и за счет электростатического взаимодействия отрицательно заряженных ПектСа МЧ и положительно заряженных молекул БАВ. При увеличении концентрации мирамистина в растворе от 0,3 до 9,6 мг/мл массовая доля включенного БАВ в пектинатных частицах возрастает от 1,6 до 29,6 % (рис. 3). Варьируя содержание мирамистина в растворе, можно получать ПектСа МЧ с заданным содержанием вещества до 30 масс. % (рис. 3). Следует отметить, что мирамистин прочно удерживается в полисахаридных контейнерах. Так, при хранении в дистиллированной воде суспензии микрочастиц пектината кальция с мирамистином через 48 ч высвобождение БАВ составило менее 1 % от включенного.

Закономерности высвобождения мирамистина из микрочастиц пектината кальция изучали в растворах, моделирующих физиологические среды человеческого организма. Микрочастицы пектината кальция представляют собой ионотропные гели, которые являются обратимыми, так как их пространственная структурная сетка закреплена за счет переплетения молекул и ионных, водородных связей и гидрофобных взаимодействий, которые могут быть разрушены при изменении ионной силы и pH среды. Следовательно, высвобождение мирамистина из микрочастиц пектината кальция может протекать как за счет десорбции, так и в результате разрушения ПектСа МЧ.

В фосфатном буфере (pH 7,4) и растворе гидроксида натрия (pH 9,0) через 48 ч высвобождается менее 5 % от включенного мирамистина. Это может быть связано с тем, что мирамистин, будучи четвертичным аммониевым соединением, удерживается в отрицательно заряженных микрочастицах пектината кальция преимущественно за счет электростатических взаимодействий. В щелочных средах степень ионизации карбоксильных групп полисахарида увеличивается, что приводит к усилению взаимодействия между полимерной матрицей и мирамистином, в результате чего включенное вещество не высвобождается. В кислой среде (pH 2,0), напротив, степень ионизации COOH-групп пектина уменьшается, что приводит к ослаблению взаимодействия между полисахаридными микрочастицами и мирамистином, половина от включенного количества которого высвобождается из ПектСа МЧ через 0,5 ч, а уже через 2 ч кинетическая кривая запределивается и наблюдается полный релиз включенного вещества (рис. 4, кривая *1*). В первые два часа (t = 0–2 ч) скорость высвобождения мирамистина нелинейна и относительно высока (так называемое взрывное высвобождение [8]), что позволяет сделать вывод о преимущественном вкладе диффузии в процесс релиза вещества из пектинатных микрочастиц. В физио-

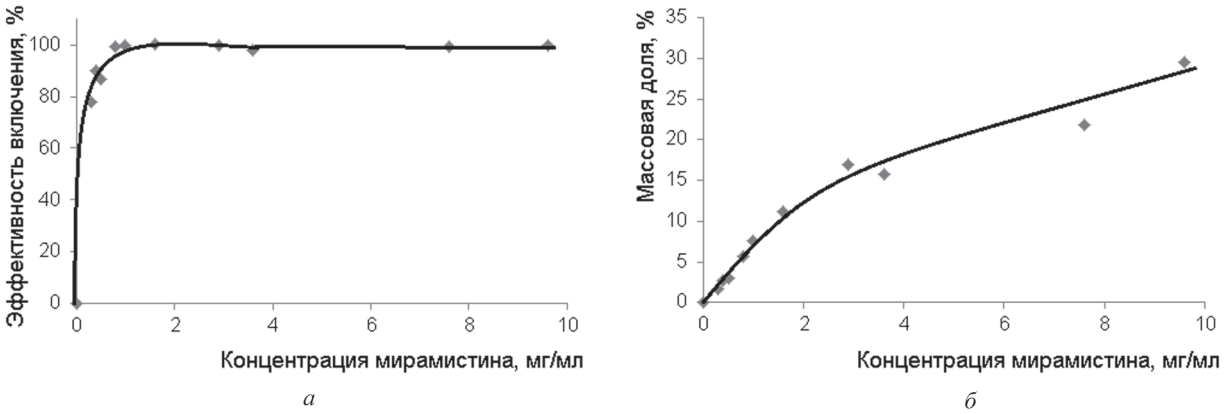


Рис. 3. Зависимость эффективности включения (*а*) и массовой доли мирамистина в микрочастицах пектината кальция (*б*) от его концентрации

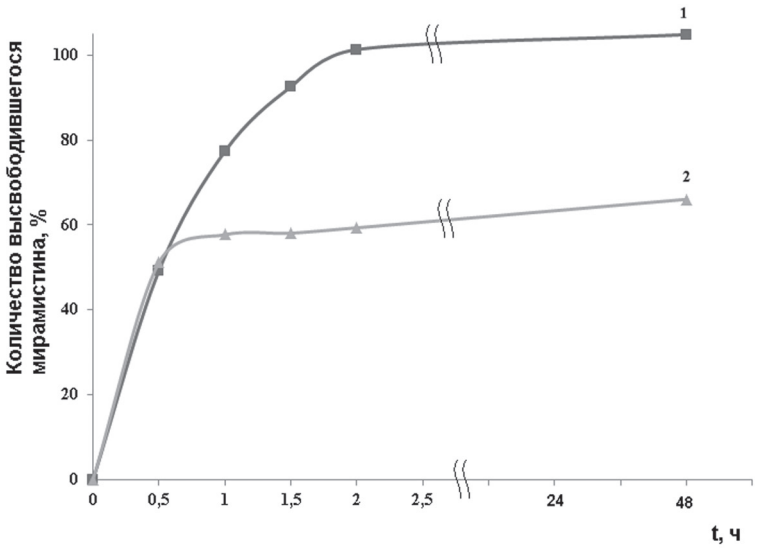


Рис. 4. Кинетические кривые высвобождения мирамистина из микрочастиц пектината кальция в растворах соляной кислоты (*1*) и 0,9 %-ного хлорида натрия (*2*)

логическом растворе половина от включенного мирамистина также высвобождается через 0,5 ч, однако после этого кинетическая кривая запределивается: через 1 ч количество высвободившегося мирамистина составляет 57 %, а через 48 ч – 66 % (рис. 4, кривая *2*). Так как pH физиологического раствора, как и дистиллированной воды, равен 5,5, то закономерности высвобождения в нем мирамистина из микрочастиц пектината кальция обусловлены только изменением ионной силы среды. Наличие низкомолекулярного электролита (хлорида натрия) может приводить к экранированию зарядов микрочастиц пектината кальция и молекул мирамистина, что приводит к ослаблению их взаимодействия и высвобождению части включенного вещества.

Заключение. Получены микрочастицы пектината кальция, пригодные для включения водорастворимых биологически активных веществ. Разработана методика, позволяющая получать микрочастицы пектината кальция, содержащие до 30 масс. % мирамистина. Показано, что включенный мирамистин полностью высвобождается только в кислой среде. В физиологическом растворе через 48 ч релиз вещества составляет 2/3 от включенного количества. В щелочных средах мирамистин прочно удерживается в носителе: через 2 сут. из микрочастиц пектината кальция высвобождается менее 5 % от включенного вещества.

Список использованной литературы

1. *Song, Y. B.* α-Tocopherol-loaded Ca-pectinate microcapsules: optimization, *in vitro* release and bioavailability / Y. B. Song, J. S. Lee, H. G. Lee // Colloids and Surfaces B: Biointerfaces. – 2009. – Vol. 73, N 2. – P. 394–398.

2. *Sriamornsak, P.* Application of pectin in oral drug delivery / P. Sriamornsak // Expert Opinion on Drug Delivery. – 2011. – Vol. 8, N 8. – P. 1009–1023.

3. *Ogaji, I. J.* Advances in natural polymers as pharmaceutical excipients / I. J. Ogaji, E. I. Nep, J. D. Audu-Peter // Pharm. Anal. Acta. – 2011. – Vol. 3, N 1. – P. 146.

4. *Потиевский, Э. Г.* Медицинские аспекты применения пектина / Э. Г. Потиевский, А. И. Новиков. – М.: Мед. книга, 2002.

5. Получение полимерных микрочастиц с биологически активными веществами методом распылительной сушки (обзор литературы) / С. А. Кедик [и др.] // Вестн. ВГУ. Серия: Химия. Биология. Фармация. – 2014. – № 2. – С. 28–32.

6. *Vehring, R.* Pharmaceutical particle engineering via spray drying / R. Vehring // Pharm. Res. – 2008. – Vol. 25, N 5. – P. 999–1022.

7. *Thibault, J. F.* Chain association of pectic molecules during calcium-induced gelation / J. F. Thibault, M. Rinaudo // Biopolymers. – 1986. – Vol. 25. – P. 455–468.

8. *Григорьева, М. В.* Полимерные системы с контролируемым высвобождением биологически активных соединений / М. В. Григорьева // Биотехнология. – 2011. – Т. 4, № 2. – С. 9–23.

Поступило в редакцию 20.04.2015

Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **ноябрь–декабрь** **Том 59 № 6**

УДК 541.64:547.796.1

Ю. В. ГРИГОРЬЕВ, И. М. ГРИГОРЬЕВА, академик О. А. ИВАШКЕВИЧ

СИНТЕЗ ТЕТРАЗОЛСОДЕРЖАЩИХ ПОЛИМЕРОВ НА ОСНОВЕ ПРОМЫШЛЕННО ВЫПУСКАЕМОГО СОПОЛИМЕРА ПОЛИАКРИЛОНИТРИЛА

Научно-исследовательский институт физико-химических проблем БГУ, Минск, Беларусь
azole@bsu.by; inna.61@mail.ru; nauka@bsu.by

В данном сообщении представлены результаты изучения процессов тетразолирования промышленно выпускаемого сополимера акрилонитрила, метилакрилата и 2-акриламидо-2-метилпропансульфокислоты. Установлено, что в найденных оптимальных условиях превращение нитрильных группировок в тетразольные гладко протекает на 90–95 % при использовании азидирующей смеси NaN_3–NH_4Cl в диметилформамиде. Алкилирование получаемых тетразолсодержащих полимеров бифункциональными галоген- и гидроксилсодержащими соединениями приводит к получению сетчатых полимеров, степень сшивки которых регулируется изменением соотношения исходный полимер–сшивающий агент.

Ключевые слова: сополимеры полиакрилонитрила, тетразолсодержащие полимеры, алкилирование.

Y. V. GRIGORIEV, I. M. GRIGORIEVA, O. A. IVASHKEVICH

SYNTHESIS OF TETRAZOLE-CONTAINING POLYMERS BASED ON A COMMERCIAL POLYACRYLONITRILE COPOLYMER

Research Institute for Physical Chemical Problems, Belarusian State University, Minsk, Belarus,
azole@bsu.by; inna.61@mail.ru; nauka@bsu.by

This article presents the research results of tetrazolation of a commercial copolymer of acrylonitrile, methyl acrylate and 2-acrylamido-2-methylpropanesulfonic acid. Transformation of nitrile groups into tetrazole-5-yl moieties was found to proceed smoothly in dimethylformamide using NaN_3–NH_4Cl as an azidation system reaching 90–95 % conversion of nitrile groups. Alkylation of poly-5-vinyltetrazole with halogen and hydroxyl substituted bis-alkylating agents have been found to produce cross-linked polymers. The degree of cross-linking can be regulated by changing the polymer – alkylating agent ratio.

Keywords: polyacrylonitrile copolymers, tetrazole containing polymers, alkylation.

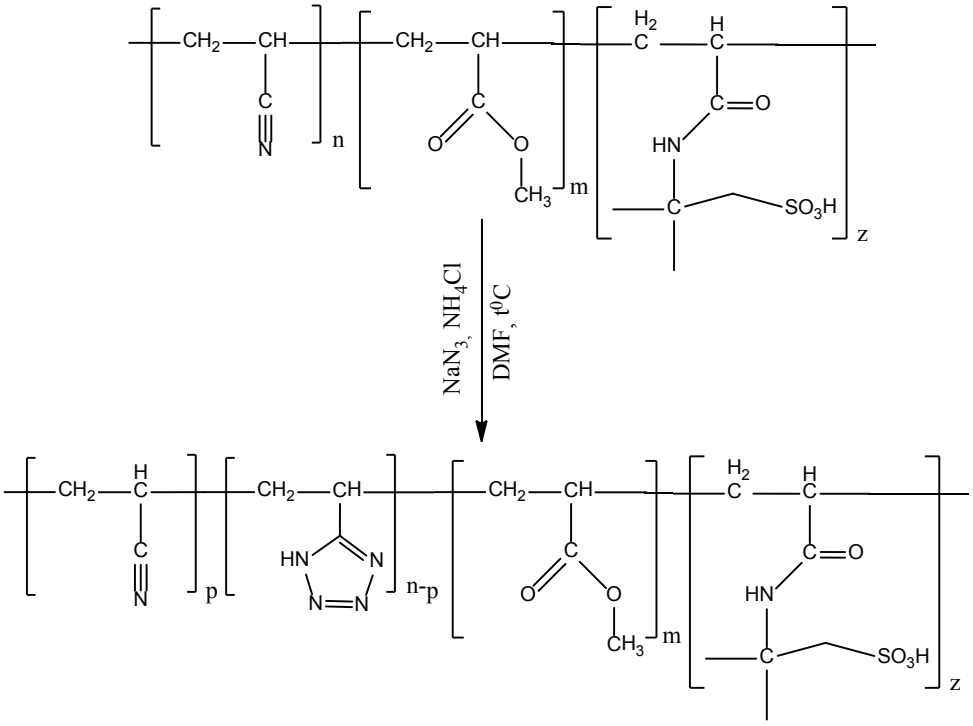
Введение. Достаточно высокая термостабильность при значительной энергоемкости и высоком содержании азота, своеобразные кислотно-основные, комплексообразующие, фармакологические, фотохимические и другие свойства предопределяют значительный интерес к производным тетразола, включая тетразолсодержащие полимеры, как к перспективным многофункциональным материалам [1]. На фоне почти 130-летней истории химии тетразолов, тетразолсодержащие полимеры исследуются относительно недавно. На начальном этапе они представляли интерес преимущественно в связи с возможностью их использования в качестве связующих компонентов ракетных топлив, порохов, газо-генерирующих и взрывчатых композиций, зажигательных составов и т. п. [2–4]. В последнее десятилетие в ряде работ показана перспективность использования тетразолсодержащих полимеров для получения протонпроводящих мембран, сорбентов ионов металлов, микропористых материалов, металлокомплексных катализаторов и для других целей [1].

Известно, что удобным и безопасным методом получения поли-5-винилтетразолов являются процессы полимераналогичных превращений, основанные на реакциях [2+3]-циклоприсоединения нитрильных групп макромолекул к соединениям, содержащим азидогруппу, и эта реакция достаточно хорошо изучена для гомополимера акрилонитрила [5; 6].

© Григорьев Ю. В., Григорьева И. М., Ивашкевич О. А., 2015.

Материалы и методы исследования. В рамках настоящей работы нами изучена возможность использования этого подхода для получения тетразолсодержащих полимеров путем азидирования доступного, промышленно выпускаемого заводом «Полимир» ОАО «Нафтан» сополимера акрилонитрила, метилакрилата и 2-акриламидо-2-метилпропансульфокислоты (93 : 6 : 1), использующегося для производства полиакрилонитрильного волокна Нитрон Д-5 (схема 1).

Схема 1



В результате установлено, что наличие в исходном полимере звеньев метилакрилата и 2-акриламидо-2-метилпропансульфокислоты не препятствует превращению нитрильных группировок в тетразольные, и процесс гладко протекает при использовании азидирующей системы NaN_3–NH_4Cl в диметилформамиде.

Следует отметить, что сведения о тетразолировании сополимеров полиакрилонитрила и исследовании физико-химических свойств получаемых тетразолсодержащих полимеров весьма ограничены [7; 8].

В результате изучения влияния соотношения используемых в процессе реагентов на протекание процесса установлено, что степень превращения нитрильных групп может эффективно регулироваться использованием соответствующего количества азидирующей смеси, что позволяет целенаправленно получать полимеры с заданной степенью тетразолирования. Максимальная степень конверсии нитрильных групп в тетразольные достигается при использовании 15 %-ного мольного избытка азидирующей смеси и проведении реакции при 115–120 °С в течение 20 ч. В изученных условиях проведения процесса превращение «нитрил–тетразол» происходит на 90–95 %. Поскольку получаемые тетразолсодержащие полимеры являются слабыми кислотами и независимо от степени тетразолирования нерастворимы в воде, количественный анализ на содержание тетразольных звеньев в синтезированных полимерах проводили методом неводного кислотно-основного титрования, описанного в [6], с использованием в качестве растворителя диметилформамида, а в качестве титранта раствор KOH в *изо*-пропиловом спирте.

Получаемые сополимеры поливинилтетразола (СПВТ), выделяемые из реакционного раствора осаждением в разбавленный раствор HCl, представляют собой липкую резиноподобную массу, которая после высушивания в вакууме превращается в твердый стеклообразный продукт. Порошкообразный СПВТ может быть получен в результате осаждения реакционной массы

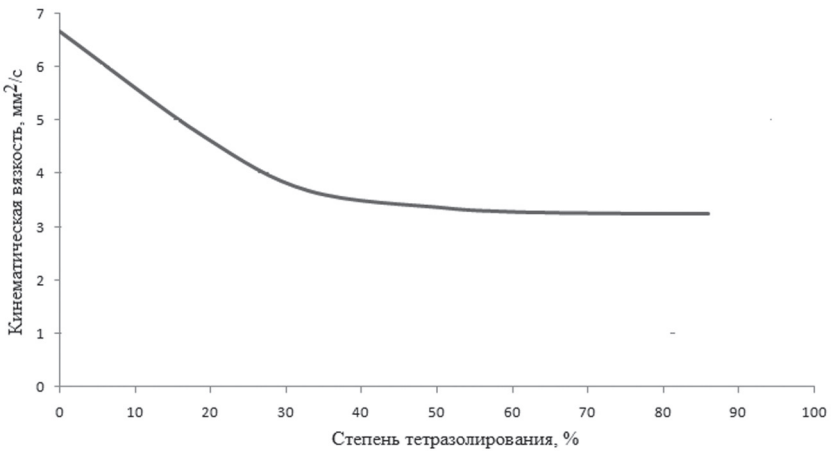


Рис. 1. Изменение кинематической вязкости 2 %-ных растворов СПВТ в диметилформамиде в зависимости от степени тетразолирования

в трифторуксусную кислоту или в избыток уксусной кислоты. Следует, однако, отметить, что при использовании в качестве осадителя уксусной кислоты велика вероятность получения смешанного полимера, имеющего в структуре как тетразольные звенья, так и звенья тетразолата аммония, образующиеся в процессе тетразолирования. Последнее связано с близкими значениями pK_a тетразольного цикла и уксусной кислоты [9]. Получаемые тетразолсодержащие полимеры, так же как и исходный сополимер, нерастворимы, за исключением диметилфорамида и диметилсульфоксида, в органических растворителях, однако становятся растворимы в водных растворах оснований при достижении степени тетразолирования более 30 %. Кинематическая вязкость растворов СПВТ в диметилформамиде заметно снижается с увеличением содержания в полимере тетразолильных групп, выходя на плато после достижения степени тетразолирования ~50 % (рис. 1).

Изучение кинетики процесса тетразолирования (100 °С) показало, что скорость протекания процесса изменяется нелинейно, существенно замедляясь со временем (рис. 2).

В ИК-спектрах синтезированных СПВТ проявляются полосы поглощения, характерные для валентно-деформационных колебаний тетразольного цикла в области 1000–1400 см$^{-1}$ и валентных колебаний NH-связи тетразольного цикла (3125–3130 см$^{-1}$). При этом интенсивность харак-

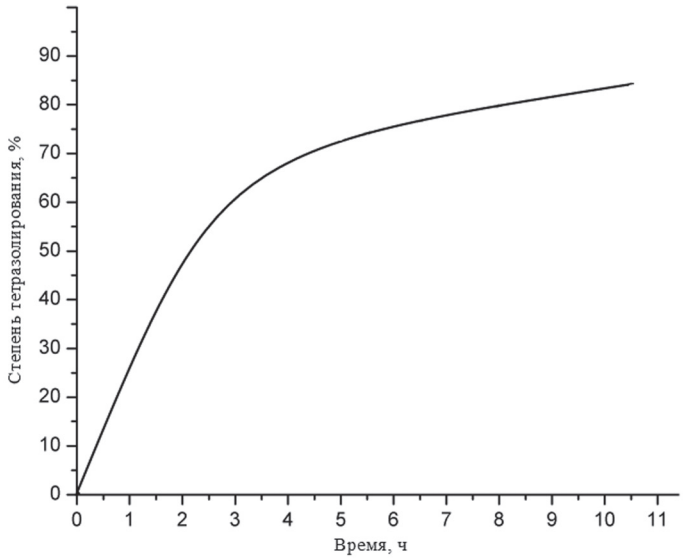


Рис. 2. Кинетическая кривая процесса тетразолирования сополимера акрилонитрила, метилакрилата и 2-акриламидо-2-метилпропансульфокислоты (93 : 6 : 1) при 100 °С

терной для полиакрилонитрила полосы поглощения группы –C≡N (2243 см$^{-1}$) закономерно уменьшается с увеличением степени тетразолирования.

Термическое разложение полученных СПВТ в инертной атмосфере (20–600 °С, атмосфера N_2), независимо от степени тетразолирования, начинается при температуре около 200 °С и протекает экзотермично с максимумом при 275–280 °С, что обусловлено раскрытием тетразольного цикла с последующим элиминированием азота. Дальнейшее нагревание приводит к эндотермическому разложению оставшейся части образца. Остаточная масса образцов после проведения термолиза снижается с увеличением степени тетразолирования от 45 % при степени тетразолирования 19 вес. % до 33 % при степени тетразолирования 86 вес. %.

Поскольку получаемые из сополимера акрилонитрила, метилакрилата и 2-акриламидо-2-метилпропансульфокислоты (93 : 6 : 1) тетразолсодержащие полимеры имеют относительно неудовлетворительные механические характеристики (хрупкость образуемых пленок, сложность получения в порошкообразном виде), что может ограничивать перспективы их практического использования, в рамках настоящей работы изучены возможности их модификации путем алкилирования моно- и бифункциональными реагентами.

Известно, что удобным способом селективной функционализации N-незамещенных тетразолов является алкилирование третичными спиртами в кислотных средах [10]. Именно этот подход был нами использован для получения частично *трет*-бутилированного СПВТ. В качестве растворителя в процессе *трет*-бутилирования использовалась концентрированная серная кислота, в качестве алкилирующего агента – *трет*-бутиловый спирт. Предполагалось, что частичное введение *трет*-бутильных группировок позволит получить полимер с большей пластичностью в сравнении с чистым СПВТ. Действительно, пленки, получаемые из *трет*-бутилированного на 10 % СПВТ существенно пластичнее пленок исходного полимера. Кроме того, *трет*-бутилированный СПВТ осаждается из реакционной смеси в виде мелкодисперсного порошка, удобного для дальнейшего использования, например, при изучении сорбционной активности в отношении катионов металлов.

В ИК-спектрах продукта *трет*-бутилирования СПВТ появляются характерные для группы –C(CH$_3$)$_3$ сильные полосы поглощения (1372, 1238 см$^{-1}$), его термическое разложение протекает в тех же температурных интервалах, как и термическое разложение исходного СПВТ (схема 2).

Схема 2

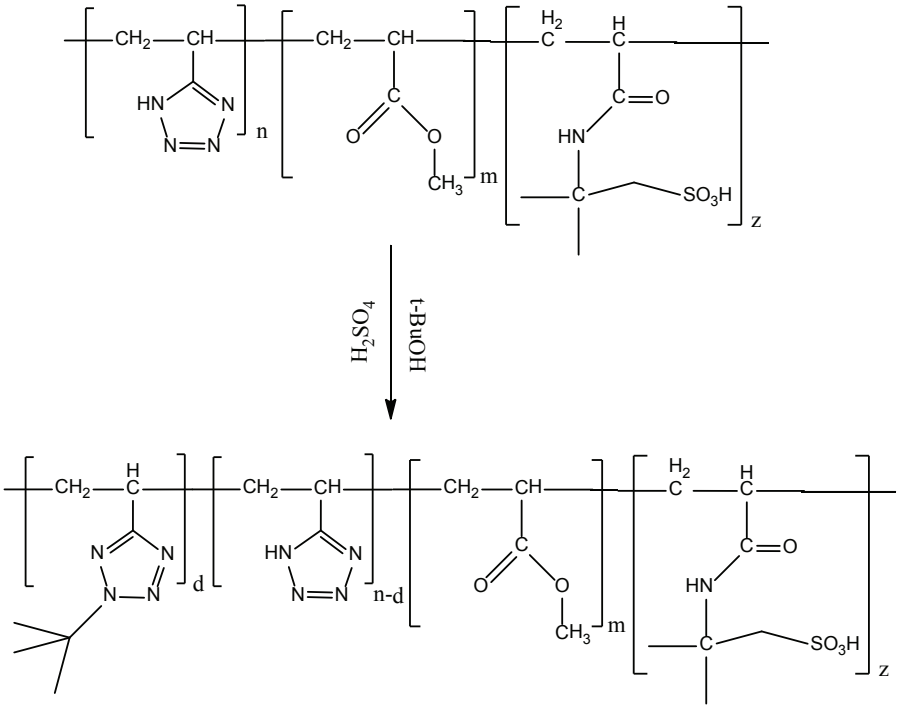


Схема 3

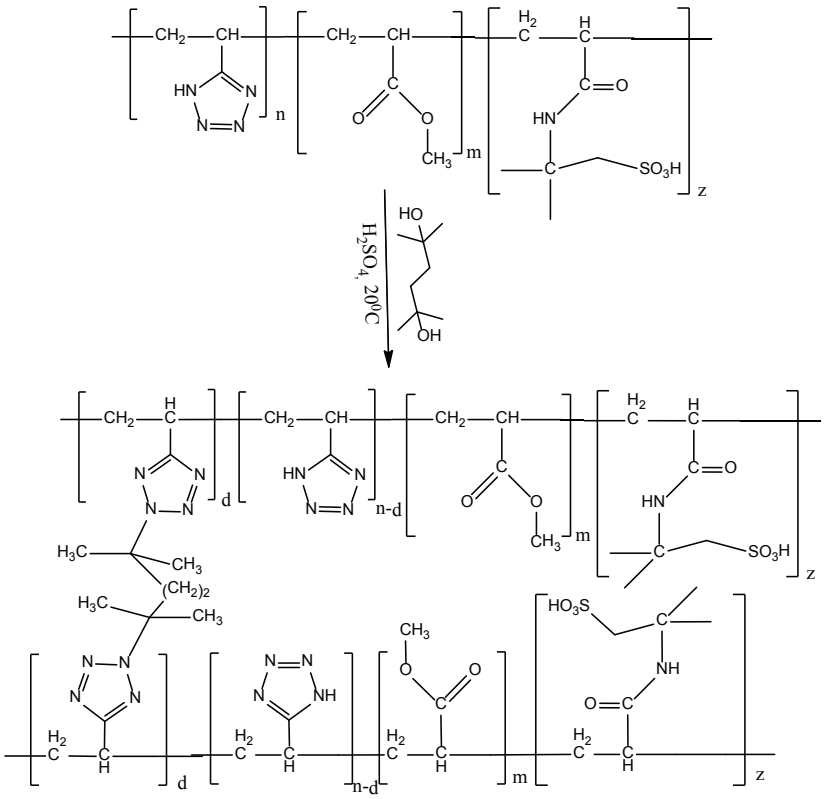
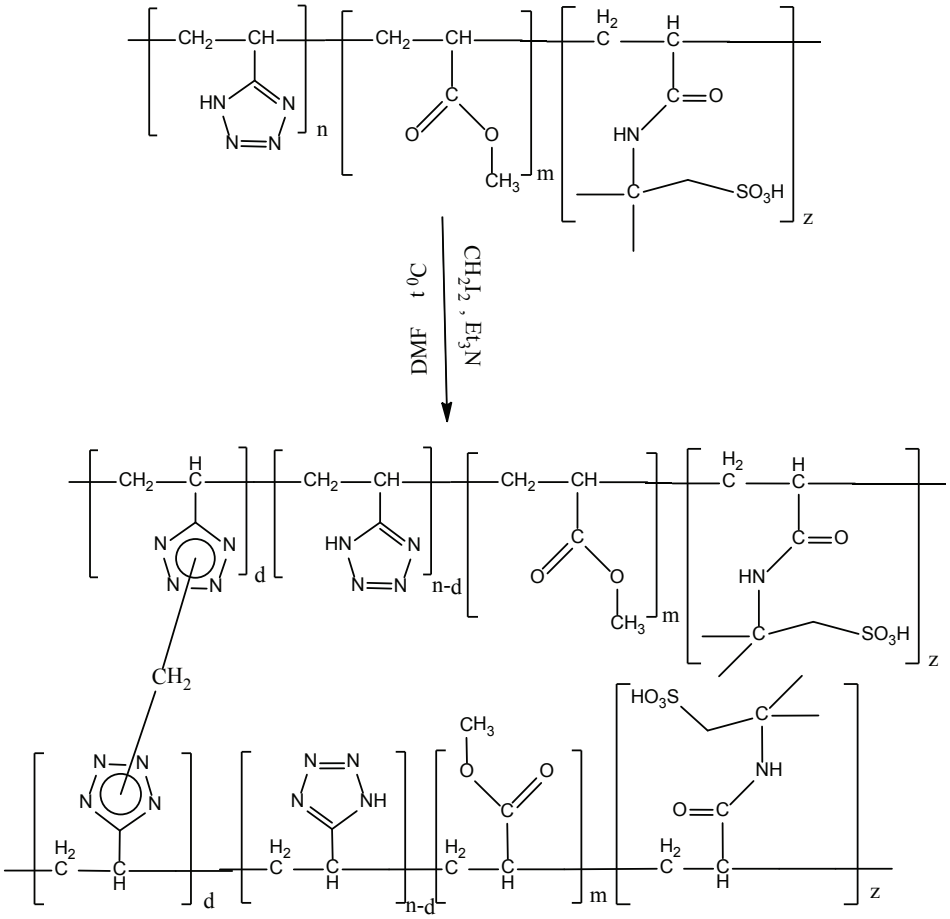


Схема 4



Использование для алкилирования СПВТ вместо *трет*-бутанола 2,5-диметилгександиола приводит к получению сшитого СПВТ (схема 3).

С целью сохранения в структуре получаемого полимера максимального количества NH-незамещенных тетразольных циклов в реакции использовалось 3–5 мол. % сшивающего агента. Следует отметить, что использование большего количества 2,5-диметилгександиола приводит к образованию геля в процессе проведения реакции. Получаемый сшитый 2,5-диметилгександиолом СПВТ осаждается из реакционной смеси в виде мелкодисперсного порошка и теряет растворимость в диметилформамиде и диметилсульфоксиде, ограниченно набухая в этих растворителях.

Альтернативным путем получения сшитых СПВТ является алкилирование последних дигалогеналканами. Так, в результате взаимодействия СПВТ с дийодметаном в присутствии триэтиламина нами получен полимер, сшитый за счет образования метиленовых мостиков между тетразольными циклами различных полимерных макромолекул (схема 4).

Поскольку известно [11], что алкилирование NH-незамещенных тетразолов галоидными алкилами протекает неселективно с образованием смеси 1- и 2-замещенных тетразолов, в случае алкилирования СПВТ дийодметаном наблюдается, по-видимому, аналогичная картина, и сшивка происходит с участием атомов азота N^1 и N^2 тетразольных циклов. Как и в случае сшитого 2,5-диметилгександиолом СПВТ, продукт взаимодействия СПВТ с дийодметаном осаждается из реакционной смеси в виде мелкодисперсного порошка и теряет растворимость в диметилформамиде и диметилсульфоксиде, ограниченно набухая в этих растворителях.

Заключение. Установлено, что азидирование промышленно выпускаемого сополимера акрилонитрила, метилакрилата и 2-акриламидо-2-метилпропансульфокислоты смесью NaN_3–NH_4Cl в диметилформамиде приводит к получению сополимера поли-5-винилтетразола. В оптимальных условиях проведения процесса превращение «нитрил–тетразол» происходит на 90–95 %. Степень превращения нитрильных групп в тетразольные может регулироваться как использованием соответствующего количества азидирующей смеси, так и временем и температурой проведения процесса, что позволяет целенаправленно получать полимеры с заданной степенью тетразолирования. Алкилирование получаемых тетразолсодержащих полимеров бифункциональными галоген- и гидроксилсодержащими соединениями, в частности дийодметаном и 2,5-диметилгексан-2,5-диолом, приводит к получению сетчатых полимеров, степень сшивки которых регулируется изменением соотношения исходный полимер–сшивающий агент.

Список использованной литературы

1. *Гапоник, П. Н.* Тетразолсодержащие полимеры: синтез и свойства / П. Н. Гапоник, О. А. Ивашкевич // Вестн. БГУ. Сер. 2. – 2013. – № 1 – С. 3–28.

2. Polymers of Substituted Tetrazoles: пат. 3004959 США, МКИ C07D 55/56 / G. Finnegan, R. A. Henry, S. Skolnik; заявитель NAVY. – № 843597; заявл. 30.09.59; опубл. 17.10.61.

3. *Островский, В. А.* Энергоемкие тетразолы / В. А. Островский, Г. И. Колдобский // Рос. хим. журн. – 1997. – Т. 41, № 2. – С. 84–98.

4. *Кижняев, В. Н.* Винилтетразолы. Синтез и свойства / В. Н. Кижняев, Л. И. Верещагин // Успехи химии. – 2003. – Т. 72, № 2. – С. 159–182.

5. *Кижняев, В. Н.* Разветвленные тетразолсодержащие полимеры / В. Н. Кижняев, Ф. А. Покатилов, Л. И. Верещагин // Высокомолек. соед. – 2007. – Т. 49, № 1. – С. 36–44.

6. Polymers and Copolymers Based on Vinyltetrazoles. 1. Synthesis of Poly(5-vinyltetrazole) by Polymeranalogous Conversion of Polyacrylonitrile / P. N. Gaponik [et al.] // Angew. Makromol. Chem. – 1994. – Vol. 219. – P. 77–88.

7. Copper recovery from aqueous solution by a modified industrial polymer / M. A. M. Alho [et al.] // Environment. Chem. Lett. – 2009. – Vol. 7, N 3. – P. 271–275.

8. Novel tetrazole-functionalized absorbent from polyacrylonitrile fiber for heavy-metal ion adsorption / S. Yan [et al.] // Appl. Polym. Sci. – 2012. – Vol. 125. – P. 382–389.

9. *Трифонов, Р. Е.* Протолитические равновесия тетразолов / Р. Е. Трифонов, В. А. Островский // Журн. орган. химии. – 2006. – Т. 42, № 11. – С. 1599–1620.

10. *Корень, А. О.* Селективное N(2)-алкилирование 5-R-тетразолов спиртами / А. О. Корень, П. Н. Гапоник // Химия гетероцикл. соединений. – 1990. – № 12. – С. 1643–1647.

11. *Ostrovskii, V. A.* Tetrazoles / V. A. Ostrovskii, G. I. Koldobskii // Compr. Heterocyclic Chem. III. – 2008. – Vol. 6. – P. 257–423.

Поступило в редакцию 07.10.2015

Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **ноябрь–декабрь** **Том 59 № 6**

БИОЛОГИЯ

УДК 598.279

І. А. САЛАВЕЙ

ЗМЕНЫ ВІДАВОЙ І ПАМЕРАВАЙ СТРУКТУРЫ АСАМБЛЕІ СОЎ *STRIGIFORMES* У ВЫНІКУ АНТРАПАГЕННАЙ ТРАНСФАРМАЦЫІ ПРЫРОДНЫХ КОМПЛЕКСАЎ

(Прадстаўлена акадэмікам М. Я. Нікіфаравым)

НПЦ НАН Беларусі па біярэсурсах, Мінск, Беларусь
soloveji@tut.by

С увеличением антропогенной трансформации природной среды от относительно естественного природного комплекса к тотальному аграрному ландшафту и рекреационно-урбанизированному пригороду выявлено уменьшение количества видов сов и изменение видовой структуры их ассамблеи. В этом направлении в видовой структуре в целом выявлено увеличение доминирования от его отсутствия в относительно естественной Поозерской пуще до абсолютного доминирования одного вида на сильно трансформированных территориях, а также исчезновение редких видов, уменьшение представленности лесных видов и увеличение синантропных, а также разнонаправленные изменения в пропорциях разных видов на территориях с разной степенью трансформации. Все эти изменения видовой структуры происходят на фоне уменьшения совокупной плотности популяций сов и разнонаправленных изменений плотности популяций разных видов сов на территориях с разной антропогенной трансформацией. Также установлено, что с увеличением антропогенной трансформации природной среды существенно изменяется размерная структура ассамблеи сов в сторону увеличения доли мелких видов.

Ключевые слова: ассамблея сов, видовое богатство, плотность популяций, изменение структуры, антропогенная трансформация.

I. A. SOLOVEJ

CHANGES IN SPECIES AND SIZE STRUCTURE OF THE ASSEMBLAGE OF OWLS *STRIGIFORMES* AS A RESULT OF ANTHROPOGENIC TRANSFORMATION OF NATURAL COMPLEXES

Scientific and Practical Center for Bioresources of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
soloveji@tut.by

With an increase of anthropogenic transformation of the natural environment from relatively natural complexes to total agricultural and recreational-urbanized suburbs, it is revealed that the number of owl species decreases and the species composition of their assemblage changes. In this direction, the species composition as a whole shows an increase in the dominance of its relative lack of natural Paazierre forest to the absolute domination of one species in highly transformed territories, as well as the disappearance of rare species, reducing the representation of forest species and the increase of synanthropic species, and other positive and negative changes in the proportions of different species at various stages of transformation. All these changes in the species composition occur on the background of reducing the total density of populations of owls and differently directed changes in the density of populations of species of owls in the territories of different anthropogenic transformation. It is also found that with an increase of anthropogenic transformation of the natural environment, the size structure of owl assemblage changes significantly in the direction of increasing a proportion of smaller species.

Keywords: assemblage of owls, species richness, changes species composition, changes size structure, anthropogenic transformation.

Уводзіны. За апошнія стагоддзі назіраўся няспынны рост антрапагенных змен натуральнага асяроддзя праз яго трансфармацыю ў амаль татальны аграрны і сялібна-індустрыяльны ландшафт. Гэта ўздзеянне па-рознаму аказвае ўплыў на хрыбетных драпежнікаў, уздзейнічае выбіральна на розныя віды і цалкам супольніцтвы. У гэтым дачыненні вялікую цікавасць выклікае

© Соловей И. А., 2015.

асамблея соў, пад якой разумеецца сукупнасць філагенетычна блізкіх відаў, якія стала пражываюць у межах пэўнай прыроднай зоны з характэрнай для яе фаунай, што склалася ў працэсе эвалюцыі. Совы з'яўляюцца важнай часткай біяразнастайнасці, маюць значнае экалагічнае, эканамічнае, эстэтычнае і сімвалічнае значэнні і некаторыя з іх могуць лёгка прыстасоўвацца да сумеснага пражывання з чалавекам. Мэта даследавання – вызначыць змены відавой і памеравай структуры асамблеі соў на тэрыторыях з розным узроўнем антрапагеннай трансфармацыі іглічна-драбналістых прыродных комплексаў.

Матэрыял і метады даследавання. Асноўнымі чыннікамі антрапагеннай трансфармацыі прыроднага асяроддзя ў Беларусі за мінулыя два-тры стагоддзі былі звядзенне лясоў пад нівы, пашы і паселішчы чалавека, аграрная і лясная асушальная меліярацыя балотных тэрыторый, а ў нашы часы – у асноўным лесаэксплуатацыя і ўрбанізацыя. Паколькі іглічна-драбналістыя прыродныя комплексы ў натуральным выглядзе ўяўлялі сабой мазаіку лесу, балот і шматлікіх вадацёкаў, то на антрапагенна трансфарміраваных тэыторыях разглядаюцца ўтварэнні асяроддзя на іх месцы. Выдзелены пяць мадэльных тэрыторый у выніку павелічэння праяўлення азначаных чыннікаў: *Паазёрская пушча* – адносна натуральны прыродны комплекс у паўночнай частцы Беларусі, дзе назіраецца ў асноўным толькі лесаэксплуатацыя (Гарадоцкі, Шумілінскі, Полацкі, Расонскі, Верхнядзвінскі раёны); *Налібоцкая пушча*, дзе адносна натуральнае асяроддзе дамінуе, але частка тэрыторыі моцна зменена ў выніку аграрнай і лясной асушальнай меліярацыі балот і лесаэксплуатацыі (Іўеўскі, Валожынскі, Стаўбцоўскі раёны); *Тонава-Хатаўская леса-аграрная тэрыторыя на ўсходнім памежжы Налібоцкай пушчы*, дзе леса-балотная мазаіка значна трансфарміравана ў асноўным для сельскагаспадарчых патрэб, але захавалася яшчэ шмат фрагментаванага лесу (каля 50 %), балоты амаль што ўсе асушаны (Валожынскі, Стаўбцоўскі раёны); *Мірска-Карэліцкая татальная аграрная тэрыторыя на паўднёвым памежжы Налібоцкай пушчы* – амаль поўнасцю вынішчана натуральная расліннасць, дамінуе аграландшафт і паселішчы чалавека, лясныя фрагменты складаюць каля 10 % тэрыторыі (Карэліцкі і Нясвіжскі раёны); *Рэкрэацыйна-ўрбанізаваны* ландшафт прыгарада Мінска (Мінскі і Смалявіцкі раёны). Усе абраныя мадэльныя тэрыторыі ляжаць у межах дамінавання іглічна-драбналістых лясоў, дзе першапачаткова пераважала адна і тая ж фауна хрыбетных драпежнікаў умеранай часткі лясной зоны Еўропы.

Для падліку соў карысталіся метадам маршрутных падлікаў з правакацыяй тэрытарыяльных абаронных рэакцый пры прайграванні фанаграм галасоў соў [1]. Падлік соў праводзіўся ў сакавіку-красавіку ў перыяд іх максімальнай актыўнасці з улікам відавой спецыфічнасці паводзін. Разлік шчыльнасці відаў вёўся як на падставе маршрутных падлікаў (шырыня трансекты памнажалася на яе працягласць), так і на падставе падліку колькасці асобін на пэўнай плошчы абследавання. Пры разліку відавой структуры соў сукупная шчыльнасць усіх відаў бралася за 100 %, адносна чаго разлічвалася доля кожнага віда ў працэнтах. Відавую разнастайнасць і дамінаванне ў структуры асамблеі соў ацэньвалі з дапамогай індэкса Сімпсана (IC) [2], выраўненасць структуры – індэкса Камарга (IK) [3]. Для колькаснага вызначэння дамінуючага віда(аў) соў зроблена мадэляванне змен індэкса відавой разнастайнасці і дамінавання IC у залежнасці ад найбольшай долі віда ў відавой структуры. Пры саставе 4–9 відаў найбольшы злом гэтай крывой, дзе назіралася значнае памяншэнне IC, вызначаны калі доля віда была 35–40 %. Від лічылі дамінантным, калі яго доля ў відавой структуры была 35 % і болей. Для параўнання працэнтаў карысталіся *G*-тэстам.

У залежнасці ад масы цела хрыбетных драпежнікаў выдзелены наступныя чатыры памеравыя групы: буйнапамеравыя (каля 20 кг і болей), сярэднепамеравыя большыя (2,5–5 кг), сярэднепамеравыя меншыя (0,5–2,5 кг) і дробнапамеравыя (да 0,5 кг) [4]. Адпаведна з гэтым памеравая структура разлічвалася як доля (%) кожнай памеравай групы відаў адносна іх сукупнай шчыльнасці (бралася як 100 %).

Ацэнка шчыльнасці папуляцый соў у Паазёрскай пушчы праводзілася ў 1996–2004 гг., у Налібоцкай пушчы ў 2000–2015 гг., на прыродна-аграрнай і татальнай аграрнай тэрыторыях у 2011–2015 гг., у рэкрэацыйна-ўрбанізаваным прыгарадзе ў 2000–2014 гг.

Вынікі і іх абмеркаванне. У адносна натуральным прыродным комплексе Паазер'я выяўлена сталае жыхарства 9 відаў соў [4; 5] (табл. 1). Гэта пугач *Bubo bubo*, шэрая кугакаўка *Strix aluco*, даўгахвостая кугакаўка *Strix uralensis*, барадатая кугакаўка *Strix nebulosa*, касматаногі сыч *Aegolius funereus*, вераб'іны сычык *Glaucidium passerinum*, вушастая сава *Asio otus*, балотная сава *Asio flammeus* і сплюшка *Otus scops*. У відавой структуры няма дамінуючых відаў. Тры віды соў складаюць 80 % структуры іх асамблеі – вераб'іны сычык (33,7 %), даўгахвостая кугакаўка (25,4 %) і касматаногі сыч (20,7 %). Трэба сказаць некалькі слоў наконт даўгахвостай кугакаўкі. Гэты барэальны від у асноўным жыве ў паўночнай частцы Беларусі, а ў цэнтральнай Беларусі праходзіць паўднёвая мяжа яго арэалу, таму змены ў яе прадстаўленасці не будуць звязвацца з антрапагеннай трансфармацыяй натуральнага асяроддзя. Рэдкімі былі пугач (0,1 %), барадатая кугакаўка (0,2 %), балотная сава (0,7 %) і сплюшка (1,0 %). Наяўнасць гэтых малаколькасных відаў надавала асамблеі соў даволі вялікую разнастайнасць (ІС = 0,76), але і выводзіла выраўненасць відавой структуры на сярэдні ўзровень (ІК = 0,42).

Т а б л і ц а 1. **Відавы састаў асамблеі соў, шчыльнасць (асобін/100 км^2) і прапорцыі (у дужках у %) іх папуляцый на мадэльных тэрыторыях з рознай антрапагеннай трансфармацыяй прыроднага асяроддзя, 1998–2015 гг.**

Від	Маса цела, г	Паазёрская пушча	Налібоцкая пушча	Леса-аграрная тэрыторыя	Татальная аграрная тэрыторыя	Рэкрэацыйна-ўрбанізаваны прыгарад	
						аграрна-забудаваны фрагмент	лясны фрагмент
Пугач	2666	0,2 (0,1)	1,0 (0,7)	–	–	–	–
Шэрая кугакаўка	557	21 (12,4)	74 (51,0)	23,4 (17,7)	11,1 (21,6)	7,8 (11,3)	17,0 (16,2)
Даўгахвостая кугакаўка	796	43 (25,4)	0,8 (0,6)	–	–	–	1,3 (1,2)
Барадатая кугакаўка	1057	0,4 (0,2)	5,5 (3,8)	–	–	–	–
Касматаногі сыч	145	35,0 (20,7)	21,3 (14,7)	37,0 (28,0)	–	17,8 (25,7)	48,4 (46,1)
Вераб'іны сычык	66	57 (33,7)	33,2 (22,9)	15,3 (11,6)	–	–	27,9 (26,6)
Вушастая сава	308	9,7 (5,7)	8,6 (5,9)	40 (30,2)	32 (62,3)	34,8 (50,2)	7,6 (7,2)
Сіпель	197	–	0,4 (0,3)	16,6 (12,5)	8,3 (16,1)	8,9 (12,8)	2,7 (2,6)
Балотная сава	381	1,1 (0,7)	0,2 (0,2)	–	–	–	–
Сплюшка	90	1,7 (1,0)	–	–	–	–	–
Колькасць відаў/сумарная шчыльнасць		9/169,1	9/145	5/132,3	3/51,4	4/69,3	6/104,9

У Налібоцкай пушчы пад час гнездавання таксама выяўлена 9 відаў соў, але тут ужо адсутнічае сплюшка і ў невялікай колькасці адзначаецца сіпель *Athene noctua* (0,2 %). Вельмі рэдка на міграцыях тут сустракаюцца сава-бярозаўка *Surnia ulula* і белая сава *Nyctea scandiaca*. У структуры асамблеі соў вызначыліся значныя змены. Па-першае, яна стала больш дамінантнай (ІС = 0,66) і яшчэ менш выраўненай (ІК = 0,32). Дамінуючае значэнне набывае шэрая кугакаўка (51,1 %), яе доля павялічваецца ў 4 разы ў параўнанні з Паазёрскай пушчай (G = 25,2, p < 0,01). Па-другое, назіраліся рознанакіраваныя змены ў прапорцыях некаторых відаў. Выяўлены як станоўчыя эфекты – значна павялічылася доля барадатай кугакаўкі (у 19 разоў; G = 4,0, p = 0,03), пугача (у 7 разоў; G = 0,5, p = 0,3) і шэрай кугакаўкі, што адлюстроўвае адпаведныя змены ў павелічэнні шчыльнасці іх папуляцый, так і адмоўныя – памяншэнне шчыльнасці папуляцый вераб'інага сычыка і касматаногага сыча, якія яшчэ хоць і займаюць субдамінантнае становішча, але іх доля ў структуры асамблеі соў была ўжо меншая (каля 1,5 раз; $G \leq 2{,}1$, $p \geq 0{,}1$), чым на адносна натуральнай тэрыторыі Паазер'я (22,9 і 14,7 % адпаведна). Як бачна, пачала памяншацца прадстаўленасць дробнапамеравых лясных відаў соў. Таксама вызначана памяншэнне долі балотнай савы (у 3,5 разоў). Відавая структура асамблеі соў адрозніваецца ў Паазёрскай і Налібоцкай пушчах (G = 63,2, p < 0,001).

На леса-аграрнай тэрыторыі выяўлена значна менш відаў соў – пяць. Тут ужо знікаюць пугач, балотная сава, барадатая і даўгахвостая кугакаўкі. Гэта непасрэдна звязана са знікненнем ці памяншэннем прыдатнага для гнездавання і кормаздабывання асяроддзя, абумоўленымі высечкай лесу і асушэннем нізінных балот і выкарыстаннем гэтых тэрыторый пад інтэнсіўныя нівы

і пашы. Як і ў Паазёрскай пушчы, тут адсутнічаюць віды-дамінанты. У структуры асамблеі соў найбольшую долю ўжо набываюць вушастая сава (30,2 %) і касматаногі сыч (28,0 %). Астатнія тры віды маюць падобныя прапорцыі (11,6–17,7 %). Асабліва прыкметна памяншаецца доля шэрай кугакаўкі ў параўнанні з Налібоцкай пушчай (у 2,9 разоў; G = 16,8, p < 0,01), і па значэнні бліжэй да такой у Паазёрскай пушчы (G = 0,94, p = 0,51). Ідзе далейшае памяншэнне долі вераб'інага сычыка (у 2–3 разы; $G \geq 3{,}85$, $p \leq 0{,}05$). Выключэнне складае толькі касматаногі сыч, доля якога трохі павялічылася (1,5–1,9 разоў, адно з двух параўнанняў статыстычна дакладнае; G = 4,2, p = 0,03). Доля вушастай савы на леса-аграрнай тэрыторыі ў параўнанні з гэтакім на адносна натуральнай паазёрскай і зменанай налібоцкай павялічваецца ў 5 разоў ($G \geq 17{,}9$, $p \leq 0{,}01$), а сіпеля – больш, чым у 63 разы ($G \geq 15{,}5$, $p \leq 0{,}01$). Нягледзячы на меншую колькасць відаў, чым у Паазёрскай і Налібоцкай пушчах, індэкс відавой разнастайнасці на леса-аграрнай тэрыторыі быў большы (ІС = 0,77). Так адбываецца з-за таго, што тут няма дамінуючых відаў, але няма і рэдкіх, і пры больш-менш блізкіх значэннях долі відаў і меншай іх колькасці, гэта вядзе да большай выраўненасці структуры (ІК = 0,79 супраць ІК = 0,32–0,42). Відавая структура асамблеі соў адрозніваецца ў Налібоцкай пушчы і на прыродна-аграрнай тэрыторыі (G = 57,5; p < 0,001).

У татальным аграрным ландшафце выяўлена ўсяго тры віды соў. Тут ужо знікаюць касматаногі сыч і вераб'іны сычык. У структуры асамблеі соў моцна дамінуе вушастая сава (62,3 %), яе доля павялічваецца ўдвая нават у параўнанні з леса-аграрнай тэрыторыяй (G = 11,4, p < 0,01), не кажучы пра астатнія больш натуральныя. Долі сіпеля і шэрай кугакаўкі ў татальным аграрным ландшафце падобныя з такімі на леса-аграрнай тэрыторыі ($G \leq 0{,}45$, $p \geq 0{,}25$). Пры гэтым доля шэрай кугакаўкі ў татальным аграрным ландшафце была менш, чым на тэрыторыі са значна змененым натуральным асяроддзем у Налібоцкай пушчы (2,4 разы; G = 12,3, p < 0,01), але больш, чым у адносна натуральным прыродным комплексе Паазёрскай пушчы (1,7 раз; G = 2,5, p = 0,1), хаця шчыльнасць яе папуляцыі была значна меншай. Індэкс відавой разнастайнасці тут быў самы меншы (ІС = 0,54). Відавая структура асамблеі соў адрозніваецца на леса-аграрнай і татальна-аграрнай тэрыторыях (G = 56,8; p < 0,001).

У рэкрэацыйна-ўрбанізаваным прыгарадзе для даследаванняў вызначылі дзве даволі адрозныя па трансфармацыі тэрыторыі. Першая – даволі густа населена людзьмі, асабліва летам, тут спалучаюцца моцна трансфарміраваныя тэрыторыі пад аграландшафтам з рознага кшталту забудовамі (вёскі і лецішчы), невялічкія курціны лесу, асушаныя землі і каналы (для скарачэння ўмоўна назавём аграрна-забудаваны прыгарад), другая – даволі вялікія лясныя масівы (лясны прыгарад). Падобныя лясы гістарычна захаваліся як дзяржаўна маёмасныя запасы драўніны паблізу вялікага горада, напрыклад, у лясным масіве Казённы пад Мінскам, дзе праведзена даследаванне.

У аграрна-забудаваным фрагменце рэкрэацыйна-ўрбанізаванага прыгарада Мінска выяўлены чатыры віды соў. Як і ў татальным аграрным ландшафце, тут дамінуе вушастая сава (50,2 %). Дзякуючы наяўнасці экалагічна ёмістых фрагментаваных лясоў, шматлікіх садоў і старых забудоў, тут зноў з'яўляецца касматаногі сыч (25,7 %), прычым на такім жа ўзроўні, як і на леса-аграрнай тэрыторыі, і займае субдамінантнае становішча ў структуры асамблеі соў. Доля шэрай кугакаўкі была меншай, чым на іншых антрапагенна трансфарміраваных тэрыторыях (у 1,6–4,5 разоў; 2 з 3 параўнанняў статыстычна дакладныя, $G \geq 3{,}3$, $p \leq 0{,}05$) і падобная з такім адносна натуральнага прыроднага комплекса Паазер'я (але шчыльнасць папуляцыі амаль удвая менш). Відавая структура асамблеі соў адрозніваецца ў татальным аграрным ландшафце і ў забудаванай частцы рэкрэацыйна-ўрбанізаванага прыгарада (G = 81,5; p < 0,001).

У лясной частцы рэкрэацыйна-ўрбанізаванага прыгарада Мінска вызначана шэсць відаў соў. Тут дамінуе касматаногі сыч, субдамінантамі з'яўляюцца вераб'іны сычык і шэрая кугакаўка. Як бачна, гэтыя паказчыкі блізкія да тэрыторый Паазёрскай і Налібоцкай пушчаў, г. зн. да адносна натуральнага ўзроўня. А адбываецца гэта дзякуючы захаванасці вялікіх лясоў плошчай у дзясяткі квадратных кіламетраў і іх узростам (дамінуюць спелыя і прыспяваючыя лясы). Але відавая структура асамблеі соў лясной часткі рэкрэацыйна-ўрбанізаванага прыгарада адрозніваецца з гэтакім у Паазёрскай (G = 39,5; p < 0,001) і Налібоцкай (G = 40,5; p < 0,001) пушчах. Індэкс відавой разнастайнасці і дамінавання ў асамблеі соў у рэкрэацыйна-ўрбанізаваным прыгарадзе быў на сярэднім узроўні (ІС = 0,65–0,68), амаль як у Налібоцкай пушчы.

Відавая структура асамблеі соў на ўсіх мадэльных тэрыторыях з розным узроўнем антрапагеннай трансфармацыі статыстычна дакладна адрозніваецца ($G \geq 39{,}5$, $p \leq 0{,}001$).

Памеравая структура асамблеі соў. Увогуле ў асамблеі соў няма ні аднаго буйнапамеравага (каля 20 кг і болей) віда. Самы буйны прадстаўнік соў еўрапейскай фауны – пугач, які сярод таксанамічных драпежнікаў уваходзіць у групу сярэднепамеравых большых (2,5–5 кг). Паколькі пугач сустракаўся толькі ў Паазёрскай і Налібоцкай пушчах і з вельмі малой шчыльнасцю (табл. 1), то і доля сярэднепамеравых большых відаў была вельмі малой і адзначана толькі на гэтых мала трансфарміраваных тэрыторыях (табл. 2).

Т а б л і ц а 2. **Памеравая структура асамблеі соў, шчыльнасць (асобін/100 км^2) і прапорцыі (у дужках у %) рознапамеравых груп соў на мадэльных тэрыторыях з рознай антрапагеннай трансфармацыяй прыроднага асяроддзя**

Рознапамеравыя групы соў	Паазёрская пушча	Налібоцкая пушча	Леса-аграрная тэрыторыя	Татальная аграрная тэрыторыя	Рэкрэацыйна-ўрбанізаваны прыгарад	
					аграрна-забудаваны фрагмент	лясны фрагмент
Сярэднепамеравыя большыя (2,5–5 кг)	0,2(0,1)	1,0(0,7)	–	–	–	–
Сярэднепамеравыя меншыя (0,5–2,5 кг)	64,4(38)	80,3(55,3)	23,4(17,7)	11,1(21,6)	7,8(11,3)	18,3(17,4)
Дробныя (да 0,5 кг)	104,5(61,8)	63,7(44,0)	108,9(82,3)	40,3(78,4)	61,5(88,7)	86,6(82,6)
Сярэднеўзважаная маса соў, г	349	404	264	340	280	212

У памеравай структуры асамблеі соў большую частку складаюць дробнапамеравыя (да 0,5 кг) віды – 44,0–88,7 %. Але ў адносна натуральным прыродным комплексе Паазёрскай пушчы і значна змененым прыродным комплексе Налібоцкай пушчы іх доля была крыху меншай, чым на астатніх трансфарміраваных тэрыторыях: у 1,3–1,4 разы, чым у Паазёрскай пушчы (3 з 4 параўнанняў статыстычна дакладныя, $G \geq 2{,}97$, $p \leq 0{,}05$) і 1,8–2 разы, чым у Налібоцкай пушчы ($G \geq 9{,}87$, $p \leq 0{,}001$). Пры гэтым у Налібоцкай пушчы доля дробнапамеравых відаў соў была самай меншай, нават менш у 1,5 разоў (адрозненні блізкія да статыстычна дакладнага $G = 3{,}07$; $p = 0{,}059$), чым у Паазёрскай пушчы. Адпаведна доля сярэднепамеравых меншых (0,5–2,5 кг) відаў соў была самай большай у Налібоцкай пушчы: больш, чым у Паазёрскай пушчы ў 1,5 разоў (адрозненні блізкія да статыстычна дакладнага, $G = 3{,}27$, $p = 0{,}05$), і ў 2,6–4,9 разоў больш, чым на астатніх больш трансфармаваных тэрыторыях ($G \geq 15{,}35$, $p \leq 0{,}001$). Гэта звязана з дамінаваннем там такога сярэднепамеравага віда, як шэрая кугакаўка. Доля сярэднепамеравых меншых відаў соў у Паазёрскай пушчы ў параўнанні з астатнімі больш трансфарміраванымі, чым Налібоцкая пушча, тэрыторыямі была ў 1,8–3,3 разы большай ($G \geq 7{,}94$, $p \leq 0{,}001$).

Памеравая структура асамблеі соў была падобная ў Паазёрскай і Налібоцкай пушчах ($G = 1{,}88$, $p = 0{,}1$) і статыстычна дакладна адрознівалася ад астатніх больш трансфарміраваных тэрыторый ($G \geq 6{,}99$, $p \leq 0{,}05$), дзе моцна дамінавалі дробнапамеравыя віды. На больш трансфарміраваных тэрыторыях, чым адносна натуральны і значна зменены прыродны комплекс, памеравая структура соў была падобнай ($G \leq 3{,}92$, $p \geq 0{,}14$).

Разлічана сярэднеўзважаная маса соў для мадэльных тэрыторый (табл. 2). Цалкам вызначана памяншэнне сярэднеўзважанай масы соў (у 1,3–1,7 разоў) у кірунку ад адносна натуральнага асяроддзя Паазёрскай пушчы да рэкрэацыйна-ўрбанізаванага прыгарада Мінска. Пры гэтым на памежкавых стадыях назіраліся некаторыя выключэнні: у змененым прыродным комплексе Налібоцкай пушчы вызначана самая вялікая сярэднеўзважаная маса соў (больш у 1,2–1,9 разоў), што тлумачыцца наяўнасцю даволі шчыльнай папуляцыі сярэднепамеравага віду – шэрай кугакаўкі.

Такім чынам, вызначана, што з павелічэннем антрапагеннай трансфармацыі прыроднага асяроддзя значна змяняецца памеравая структура асамблеі соў у бок павелічэння колькасці дробнапамеравых відаў.

Заключэнне. З павелічэннем антрапагеннай трансфармацыі прыроднага асяроддзя памяншаецца колькасць відаў соў і ідзе значная перабудова структуры іх асамблеі. Вызначана змена характару дамінавання пры пераходзе ад адносна натуральнага да стану татальнага аграрнага

ландшафту і забудаванага прыгарада. У гэтым кірунку цалкам вызначана павелічэнне дамінавання ў відавой структуры ад яе адсутнасці ў Паазёрскай пушчы да абсалютнага дамінавання аднаго віда на моцна трансфарміраваных тэрыторыях. Акрамя таго, у асамблеі соў вызначана знікненне рэдкіх відаў з павелічэннем трансфармацыі прыродных комплексаў.

У Паазёрскай пушчы, дзе пераважае толькі высечка леса з лесааднаўленнем, і ў Налібоцкай пушчы, дзе ў дадатак да лесаэксплуатацыі яшчэ і асушальная меліярацыя, што зараз з большасці закінута, пазарастала і падтоплена бабрамі, не складаецца адмоўных умоў для фарміравання багатай відавой структуры ў асамблеі соў. На першай прыступцы трансфармацыі ў Налібоцкай пушчы гэтакі ж відавы састаў соў, як і ў адносна натуральным прыродным комплексе Паазёрскай пушчы, але пачынае змяншацца доля лясных відаў соў (вераб'іны сычык, касматаногі сыч), якія знікаюць пры максімальнай трансфармацыі – на татальнай аграрнай тэрыторыі. Вызначаецца і часовы станоўчы эфект на гэтай мала трансфарміраванай тэрыторыі, які праяўляецца ў павелічэнні долі пугача і барадатай кугакаўкі, якія потым знікаюць ужо на наступнай ступені антрапагеннай трансфармацыі – на леса-аграрнай тэрыторыі. На тэрыторыі на першай ступені трансфармацыі ў Налібоцкай пушчы з'яўляюцца сінантрапныя віды соў (сіпель) ці прысутнічаюць віды, якія імкнуцца да адкрытых прастораў і паселішчаў чалавека (вушастая сава), колькасць якіх істотна павялічваецца на леса-аграрнай тэрыторыі і мае максімальныя значэнні на моцна трансфарміраваных. На татальна аграрнай тэрыторыі вызначаюцца толькі сінантропныя віды і шэрая кугакаўка, якая ў апошнія амаль сто гадоў усе больш і больш засяляе антрапагенны ландшафт і ў асаблівасці населеныя пункты [6]. Сталая трансфармацыя асяроддзя на татальным аграрным і прыгарадным рэкрэацыйна-ўрбанізаваным ландшафтах маюць настолькі значную фрагментацыю прыдатнага асяроддзя для большасці відаў соў, што там не складаюцца іх лакальныя папуляцыі, што вядзе да іх адсутнасці. Усе гэтыя змены відавой структуры адбываюцца на фоне памяншэння сукупнай шчыльнасці соў пры павелічэнні антрапагеннай трансфармацыі тэрыторыі. Важна адзначыць, што ў прыгарадных лясных масівах, якія ў большасці стараўзроставыя, назіраецца даволі вялікая колькасць відаў соў, што вызначае іх значную дадатную ролю ў захаванні біялагічнай разнастайнасці.

Спіс выкарыстанай літаратуры

1. *Воронецкий, В. И.* Методы изучения и охраны хищных птиц / В. И. Воронецкий, А. К. Тишечкин, В. Т. Демянчик – М., 1999. – С. 23–36.

2. *Krebs, C. J.* Ecological methodology / C. J. Krebs. – California, Addison-Welsey ed. publ., Menlo Park, 1998.

3. *Pianka, E. R.* The structure of lizard communities / E. R. Pianka // Annual Review of Ecology and Systematics. – 1973. – Vol. 4. – P. 53–74.

4. *Sidorovich, V. E.* Analysis of vertebrate predator-prey community / V. E. Sidorovich. – Minsk, 2011.

5. *Ивановский, В. В.* Хищные птицы Белорусского Поозерья / В. В. Ивановский. – Витебск: УО «ВГУ им. П. М. Машерова», 2012.

6. *Пукинский, Ю. Б.* Жизнь сов / Ю. Б. Пукинский. – Л.: Издательство ЛГУ, 1977.

Паступіла ў рэдакцыю 12.10.2015

Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **ноябрь–декабрь** **Том 59 № 6**

УДК 597.554.3::[556.55:574.587](476)

Д. А. ЛУКАШАНЕЦ, И. В. НОВИК

ВЛИЯНИЕ ВСЕЛЕНИЯ КАРПА *CYPRINUS CARPIO* LINNAEUS, 1758 НА СООБЩЕСТВО МАКРОЗООБЕНТОСА ОЗЕРНЫХ ЭКОСИСТЕМ

(Представлено членом-корреспондентом В. П. Семенченко)

НПЦ НАН Беларуси по биоресурсам, Минск, Беларусь
lukashanetsdm@rambler.ru; novik_igor@rambler.ru

В сообщении показаны результаты изучения обыкновенного карпа на макрозообентос в озерных экосистемах. Установлено снижение численности и биомассы бентоса в литорали зарыбленного водоема. Происходит изменение структуры бентоса – увеличение относительной численности личинок *Diptera* (*Chironomidae* sp.) за счет выедания карпом крупных личинок насекомых *Odonata*, *Ephemeroptera*, *Megaloptera*, *Trichoptera*.

Ключевые слова: обыкновенный карп, озерные экосистемы, макрозообентос.

D. A. LUKASHANETS, I. V. NOVIK

INFLUENCE OF COMMON CARP *CYPRINUS CARPIO* LINNAEUS, 1758 STOKING ON THE MACROZOOBENTHIC COMMUNITY IN LAKE ECOSYSTEMS

Scientific and Practical Center for Bioresources of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
lukashanetsdm@rambler.ru; novik_igor@rambler.ru

The article contains the research results of the common carp influence on macrozoobenthos in lake ecosystems. The reduction of the benthos abundance and its biomass in the littoral of the fish-stocking reservoir is established. It is found that the benthos structure – the increase in a relative abundance of *Diptera* (*Chironomidae* sp.) larvae changes due to the grazing of large larvae of *Odonata*, *Ephemeroptera*, *Megaloptera* and *Trichoptera* by big carp.

Keywords: common carp, lake ecosystems, macrozoobenthos.

Введение. Сазан, или обыкновенный карп (*Cyprinus carpio* Linnaeus, 1758) – вид, имеющий важное промысловое значение, искусственное вселение которого зачастую несет значительные последствия для биоты водоема. Кроме прямой конкуренции с другими представителями ихтиофауны (иногда влекущей катастрофические последствия для последних), в качестве основного воздействия карпа называют его роющую деятельность, которая вызывает целый каскад эффектов: уничтожение водной растительности и организмов зообентоса, высвобождение большого количество биогенов из донных отложений, увеличение мутности и уменьшение прозрачности воды, массовое развитие фито-, а затем и зоопланктона. Все перечисленные явления описаны в ряде зарубежных работ [1–6]. Однако в большинстве из них речь идет о значительных плотностях карпа (до 1000 кг/га), особенности же влияния этой рыбы при средней или незначительной ее численности раскрыты еще недостаточно. В частности, остается много вопросов касательно степени влияния карпа на основные компоненты экосистемы.

В Беларуси практиковалось зарыбление карпом именно с небольшой плотностью посадки (10–60 экз/га) [7]. Существенным также является и тот факт, что в водоемах нашей страны карп не размножается, т. е. не образует естественных популяций. Немногочисленные опубликованные работы посвящены влиянию карпа на аборигенную ихтиофауну [8], а также процессам роста и питания [9], причем в последних есть сведения о характере воздействия рыбы на донную фауну.

© Лукашанец Д. А., Новик И. В., 2015.

Цель работы – выяснить основные закономерности изменений, наступающих под влиянием карпа, в сообществе макрозообентоса как основного компонента экосистем водоемов в условиях Беларуси.

Материалы и методы исследования. Для исследования были взяты два модельных водоема (зарыбленный и контрольный), расположенных в Горецком районе Могилевской области и находящихся в непосредственной близости друг от друга, что и обуславливает схожесть как природных условий, так и характера антропогенного воздействия. Зарыбленный водоем – озеро Шишево-Орлы. Вселение карпа произведено осенью 2013 г. Общая масса посадочного материала 4,7 т, плотность посадки 94 кг/га (или приблизительно 471 экз/га), что превышает аналогичные показатели в среднем по Беларуси, но тем не менее значительно ниже, чем в мировой практике. Площадь водоема приблизительно 0,5 км^2. Средняя глубина составляет 4,0 м, максимальная – 11,0 м. Контрольный водоем – озеро Красулино площадью 0,28 км^2. Средняя глубина водоема – 2,7 м, максимальная глубина – 4,5 м. За исключением вселенного в зарыбленное озере карпа, ихтиофауна обоих водоемов в целом схожа: наибольшую долю как по численности, так и по биомассе образует серебряный карась *Carassius gibelio* (Bloch, 1782), также присутствуют линь *Tinca tinca* (Linnaeus, 1758), плотва *Rutilus rutilus* Linnaeus, 1758, лещ *Abramis brama* Linnaeus, 1758, а из хищников – окунь *Perca fluviatilis* Linnaeus, 1758 и щука *Esox lucius* Linnaeus, 1758 (данные по Красулино получены на основании проведенных выловов, по Шишево-Орлы – из тоневых документов).

Таксономический состав бентоса в модельных водоемах за 4 сезона

Таксон	Место регистрации
тип Mollusca	
класс Bivalvia	
Dreissena polymorpha (Pallas, 1771)	Кр (лт, пф), ШО (лт)
Unio pictorum (Linnaeus, 1758)	Кр (лт), ШО (лт)
Anodonta anatina (Linnaeus, 1758)	Кр (лт)
класс Gastropoda	
Viviparus viviparus Linnaeus, 1758	Кр (лт)
тип Annelida	
класс Clitellata	
п/класс Oligochaeta	
Oligochaeta gen. spp.	Кр (лт, пф), ШО (лт, пф)
п/класс Hirudinea	
Erpobdella nigricolis (Brandes, 1900)	Кр (лт)
Helobdella stagnalis (Linnaeus, 1758)	Кр (лт, пф), ШО (лт)
Glossiophonia concolor (Apathy, 1888)	Кр (лт)
тип Arthropoda	
класс Malacostraca	
отряд Amphipoda	
Gammaridae gen. spp.	ШО (лт)
класс Arachnidae	
Hydracarina gen. spp.	Кр (лт)
класс Insecta	
отряд Diptera	
Chironomidae gen. spp.	Кр (лт, пф), ШО (лт, пф)
Chaoboridae gen. spp.	Кр (лт, пф), ШО (лт, пф)
Ceratopogonidae gen. spp.	Кр (лт, пф), ШО (лт, пф)
Dixiidae gen. spp.	ШО (пф)
отряд Odonata	
Epitheca bimaculata Charpentier, 1825	Кр (лт, пф)
отряд Trichoptera	
Cyrnus flavidus McLachlan, 1864	Кр (лт)
Economus tenellus (Rambur, 1842)	Кр (лт), ШО (лт)
Phryganea grandis (Linnaeus, 1758)	Кр (лт)
отряд Ephemeroptera	
Caenis horaria (Linnaeus, 1758)	Кр (лт, пф)
отряд Megaloptera	
Sialis lutaria (Linnaeus, 1758)	Кр (лт), ШО (лт)

Примечание. Кр – озеро Красулино; ШО – озеро Шишево-Орлы; лт – литораль; пф – профундаль.

Для оценки состояния макрозообентоса были взяты пробы на различных участках исследуемых озер. Отбор происходил на трех разрезах зарыбленного водоема и на трех разрезах контрольного, при этом каждый разрез включал в себя 3 точки: 1 – у берега, 2 – на 1/2 расстояния от берега до середины озера, 3 – на середине озера. Таким образом, общее число точек отбора проб равнялось 18. Время сбора – март, май, июнь и октябрь 2014 г. Используемое оборудование – дночерпатель Петерсена, в качестве фиксирующего вещества применялся 70 %-ный этиловый спирт.

При статистической обработке результатов использован непараметрический метод сравнения двух независимых выборок (Mann-Whithney *U*-test).

Результаты и их обсуждение. В целом для бентоса исследованных озер характерен достаточно бедный видовой состав (таблица). Все найденные организмы относятся к трем типам беспозвоночных – Mollusca, Annelida и Arthropoda.

Моллюски были представлены двустворчатыми: речной дрейссеной *Dreissena polymorpha* (Pallas, 1771), обыкновенной перловицей *Unio pictorum* (Linnaeus, 1758) и беззубкой *Anodonta anatina* (Linnaeus, 1758). Гораздо реже были встречены брюхоногие моллюски – в частности, *Viviparus viviparus* Linnaeus, 1758. В исследованных водоемах моллюски зарегистрированы практически только в литорали: в озере Красулино – в 90 % случаев, в Шишево-Орлы – в 100 %.

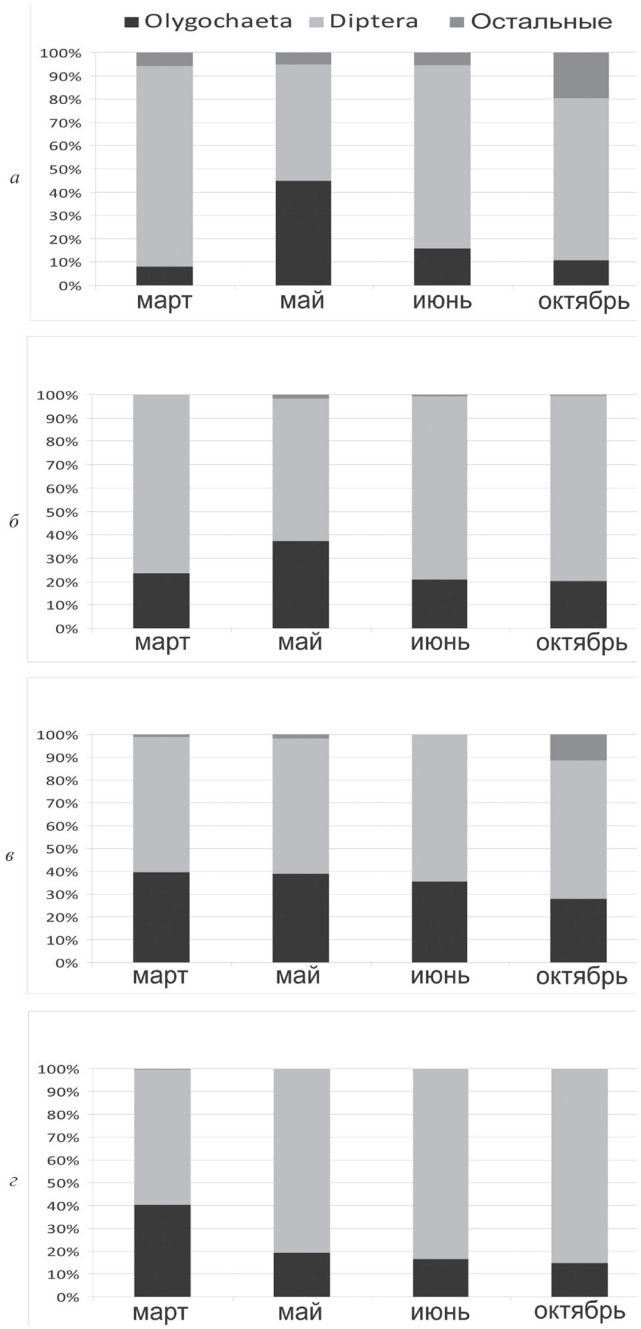


Рис. 1. Динамика численности представителей основных групп макрозообентоса в озерах Красулино (*а* – литораль, *б* – профундаль) и Шишево-Орлы (*в* – литораль, *г* – профундаль)

Среди червей абсолютное большинство – представители подкласса *Oligochaeta*. Малощетинковые черви были встречены в пробах практически во всех станциях и во все сезоны. Исключениями были только 3 станции озера Красулино в июне и 4 станции озера Шишево-Орлы в течение весны-лета; осенью малощетинковые черви не были зарегистрированы на 3 точках в одном водоеме, и на 3 – в другом. Представители класса Hirudinea попадались лишь изредка; относительная численность пиявок – 1,4 % в озере Красулино и 0,2 % в озере Шишево-Орлы.

Членистоногие в бентосе исследованных озер – это, в первую очередь, личинки насекомых и только лишь единичные регистрации клещей *Hydracarina* и ракообразных *Amphipoda*. Доминирующей группой их всех насекомых бентоса исследованных озер являлись представители *Diptera*. В некоторых станциях они составляли до 100 % от всех организмов. Только в июне их не было в пробах, отобранных в двух точках, – одной с озера Красулино и одной с озера Шишево-Орлы. Были отмечены следующие семейства двукрылых – Chironomidae, Chaoboridae, Ceratopogonidae, Dixiidae. Наиболее часто встречающимися были личинки хирономид, что вполне ожидаемо в со-

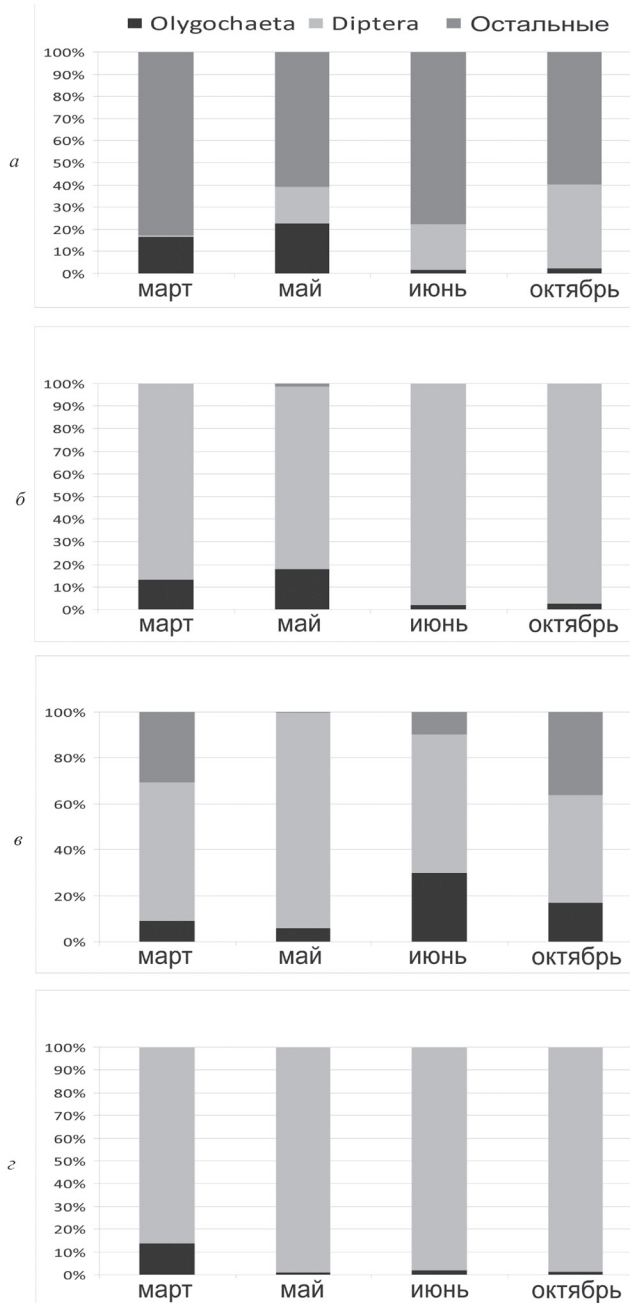


Рис. 2. Динамика биомассы представителей основных групп макрозообентоса в озерах Красулино (*а* – литораль, *б* – профундаль) и Шишево-Орлы (*в* – литораль, *г* – профундаль)

ответствии с общепринятыми гидробиологическими представлениями. Кроме двукрылых насекомые бентоса исследованных озер представлены еще четырьмя отрядами – стрекозами (*Odonata*), подёнками (*Ephemeroptera*), ручейниками (*Trichoptera*), большекрылыми (*Megaloptera*).

Для оценки влияния карпа, а точнее его кормовой деятельности на зообентос озера, был проведен анализ соотношения тех или иных групп организмов данного сообщества (рис. 1 и 2). При этом были исключены моллюски как пищевой ресурс с неочевидной привлекательностью для карпа (небольшие особи могут встречаться в питании рыбы, однако большинство найденных экземпляров – особи средних и крупных размеров). Все остальные беспозвоночные были разделены на три группы – малощетинковые черви, личинки двукрылых и остальные организмы (личинки насекомых других отрядов, водные клещи, амфиподы и т. д.).

В результате для модельных водоемов показаны существенные различия.

В зарыбленном озере Шишево-Орлы наиболее многочисленными и наиболее представленными в общей биомассе являлись личинки двукрылых, причем это было характерно как для литорали, так и для профундали. На протяжении всех сезонов эти показатели были следующие: 58–63 и 60–86 % (относительная численность в литорали и профундали соответственно); 47–91 и 86–99 % (относительная биомасса в литорали и профундали).

В контрольном водоеме Красулино также отмечена преобладающая роль личинок двукрылых в формировании общей структуры зообентоса, но только в случае оценки их численности: литораль – 50–86 %; профундаль – 61–78 %. Что касается биомассы, то доминирование личинок двукрылых (в первую очередь, хирономид) наблюдается далеко не всегда – в основном, в станциях, расположенных в профундали. Там доля Diptera составляла от 86 до 97 %. В литоральной зоне озера Красулино значения относительной биомассы личинок двукрылых в течение четырех сезонов были гораздо меньше и равнялись 0,7 % (март), 17 % (май), 20 % (июнь), 38 % (октябрь). Доминировали же организмы из группы «остальных», т. е. личинки ручейников, большекрылых, поденок и стрекоз – 60–83 %. Именно они являются основным компонентом литорального зообентоса в водоеме Красулино; представленные крупными экземплярами (например, ручейники семейства Phryganeidae, вислокрылки рода *Sialis* и др.) эти организмы, однако, не образуют значительную долю в общей структуре сообщества по относительной численности.

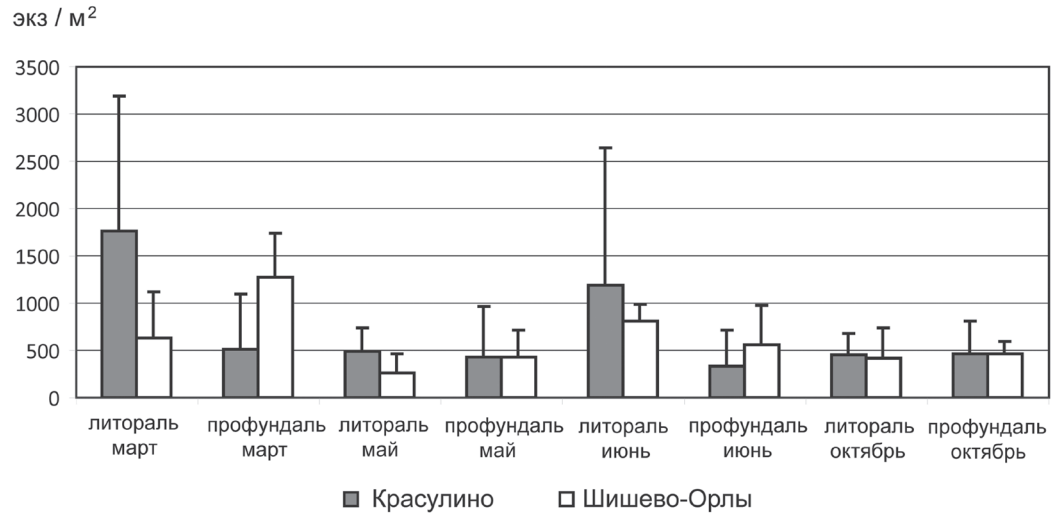


Рис. 3. Сравнение показателей численности организмов макрозообентоса (Mean ± SD) в модельных водоемах

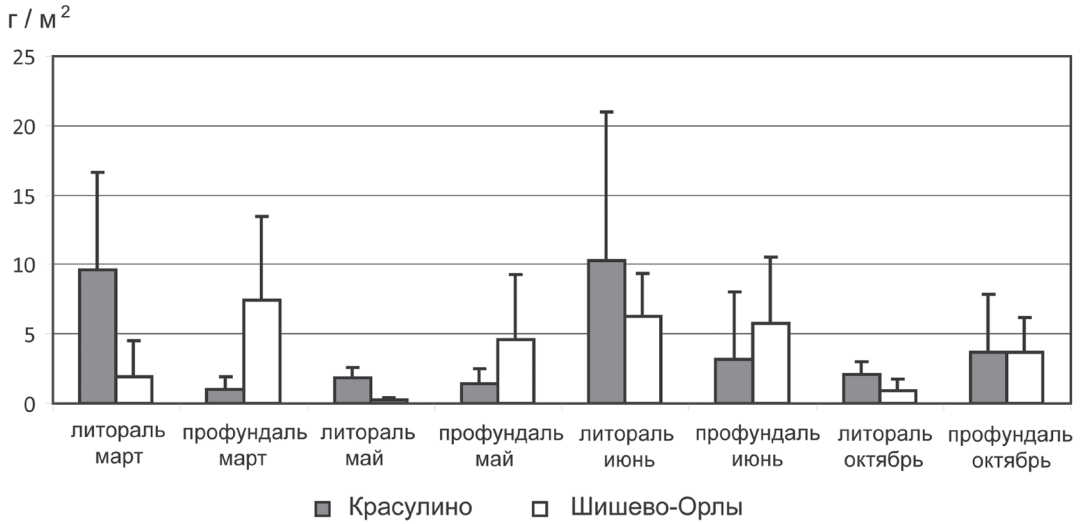


Рис. 4. Сравнение показателей биомассы (Mean ± SD) организмов макрозообентоса в модельных водоемах

Отсутствие в литорали зарыбленного озера большого количества личинок из вышеуказанных отрядов насекомых выражается в первую очередь в снижении видового богатства сообщества (таблица). Также, как показано выше, наблюдается значительное изменение всей структуры зообентоса по сравнению с незарыбленным водоемом. Все это вероятнее всего является результатом кормовой деятельности карпа. По работам некоторых авторов [9] известно, что в питании данной рыбы в первую очередь играют роль организмы, обитающие на поверхности донного грунта или ила. Объяснить это можно особенностями пищедобывающего поведения карпа. Известно, что карп способен во время роющей деятельности проникать на значительную глубину (до 13 см) в субстрат дна. Однако при этом относительная величина нахождения потенциального корма находится в обратной зависимости от глубины проникновения (согласно известным из литературы опытам, при толщине ила в 8 см, степень выедания карпом пищи составляет 0,6 – если принять за 1,0 степень выедания при толщине ила в 1 см) [10]. Напрашивается вывод, что именно поэтому личинки насекомых (стрекоз, ручейников и т. д.), обитающие на поверхности, полностью уничтожаются, в то время как личинки двукрылых, в частности хирономид, способных существовать погруженными в донные отложения на несколько сантиметров, подвергаются прессу бентосоядной рыбы в гораздо меньшей степени. Как результат мы наблюдаем в бентали зарыбленного карпом водоема сообщество, состоящее главным образом из личинок вышеуказанного семейства двукрылых насекомых. Повышение численности хирономид относительно всей

численности организмов зообентоса в таких озерах неоднократно упоминается и в литературных источниках [1; 3].

Сравнение показателей общей биомассы и численности организмов макрозообентоса в модельных водоемах отображены на рис. 3 и 4.

Продемонстрировано снижение численности и биомассы в литоральной зоне зарыбленного озера Шишево-Орлы – по сравнению с аналогичными показателями в прибрежье озера Красулино. Особенно велики различия весной – в период активного развития бентоса. Например, в марте общая численность организмов сообщества на изученных станциях в прибрежье Шишево-Орлы была в 2,8 раза ниже, чем в озере Красулино (соответственно 631 ± 485 и 1764 ± 1421 экз/м^2; рис. 3), а биомасса – в 4,9 раз (соответственно 1,95 ± 2,6 и 9,6 ± 7,0 г/м^2; рис. 4). В мае значение общей биомассы зообентоса в Шишево-Орлы (0,26 ± 0,19 г/м^2) было в 6,6 раз меньше, чем в Красулино (1,7 ± 0,8 г/м^2).

За пределами литоральной зоны подобной тенденции не наблюдалось – численность и биомасса донных беспозвоночных в зарыбленном водоеме были либо приблизительно такими же, как и в контрольном, либо даже выше. В частности, в начале весны (март) биомасса бентосных организмов профундальной зоны в Шишево-Орлы была более чем в 7 раз выше, чем в Красулино – 7,4 ± 6,1 г/м^2 и 0,973 ± 0,950 г/м^2 соответственно. Сравнение данных в этой зоне не является столь важным, так как для карпа предпочтительнее именно мелководное прибрежье водоема, в зоне произрастания высшей водной растительности, нежели профундаль водоема, где на значительных глубинах температурный режим непригоден для этого вида, а бентос представлен практически только хирономидами и олигохетами. С другой стороны, отсутствие влияния карпа на бентос профундали можно объяснить и недостаточной для этого плотностью посадки в изучаемом озере.

Практически во все сезоны для общей численности и биомассы организмов зообентоса был характерен значительный разброс, в связи с чем статистически достоверная разница в данных показателях между двумя водоемами была выявлена далеко не всегда – только при сравнении биомассы в марте в профундали (p = 0,019) и в мае в литорали (p = 0,049).

Заключение. Таким образом, в модельном водоеме, в который был вселен карп, изменение структуры зообентоса заключается в следующем. Для всего озера, как в литорали, так и в профундали, характерен крайне низкий таксономический состав сообщества – в основном, это личинки двукрылых (хирономиды) и малощетинковые черви. В прибрежье модельного водоема, т. е. в зоне, представляющей наибольший интерес как местообитание карпа, по сравнению с аналогичной зоной контрольного водоема, биомасса и численность бентоса ощутимо ниже в течение всех сезонов. При этом непосредственно пресс рыбы-интродуцента заключается в практически полном выедании таких организмов, как личинки ручейников, стрекоз, поденок и большекрылых, а также других членистоногих.

Особенный интерес вызывает тот факт, что такое влияние карпа отмечено при исследовании водоема, в котором численность данного вида рыб невысока в сравнении с той, что часто наблюдается в водоемах других регионов мира. Очевидно именно поэтому последствия от вселения карпа, являющегося, согласно многочисленным работам, причиной значительных изменений в экосистеме водоема, ограничены лишь вышеуказанными тенденциями.

Список использованной литературы

1. *Barton, D. R.* The effects of carp (*Cyprinus carpio* L.) on sediment export from a small urban impoundment / D.R. Barton, N. Kelton, R.I. Eedy // J. of Aquatic Ecosystem Stress and Recovery. – 2000. – Vol. 8, N 2. – P. 155–159.

2. *Crivelli, A. J.* The destruction of aquatic vegetation by carp. A comparison between Southern France and the United States / A. J. Crivelli // Hydrobiologia. – 1983. – Vol. 106. – P. 37–41.

3. *Miller, S. A.* Effects of common carp (*Cyprinus carpio* L.) on macrophytes and invertebrate communities in a shallow lakes / S. A. Miller, T. A. Crowl // Freshwater Biology. – 2009. – Vol. 51. – P. 85–94.

4. *Moyle, J. B.* Carp, a sometimes villain / J. B. Moyle, J. H. Kuehn // Fish. Wildl. Ser. US. – 1964. – P. 635–642.

5. Ecological effects of common carp in semi-arid and floodplain wetland / L. Vilizzi [et al.] // Marine and Freshwater Researdh. – 2014. – Vol. 65, N 9. – P. 802–817.

6. *Williams, A. E.* Effects of different fish species and biomass on plankton interactions in a shallow lake / A. E. Williams, B. Moss // Hydrobiologia. – 2003. – Vol. 491. – P. 331–346.

7. *Лукина, И. И.* Влияние вселения карпа обыкновенного *Cyprinus carpio* Linnaeus, 1758 на экосистему водоема / И. И. Лукина, И. В. Новик, В. К. Ризевский // Вопр. рыбного хоз-ва. – 2013. – Т. 29. – С. 240–252.

8. *Полякова, Г. И.* Влияние повышения интенсивности промысла и зарыбления на аборигенное стадо рыб нагульных озер / Г. И. Полякова, В. А. Федоров // Вопр. рыбного хоз-ва Беларуси. – 1975. – Т. 2. – С. 66–75.

9. Дунке, Н. А. Питание и рост карпов в озерах экспериментальной базы «Чересово» / Н. А. Дунке, В. А. Федоров // Вопр. рыбного хоз-ва Беларуси. – 1975. – Т. 2. – С. 66–75.

10. *Карзинкин, Г. С.* Основы биологической продуктивности водоемов / Г. С. Карзинкин. – М.: Пищепромиздат, 1952. – 345 с.

Поступило в редакцию 17.06.2015

Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **ноябрь–декабрь** **Том 59 № 6**

МЕДИЦИНА

УДК 576.3:577.352:61

Ю. П. СТУКАЧ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБОСНОВАНИЕ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ПУТЕЙ ДОСТАВКИ СТВОЛОВЫХ КЛЕТОК В МОЗГ

(Представлено членом-корреспондентом И. В. Залуцким)

Институт физиологии НАН Беларуси, Минск, Беларусь
stukachyulya@gmail.com

В экспериментах на крысах отработана методика аппликации мезенхимальных клеток в область рецептивных или проводниковых путей черепно-мозговых нервов (I и V пары) с целью естественного их перемещения в центральные ядра нервов и затем в поврежденные участки мозга. Установлено, что после моделирования локальной травмы прецентральной извилины мезенхимальные клетки, имплантированные в подслизистую оболочку полости носа, через один час визуализируются в обонятельных луковицах и в области повреждения. В условиях предварительного разрушения участка коры мозжечка мезенхимальные клетки, введенные в пространство Меккеля, через один час обнаруживаются в центральных ядрах тройничного нерва и в области повреждения.

Ключевые слова: травма мозга, клеточные технологии, черепно-мозговые нервы, репарация.

Y. P. STYKACH

EXPERIMENTAL STUDY OF ALTERNATIVE WAYS OF STEM CELL DELIVERY INTO THE BRAIN

Institute of Physiology of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
stukachyulya@gmail.com

In experiments on rats, the technique of application of mesenchymal cells into the region of the receptive or conductor paths of cranial nerves (I and V pair) was perfected for the natural movement of these cells to the central nucleus of the nerve, and then into the damaged areas of the brain. It is found that after the modeling of a local injury of the precentral gyrus, the mesenchymal cells implanted into the submucosa of the nasal cavity have been visualized in the olfactory bulb and in the damage area in 1 hour. After the pre-damaged areas of the cerebellar cortex, the mesenchymal cells introduced into the Meckel area are found in 1 hour in the central nuclei of the trigeminal nerve in the damage area.

Keywords: brain injury, cell technologies, cranial nerves, reparation.

Введение. Проблема коррекции тяжелых состояний, вызванных повреждением тканей головного мозга (травма, послеоперационное состояние) в современной медицине до сих пор не решена, поэтому актуальной является разработка технологий, направленных на активацию репаративных процессов в центральной нервной системе. В современной медицинской практике используется ряд протокольно утвержденных методик: хирургические, терапевтические и смешанные, объединяющие воздействия как фармацевтических средств, так и различных физических факторов. Тем не менее, проблема восстановления контроля функций нарушенных участков головного мозга до сих пор остается актуальной, поэтому ученые и медики объединяют усилия для повышения эффективности проводимой терапии. В настоящий момент надежды возлагаются на клеточные технологии и, в частности, на развитие технологии имплантации стволовых клеток [1–5]. К наиболее изученным методикам относится введение стволовых клеток внутривенно [3; 5] или в поврежденный участок головного мозга [1; 2]. Однако у них есть ряд недостатков: в первом случае – диффузное распределение стволовых клеток в кровотоке и слабая

© Стукач Ю. П., 2015.

проницаемость для них гематоэнцефалического барьера, а во втором – дополнительное оперативное вмешательство.

Для нивелирования недостатков этих методик нами выдвинута гипотеза о реальности миграции стволовых клеток в мозг через рецептивные участки черепно-мозговых нервов. Это предположение основано на известных сведениях о способности мезенхимальных стволовых клеток перемещаться вдоль отростков и тел нейронов (периневрально) от рецептивных полей в головной мозг [6; 7]. В процессе дискуссий с клиницистами в качестве объекта исследования выбраны две экспериментальные модели: система обонятельного нерва (I пара черепно-мозговых нервов) и система тройничного нерва (V пара черепно-мозговых нервов) у крысы. Ганглий V пары черепно-мозговых нервов расположен в полости Меккеля, которая доступна через инфраорбитальный канал, ведущий в эту полость. Выход обонятельного нерва локализован в области обонятельного анализатора и доступен для воздействия при имплантации мезенхимальных клеток под слизистую оболочку носа.

В связи с этим в работе поставлена цель – проверить в экспериментах на крысах способность мезенхимальных клеток мигрировать в полость черепа после их введения под слизистую оболочку носа или в пространство Меккеля в зависимости от локализации поврежденного участка в передней или задней черепной ямке.

Материалы и методы исследования. Опыты проведены на половозрелых белых крысах (масса тела 220–300 г) из вивария Института физиологии НАН Беларуси. Животные содержались в типовых условиях вивария в соответствии с нормами содержания лабораторных животных, 12/12-часовом ритме освещения и темноты.

В стерильных условиях операционной жировую ткань выделяли из брюшной полости взрослых самок крыс под кетамин-ксилазин-ацепромазиновым наркозом (55,6 мг/кг, 5,5 мг/кг и 1,1 мг/кг соответственно, внутрибрюшинно). Полученную тканевую массу (около 1 мл) погружали в предварительно подготовленную 50 мл пробирку, заполненную на 2/3 стерильным стандартным физиологическим раствором или фосфатным буфером (ФБР). Очищенную в ФБР ткань измельчали ножницами в чашке Петри до образования однородной массы, содержащей фрагменты размером 50–100 мкм. Процесс ферментизации проводили в течение 40 мин 0,075 %-ным раствором коллагеназы I типа (Sigma, Германия) в ФБР. Весовое соотношение жира и энзима 1 : 1. Активность энзима нейтрализовали добавлением эквивалентного объема питательной среды Dulbecco's Modified Eagle's Medium (DMEM) с низким содержанием глюкозы в присутствии 10 %-ной фетальной телячьей сыворотки (ФТС) (Sigma, Германия). Полученную суспензию клеток центрифугировали 10 мин со скоростью 1500 об/мин. Сформировавшуюся пленку из адипоцитов и супернатант удаляли, а клеточный осадок дважды отмывали от коллагеназы в чистом ФБР и центрифугировали 10 мин при 1500 об/мин. После этого клеточный осадок ресуспендировали в питательной среде DMEM, включающей 10 % ФТС, 2 мМ L-глутамина и 100 мкг/мл гентамицина, и вносили в культуральные флаконы. Спустя 48 ч после посева проводили замену питательной среды для удаления не прикрепившихся клеток. Субкультивирование мезенхимальных клеток проводили в течение 10 дней для наращивания достаточного количества клеточной массы.

В день проведения операции готовили клеточную суспензию. Для этого монослой мезенхимальных клеток снимали с помощью 1 мл раствора трипсина (Sigma, Германия). Флаконы помещали на 3 мин в CO_2-инкубатор при температуре 37 °С, после чего клетки отмывали в 5 мл ФБР с содержанием 10 % ФТС в течение 10 мин при скорости 1500 об/мин. Удаляли супернатант, осадок ресуспензировали в 5 мл ФБР и центрифугировали в течение 10 мин при скорости 1500 об/мин. После удаления образовавшегося супернатанта клетки окрашивали флуоресцентным красителем PKH67 Green Fluorescent Cell Linker (Sigma, Германия) по методике, рекомендованной производителем. Окрашенные клетки разводили в 0,5 мл ФБР с содержанием 10 % ФТС. Концентрация полученной суспензии составила 700 тыс. клеток в 1 мл (подсчет проводили по стандартной методике в камере Горяева).

Операции по разрушению участков головного мозга проводили на крысах под кетамин-ксилазин-ацепромазиновым наркозом. Животных фиксировали в стереотаксисе (СЭЖ-2, Украина). После разреза мягких тканей с помощью бор-машины формировали трепанационное отверстие

и с помощью микропипетки удаляли ткань мозга 2 × 2 мм. Для первой группы животных (n = 4) травму моделировали в передней черепной ямке в области прецентральной извилины (2,5 мм латеральнее средней линии, на 2,5 мм каудальнее брегмы и на 2,0 мм от поверхности мозга). У второй группы крыс (n = 4) травматическое воздействие оказывали в задней черепной ямке на уровне коры мозжечка (2,0 мм латеральнее средней линии, 1,5 мм каудальнее лямбды и на 2,0 мм от поверхности мозга). Через 10 мин после локального разрушения участков головного мозга вводили 50 мкл клеточной суспензии (35 тыс. клеток) [8] под слизистую оболочку носа животным из первой группы и в пространство Меккеля крысам из второй группы. Имплантация мезенхимальных клеток проводилась наркотизированным животным.

Продольные срезы мозга для микроскопического исследования получали на криостате через 1 и 24 ч [9] после введения клеток в рецептивные поля черепно-мозговых нервов. Толщина среза 8 мкм. Участки мозга выделяли через каждые 100 мкм, начиная от основания мозга. Полученные срезы помещали на предметное стекло с физиологическим раствором и фиксировали покровным стеклом. Препараты исследовали на конфокальном микроскопе (Zeiss AxioVert 200M inverted research, камера: Zeiss AxioCam HRm, объектив: Plan-Neofluar 40x/0.75, Plan-Neofluar 10x/0.3) в Институте физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, длина волны возбуждения λ = 490 нм, длина волны испускания λ = 502 нм.

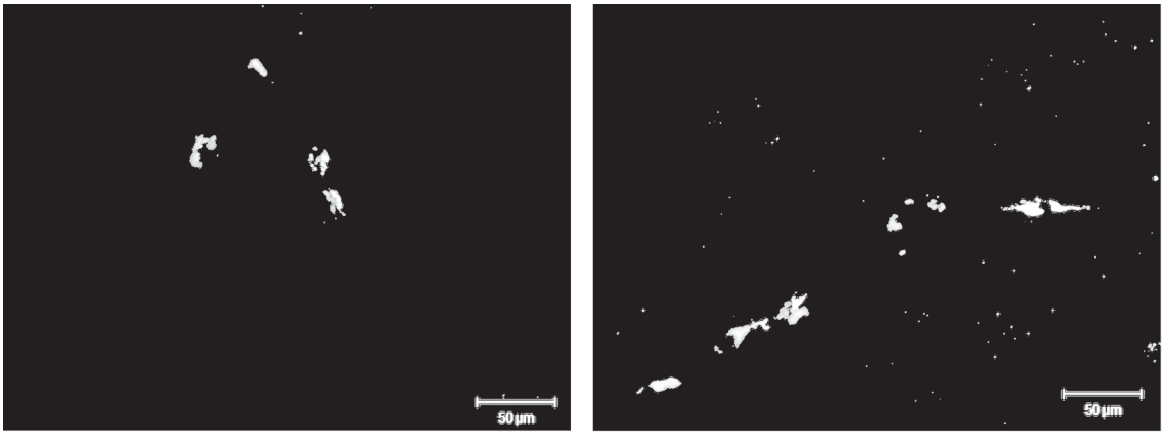
Результаты и их обсуждение. Для обоснования выбора путей введения мезенхимальных клеток в зависимости от участка деструкции в мозге целесообразно обратиться к топографии черепно-мозговых нервов. Как известно, центральные проекции обонятельного нерва распространяются в передней черепной ямке, а тройничного нерва – в задней черепной ямке.

Чтобы оценить пути миграции в полости черепа введенных под слизистую оболочку носа крыс мезенхимальных клеток, проведено микроскопическое исследование. Выявлено наличие флуоресцирующих элементов в обонятельных луковицах уже через один час после введения клеточной суспензии (рис. 1, *а*). Спустя 24 ч количество светящихся клеток в обонятельных луковицах увеличилось (рис. 2, *а*).

На рис. 1, *б* проиллюстрировано расположение флуоресцирующих клеток в области травмы прецентральной извилины спустя один час после имплантации мезенхимальных клеток в подслизистую оболочку носа.

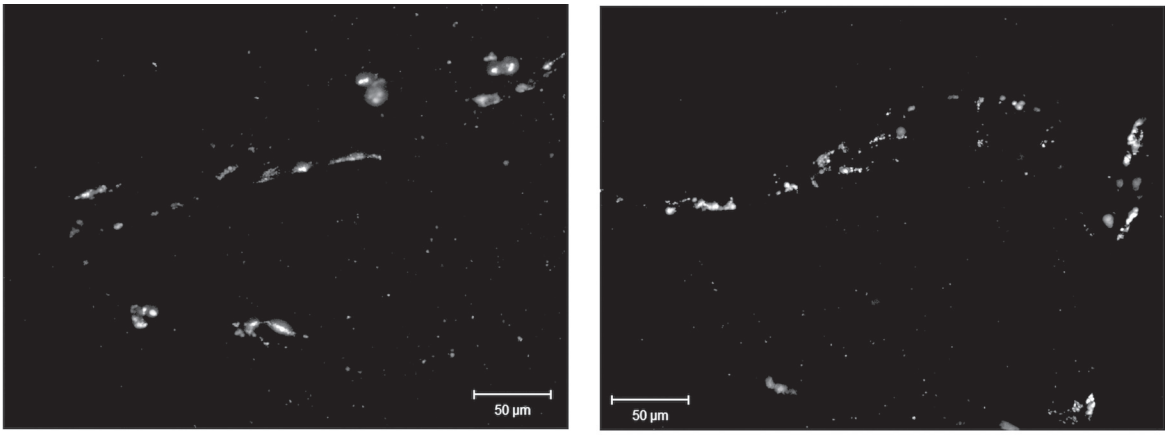
Через 24 ч количество флуоресцирующих клеток увеличилось как в области обонятельных луковиц (рис. 2, *а*), так и в участке повреждения прецентральной извилины (рис. 2, *б*). Таким образом, можно заключить, что мезенхимальные клетки из пространства подслизистой оболочки носа мигрировали в основном в переднюю черепную ямку, а вектор их перемещения направлен в поврежденный участок мозга.

Для оценки путей миграции мезенхимальных клеток из пространства Меккеля в головной мозг крысы с травмой в области мозжечка проведено микроскопическое исследование, в ходе



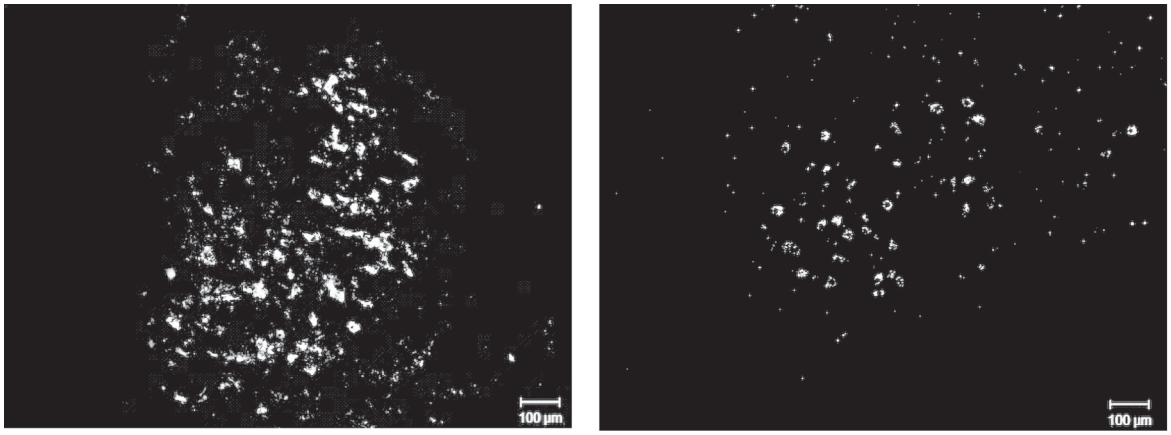
а *б*

Рис. 1. Флуоресцирующие клетки в области обонятельных луковиц (*а*) и в области травмы прецентральной извилины (*б*) через час после имплантации мезенхимальных клеток под слизистую оболочку носа



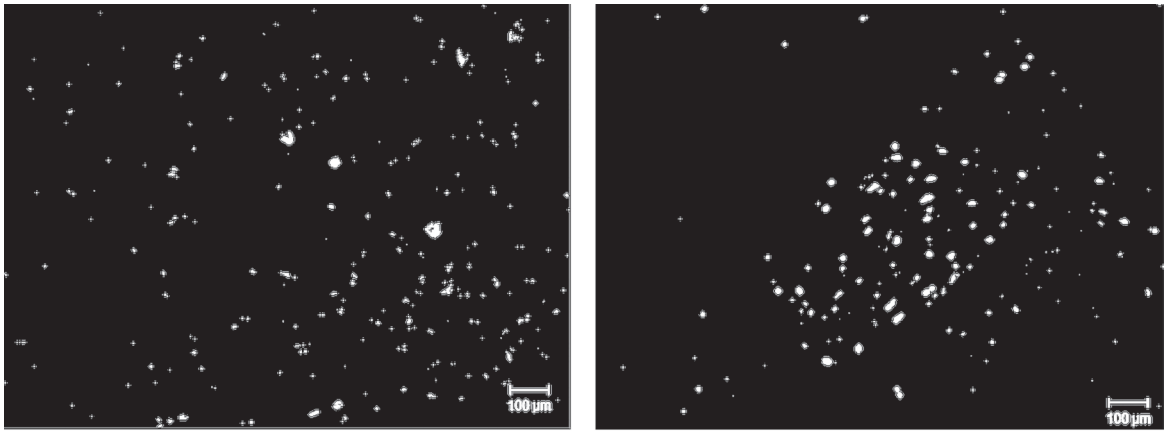
а *б*

Рис. 2. Флуоресцирующие клетки в области обонятельных луковиц (*а*) и в области травмы прецентральной извилины (*б*) через 24 ч после имплантации мезенхимальных клеток под слизистую оболочку носа



а *б*

Рис. 3. Флуоресцирующие клетки в области каудальных отделов ствола (*а*) и в области травмы мозжечка (*б*) через час после имплантации мезенхимальных клеток в полость Меккеля



а *б*

Рис. 4. Флуоресцирующие клетки в области каудальных отделов ствола (*а*) и в области травмы мозжечка (*б*) через 24 ч после имплантации мезенхимальных клеток в полость Меккеля

которого обнаружено наличие флуоресцирующих клеток в каудальных участках ствола головного мозга через один (рис. 3, *а*) и 24 (рис. 4, *а*) часа после введения клеточной суспензии в полость Меккеля.

Единичные флуоресцирующие клетки локализовались в области ядер тройничного нерва продолговатого мозга и моста. На рис. 3, *а* показано расположение таких клеток в ретикулярном ядре моста. Кроме того, через один час после введения мезенхимальных клеток (35000 ед. в 50 мкл) в полость Меккеля свечение обнаружено и в области травмы (рис. 3, *б*).

Через 24 ч флуоресцирующие клетки обнаружены не только в каудальных отделах ствола головного мозга (рис. 4, *а*), но и в мозжечке, преимущественно в зоне травмы (рис. 4, *б*). Таким образом, можно заключить, что мезенхимальные клетки из пространства Меккеля распределились в основном в задней черепной ямке, а вектор их перемещения направлен в поврежденные участки мозжечка.

Заключение. Факт появления флуоресцирующих клеток в задней черепной ямке при введении мезенхимальных клеток в пространство Меккеля (система тройничного нерва) и в передней черепной ямке при введении клеток под слизистую оболочку носа (система обонятельного нерва), а не диффузное их распределение в различных отделах головного мозга является основанием для заключения о путях миграции мезенхимальных клеток в мозг, не связанных с системой гемодинамики. Литературные источники свидетельствуют о том, что интенсивность перемещения мезенхимальных клеток в ткани мозга сравнительно небольшая [2; 4]. Это объясняется особенностями хемотаксиса и структурой различных областей головного мозга. Обычно в поврежденных участках мозга стволовые клетки начинают интенсивно накапливаться через 1–2 недели [2; 4]. Обнаружение через час мезенхимальных клеток в проекционных ядрах тройничного и обонятельного нерва соответственно подтверждает гипотезу о реальности перемещения этих клеток из периферических отделов систем этих черепно-мозговых нервов в центральные образования.

Таким образом, представленные данные являются основанием для принятия во внимание путей миграции мезенхимальных клеток в головной мозг в зависимости от методики их аппликации в область рецептивных или проводниковых путей черепно-мозговых нервов с целью естественного их перемещения в центральные ядра этих нервов и затем в поврежденные участки мозга.

Гипотеза, цель, дизайн работы сформулированы совместно с научным руководителем, профессором В. А. Кульчицким. Выражаю благодарность профессору Ю. Г. Шанько и академику А. Ф. Смеяновичу (РНПЦ неврологии и нейрохирургии Министерства здравоохранения Республики Беларусь).

Список использованной литературы

1. *Лосева, Е. В.* Стволовые клетки для коррекции нейродегенеративных расстройств / Е. В. Лосева // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. – 2013. – № 7. – С. 32–41.

2. Therapeutics with SPION-labeled stem cells for the main diseases related to brain aging: a systematic review / L. T. Alvarim [et al.] // Int. J. Nanomedicine. – 2014. – N 9. – P. 3749–3770.

3. From Blood to the Brain: Can Systemically Transplanted Mesenchymal Stem Cells Cross the Blood-Brain Barrier? / L. Liu [et al.] // Stem. Cells Int. – 2013. – N 2013. – P. 435093.

4. Safety of human neural stem cell transplantation in chronic spinal cord injury / K. M. Piltti [et al.] // Stem. Cells Transl. Med. – 2013. – Vol. 2, N 12. – P. 961–974.

5. SDF-1α/CXCR4 Axis Mediates The Migration of Mesenchymal Stem Cells to The Hypoxic-Ischemic Brain Lesion in A Rat Model / Q. Yu [et al.] // Cell J. – 2015. – Vol. 16, N 4. – P. 440–447.

6. Detection of mouse endogenous type B astrocytes migrating towards brain lesions / G. Elvira [et al.] // Stem Cell Research. – 2015. – Vol. 14, N 1. – P. 114–129.

7. Cenpj/CPAP regulates progenitor divisions and neuronal migration in the cerebral cortex downstream of Ascl1 / P. P. Garcez [et al.] // Nat. Commun. – 2015. – Vol. 6. – P. 6474.

8. Intranasal Delivery of Neural Stem Cells: A CNS-specific, Non-invasive Cell-based Therapy for Experimental Autoimmune Encephalomyelitis / S. Wu [et al.] // J. Clin. Cell Immunol. – 2013. – Vol. 4, N 3. – P. 10.4172/2155-9899.1000142.

9. Intranasal delivery of neural stem/progenitor cells: a noninvasive passage to target intracerebral glioma / M. Sreitz [et al.] // Stem Cells Transl. Med. – 2012. – Vol. 1. – P. 866–873.

Поступило в редакцию 24.06.2015

Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **ноябрь–декабрь** **Том 59 № 6**

УДК 616.441-006.6-085.2:577.175/443:616.155.32

Т. А. МИТЮКОВА[1], Т. А. ЛЕОНОВА[2], С. В. МАНЬКОВСКАЯ[1], О. В. СВИРИДОВ[3]

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СПЕЦИФИЧЕСКОГО СВЯЗЫВАНИЯ ТРИЙОДТИРОНИНА С КЛЕТКАМИ-МИШЕНЯМИ У ПАЦИЕНТОВ С КАРЦИНОМОЙ ЩИТОВИДНОЙ ЖЕЛЕЗЫ НА ФОНЕ ЛЕЧЕНИЯ

(Представлено членом-корреспондентом И. В. Залуцким)

[1]Институт физиологии НАН Беларуси, Минск, Беларусь
mityukovat@gmail.com; mankovskaya_svet@mail.ru
[2]Минский городской клинический онкологический диспансер, Минск, Беларусь
avinir@mail.ru
[3]Институт биоорганической химии НАН Беларуси, Минск, Беларусь
olegsvir@yandex.by

Проведено изучение параметров специфического связывания трийодтиронина с лимфоцитами у пациентов, прооперированных по поводу высокодифференцированного рака щитовидной железы и получающих комплексное лечение в среднем около 15 лет. У пациентов выявлено достоверное повышение сродства взаимодействия и снижение количества связывающих мест по сравнению с этими характеристиками у лиц группы контроля. Показана связь изучаемых показателей с факторами лечения и его продолжительностью. У пациентов с избыточной массой тела было выявлено достоверное повышение аффинности взаимодействия и снижение количества связывающих мест по сравнению с лицами с нормальной массой тела, что объясняет сниженную потребность в тироксине у этой группы пациентов.

Ключевые слова: специфическое связывание трийодтиронина, лимфоциты, карцинома щитовидной железы.

T. A. MITYUKOVA[1], T. A. LEONOVA[2], S. V. MANKOVSKAYA[1], O. V. SVIRIDOV[3]

BASIC CHARACTERISTICS OF SPECIFIC TRIIDOTHYRONINE BINDING WITH CELL-TARGETS OF PATIENTS WITH THYROID CARSINOMA DURING TREATMENT

[1]Institute of Physiology of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
mityukovat@gmail.com; mankovskaya_svet@mail.ru
[2]Minsk City Clinical Oncologic Dispensary, Minsk, Belarus
avinir@mail.ru
[3]Institute of Bioorganic Chemistry of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
olegsvir@yandex.by

The parameters of specific triidothyronine binding with lymphocytes of patients operated for highly differentiated thyroid cancer and received comprehensive treatment, on the average, for 15 years are studied. These patients have revealed a significant increase of interaction affinity and a decrease in the number of binding places in comparison with these characteristics of the persons of the control group. A relationship of the studied indices between the factors of treatment and its duration is shown. Patients with overweight have revealed a significant increase in interaction affinity and a decrease in the number of binding places as compared to patients with normal weight, which explains a decreased need in triiodothyronine in this group of patients.

Keywords: specific binding of the triiodothyronine, lymphocites, thyroid carcinoma.

Введение. Комбинированное лечение при высокодифференцированном раке щитовидной железы (ВДРЩЖ) включает тотальную тиреоидэктомию (ТТЭ), радиойодтерапию (РИТ) и супрессивную терапию L-тироксином [1], что, как правило, приводит к стабильной ремиссии и дает благоприятный прогноз на будущее. Необходимо принимать во внимание, что хирургическое вмешательство, РИТ и лечение высокими дозами тироксина могут провоцировать изменения метаболизма, которые, в свою очередь, способны оказывать влияние на механизм действия гормонального препарата, поэтому изучение рецепции тиреоидных гормонов является актуаль-

ным у лиц, которые получают препараты тироксина в высоких дозах с целью подавления продукции тиреотропного гормона (ТТГ). Известно, что основные метаболические эффекты тиреоидных гормонов реализуются через их взаимодействие с ядерными рецепторами [2; 3]. Изучение специфического связывания на цельных клетках и на ядрах лимфоцитов давало близкие характеристики аффинности связывающих мест, поэтому был сделан вывод о том, что при изучении специфического связывания с клетками-мишенями основной вклад дает взаимодействие с ядерными рецепторами [2; 3]. Показано, что в лимфоцитах присутствуют однотипные сайты для связывания тироксина (Т4) и трийодтиронина (Т3), обладающие более высоким сродством к Т3 [4–7]. Мононуклеарные клетки крови обладают высокой чувствительностью к активирующему действию Т3 и поэтому являются адекватной мишенью для изучения гормон-клеточного взаимодействия [4–7].

Цель работы – изучить влияние комбинированного лечения и антропометрических параметров на специфическое связывание Т3 с клетками-мишенями (лимфоцитами) пациентов, прооперированных по поводу ВДРЩЖ.

Материалы и методы исследования. Определение параметров специфического связывания Т3 с лимфоцитами было проведено у 82 пациентов (52 женщины и 30 мужчин), прооперированных по поводу ВДРЩЖ, и у 26 человек из группы контроля аналогичного возраста (16 женщин и 10 мужчин). Основная масса пациентов подвергалась ТТЭ – 74 чел., гемитиреоидэктомия (ГТЭ) была проведена у 8 человек. Большинство пациентов проходили РИТ – 72 чел. (1–2 курса РИТ – 42 чел., 3–10 курсов РИТ – 30 чел.). Средний возраст пациентов составлял 26,26 ± 0,65 лет, средняя продолжительность лечения – 11,15 ± 0,83 лет. Средняя доза тироксина у больных раком щитовидной железы (ЩЖ) составляла 2,55 ± 0,09 мкг/кг массы тела. Среди пациентов было 22 человека (27 %) с избыточной массой тела и ожирением. У этой подгруппы лиц индекс массы тела (ИМТ) превышал 25 кг/м^2, среднее значение ИМТ – 29,57 ± 0,89 кг/м^2. У остальных 60 чел. ИМТ был в пределах нормы (ИМТ = 20,97 ± 0,37 кг/м^2). В группе контроля лица с нормальным ИМТ составляли 80 %.

УЗИ ЩЖ и области шеи проводилось с помощью прибора Hitachi EUB-405 (датчик 7,5 МГц). Лица из группы контроля не имели отклонений по данным УЗИ щитовидной железы и по состоянию тиреоидного статуса. Определение гормонов в сыворотке крови проводили с использованием РИА- и ИРМА-наборов производства ХОП ИБОХ НАН Беларуси. Интервалы нормы: тиреотропный гормон (ТТГ) – 0,17–4,05 мМЕ/л, свободный Т4 (св. Т4) – 11,5–23,0 пмоль/л, свободный Т3 (св. Т3) – 2,5–5,8 пмоль/л.

Популяцию моноядерных клеток крови, обогащенных лимфоцитами, выделяли общепринятым способом [8]. Изучение специфического связывания Т3 с лимфоцитами проводили как описано в работах [4–7] с некоторыми модификациями [9]. Для расчета равновесной константы ассоциации (Ка) и количества связывающих мест на клетку (*n*) использовали графики Скэтчарда [10] и специальную компъютерную программу [10].

Статистический анализ полученных данных проводили преимущественно с использованием методов параметрической статистики, поскольку показатели давали распределение, близкое к нормальному, либо привлекали методы непараметрической статистики. Для сравнения двух групп использовали критерий Стьюдента и нескольких групп – поправку Бонферрони. Результаты представлены преимущественно в виде средних величин и их стандартных ошибок (X ± Sx). Достоверными считали отличия при $P < 0,05$.

Результаты и их обсуждение. Статистическая обработка результатов показала, что в группе контроля значение Ка составляет в среднем $(4,41 \pm 0,49) \cdot 10^{-10}$М$^{-1}$, а в группе пациентов эта величина существенно выше – $(8,57 \pm 0,74) \cdot 10^{-10}$М$^{-1}$ ($P < 0,05$; табл. 1). В группе здоровых лиц количество связывающих мест для Т3 составляло в среднем 663 мол/кл, а в группе пациентов было несколько ниже – 421 мол/кл ($P < 0,05$; табл. 1).

Как видно из данных табл. 1, у пациентов с ВДРЩЖ отмечалось достоверное повышение уровня св. Т4 по сравнению с лицами из группы контроля, что обусловлено приемом тироксина в супрессивных дозах. Анализ показателей в зависимости от пола пациентов и объема операции не выявил достоверных отличий.

Т а б л и ц а 1. **Параметры специфического связывания Т3 с лимфоцитами у лиц из группы контроля и у пациентов, прооперированных по поводу ВДРЩЖ, в зависимости от пола и объема операции**

Группа	Ка, $\times 10^{-10}$М$^{-1}$	*n*, мол/кл	св. Т4, пмоль/л	св. Т3, пг/мл
Контроль	4,41 ± 0,49	663 ± 86	15,23 ± 1,09	3,39 ± 0,52
Пациенты	8,57 ± 0,74*	421 ± 31*	23,58 ± 0,83*	3,99 ± 0,27
Пациенты (ж)	8,77 ± 0,85	421 ± 37	23,37 ± 1,17	4,05 ± 0,35
Пациенты (м)	8,21 ± 1,44	420 ± 56	23,94 ± 1,10	3,85 ± 0,44
ГТЭ	10,24 ± 1,16	379 ± 19	23,28 ± 0,83	4,59 ± 0,39
ТТЭ	8,39 ± 0,81	425 ± 34	23,61 ± 0,92	3,91 ± 0,30

П р и м е ч а н и е. * – достоверные отличия от контроля, $P < 0,05$.

Далее представлены данные по влиянию супрессивной терапии на параметры специфического связывания Т3 с лимфоцитами (табл. 2).

Т а б л и ц а 2. **Параметры специфического связывания Т3 с лимфоцитами у лиц из группы контроля и у пациентов, прооперированных по поводу ВДРЩЖ, в зависимости от степени супрессии ТТГ**

Группа	Ка, $\times 10^{-10}$М$^{-1}$	*n*, мол/кл	св. Т4, пмоль/л	св. Т3, пмоль/л	Доза Т4, мкг/кг
Контроль	4,41 ± 0,49	663 ± 86	15,23 ± 1,09	3,39 ± 0,52	–
Пациенты	8,57 ± 0,74*	421 ± 31*	23,58 ± 0,83*	3,99 ± 0,27	2,55 ± 0,09
ТТГ > 0,5 мМЕ/л	7,53 ± 1,09	449 ± 47	18,05 ± 1,64	3,32 ± 0,31	2,47 ± 0,12
ТТГ < 0,5 мМЕ/л	9,00 ± 0,95*	409 ± 40	25,85 ± 0,57*	4,38 ± 0,36	2,58 ± 0,11
ТТГ: 0,1–0,5 мМЕ/л	9,75 ± 1,41*	372 ± 50	25,69 ± 0,49*	3,64 ± 0,49	2,64 ± 0,15
ТТГ< 0,1 мМЕ/л	6,35 ± 0,91	522 ± 96	27,81 ± 1,30*	5,60 ± 0,50*	2,63 ± 0,27

П р и м е ч а н и е. * – достоверные отличия от контроля, $P < 0,05$.

У пациентов с ТТГ менее 0,5 мМЕ/л наблюдалось достоверное повышение Ка и тенденция к снижению *n* по сравнению с контролем. Группы лиц с ТТГ менее 0,5 мМЕ/л и ТТГ в интервале 0,1–0,5 мМЕ/л имели практически идентичные характеристики связывания Т3. В группе супер-супрессии значение Ка приближалось к нормализации, что может быть защитной реакцией на чрезмерно выраженное влияние тироксинотерапии (достоверное повышение не только уровня св. Т4, но и св. Т3). При сравнении показателей связывания Т3 у пациентов с различными уровнями ТТГ достоверных отличий между этими группами не выявлено.

При изучении влияния РИТ на параметры специфического связывания Т3 с лимфоцитами было установлено, что в группах пациентов с разным количеством курсов радиойодтерапии сохраняются общие закономерности, характерные для группы пациентов в целом (рис. 1). Однако

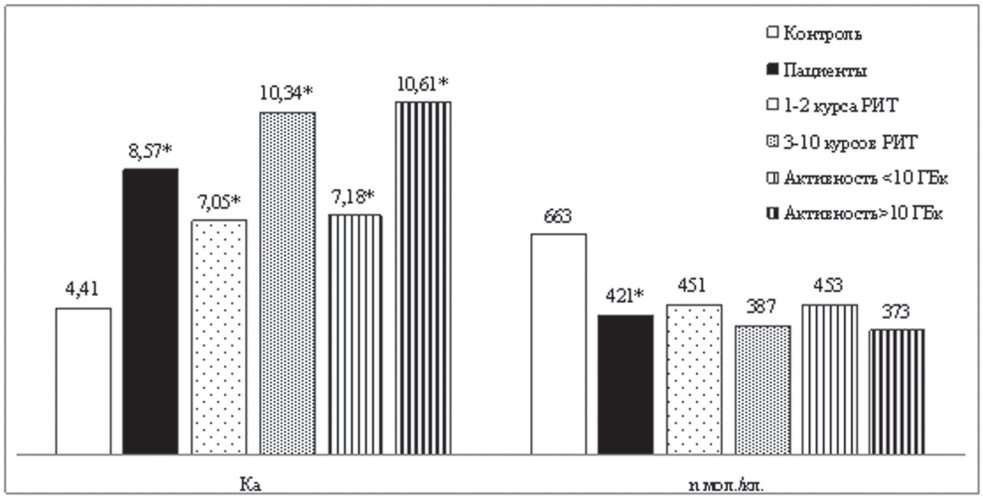


Рис. 1. Параметры специфического связывания Т3 с лимфоцитами у лиц из группы контроля и у пациентов, прооперированных по поводу ВДРЩЖ, в зависимости от РИТ. * – достоверные отличия от контроля, $P < 0,05$

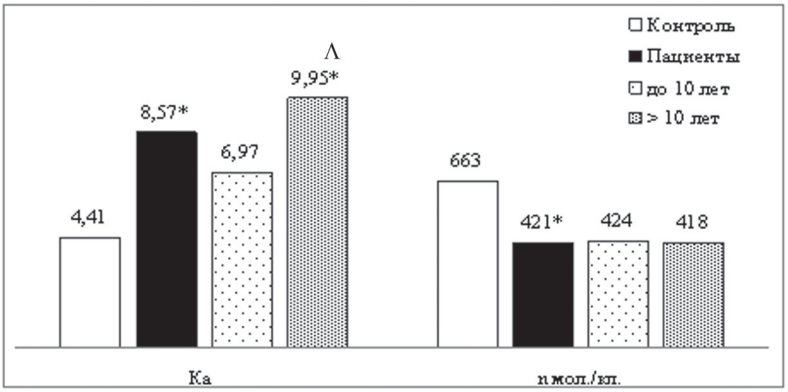


Рис. 2. Параметры специфического связывания Т3 с лимфоцитами у лиц из группы контроля и у пациентов, прооперированных по поводу ВДРЩЖ, в зависимости от длительности лечения. * – достоверные отличия от контроля, $P < 0,05$; Λ – достоверные отличия от группы <10 лет

при увеличении количества курсов РИТ до 3–10 отмечалась тенденция к росту значения Ка и снижению *n* по сравнению с группой 1–2 курсов РИТ. При увеличении кумулятивной активности более 10 ГБк также отмечалась тенденция к повышению значения Ка и к снижению количества связывающих мест на клетку, по сравнению с группой пациентов с меньшей кумулятивной активностью от ^{131}I (рис. 1).

Далее был проведен анализ показателей в зависимости от длительности лечения пациентов (рис. 2). Группы пациентов с различной длительностью лечения (менее 10 лет (в среднем 5,37 ± 0,58 лет) и более 10 лет (в среднем 14,25 ± 0,68 лет)) были равнозначными по численности и возрасту пациентов (24,24 ± 1,09 лет и 26,10 ± 0,75 лет соответственно).

При длительности лечения более 10 лет наблюдалось достоверное повышение значения Ка по сравнению с группой пациентов с небольшим сроком лечения (около 5 лет) (рис. 2). Между этими группами не было достоверных отличий по ИМТ (23,56 ± 0,93 и 22,95 ± 1,08 кг/м^2) и по дозе тироксина (2,54 ± 0,10 и 2,56 ± 0,15 мкг/кг). Возможно, на фоне длительного лечения происходит кумуляция эффектов супрессивной терапии и высоких доз РИТ, которые при отдельном рассмотрении дают только тенденцию к повышению Ка.

Изучение влияния антропометрических характеристик показало, что при избыточной массе тела у пациентов с ВДРЩЖ отмечено достоверно более высокое значение Ка и достоверно более низкое значение *n*, чем у лиц с нормальной массой тела (рис. 3).

При этом пациенты с повышенным ИМТ достигали необходимого уровня супрессии ТТГ при более низких дозах тироксина (2,16 ± 0,12 мкг/кг) по сравнению с пациентами с нормальной массой тела (2,69 ± 0,10 мкг/кг, $P < 0,05$). Последний факт неоднократно отмечался в наших пре-

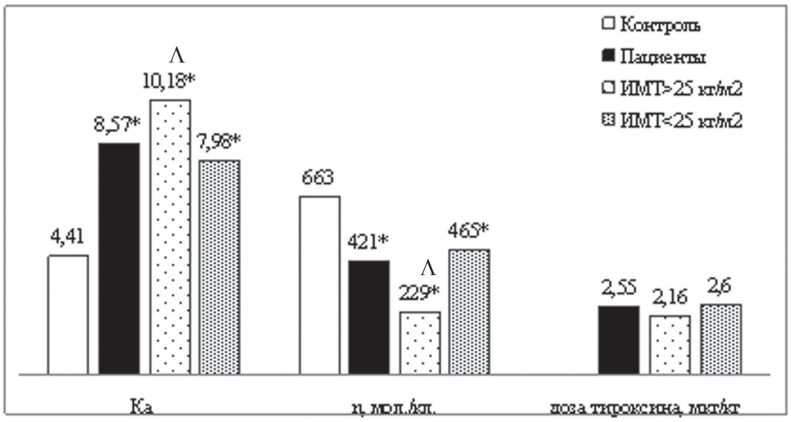


Рис. 3. Параметры специфического связывания Т3 с лимфоцитами у лиц из группы контроля и у пациентов, прооперированных по поводу ВДРЩЖ, в зависимости от ИМТ. * – достоверные отличия от контроля, $P < 0,05$; Λ – достоверные отличия от группы <25 кг/м^2

дыдущих исследованиях, но не находил своего объяснения [11]. По-видимому, более низкая потребность в тироксине у лиц с избыточной массой тела может объясняться тем, что у них существует повышенное сродство рецепторов тиреоидных гормонов к Т3. Повышение аффинности связывания компенсируется некоторым снижением емкости связывающих мест, что, по-видимому, является реакцией нормализации во избежание чрезмерных эффектов влияния Т3. С учетом этих данных становятся понятными трудности при анализе воздействия ятрогенных факторов без учета антропометрических характеристик пациентов, поскольку эффект избыточной массы тела может маскировать другие факторы влияния.

Проведение корреляцианного анализа по методу Спирмена показало в общей группе пациентов (82 чел.) наличие достоверной положительной корреляции между Ка и длительностью лечения, а также возрастом пациентов и количеством курсов РИТ ($P < 0{,}01$). При анализе пациентов с ТТЭ, входящих в группу достигнутой супрессии ТТГ (50 чел.), были выявлены более многочисленные и значимые корреляции, чем в общей группе пациентов: положительная связь Ка с такими показателями, как возраст пациентов, количество РИТ и доза РИТ ($P < 0{,}01$), длительность лечения, ИМТ ($P < 0{,}05$). Количество связывающих мест коррелировало со знаком минус с этими же показателями – возраст ($P < 0{,}05$), ИМТ ($P < 0{,}01$), количество курсов РИТ и доза РИТ ($P < 0{,}05$). Таким образом, корреляционный анализ подтвердил, что такие факторы лечения, как супрессивная терапия и РИТ играют важную роль в развитии отклонений параметров связывания Т3 с лимфоцитами у пациентов с ВДРЩЖ. Влияние длительности лечения, возраста пациентов и ИМТ также нашло свое подтверждение при применении методов корреляционного анализа.

Большой интерес представляют данные, полученные Е. И. Федорович и др. [12] при изучении специфического связывания тиреоидных гормонов с эритроцитами у детей и подростков при раке ЩЖ. Эритроциты не служат истинными клетками-мишенями для тиреоидных гормонов, поскольку они являются безъядерными клетками, но они представляются хорошим объектом для изучения мембранных взаимодействий. Авторы показали наличие двух участков связывания – низкоаффинного и высокоаффинного для Т4 и Т3 на мембранах красных клеток. Изучение влияния супрессивной терапии на параметры связывания тиреоидных гормонов показало тенденцию к повышению сродства и к снижению количества связывающих мест при обоих типах взаимодействия с достоверным снижением количества связывающих мест на участках низкоаффинного связывания у лиц с достигнутой супрессией ТТГ. При комбинированном лечении (с включением РИТ) сохранялись и усиливались вышеописанные тенденции. Следует отметить, что в нашем исследовании, проведенном на лимфоцитах, наблюдались сходные тенденции, выявляемые на фоне супрессивной терапии и РИТ, приобретающие достоверность при длительном лечении пациентов, а именно, повышение сродства при взаимодействии Т3 с клетками-мишенями и снижение емкости связывающих мест. Полученные данные находятся в соответствии с теорией отрицательной кооперативности рецепторного аппарата клетки, которая постулирует, что при высоких концентрациях лиганда может наблюдаться снижение емкости связывающих мест, что является механизмом «понижающей регуляции» [12]. Однако конкретные механизмы влияния ятрогенных воздействий и антропометрического статуса организма на гормон-рецепторное взаимодействие остаются пока невыясненными.

Заключение. Изучение параметров специфического связывания Т3 с лимфоцитами показало, что у пациентов с ВДРЩЖ наблюдается достоверное повышение сродства взаимодействия (Ка) и снижение количества связывающих мест (n) по сравнению с этими характеристиками в группе контроля. У пациентов с длительностью лечения более 10 лет (14,25 ± 0,68 лет) наблюдалось достоверное повышение значения Ка по сравнению с лицами с менее продолжительным сроком лечения (5,37 ± 0,58 лет), что может быть связано с кумулятивными эффектами ятрогенных воздействий. У пациентов с избыточной массой тела было выявлено достоверное повышение Ка и снижение количества связывающих мест (n) по сравнению с лицами с нормальной массой тела, что объясняет тот факт, что эти лица имеют пониженную потребность в тироксине.

Список использованной литературы

1. *Демидчик, Е. П.* Рак щитовидной железы у детей (последствия аварии на Чернобыльской АЭС) / Е. П. Демидчик, А. Ф. Цыб, Е. Ф. Лушников. – М., 1996.

2. *Oppenheimer J. H.* [et al.] // J. Clin. Endocrinol. Metabol. – 1991. – Vol. 73. – P. 990–994.

3. *Samuels, H. H.*, *Tsai J. S.* // Proc. Natl. Acad. Sci USA. – 1973. – Vol. 70. – P. 3488–3492.

4. *Elewaut, A.* Triiodthyronine binding to lymphocyte nuclei and plasma cyclic AMP response to intravenous glucagons in patients with peripheral resistance to thyroid hormones / A. Elewaut, M. de Baets, A. Vermeulen // Acta endocrinol. – 1981. – Vol. 97. – P. 54–59.

5. Human lymphocyte binding and deiodination of thyroid hormones in relation to thyroid function / A.-C. Holm [et al.] // Acta Endocrinol. – 1975. – Vol. 80. – P. 642–656.

6. A case of hypersensitivity to thyroid hormones with normally functioning thyroid gland and increased nuclear triiodotyronine receptors / C. Jaffiol [et al.] // J. Endocrinol. Invest. – 1990. – Vol. 13. – P. 839–845.

7. *Liewendahl, K.* Nuclear binding of triiodothyroine and thyroxine in lymphocytes from subjects with hyperthyroidism, hypothyroidism and resistance to thyroid hormones / K. Liewendahl, S. Rosengard, B.-A. Lamberg // Clin. Chim. Acta. – 1978. – Vol. 83. – P. 41–48.

8. *Лебедев, К. А.* Иммунограмма в клинической практике / К. А. Лебедев, И. Д. Понякина. – М., 1990.

9. Специфическое связывание трийодтиронина с лимфоцитами у пациентов, прооперированных по поводу карциномы щитовидной железы / Т. А. Митюкова [и др.] // Весці НАН Беларусі. Сер. мед. навук. – 2009. – № 2. – С. 55–62.

10. *Платонова, Т. Ю.* «Компьютерная программа для расчета параметров специфического связывания на основе Скэтчардовских кривых» / Т. Ю. Платонова, М. В. Платонов, Т. А. Митюкова; РНПЦ МТ. – инв. № 000194, B.R., дата регистрации 24.11.2008 г.

11. Оценка индивидуальной чувствительности к тироксинотерапии / Т. А. Митюкова [и др.] // Весці НАН Беларусі. Сер. мед. навук. – 2014. – № 2. – С. 81–89.

12. *Федорович, Е. И.* Биомедицинские аспекты взаимодействия тиреоидных гормонов с эритроцитами при раке щитовидной железы / Е. И. Федорович, Ю. Е. Демидчик, О. В. Свиридов. – М., 2001.

Поступило в редакцию 22.07.2015

Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **ноябрь–декабрь** **Том 59 № 6**

НАУКИ О ЗЕМЛЕ

УДК 551.24(476)

В. Н. БЕСКОПЫЛЬНЫЙ[1], член-корреспондент Р. Е. АЙЗБЕРГ[2]

РАЙОНИРОВАНИЕ ПРИПЯТСКОГО НЕФТЕГАЗОНОСНОГО БАССЕЙНА ПО УСЛОВИЯМ ФОРМИРОВАНИЯ ЗАЛЕЖЕЙ УГЛЕВОДОРОДОВ В МЕЖСОЛЕВОМ КОМПЛЕКСЕ

[1]Производственное объединение «Белоруснефть», Гомель, Беларусь
v.beskopylny@mail.ru
[2]Институт природопользования НАН Беларуси, Минск, Беларусь
chistaya@nature.basnet.by

Проведено районирование разноранговых элементов системы аккумуляции углеводородов межсолевого комплекса Припятского бассейна – ареалов и зон нефтегазонакопления. Объекты районирования в соответствии с типами природных резервуаров подразделены на традиционные, нетрадиционные и комбинированные.

Ключевые слова: Припятский нефтегазоносный бассейн, нефтегазогеологическое районирование, сланцевые углеводороды, ареалы и зоны нефтегазонакопления, залежи углеводородов.

V. N. BESKOPYLNY[1], R. Ye. AIZBERG[2]

DIVISION OF THE PRIPYAT OIL-AND-GAS BEARING BASIN INTO REGIONS ACCORDING TO THE HYDROCARBON ACCUMULATION CONDITIONS IN THE INTERSALT COMPLEX

[1]Belorusneft, Gomel, Belarus
v.beskopylny@mail.ru
[2]Institute for Nature Management of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
chistaya@nature.basnet.by

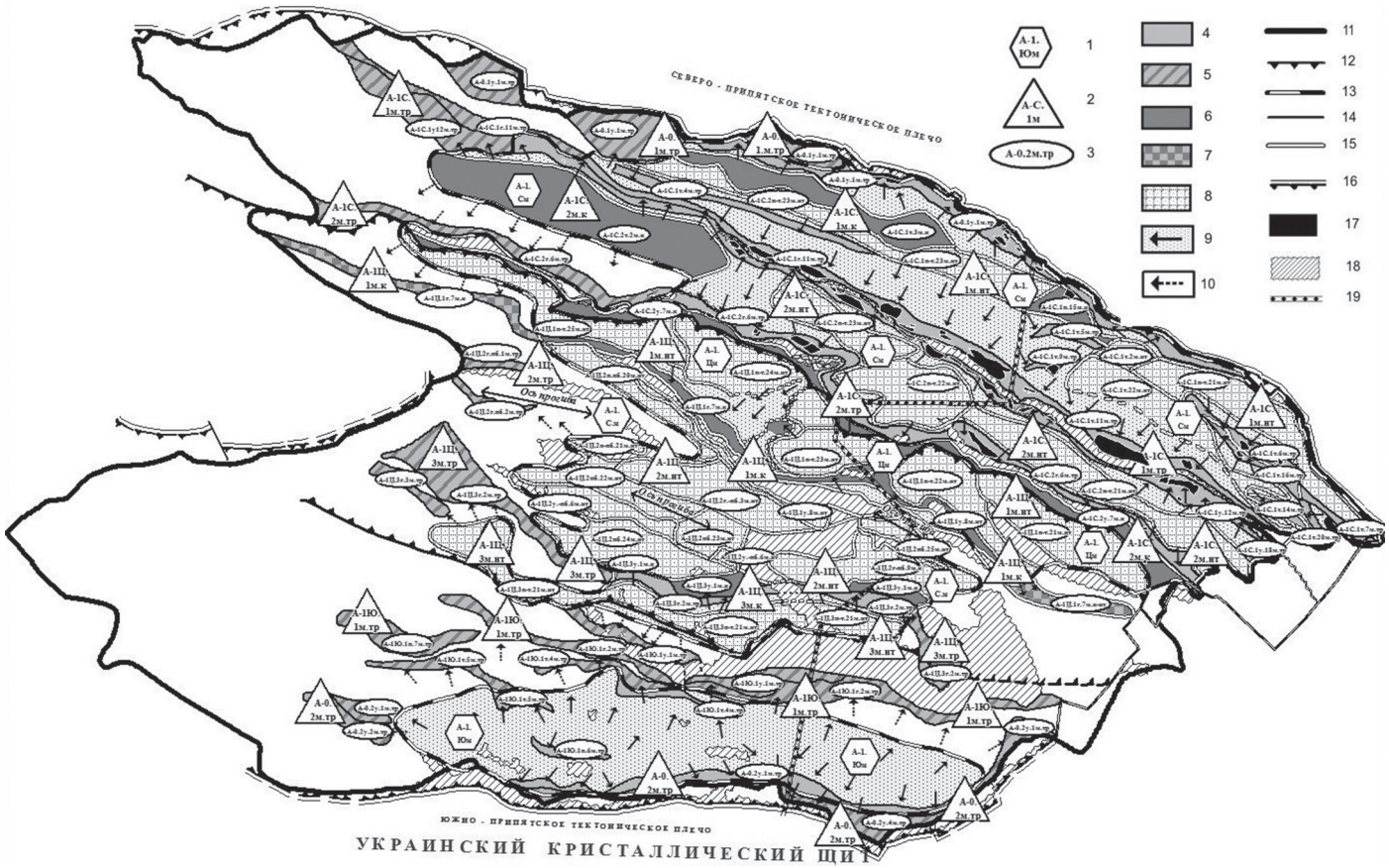
Different-rank elements of the hydrocarbon accumulation system in the intersalt complex of the Pripyat basin being oil-and-gas accumulation areals and zones have been divided into regions. All the objects divided into regions have been subdivided into the traditional, non-traditional, and complex ones according to the types of their natural reservoirs.

Keywords: Pripyat oil-and-gas bearing basin, oil-and-gas geological zoning, shale hydrocarbons, oil-and-gas accumulation areals and zones, hydrocarbon accumulation.

Адекватная оценка раздельных ресурсов нефти, газового конденсата и газа, выбор рациональных направлений геологоразведочных работ в нефтегазоносных бассейнах (НГБ) любой стадии разведанности во многом зависят от наличия актуализированной модели условий формирования залежей углеводородов (УВ). Применительно к Припятскому НГБ детальная модель условий формирования залежей УВ в межсолевом девонском комплексе Припятского НГБ представлена на одноименной карте масштаба 1 : 200000, разработанной и опубликованной в 2014 г. [1]. На прилагаемом рисунке, отражающем упрощенный мелкомасштабный вариант указанной карты, показаны основные элементы системы нефтегазонакопления (НГН) в аспекте рассматриваемой проблемы.

Модель районирования условий аккумуляции УВ. Межсолевой комплекс Припятского НГБ выбран для представляемого районирования условий аккумуляции УВ первым среди нескольких нефтегазонасыщенных комплексов осадочного чехла по той причине, что располагает наибольшими текущими перспективами нефтегазоносности в пластах коллекторов и полуколлекторов. В основу модели условий нефтегазонакопления заложены предшествующие работы

© Бескопыльный В. Н., Айзберг Р. Е., 2015.



Карта районирования межсолевого комплекса Припятского НГБ по условиям формирования залежей углеводородов (авторы В. Н. Бескопыльный, Р. Е. Айзберг, Я. Г. Грибик, Б. А. Дубинин). Условные обозначения: Фигурные и кодовые обозначения элементов системы формирования и сохранения залежей УВ: *1* – ареалы нефтегазонакопления, *2* – группы нефтегазонакопления, *3* – зоны нефтегазонакопления. Основные типы зон нефтегазонакопления: традиционные в коллекторах (ЗНГНтр.): *4* – приуроченные к очагам нефтегазообразования, *5* – расположенные полностью или частично за пределами очагов нефтегазообразования («отдаленные зоны»); комбинированные в коллекторах и полуколлекторах (ЗНГНк.): *6* – приуроченные к очагам нефтегазообразования, *7* – расположенные полностью или частично за пределами очагов нефтегазообразования («отдаленные зоны»); нетрадиционные в полуколлекторах глинистых нефтегазоматеринских карбонатных и терригенных отложений (ЗНГННр.): *8* – приуроченные к очагам нефтегазообразования. Области латеральной миграции УВ в зоны нефтегазонакопления (стрелки указывают основное направление миграции УВ): *9* – нефтегазосборные площади внутриочаговых зон нефтегазонакопления, *10* – участки транзита УВ в зоны нефтегазонакопления, расположенные вне очагов нефтегазообразования. Границы элементов нефтегазогеологического районирования: *11* – Припятского НГБ, *12* – между ареалами нефтегазонакопления, *13* – ареалов нефтегазообразования, *14* – традиционных зон нефтегазонакопления, *15* – нетрадиционных или комбинированных зон нефтегазонакопления. Прочие обозначения: *16* – краевые разломы, ограничивающие Припятский грабен; *17* – межсолевые залежи нефти и газового конденсата; *18* – площади отсутствия межсолевых отложений; *19* – граница раздела территорий производства геологоразведочных работ РУП «ПО «Белоруснефть» и РУП «НПЦ по геологии»

авторов по структурной делимости и условиям генерации УВ в Припятском прогибе [2–6], а также авторская концепция о том, что в НГБ формирование разнотипных скоплений УВ происходило в породах-коллекторах (с проницаемостью >0,1 мД) и в породах-полуколлекторах (с низкой проницаемостью 0,1–0,001 мД), как и комбинировано (с разным соотношением пластов коллекторов и полуколлекторов) [7]. При этом традиционные (в коллекторах) и комбинированные залежи УВ, а также объединяющие их зоны НГН, могут располагаться в пределах очагов нефтегазообразования (НГО) или на отдаленных от них участках распространения соответствующих зон НГН, связанных с очагами НГО путями миграции. Размещение нетрадиционных (в полуколлекторах) залежей УВ и зон НГН пространственно ограничено местоположением очагов нефтегазообразования, поскольку для полуколлекторов не характерна дальняя латеральная миграция УВ. Формирование комбинированных залежей УВ и зон НГН, отдаленных от очагов НГО, обусловлено возможной эмиграцией УВ из коллекторов в полуколлекторы за пределами очагов. Нетрадиционные залежи УВ и зоны НГН, как правило, формируются *in situ* в нефтегазогенерировавших глинистых породах-полуколлекторах или в смежных с ними низкопроницаемых карбонатных и терригенных полуколлекторах. Обширные залежи УВ такого типа, объединенные в нетрадиционные зоны НГН или даже в соответствующие ареалы НГН, в западной литературе принято называть «плеями». Типичными плеями являются широко известные ареалы распространения глинистых полуколлекторов майкопской серии Предкавказья с Журавским и Северо-Ставропольским газовыми месторождениями, верхнеюрские карбонатно-кремнисто-глинистые бажениты Западной Сибири с Салымским и иными нефтяными месторождениями и др. В Припятском прогибе в качестве отдельного наиболее крупного плея может быть обособлен Центральный ареал распространения глинисто-карбонатных нефтегазогенерировавших доманикоидных отложений межсолевого комплекса.

Система нефтегазонакопления межсолевого комплекса Припятского НГБ (как и других нефтегазонасыщенных комплексов) включает следующую иерархическую последовательность крупных, средних и малых элементов НГН: ареалы, группы и зоны, а также совокупность простейших элементов НГН: ловушки УВ, залежи УВ, месторождения УВ. С целью создания банка данных, предполагающего использование компьютерных технологий, все элементы системы НГН кодифицированы. Компьютерные коды сформированы в соответствии с детальной классификацией этих элементов. При их наименовании и кодификации учтены принципы суперпозиции – пространственное совмещение одноранговых элементов на карте структурного, УВ-генерационного и УВ-аккумуляционного районирования региона.

В соответствии с данными о типах природных нефтегазонасыщенных резервуаров все вышеуказанные элементы аккумуляции УВ подразделены на *традиционные* (в коллекторах), *нетрадиционные* (в полуколлекторах) и *комбинированные* (в коллекторах и полуколлекторах). В процессе районирования по условиям нефтегазонакопления межсолевого комплекса [1] выделено 3 ареала НГН – Северный, Центральный и Южный, которые включают: 16 групп НГН (в т. ч. 7 – традиционных, 5 – нетрадиционных и 4 – комбинированных), 55 зон НГН, в т. ч. 26 традиционных, 23 нетрадиционных и 6 – комбинированных. Каждый ареал характеризуется особыми условиями аккумуляции УВ, что во многом предопределено особенностями генерации и миграции УВ. Так, Северный и Центральный ареалы НГН представлены традиционными, нетрадиционными и комбинированными зонами НГН. В Южном ареале могли формироваться только традиционные зоны НГН. Залежи нефти и газоконденсата выявлены лишь в Северном ареале НГН. Нефтегазоносными являются 8 зон (14,5 % от их общего числа): 7 традиционных (27 % от всех традиционных) – Северо-Припятская, Дубровская, Александровская, Речицко-Вишанская, Южно-Речицко–Южно-Вишанская, Южно-Александровская, Червонослободско-Малодушинская, содержащие 78 залежей нефти и газоконденсата. Обособлена 1 комбинированная Геологическая зона НГН (16,6 % от всех комбинированных), представленная залежью легкой, высокогазонасыщенной нефти.

Важнейшими элементами районирования НГБ по условиям аккумуляции УВ, кроме зон НГН, являются *нефтегазосборные площади*, а также внеочаговые *участки транзита УВ*. Нефтегазосборные площади представляют собой области эмиграции УВ из нефтегазопроизводящих

пород, которые питают углеводородами зоны НГН, расположенные внутри очагов нефтегазообразования, а также поставляют УВ во внеочаговые зоны НГН. Участки транзита УВ расположены на пространстве между очагами нефтегазообразования и внеочаговыми зонами НГН.

Типизация зон нефтегазонакопления. Базовыми объектами для оценки потенциальных ресурсов УВ, а также прогнозирования видов и объемов геологоразведочных работ являются зоны НГН. Поэтому этот элемент нефтегазонакопления изучен и охарактеризован наиболее детально. Все зоны НГН межсолевого комплекса Припятского бассейна применительно к картографической модели масштаба 1 : 200000 [1] типизированы и ранжированы по следующим критериям: условия формирования залежей УВ; перспективы поисков залежей УВ в следующих типах зон НГН: традиционных, нетрадиционных, комбинированных; характер бокового ограничения ловушек; тип природного резервуара; системное ранжирование относительно разноранговых структурных форм, контролирующих протяженность зон НГН; структурное местоположение (тектоническая позиция); размер; толщина межсолевой толщи; глубина залегания межсолевой толщи; степень геолого-геофизической изученности; разведанность бурением недр.

Сведения по указанным критериям являются наиболее информативными для рассматриваемого районирования и для прогноза текущей неразведанной нефтегазоносности региона. Особое значение имеет выявление возможных связей отмеченных показателей со специфической особенностью нефтегазоносности традиционных, а также впервые выделенных в пределах всего Припятского бассейна нетрадиционных и комбинированных зон НГН. В процессе районирования было выявлено немало таких закономерных связей, предстоящий детальный комплексный анализ которых будет способствовать повышению достоверности прогноза местоположения и других характеристик еще не открытых залежей УВ традиционного и нетрадиционного типов.

Отметим ряд принципиальных результатов районирования зон НГН по некоторым критериям. Так, по *типу природных резервуаров* выделены 3 группы зон НГН: традиционные, нетрадиционные и комбинированные. *Традиционная зона НГН* – совокупность выявленных или прогнозируемых месторождений УВ с преимущественно средне- или высокопроницаемыми карбонатными и терригенными коллекторами, приуроченных к единому зональному тектоническому или литолого-фациальному объекту. *Нетрадиционная зона НГН* – совокупность нетрадиционных выявленных или прогнозируемых месторождений УВ, приуроченных к низкопроницаемым глинистым, карбонатно-глинистым, глинисто-карбонатным, карбонатным, терригенным и, возможно, карбонатно-вулканогенно-глинистым полуколлекторам. Нетрадиционная зона НГН генетически связана с единым зональным тектоническим или литолого-фациальным объектом (в том числе с ранее прогнозируемым как бесперспективным), опоискование которого может осуществляться на основе инновационных технологий, ориентированных на максимальную выработку запасов УВ из нефтегазонасыщенных низкопроницаемых горных пород. *Комбинированная зона НГН* – совокупность комбинированных выявленных или прогнозируемых месторождений УВ в переслаиваниях карбонатных, терригенных, карбонатно-глинистых коллекторов и полуколлекторов (установлены различные виды нефтегазовых резервуаров в межсолевых отложениях в рамках того или иного типа), приуроченных к единому зональному тектоническому или литолого-фациальному объекту, обладающему большим спектром перспектив нефтегазоносности как в средне- и высокопроницаемых коллекторах, так и в низкопроницаемых породах (полуколлекторах). Положение комбинированных зон НГН относительно очагов нефтегазообразования совпадает с пространственной позицией традиционных зон НГН, а литологические и фильтрационные характеристики соответствуют всему спектру пород, вмещающих подвижные и малоподвижные УВ.

Анализ карты районирования по условиям формирования залежей УВ позволил установить или сделать обоснованный прогноз, что в межсолевых коллекторах нефтегазоносными являются зоны НГН, представленные следующими природными резервуарами: в карбонатных коллекторах (Александровская зона НГН), в карбонатных коллекторах и одноименных полуколлекторах (Речицко-Вишанская зона), в карбонатных коллекторах и, вероятно, в одноименных полуколлекторах (Дубровская, Южно-Речицко-Южно-Вишанская зоны НГН), в карбонатных коллекторах и, вероятно, в одноименных и вулканогенных полуколлекторах (Южно-Александровская

зона НГН), в карбонатных коллекторах и, возможно, в карбонатно-вулканогенных полуколлекторах (Червонослободско-Малодушинская зона НГН). Доказана промышленная нефтегазоносность *комбинированных* зон НГН, сформированных в комбинированных карбонатно-глинистых (т. е. карбонатно-«сланцевых») резервуарах межсолевых отложений (Геологическая зона НГН).

Для сравнительной оценки зон нефтегазонакопления палеорифтовых НГБ припятского типа приоритетное значение имеют, кроме типа природного резервуара, также характеристика тектонической позиции указанных зон и тип бокового ограничения локальных поисковых объектов. Тектоническая позиция зон НГН в Припятском НГБ классифицирована относительно приуроченности к структурным уступам, гребням, террасам и подножьям тектонических ступеней или полиблоков. Дифференция зон НГН по тектоническим критериям позволила определить разнообразие условий генерации УВ, а также тектонические обстановки формирования коллекторов, полуколлекторов, разнотипных ловушек. Это определяет и особые условия формирования и сохранения залежей УВ применительно к той или иной тектонической позиции. Об этом свидетельствует ранее установленное авторами закономерное преобладание нефтегазонасыщенных традиционных (в коллекторах) ловушек в определенных обособленных структурных элементах Припятского НГБ [6]. По состоянию на 01.01.2011 г. коэффициент продуктивности (доля доказано нефтегазонасыщенных) зон НГН изменяется следующим образом: 1) в пределах *сбросо-блоковых уступов* тектонических ступеней – 0,39 (в т. ч. для межсолевых – 0,27, подсолевых – 0,5); 2) *структурных гребней* – 0,5 (в т. ч. для межсолевых – 0,4, подсолевых – 0,6); 3) *структурных террас* – 0,36 (в т. ч. для межсолевых – 0,17, подсолевых – 0,48); 4) *в подножьях* тектонических ступеней – 0,125 (для представительной оценки этого показателя в малоопоискованных 8 зонах НГН необходимо дополнительное поисковое бурение). Указанные значения коэффициента продуктивности тектонически разнотипных зон НГН могут быть использованы для ориентировочного расчета вероятности обнаружения залежей УВ в определенных структурных условиях палеорифтовых бассейнов припятского типа и оценки риска поискового бурения.

По характеру бокового ограничения ловушек обособлены следующие зоны НГН: 1) сводовых ловушек (в т. ч. полусводовых и осложненных разломами); 2) приразломных ловушек (2.1 – приразломных блоков, 2.2 – приразломной трещиноватости, 2.3 – надразломной трещиноватости); 3) рифогенных ловушек; 4) ловушек выклинивания (4.1 – выклинивания на моноклинали, 4.2 – прибрежно-морских песчаных тел, 4.3 – речных песчаных тел); 5) стратиграфических ловушек (несогласных); 6) сложных полиморфных ловушек.

Несомненный теоретический и прикладной интерес представляет сравнительная оценка условий нефтегазообразования и нефтегазонакопления в коллекторах и полуколлекторах единой межсолевой ловушки УВ. По данным бурения скв. 310g-Речицкая подтверждено присутствие УВ в петриковских *полуколлекторах* межсолевой залежи, для которой запасы нефти подсчитаны только в нефтегазонасыщенных *коллекторах*. Причем полуколлекторы отличаются утяжеленным составом и меньшей газонасыщенностью нефти по сравнению с нефтью одновозрастных смежных коллекторов этой же залежи. Такое отличие может объясняться тем, что пласты-коллекторы межсолевых залежей Речицкого месторождения аккумулируют более легкие и газонасыщенные нефти, поступившие в ловушку в процессе пластовой латеральной миграции из глубоко погруженных и катагенетически сильно преобразованных секторов Речицко-Вишанского очага нефтегазообразования. Смежные слои полуколлекторов накопили УВ, практически, в условиях *in situ*, генерированные в самих полуколлекторах или в контактирующих с ними прослоях глинистых нефтегазоматеринских пород. Нефтеобразование этих УВ происходило гипсометрически выше, т. е. в менее напряженных геотермических условиях, чем УВ, поступивших в коллекторы общей залежи. Следствием этих выводов может являться прогноз свойств УВ в нетрадиционных залежах применительно к различным геологическим условиям Припятского НГБ.

Рассматриваемое районирование выявило много других важных закономерностей размещения разнотипных скоплений УВ, послуживших обоснованием ряда практических рекомендаций о направлениях дальнейших геологоразведочных работ на нефть в Припятском НГБ. Показано, что 20 зон НГН (36,3 % от всех зон) являются в той или иной степени перспективными для даль-

нейших поисков залежей УВ в коллекторах. Таким образом, в регионе еще остается возможность открытия новых зон НГН с традиционными залежами УВ, особенно на месте вероятно и возможно перспективных зон. Вместе с тем, высока вероятность выявления новых традиционных залежей в пределах доказано нефтегазоносных зон.

Остается высокой доля неопоискованных бурением зон НГН от общего количества межсолевых зон НГН Припятского НГБ – 49,1 % (27 зон), среди которых преобладающее количество занимают зоны непродуктивные в коллекторах, но неустановленной нефтегазоносности в полуколлекторах – 20 зон. Размеры этих зон изменяются в пределах 100–613 км^2, что позволяет прогнозировать высокую вероятность открытия здесь нетрадиционных месторождений УВ с немалыми запасами. Высоки перспективы открытия нетрадиционных и/или комбинированных залежей УВ (в т. ч. по результатам доразведки традиционных залежей) в пределах следующих межсолевых и верхнесоленосных доказано нефтегазоносных традиционных зон НГН: Речицко-Вишанской, Южно-Речицко–Южно-Вишанской, Южно-Червонослободско–Южно-Малодушинской и др.

В заключение следует отметить, что системным продолжением представленных результатов исследований, характеризующих *начальное* состояние нефтегазоносной системы межсолевого комплекса Припятского НГБ, является разработка картографических моделей, отражающих *текущее* состояние УВ-потенциала, степень освоения резервуаров УВ, их количественную локализацию применительно к разнотипным зонам и локальным ловушкам традиционных и нетрадиционных источников УВ.

Список использованной литературы

1. Карта районирования межсолевого комплекса Припятского нефтегазоносного бассейна по условиям формирования залежей углеводородов. М 1 : 200000 / В. Н. Бескопыльный [и др.]. – Гомель; Минск: РУП «ПО «Белоруснефть», 2014.

2. *Айзберг, Р. Е.* Структурное районирование межсолевого комплекса Припятского нефтегазоносного бассейна / Р. Е. Айзберг, В. Н. Бескопыльный, Я. Г. Грибик // Докл. НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 5. – С. 86–91.

3. *Бескопыльный, В. Н.* Карта структурного районирования межсолевого комплекса Припятского прогиба для решения задач эффективного освоения ресурсов углеводородов. М 1 : 200000 / В. Н. Бескопыльный, Р. Е. Айзберг, Я. Г. Грибик. – Минск: Белкартография, 2011.

4. Карта районирования межсолевого комплекса Припятского нефтегазоносного бассейна по условиям нефтегазообразования. М 1 : 200000 / В. Н. Бескопыльный [и др.]. – Гомель: РУП «ПО «Белоруснефть», 2012.

5. Районирование условий генерации углеводородов Припятского прогиба / В. Н. Бескопыльный [и др.] // Докл. НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 2. – С. 91–95.

6. *Бескопыльный, В. Н.* Пояснительная записка к картам структурного районирования подсолевого и межсолевого комплексов Припятского прогиба для решения задач эффективного освоения резервуаров углеводородов / В. Н. Бескопыльный, Р. Е. Айзберг, Я. Г. Грибик. – Гомель: РУП «ПО «Белоруснефть», 2011. – 41 с.

7. *Бескопыльный, В. Н.* Углеводородный потенциал полуколлекторов осадочно-породных бассейнов Беларуси / В. Н. Бескопыльный, Р. Е. Айзберг // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 2. – С. 98–103.

Поступило в редакцию 24.08.2015

Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **ноябрь–декабрь** **Том 59 № 6**

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 532.516; 532.5; 629.9:662.92

В. Д. ТЮТЮМА

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛООБМЕНА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ В ВИХРЕВОЙ ТРУБЕ

(Представлено академиком А. А. Михалевичем)

Институт энергетики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
tvd@hmti.ac.by

На основе двух моделей движения вязкой сжимаемой среды в приближении плоского закрученного течения проведен теоретический анализ влияния тепловых процессов на эффективность энергоразделения в вихревой трубе Ранка. Показано, что наблюдаемый эффект охлаждения в вихревой трубе обусловлен, как минимум, тремя факторами: направленным к центру радиальным течением в периферийной зоне вихря, диссипацией механической энергии и локальной неравновесностью течения.

Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными дает основание заключить, что теоретическое описание термогидродинамических процессов в вихревой трубе должно строиться на основе теории локально-неравновесного течения, учитывающей изэнтропичность переноса импульса в сдвиговом потоке вязкой среды.

Ключевые слова: эффект Ранка–Хилша, математическая модель закрученного течения, поле скоростей, распределение термодинамических параметров.

V. D. TYUTYUMA

INFLUENCE OF HEAT TRANSFER ON THE DISTRIBUTION OF THERMODYNAMIC PARAMETERS IN A VORTEX TUBE

Institute of Power of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
tvd@hmti.ac.by

The theoretical analysis of the influence of thermal processes on the energy separation efficiency in a Ranque vortex tube has been performed using two models of motion of a viscous incompressible medium in the approximation of a plane twisted flow. It is shown that the observed cooling effect in the vortex tube is caused, as a minimum, by three factors, viz., a radial flow in the vortex periphery zone, which is directed to the center; mechanical energy dissipation, and local flow local nonequilibrium.

A comparison of the calculated and experimental data allows one to draw a conclusion that a theoretical description of thermohydrodynamic processes occurring in a vortex tube should be based on the theory of a locally nonequilibrium flow, which takes into account the isentropic character of momentum transfer in a shear flow of a viscous medium.

Keywords: effect of Rank–Hilsch, mathematical model of swirling flow, the velocity field, distribution of thermodynamic parameter.

Введение. В работах [1; 2] для изэнтропического случая движения вязкой среды в рамках чисто механического взаимодействия было показано, что эффект энергоразделения в вихревой трубе Ранка, заключающийся в том, что при подаче сжатого газа внутрь вихревой трубы он разделяется на две составляющие, отличающиеся друг от друга по величине полной энтальпии, обусловлен радиальным течением в периферийной зоне вихря и связан с изменением внутренней энергии радиального потока за счет выполнения им механической работы. Представляет интерес оценить влияние на эффективность энергоразделения и распределение термодинамических параметров в вихревой трубе процессов теплообмена.

Кроме того, исследования, проведенные в работах [3; 4], дают основания заключить, что при больших напряжениях сдвига распределение термодинамических параметров в потоке вязкой жидкости более точно описывается моделью локально-наравновесного течения, в которой учи-

© Тютюма В. Д., 2015.

тывается изэнтропичность переноса импульса. В связи с этим немаловажно установить, насколько разнятся результаты расчетов распределения термодинамических параметров в вихревой трубе на основе теории Навье–Стокса и модели локально-неравновесного течения.

Постановка задачи и исходные уравнения. Выделим плоскость, перпендикулярную оси трубы, и рассмотрим в ней осесимметричное движение вязкого сжимаемого газа, подчиняющегося уравнению состояния Менделеева–Клапейрона. В этом случае полная система уравнений Навье–Стокса, неразрывности и энергии принимает вид [5]

$$\rho\left(V_r\frac{dV_r}{dr}-\frac{V_\varphi^2}{r}\right)=-\frac{dp}{dr}+\frac{4}{3}\eta\left(\frac{d^2V_r}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dV_r}{dr}-\frac{V_r}{r^2}\right), \tag{1}$$

$$\rho\left(V_r\frac{dV_\varphi}{dr}+\frac{V_rV_\varphi}{r}\right)=\eta\left(\frac{d^2V_\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dV_\varphi}{dr}-\frac{V_\varphi}{r^2}\right), \tag{2}$$

$$\frac{d(r\rho V_r)}{dr}=0, \tag{3}$$

$$\rho c_pV_r\frac{dT}{dr}=\lambda\left(\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}\right)+V_r\frac{dp}{dr}+\eta\Phi, \tag{4}$$

$$\Phi=2\left[\left(\frac{dV_r}{dr}\right)^2+\left(\frac{V_r}{r}\right)^2\right]+\left(\frac{dV_\varphi}{dr}-\frac{V_\varphi}{r}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\frac{dV_r}{dr}+\frac{V_r}{r}\right)^2,\ \ p=\rho RT. \tag{5}$$

Из уравнения неразрывности (3) следует, что радиальное течение в этом случае возможно только при наличии подвода или отвода массы на некотором удалении от оси. В связи с этим было предложено реальный вихрь заменить вихревым образованием, состоящим из вихрестока на периферии и вынужденного вихря в центральной части с отбором массы на линии сопряжения вихрей [1; 2]. При этом распределение вращательной составляющей скорости по радиусу в каждой зоне вихря определялось на основе совместного решения уравнений (2) и (3) с граничным условием на внешней границе вихря и сшивки на линии сопряжения вихрей, обеспечивающей непрерывность не только тангенциальной составляющей скорости, но и касательного напряжения во всей области течения. В результате интегрирования для распределения вращательной составляющей скорости в периферийном вихре было получено выражение

$$\frac{V_\varphi}{V_{\varphi1}}=\left(1+\frac{R}{2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{R+2}\right)^{-1}\left[\left(\frac{r}{r_1}\right)^{R+1}+\frac{R}{2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{R+2}\frac{r_1}{r}\right],\quad r_2\le r\le r_1,$$

где $R=\dfrac{V_{r1}\mathrm{Re}}{|V_{r1}|}$ – алгебраическая величина, принимающая как положительные, так и отрицательные значения в зависимости от знака радиальной составляющей скорости; $\mathrm{Re}=\dfrac{r_1\rho_1|V_{r1}|}{\eta}$ – число Рейнольдса радиального течения; $V_{\varphi1}$, V_{r1} – тангенциальная и радиальная составляющие скорости на внешней границе вихря; η – динамическая вязкость.

Математическая модель локально-неравновесного течения отличается от системы уравнений (1)–(5) тем, что вместо уравнения (1) в силу изэнтропического характера переноса импульса используется уравнение

$$\rho\left(V_r\frac{dV_r}{dr}-\frac{V_\varphi^2}{r}\right)=-c^2\frac{d\rho}{dr}+\frac{4}{3}\eta\left(\frac{d^2V_r}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dV_r}{dr}-\frac{V_r}{r^2}\right), \tag{6}$$

а в уравнении энергии (4) с помощью уравнения состояния (5) исключено давление.

Интегрирование записанных уравнений в общей постановке связано с решением краевой задачи. Однако для течения в вихревой трубе в силу выполнения условия $V_{r1} \ll V_{\varphi1}$, без потери точности можно опустить в уравнениях (1) и (6) члены с V_r. В этом случае решение значительно упрощается.

Если пренебречь теплопроводностью и теплом диссипации, то (1) и (6) переходят в одно и то же уравнение, и различие в описании между системой уравнений Навье–Стокса и локально-неравновесной моделью течения исчезает. В этом особом случае обе системы описывают упомянутое выше изэнтропическое движение вязкого газа. Этот случай течения в дальнейшем не рассматривается. Для сравнения приводятся только результаты расчетов по этой теории.

Отнеся все искомые функции и переменные к их значениям на внешней границе вихря, а давление к удвоенной величине скоростного напора, систему уравнений Навье–Стокса (1), (3)–(5) в безразмерном виде можно записать следующим образом:

$$\frac{d^2T}{dr^2}+(1-\mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Re})\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}+(\gamma-1)M_1^2\,\mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Re}\frac{V_\varphi^2}{r^2}+2(\gamma-1)M_1^2\,\mathrm{Pr}\left(\frac{dV_\varphi}{dr}-V_\varphi\right)^2=0, \tag{7}$$

$$\frac{dp}{dr}=\rho\frac{V_\varphi^2}{r}, \tag{8}$$

$$\gamma M_1^2 p=\rho T, \tag{9}$$

$$r\rho V_r=1. \tag{10}$$

Соответственно систему уравнений локально-неравновесного течения можно представить в виде

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\left(1-\frac{\mathrm{Pr}}{\gamma}\cdot\mathrm{Re}\right)\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}+(\gamma-1)M_1^2\frac{\mathrm{Pr}}{\gamma}\cdot\mathrm{Re}\frac{V_\varphi^2}{r^2}+2(\gamma-1)M_1^2\,\mathrm{Pr}\left(\frac{dV_\varphi}{dr}-V_\varphi\right)^2=0, \tag{11}$$

$$\frac{d\rho}{dr}=M_1^2\frac{\rho}{T}\frac{V_\varphi^2}{r}. \tag{12}$$

При этом уравнение состояния (9) и уравнение неразрывности (10) сохраняют свой прежний вид. Здесь $\mathrm{Pr}=c_p\eta/\lambda$ – число Прандтля; $M_1=V_{\varphi 1}/c_1$ – число Маха; $c=\sqrt{\gamma RT_1}$ – скорость звука; c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении; λ – коэффициент теплопроводности; γ – показатель адиабаты.

На окружности $r=1$ все искомые функции, кроме давления, принимают единичные значения, а давление в соответствии с уравнением состояния (9) равно $p(1)=1/\gamma M_1^2$.

Результаты расчетов. Система дифференциальных уравнений (7)–(10) и соответственно (9)–(12) допускают аналитические решения в замкнутом виде, которые из-за громоздкого вида выражений для коэффициентов в данной работе не приводятся. Одновременно эти уравнения решались численным методом. Сравнение аналитического и численного решения показали их хорошее совпадение. Результаты расчетов представлены на рис. 1–6. Расчеты проводились в диапазоне чисел Рейнольдса $0\le\mathrm{Re}\le 11$, а значения параметров r_2 и $V_{\varphi 1}$ выбирались близкими к экспериментальным. На каждом из рисунков приведены графики распределения соответствующих термодинамических величин, рассчитанных на основе модели локально-неравновесного течения, теории Навье–Стокса и модели изэнтропического течения при одних и тех же значениях безразмерных параметров.

На рис. 1 и рис. 2 показаны графики зависимости плотности и радиальной составляющей скорости от радиуса. Основная особенность распределения этих величин состоит в том, что во всем диапазоне рассмотренных чисел Re расчетные значения для локально-неравновесной модели и модели изэнтропического течения практически совпадают, в то время как кривые, рассчитанные на основе теории Навье–Стокса, незначительно отклоняются.

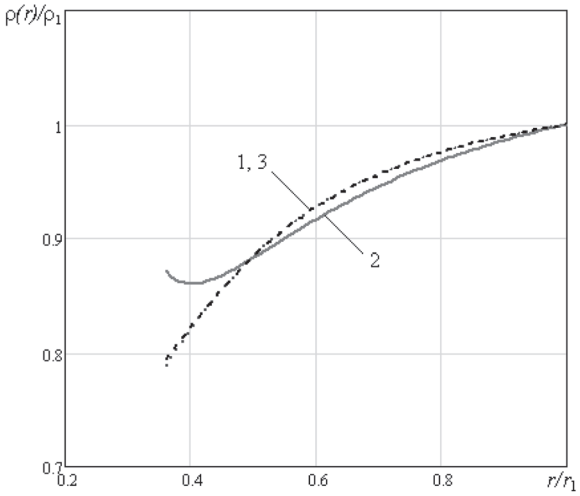


Рис. 1. Распределение плотности в периферийной зоне вихря (Re = 5,6; r_2 = 0,36; $V_{\varphi 1}$ = 103,3 м/с; T_1 = 298 К): *1* – локально-неравновесное течение; *2* – теория Навье–Стокса; *3* – изэнтропическое течение вязкой жидкости

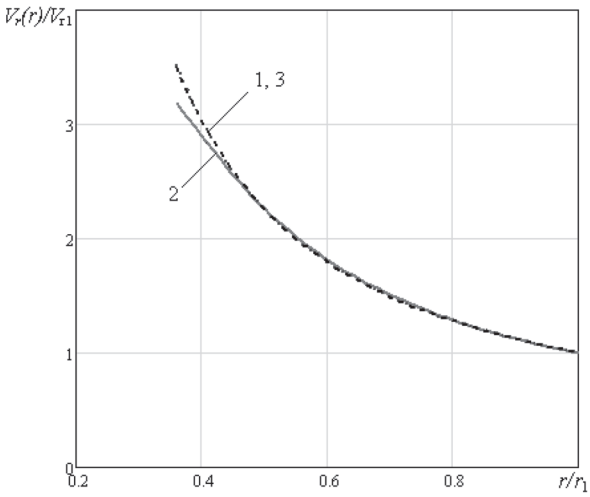


Рис. 2. Распределение радиальной составляющей скорости в периферийной зоне вихря (Re = 5,6; r_2 = 0,36; $V_{\varphi 1}$ = 103,3 м/с; T_1 = 298 К): *1* – локально-неравновесное течение; *2* – теория Навье–Стокса; *3* – изэнтропическое течение вязкой жидкости

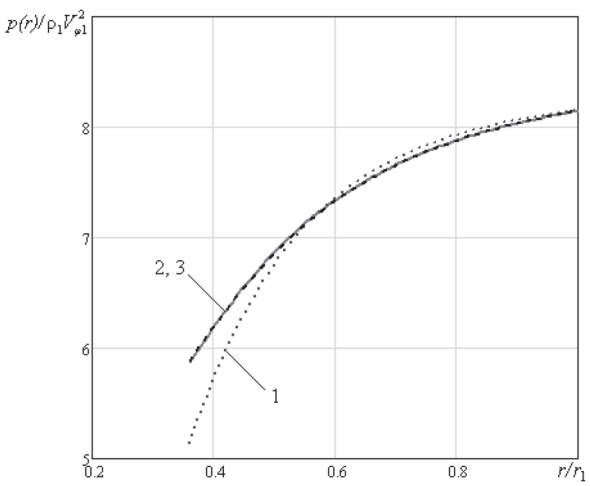


Рис. 3. Распределение давления в периферийной зоне вихря (Re = 5,6; r_2 = 0,36; $V_{\varphi 1}$ = 103,3 м/с; T_1 = 298 К): *1* – локально-неравновесное течение; *2* – теория Навье–Стокса; *3* – изэнтропическое течение вязкой жидкости

Для распределения давления, показанного на рис. 3, характерны совпадения графиков, рассчитанных на основе теории Навье–Стокса и модели изэнтропического течения.

Наибольшее влияние процессы теплообмена оказывают на распределение статической и полной температуры, графики которых представлены на рис. 4 и рис. 5. Как показали расчеты, вопреки ожиданию, тепловые процессы привели не к снижению, а к существенному увеличению эффекта охлаждения в центральной зоне вихря. При этом температура торможения (рис. 5) на некотором удалении от стенки трубы (r > 0,6–0,7) сначала увеличивается, а затем резко убывает, т. е. графики распределения полной температуры имеют максимум, наличие которого подтверждается экспериментально [6]. Результаты расчетов показали, что усиление эффекта охлаждения связано только с диссипацией механической энергии. Это указывает на то, что механическая работа, совершаемая газом в результате радиального движения, при наличии диссипации увеличивается. Теплопередача сама по себе без учета диссипации приводит к противоположному эффекту – нагреву газа во всей области течения.

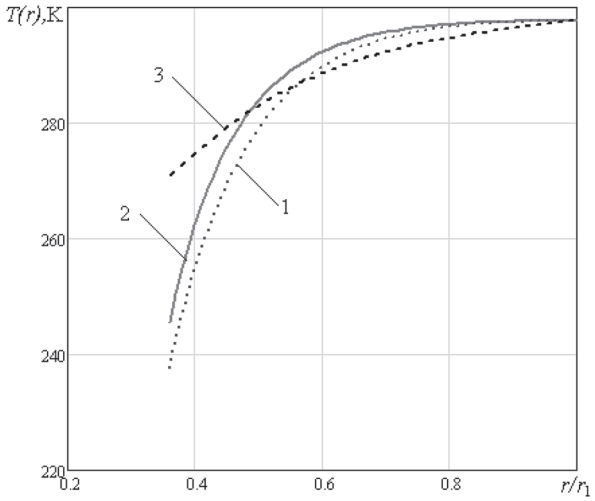


Рис. 4. Распределение температуры в периферийной зоне вихря (Re = 5,6; r_2 = 0,36; $V_{\varphi 1}$ = 103,3 м/с; T_1 = 298 К): *1* – локально-неравновесное течение; *2* – теория Навье–Стокса; 3 – изэнтропическое течение вязкой жидкости

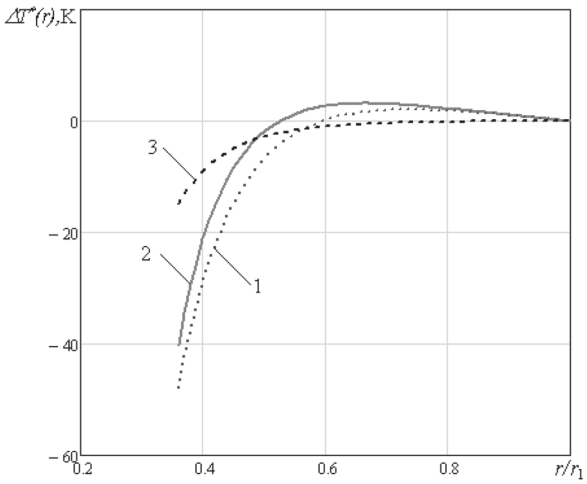


Рис. 5. Распределение разности температур торможения в периферийной зоне вихря (Re = 5,6; r_2 = 0,36; $V_{\varphi 1}$ = 103,3 м/с; T_1 = 298 К; T_0^* = 303 К): *1* – локально-неравновесное течение; *2* – теория Навье–Стокса; *3* – изэнтропическое течение вязкой жидкости

Непосредственное сравнение результатов расчетов с имеющимися экспериментальными данными затруднительно, так как отсутствует прямая связь чисел Re и r_2 с конструктивными и режимными параметрами течения в конкретной вихревой трубе. Однако относительно поведения этих величин можно руководствоваться следующими соображениями.

Число Re характеризует интенсивность радиального течения по направлению к диафрагме, которое и определяет коэффициент отбора μ в реальной трубе. Поэтому между μ и Re должна существовать определенная взаимосвязь.

Так как радиус r_2 определяет центр масс протекающего через диафрагму газового потока, то он должен примерно на 20–30 % быть меньше геометрического размера диафрагмы.

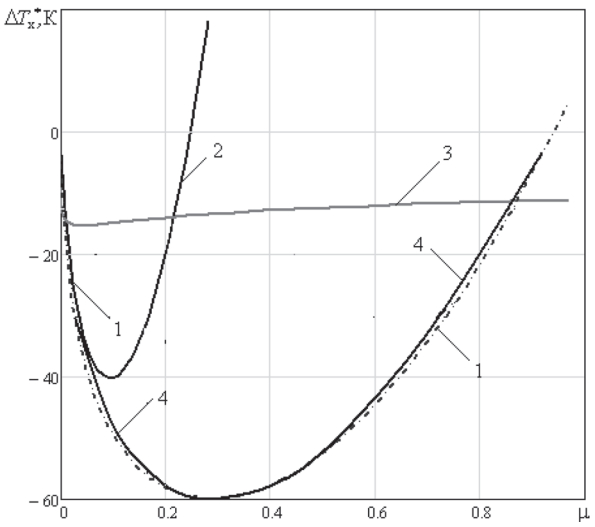


Рис. 6. Зависимость абсолютного эффекта охлаждения от коэффициента отбора m (r_2 = 0,36; $V_{\varphi 1}$ = 103,3 м/с; T_1 = 298 К; T_0^* = 303 К): *1* – локально-неравновесное течение; *2* – теория Навье–Стокса; *3* – изэнтропическое течение вязкой жидкости; *4* – эксперимент [6] ($\pi_{тр}$ = 6 бар; $d_д$ = 0,48; T_0^* = 303 К)

На рис. 6 показано сравнение графиков абсолютного эффекта охлаждения ΔT_x^* от коэффициента отбора μ, рассчитанных для разных моделей, с экспериментом [6]. При этом зависимость коэффициента отбора от Re аппроксимировалась степенной зависимостью $\mu = 0{,}000181\mathrm{Re}^{3,6}$.

Как видно из представленных графиков, наибольшая эффективность охлаждения наблюдается для модели локально-неравновесного течения, которая обнаруживает довольно хорошее совпадение с экспериментом во всем диапазоне изменения коэффициента μ. Расчеты на основе теории Навье–Стокса дают не только более низкую эффективность, но и определяют достаточно узкую область значений μ, при которых охлаждение может возникнуть.

Заключение. Анализ полученных результатов показывает, что наблюдаемый эффект охлаждения в вихревой трубе обусловлен, как минимум, тремя факторами: направленным к центру радиальным течением в периферийной зоне вихря, диссипацией механической энергии и локальной неравновесностью течения.

Казалось бы, теплопередача и диссипативные процессы должны отрицательно влиять на охлаждение газовой среды в вихревой трубе. Однако расчеты показывают, что диссипация механической энергии, вопреки предположению, приводит к значительному увеличению перепада температур охлажденного газа. Хотя сама по себе теплопередача без учета тепла диссипации приводит к противоположному эффекту – нагреву газа в центральной зоне вихря.

Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными дает основание заключить, что теоретическое описание термогидродинамических процессов в вихревой трубе должно строиться на основе теории локально-неравновесного течения, учитывающей изэнтропичность переноса импульса в сдвиговом потоке вязкой среды.

Список использованной литературы

1. *Тютюма, В. Д.* О механизме разделительного эффекта в вихревой трубе Ранка / В. Д. Тютюма // Докл. НАН Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 3. С. 110–114.

2. *Тютюма, В. Д.* О механизме эффекта Ранка–Хилша / В. Д. Тютюма // Инженерно-физический журн. – 2011. – Т. 84, № 3. – С. 565–570.

3. *Тютюма, В. Д.* Концептуальные особенности построения теории вязких течений сжимаемых сред / В. Д. Тютюма // Инженерно-физический журн. – 2012. – Т. 85, № 2. – С. 333–335.

4. *Тютюма, В. Д.* Экспериментальное подтверждение модели локально-неравновесного течения вязкой жидкости / В. Д. Тютюма // Докл. НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 6. – С. 107–111.

5. *Лойцянский, Л. Г.* Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М., 1970. – 904 с.

6. *Пиралишвили, Ш. А.* Вихревой эффект. Эксперимент, теория, технические решения / Ш. А. Пиралишвили, В. М. Поляев, М. Н. Сергеев; под ред. А. И. Леонтьева. – М., 2000. – 412 с.

Поступило в редакцию 07.09.2015

Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **ноябрь–декабрь** **Том 59 № 6**

УДК 537.291:533.723

С. П. ФИСЕНКО, Д. А. ТАКОПУЛО

СВЯЗЬ БРОУНОВСКОЙ ДИФФУЗИИ С КРУПНОМАСШТАБНОЙ МОРФОЛОГИЕЙ НАНОСТРУКТУРИРОВАННОЙ ПЛЕНКИ НА СТЕНКЕ ПРОТОЧНОГО РЕАКТОРА

(Представлено академиком О. Г. Пенязьковым)

Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси, Минск, Беларусь
fsp@hmti.ac.by; takopulo@mail.ru

Разработана самосогласованная математическая модель осаждения наночастиц из газового потока и формирования наноструктурированной пленки. Представлены качественные оценки и результаты расчетов, которые согласуются с экспериментальными данными. Было обнаружено, что в цилиндрическом реакторе образуется крупномасштабная морфология пленки, которая не зависит от толщины пленки. Показано, что морфология пленки может быть оптимизирована за счет управления шириной пучка наночастиц и начальной температуры газового потока.

Ключевые слова: профиль Пуазейля, свободномолекулярный режим, термофорез, радиус наночастицы, пористость.

S. P. FISENKO, D. A. TAKOPULO

BROWNIAN DIFFUSION AND LARGE-SCALE MORPHOLOGY OF A NANOSTRUCTURED FILM ON THE WALL OF A FLOW REACTOR

A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
fsp@hmti.ac.by; takopulo@mail.ru

A self-consistent mathematical model of nanoparticle deposition from a gas flow and a nanostructured film growth was developed. Qualitative estimates and simulation results are presented, which are in accordance with experimental data. During simulation it is found that at the inlet of the cylindrical reactor a large-scale morphology of a film thickness is formed which does not depend on its width. It is shown that the morphology of a deposited film can be optimized by controlling the width of an inlet nanoparticle beam and by an inlet gas temperature.

Keywords: Poiseuille profile, free molecular regime, thermophoresis, nanoparticle radius, porosity.

Введение. Получение наноструктурированных пленок за счет осаждения наночастиц из газового потока является важным приложением нанотехнологии [1; 2]. Морфология пленок показывает при этом довольно большое разнообразие структур и вариации пористости. Важно отметить, что осаждение наночастиц может быть легко интенсифицировано за счет простых технических решений. В частности, за счет термофореза наночастиц, если температура газа-носителя превышает температуру стенок канала примерно на 100 К и выше [3–6]. Для тепловых скоростей движения наночастиц критически важным процессом является их броуновская диффузия [5; 6].

Цель работы − определить физические причины возникновения крупномасштабной морфологии наноструктурированной пленки и ее параметры в зависимости от условий работы реактора.

Математическая модель. Для описания осаждения наночастиц из газового потока необходимо знать поля температуры и скорости газа. Поле температуры в газовом потоке $T(r, z)$ рассчитывается с помощью уравнения конвективной теплопроводности

© Фисенко С. П., Такопуло Д. А., 2015.

$$\rho c_p u_z(T)\frac{\partial T(r,z)}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(T)\frac{\partial T(r,z)}{\partial r}\right), \quad (1)$$

где ρ, c_p, λ − плотность газа носителя, теплоемкость при постоянном давлении, теплопроводность газа соответственно; $u_z(r, z, T)$ − профиль скорости газа в реакторе. В (1) мы пренебрегли вкладом наночастиц в процессы теплообмена, что справедливо для относительно малых концентраций наночастиц.

Стационарная скорость газа в цилиндрическом реакторе определяется профилем Пуазейля:

$$u(r,z)=2u_0(T)\left(1-\frac{r^2}{(R-h(z))^2}\right), \quad (2)$$

где R – радиус реактора; u_0− средняя по сечению скорость газа в реакторе, зависящая от его средней температуры; $h(z)$ – толщина осажденного слоя. Отметим, что в работе [7] было показано, профиль Пуазейля с достаточной точностью описывает распределение скорости в неизотермическом потоке газа в цилиндрическом реакторе, если учитывать изменение средней скорости потока при теплообмене. Например, охлаждение газового потока возникает, если температура стенки реактора ниже начальной температуры газа. В процессе охлаждения уменьшается средняя скорость газового потока, но профиль скорости практически параболический.

Уравнение, описывающее изменение числовой плотности числа наночастиц n, имеет вид

$$\frac{\partial nu}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial rnv_{\text{th}}}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rD_{\text{B}}\frac{\partial n}{\partial r}\right), \quad (3)$$

где v_{th} – скорость термофореза наночастиц; D_{B} – коэффициент броуновской диффузии наночастиц.

Важно отметить, что взаимодействие наночастиц с молекулами газа в работе описывается в свободномолекулярном приближении, так как размер наночастиц много меньше длины свободного пробега молекул газа. В свободномолекулярном приближении выражение для подвижности сферической наночастицы b имеет вид [8]

$$b=\frac{3}{16\pi R_{\text{B}}^2 P}\sqrt{\frac{2\pi kT}{m}},$$

где k − постоянная Больцмана; R_{B} − радиус броуновской наночастицы; m − масса молекулы газа; P − полное давление газа в реакторе. Тогда коэффициент броуновской диффузии D_{B} равен [8]

$$D_{\text{B}}=kTb.$$

Следуя [9], в свободномолекулярном режиме скорость термофореза сферической наночастицы равна

$$\mathbf{v}_{\text{th}}=-\frac{3}{4}\frac{\eta}{\rho T}\nabla T=-\frac{3}{4}\frac{\eta k}{mP}\nabla T,$$

где η − динамическая вязкость газа.

Отметим, что при выводе уравнения (3) мы пренебрегли диффузионным переносом и термофорезом в осевом направлении по сравнению с соответствующими величинами в радиальном направлении, так как длина реактора много больше его радиуса.

Уравнение для изменения толщины покрытия h на расстоянии z от входа находится из закона сохранения массы наночастиц

$$\frac{dh(z)}{dt}=-\frac{4}{3}\frac{\pi R_{\text{B}}^3}{(1-\varepsilon)}\left(D_{\text{B}}\frac{\partial n}{\partial r}\right), \quad (4)$$

где h − толщина пористого слоя; ε − пористость. В рамках нашего исследования величина ε является свободным параметром. Отметим, что ε уменьшается при увеличении кинетической энергии наночастиц [12].

Граничные условия для уравнений (1) и (2) имеют следующий вид:

$$\text{при } r = R - h(z)\text{: } \lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda_p \frac{\partial T_p}{\partial r},\ n = 0;$$

$$\text{при } r = R\text{: } T_p = T_w;$$

$$\text{при } r = 0\text{: } \frac{\partial T}{\partial r} = 0,\ \frac{\partial n}{\partial r} = 0, \tag{5}$$

где λ_p − эффективная теплопроводность пористого слоя; T_p − температура пористого слоя. При этом температура стенки канала T_w считается заданной и постоянной по длине реактора.

Очевидно, что параметры газового потока на входе в реактор оказывают существенное влияние на процесс осаждения. Разработанная математическая модель позволяет исследовать достаточно широкий класс начальных условий. В данной работе ограничимся следующими начальными условиями для неизотермического потока (при $z = 0$): распределение температуры газа по сечению $T_{\text{in}}(r)$ описывается выражением

$$T_0(r) = \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\left(T_{\text{in}} - T_w\right) + T_w, \tag{6}$$

где T_{in} – температура газа на оси канала. Выражение (6) хорошо аппроксимирует решение задачи Гретца–Нуссельта о неизотермическом ламинарном течении газа с постоянными теплофизическими характеристиками в цилиндрическом реакторе [10].

Для числовой плотности наночастиц в этой работе мы исследуем несколько начальных условий:

$$n_0(r) = \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) n_{\text{in}},\quad 0 \le r \le R; \tag{7}$$

$$n_1(r) = \begin{cases} n_{\text{in}},\ 0 \le r \le 0,7R, \\ 0,\ 0,7R < r \le R; \end{cases} \tag{8}$$

и

$$n_2(r) = \begin{cases} n_{\text{in}},\ 0 \le r \le 0,85R, \\ 0,\ 0,85R < r \le R, \end{cases} \tag{9}$$

где n_{in} − числовая плотность наночастиц на оси канала. Условия (8) и (9) отвечают случаю, когда на вход реактора подаются осесимметричные однородные пучки наночастиц разной ширины, которая меньше ширины реактора.

В качестве начального условия для уравнения роста толщины h осажденного слоя (4) имеем, что в любой точке стенки реактора при $t = 0$

$$h(z) = 0, \tag{10}$$

Система уравнений (1)–(3), (4) с граничными и начальными условиями (5)–(9) и (10) представляет математическую модель исследуемого процесса.

Перед изложением результатов численного моделирования приведем некоторые результаты качественного анализа нашей задачи.

Качественные оценки. Для описания процесса охлаждения ламинарного потока газа в цилиндрическом реакторе газа установлено существование характерной длины l_t [11]:

$$l_t \simeq 0,26 \frac{u_0 R^2 \rho c}{\lambda(T)},$$

где ρ, c, λ – плотность, удельная теплоемкость и теплопроводность газа. Температура газа на оси реактора изменяется по закону

$$T(0, z) \approx T_w + (T_{\text{in}} - T_w)\exp[-z / l_t].$$

Для процесса изотермического броуновского осаждения наночастиц в реакторе установлено существование характерной длины l_{B} [11]:

$$l_{\text{B}} \approx 0,26\frac{R^2 u_0}{D_{\text{B}}}.$$

Численные оценки для этих параметров приведены в следующем разделе. Параметры подобия движения наночастиц под действием термофореза и броуновской диффузии подробно рассмотрены в [6].

На основе нашей математической модели сделаем качественные оценки для толщины наноструктурированной пленки h. На небольших расстояниях по сравнению с l_{B} представим градиент числовой плотности наночастиц в потоке как

$$\nabla n \sim n_{\text{in}} / (R - h(z)).$$

Тогда из приближенного решения уравнения (4) следует оценка для толщины наноструктурированной пленки $h(t, z)$:

$$h(t, z) \sim \frac{DR_{\text{B}}^3 n_{\text{in}}}{R(1-\varepsilon)} t \sim \frac{R_{\text{B}}}{R(1-\varepsilon)} \frac{(kT)^{1,5}}{P\sqrt{m}} n_{\text{in}} t. \tag{11}$$

Видно, что скорость роста толщины слоя существенно зависит от величины пористости ε. Нижняя граница ε устанавливается из простых геометрических соображений о плотной упаковке сфер и для сферических нанонаночастиц составляет ~0,26 [13]. Верхняя граница пористости слоя определяется адгезионными свойствами материала наночастиц, а также от кинетической энергии наночастицы [12]. В частности, экспериментальное значение пористости наноструктурированного слоя, образующегося на стенке плазмохимического реактора в результате осаждения наночастиц углерода, составляет около 0,7 [14]. Из выражения (11) также следует, что на относительно небольших расстояниях от входа в реактор наноструктурированная пленка должна иметь одинаковую толщину. Из выражения (11) дополнительно следует, что за заданное время t толщина наноструктурированной пленки $\sim R_{\text{B}}$, что подтверждается экспериментальными данными [12]. При этом толщина пленки обратно пропорциональна давлению в реакторе, а также зависит от массы молекулы газа-носителя. Верхняя граница R_{B}, при которой при атмосферном давлении справедливо свободномолекулярное приближение составляет порядка ~100 нм.

Введем безразмерную величину $f(r)$ − плотность потока наночастиц на входе в реактор – следующим образом:

$$f(r) = \frac{1}{n_{\text{in}} u_0 R} n(r) u(r) r, \tag{15}$$

где u_0 – средняя скорость газа на входе в реактор.

На рис. 1 показаны графики $f(r)$ для трех рассматриваемых нами начальных условий (7)–(9).

Видно, что для всех трех распределений начальной плотности плотность потока f имеет достаточно широкий максимум. Как показали наши расчеты, именно этот максимум порождает крупномасштабную морфологию наноструктурированной пленки на входе в реактор. Интересно, что морфология пленки не зависит от толщины пленки, если h меньше нескольких процентов от радиуса реактора. Даже с учетом выравнивающего воздействия броуновской диффузии, очевидно, что для достижения относительно равномерной толщины наноструктурирован-

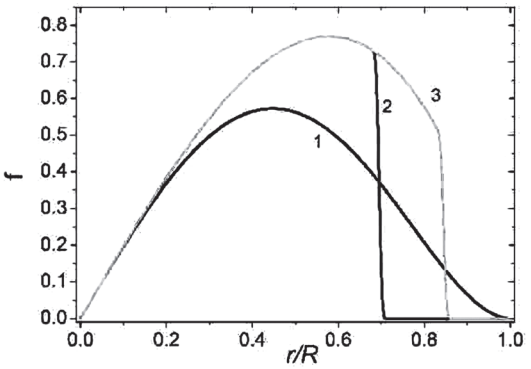


Рис. 1. Распределение $f(r)$ для начальных профилей: *1* − (7); *2* − (8); *3* − (9)

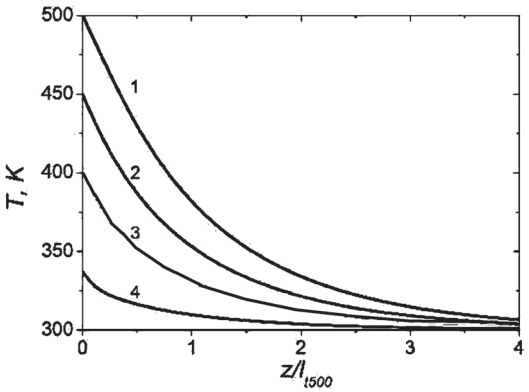


Рис. 2. Распределения температуры в продольном направлении: *1* – $r = 0$; *2* – $r = 0{,}5R$; *3* – $0{,}7R$; *4* – $0{,}9R$; $T_{in} = 500$ К

ной пленки нужно добиваться, чтобы $f(r) \approx \text{const}$ на большей части входного сечения реактора. Введем среднее радиальное положение r^* для каждого начального распределения наночастиц по формуле

$$r^* = \frac{\int_0^R r^2 u(r) n(r) dr}{\int_0^R r u(r) n(r) dr}. \qquad (12)$$

После интегрирования в (12) имеем, что для распределения (7) $r^* \approx 0{,}46R$, для распределения (8) $r^* \approx 0{,}44R$ и для распределения (9) $r^* \approx 0{,}5R$.

Численные результаты моделирования. Расчет толщины наноструктурированной пленки проводился итерационным способом. Для этого при заданной толщине пленки система дифференциальных уравнений в частных производных (1)–(3) численно решалась методом прямых [14; 15]. Затем с помощью численного решения находился поток наночастиц на стенку, и на основе (4) рассчитывалось изменение толщины пленки для любой точки на стенке реактора. После чего при новой толщине наноструктурированной пленки опять находился профиль скорости газа. С учетом нового профиля скорости совместно решались стационарные тепловые и диффузионные задачи.

На графиках результаты расчетов приведены для следующих условий: радиус реактора $R = 5$ мм, входная скорость газового потока $u_0 = 0{,}1$ м/с, радиус броуновских наночастиц $R_B = 2$ и 3 нм, начальная числовая плотность наночастиц $n_{in} = 10^{18}$ наночастиц/м^3, температура газового потока $T_{in} = 400$ К, 500 К, температура стенки $T_w = 300$ К. Давление равно атмосферному давлению, в качестве газа носителя использовался аргон.

Для начальной температуры газа, входящего в реактор $T_{in} = 500$ К характерная длина тепловых процессов $l_{t500} \approx 0{,}018$ м $\approx 4R$. Для наночастиц с радиусами $R_B = 2$ и 3 нм характерная длина изотермического броуновского осаждения $l_B = 1{,}2$ м и $l_B = 2{,}7$ м.

На рис. 2 показаны результаты расчета температуры газа по длине реактора в отсутствие наноструктурированной пленки. Использовались 4 итерации при расчете толщины пленки. Отметим, что для нашего диапазона температур толщина пленки практически не оказывает влияния на тепловые процессы в газовой фазе.

Видно, что в области $z > 3l_t$ процесс осаждения становится изотермическим, температура газа совпадает с температурой стенки. Таким образом, вклад термофореза существенен в перераспределении наночастиц в потоке в основном в области $0 < z < l_t$.

На рис. 3 показана крупномасштабная морфология наноструктурированной пленки на стенке реактора для трех различных начальных условий, но при одинаковой входной температуре газового потока с наночастицами. Видно, что чем более ярко выражен максимум функции $f(r)$, тем сильнее изменение толщины пленки. На примере кривой *2* также очевидно сглаживающее влияние броуновской диффузии за счет большей величины r^*.

Если температура газа и стенки реактора совпадают, то положение максимума толщины пленки можно оценить по формуле

$$z^* \sim u_0 \frac{(R - r^* - h)^2}{D}.$$

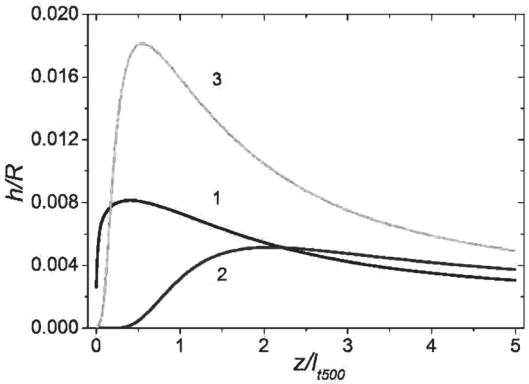


Рис. 3. Распределение толщины наноструктурированной пленки в реакторе. Время осаждения $t = 10^6$ с для $R_B = 2$нм, $T_{in} = 500$ К. Распределение наночастиц на входе реактора: *1* – (7); *2* – (8); *3* – (9)

Если температуры газа и стенки различаются на сотни градусов (для условий нашего реактора), то в переносе наночастиц в радиальном направлении доминирует термофорез, и можно использовать другую оценку для z^*

$$z^* \sim u_0 \frac{R - r^* - h}{v_{\text{th}}} \sim u_0 \frac{R(R - r^* - h)P}{\left|T_w - T_{\text{in}}\right|}.$$

Видно, что чем меньше r^*, тем дальше от входа в реактор расположен максимум толщины пленки. При этом по мере роста толщины пленки, положение максимума сдвигается в направлении входа в реактор.

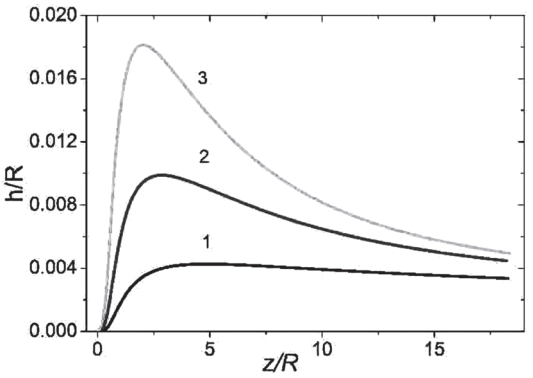


Рис. 4. Распределение толщины наноструктурированной пленки в реакторе. Время осаждения $t = 10^6$ с ; $R_B = 2$ нм; начальное распределение (9). *1* − $T_{in} = 300$ К (изотермическое осаждение); *2* − 400 К; *3* − 500 К

На рис. 4 показано влияние термофореза наночастиц на крупномасштабную морфологию наноструктурированной пленки при одном и том же начальном распределении наночастиц по радиусу. Чем выше входная температура, тем больше скорость термофореза при неизменной температуре стенки реактора. Видно, что термофорез ускоряет движение облака наночастиц в радиальном направлении, тем самым уменьшается роль диссипативного процесса – броуновской диффузии, и возникает крупномасштабная морфология наноструктурированной пленки за счет неоднородных условий входа наночастиц в реактор. В случае изотермического осаждения выравнивающая роль броуновской диффузии очевидна. В расчетах эффективная теплопроводность материала в наноструктурированной пленке принималась равной 0,1 Вт/(м · К) [13], что соответствует покрытию из наночастиц углерода. Отметим, что на рис. 4 все расстояния много меньше l_B.

Заключение. Разработана математическая модель на основе гидродинамики и физической кинетики процессов переноса, проведено теоретическое и численное исследование формирования наноструктурированной пленки на стенке цилиндрического реактора. Предложен итерационный метод расчета, учитывающий обратную связь между ростом пленки и гидродинамикой течения ламинарного газового потока. В расчетах толщина пленки достигала нескольких процентов радиуса реактора. В свободномолекулярном приближении учитывалось влияние броуновской диффузии и термофореза наночастиц. Показано, что влияние термофореза существенно при атмосферном давлении, если разница температур газа и стенки реактора превышает 100 К.

Показано, что из-за особенностей гидродинамического течения в начале цилиндрического реактора возникает крупномасштабная морфология наноструктурированной пленки, не зависящая от ее толщины. За счет изменения ширины входящего в реактор пучка и его температуры можно оптимизировать эффект переменной толщины пленки.

Для рассмотрения морфологии наноструктурированной пленки большей толщины необходимо решать гидродинамическую задачу в полной постановке, что связано появлением вихревых течений в канале.

Список использованной литературы

1. Cluster beam deposition: tool for nanoscale science and technology / K. Wegner [et al.] // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2006. – N 39. – P. R439–R459.

2. *Jensen, P.* Growth of nanostructures by cluster deposition: Experiments and simple models / P. Jensen // Reviews of Modern Phys. – 1999. – Vol. 71, N 5. – P. 1695–1735.

3. *Chein, R.* Thermophoretic effects on nano-particles deposition in channel flow / R. Chein, W. Liao // Heat Mass Transfer. – 2005. – N 42. – P. 71–79.

4. *Shimada, M.* Size change of very fine silver agglomerates by sintering in a heated flow / M. Shimada, T. Seto, K. Okuyama // Japanese J. Appl. Phys. – 1994. – Vol. 33. – P. 1174–1181.

5. *Fisenko, S. P.* Brownian deposition of nanodroplets and nanofibre growth via “vapor-liquid-solid” route / S. P. Fisenko, D. A. Takopulo // “Nanodroplets”. Lecture Notes in Nanoscale Science and Technology. – New York: Springer, 2013. – Vol. 18. – P. 289–299.

6. *Фисенко, С. П.* Термофорез и броуновская диффузия наночастиц в проточном реакторе / С. П. Фисенко, Ю. А. Ходыко // Журн. техн. физики. – 2012. – Т. 82, № 3. – С. 23–29.

7. *Станкевич, Ю. А.* Перестройка профиля Пуазейля в неизотермических течениях в реакторе / Ю. А. Станкевич, С. П. Фисенко // Инженерно-физ. журн. – 2011. – Т. 84. – С. 1225–1228.

8. *Kubo, R.* Statistical Mechanics / R. Kubo. – Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1965.

9. Thermophoresis of particles in a heated boundary layer / L. Talbot [et al.] // J. Fluid. Mech. – 1980. – Vol. 101, N 4. – P. 737–758.

10. *Петухов, Б. С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах / Б. С. Петухов. – М.: Энергия, 1967.

11. *Бринь, А. А.* Броуновское осаждение наночастиц из ламинарного газового потока в трубе / А. А. Бринь, С. П. Фисенко, А. И. Шнип // Журн. техн. физики. – 2008. – Т. 78, вып. 9. – С. 41–45.

12. Evaluation of the factors that influence the fabrication of the porous thin films by deposition of aerosol nanoparticles / M. Kubo [et al.] // Chem. Eng. J. – 2013. – Vol. 232. – P. 221–227.

13. *Тот, Л. Ф.* Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве / Л. Ф. Тот. – М.: Физматгиз, 1958.

14. *Такопуло, Д. А.* Тепло-массоперенос в системе углеводородный газ – пористый слой углерода – металл и формирование пересыщенных твердых растворов углерода / Д. А. Такопуло, С. П. Фисенко // Инженерно-физ. журн. – 2012. – Т. 85, № 3. – С. 503–511.

15. *Вержбицкий, В. М.* Основы численных методов / В. М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2002.

16. *Schiesser, W. E.* The Numerical Method of Lines: Integration of Partial Differential Equations / W. E. Schiesser. – San Diego: Academic Press, 1991.

17. *Такопуло, Д. А.* Броуновская диффузия и перенос пучка наночастиц газовым потоком / Д. А. Такопуло, С. П. Фисенко // Инженерно-физ. журн. – 2013. – Т. 86, № 5. – С. 980–983.

Поступило в редакцию 02.09.2015

Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **ноябрь–декабрь** **Том 59 № 6**

СОЦИАЛЬНО-ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ

УДК 811.161.3'374'0 + 811.16'374

І. У. ГАЛУЗА

СЛОЎНІК ЖЫВОЙ БЕЛАРУСКАЙ МОВЫ Ў 20-я ГАДЫ XX ст.: КРЫТЭРЫІ АДБОРУ ЛЕКСІКІ І ЯЕ ФІКСАЦЫЯ

(Прадстаўлена членам-карэспандэнтам А. М. Булыкам)

Цэнтр даследаванняў беларускай культуры, мовы і літаратуры НАН Беларусі, Мінск, Беларусь
irenka.galouzo@gmail.com

Данное сообщение посвящено проблеме формирования реестра словаря живого белорусского языка в 20-е годы XX в. в сравнении с наиболее значимыми российскими, польскими, чешскими, сербскими и украинскими словарями. Особое внимание обращено на критерии включения в будущий словарь заимствованных слов, терминов, узкорегиональных диалектизмов, арго, антропонимов, топонимов и других пластов лексики, а также на особенности структуры словарной статьи: комбинированные средства оформления словарной статьи, отсутствие стилистических помет, обязательная неанонимная иллюстрация и лингвистический паспорт каждой лексемы или её значения. Также раскрываются задачи, которые должен был решить будущий академический словарь: показать лексический состав белорусского языка и обогатить его за счёт включения терминологической и абстрактной лексики, при этом дав нормативные написания и доказав самостоятельность белорусского языка.

Ключевые слова: лексикология, лексикография, диалектография, словари, словарь живого языка, областные словари, инструкция, картотека, терминологическая лексика.

I. U. HALUZA

DICTIONARY OF THE LIVING BELARUSIAN LANGUAGE IN THE 20 YEARS OF THE TWENTIETH CENTURY: CRITERIA FOR SELECTION OF VOCABULARY AND ITS FIXATION

Center for the Belarusian Culture, Language and Literature Researches of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
irenka.galouzo@gmail.com

This article is devoted to the formation of the registry of the dictionary of the living Belarusian language in the 20 years of the twentieth century in comparison with the most important Russian, Polish, Czech, Serbian, and Ukrainian dictionaries. Special attention is drawn on the criteria for inclusion into a future dictionary of loan words, terms, narrowly regional dialect, slang, personal names, place names, and other layers of vocabulary, as well as on the structural features of the entry: combined clearance means of the entry, a lack of stylistic marks, mandatory non-anonymous illustration and linguistic passport of each lexeme or its meanings. Also, tasks have been revealed, which must decide a future academic dictionary: show the lexical composition of the Belarusian language and enrich it by including terminology and abstract vocabulary, thus allowing regulatory writings and having proved the independence of the Belarusian language.

Keywords: lexicology, lexicography, dialektography, dictionaries, dictionary of the living language, instruction, card index, terminological vocabulary.

Уводзіны. Беларускія мовазнаўцы пры стварэнні акадэмічнага слоўніка беларускай мовы канцэптуальна пайшлі па еўрапейскім шляху: за аснову была ўзята жывая народная мова. Тэрытарыяльна лексічныя матэрыялы для слоўніка нацыянальнай мовы павінны былі ахапіць межы этнаграфічнай Беларусі, а храналагічна слоўнік абмяжоўваўся часавым прамежкам з другой паловы XIX ст. да першай чвэрці XX ст. Да разгортвання актыўнай працы па ўкладанні слоўніка жывой беларускай мовы была выдадзена «Інструкцыя» С. Некрашэвіча [1], размеркавана праца

© Галузо И. В., 2015.

сярод спецыялізаваных камісій і членаў Інбелкульта, з адным цэнтрам на чале – Слоўнікавай камісіяй. Пры гэтым быў ажыццёўлены навацыйны метадалагічны прыём: у справе збірання слоўнікавых матэрыялаў для выпрацоўкі літаратурнай мовы былі задзейнічаны «ўсе здольныя актыўныя сілы беларускага грамадзянства» [2, с. 186], а не абмежаванае кола лінгвістаў.

Значыць, рэестравая частка фарміравалася, галоўным чынам, з матэрыялаў, сабраных у палявых умовах; таксама праводзілася выбарачная выпіска рэестравых лексем з раней створаных слоўнікаў; адразу стала складацца вялікая картатэка з твораў сучасных пісьменнікаў. Тэксты перыядычных выданняў і пераважная большасць тэрміналагічнай лексікі пры ўкладанні будучага слоўніка не разглядаліся. Прынцыпы адбору лексікі ў слоўнік жывой беларускай мовы можна характарызаваць па дакладзе С. Некрашэвіча, каментарыях і парадах яго калег адносна некаторых палажэнняў [2–12] і інш.

Крытэрыі адбору лексікі. С. Некрашэвічам і іншымі мовазнаўцамі таго часу былі прапанаваны адметныя крытэрыі адбору лексікі. У будучы слоўнік жывой беларускай мовы планавалася ўносіць: 1) «беларускія словы, агульназразумелыя для ўсёй беларускай тэрыторыі, як, напр., *рука, дзякаваць*» [2, с. 170], г. зн. *агульнаўжывальную лексіку*; 2) словы, «характэрныя для якой-небудзь асобнай беларускай мясцовасьці, як, напр., *лоўж, подкур, скрыль*» [2, с. 170], г. зн. лексіку абмежаванага ўжытку, а менавіта – *дыялектную рэгіянальную лексіку*. Словы ж, падобныя на польскія ці рускія, «хоць-бы яны й чутны былі на нашай тэрыторыі ад беларусаў, нават ад людзей вясковых і няпісьменных», трэба было разумець як «рэзультат зрушэньня або спальшчэньня» і ў слоўніку адхіляць [2, с. 170].

Запазычаныя словы. Пры вырашэнні праблемы адлюстравання ў акадэмічным слоўніку запазычаных слоў назіраўся разумна пурыстычны падыход, сутнасць якога выяўлялася ў тым, што ўлічвалася і гісторыя ўзнікнення запазычанняў у мове, і патрабаванні канцэпцыі слоўніка жывой мовы. Так, любое іншамоўнае слова адлюстроўвае пэўную ідэю, наймення для якой у нашай мове няма [2, с. 166]. Разам з тым трэба было ўлічыць наступнае: 1) польскі і рускі ўплыў меў месца на працягу многіх стагоддзяў, а значыць, адбылося засваенне беларускай мовай шматлікіх, ёй не ўласцівых і збыткоўных элементаў; 2) пры ўвядзенні значнай колькасці запазычанняў назіраецца вялікі адрыў літаратурнай мовы ад народнай, як гэта адбылося з рускай літаратурнай мовай, 3) беларуская мова на той час не мела разгалінаванай сістэмы спецыяльнай і тэрміналагічнай лексікі, 4) камісіі і аматары вялі актыўную працу па стварэнні матываваных беларускіх адпаведнікаў шматлікім іншамоўным тэрмінам, 5) чэшская і нямецкая мовы паказалі бліскучы прыклад замены запазычаных слоў – «выпадковых гасьцей» [2, с. 176] – уласнамоўным аналагам.

Таму было прапанавана не адхіляць фіксацыю распаўсюджаных на большай ці меншай частцы беларускай тэрыторыі запазычаных слоў і зваротаў, па гучанні падобных на рускія ці польскія, а прыняць наступныя крытэрыі выбаркі: 1) храналагічны, г. зн. рэгістраваць у акадэмічным слоўніку толькі даўнія запазычанні, пра што сведчаць, напрыклад, запісы А. Сержпутоўскага і інш., і лепшыя творы сучасных беларускіх пісьменнікаў [2, с. 182]; 2) па ступені частотнасці ўжывання, прычым выбарка найбольш частотных русізмаў, паланізмаў і ўкраінізмаў павінна быць праведзена з выданняў па народнай творчасці і твораў самых вядомых беларускіх пісьменнікаў, мова перыёдыкі і брашур разгляду не падлягала [2, с. 183].

Запазычанні павінны былі ўносіцца ў слоўнік з наступнай суправаджальнай інфармацыяй: з абавязковай этымалагічнай даведкай, крыніцай фіксацыі, і забяспечвацца беларускім нарматыўным адпаведнікам. Напрыклад, «Прэце прс. (польск. przecie); полёнізм; пабеларуску – аднак. Спаткалася ў вершы А. Паўловіча; Грудзь, ж., адз. л. (руск. грудь); русізм; пабеларуску – грудзі, ж. мн. л. Спаткалася ў вершы Паўловіча…» [2, с. 182]. Так, Я. Карскі заўважае, што да запазычаных слоў, якія будуць уключаны ў слоўнік, «абавязкова павінна быць прыведзена слова з той мовы, адкуль зроблена запазычанне» [8, с. 745].

Спосаб фільтраванага адбору лексічных сродкаў не быў нацыянальным вынаходніцтвам: пурыстычныя ідэі прысутнічалі пры стварэнні амаль што ўсіх акадэмічных слоўнікаў рускай мовы. Так, пры стварэнні «Слоўніка Акадэміі Расійскай» была вядучай думка пра тое, што ў рускую мову не варта «ўводзіць чужога нічога, але ўласнай сваёй дабратой упрыгожвацца»,

таму выключаліся ўсе запазычанні, для якіх існавалі рускія адпаведнікі. У «Слоўнік царкоўнаславянскай і рускай мовы» запазычаныя словы ўносіліся без самастойных тлумачэнняў, толькі са спасылкай на адпаведныя рускія, калі такія былі.

Тэрміны. Істотнай праблемай пры стварэнні поўнага слоўніка жывой беларускай мовы была адсутнасць асобных пластоў тэрміналагічнай лексікі. Праблему забеспячэння літаратурнай мовы тэрміналагічнымі сродкамі прапаноўвалася вырашыць двума спосабамі: стварэнне новых лексічных адзінак ці запазычанне наяўных. Пры гэтым моўныя абазначэнні тэрмінаў павінны адпавядаць жорсткім крытэрыям лінгвістычнага адбору: семантычная зразумеласць і матывацыйная ўгрунтаванасць абазначальнага сродку (адлюстраванае ў зразумеласці сэнсу), што разам будзе спрыяць шырокаму выкарыстанню створанага слова.

За аснову стварэння тэрміналагічнай лексікі рэкамендавалася браць абазначальныя сродкі, што існавалі ў дыялектнай беларускай мове. С. Некрашэвіч раіў выкарыстоўваць шырока распаўсюджаную ў народнай мове словаўтваральную мадэль: 1) выкарыстоўваць словы з унутранай матывацыяй [2, с. 173], 2) з дапамогай мадыфікацыйных словаўтваральных сродкаў, галоўным чынам суфіксаў, надаваць абстрактнае значэнне канкрэтным назоўнікам [2, с. 173]). М. Каспяровіч заўважаў, што «здаровае ўзбагачэньне літаратурнае мовы можа ісьці толькі шляхам успрыйманьня мясцовых слоў літаратурнаю моваю, а ня выдуманьня іх» [9, с. 32].

Запазычаныя словы варта было выкарыстоўваць толькі тады, калі не было беларускага адпаведніка, а створаны неалагізм з'яўляўся штучным, прычым гэта запазычанае слова мусіла быць інтэрнацыянальным, вядомым многім развітым еўрапейскім мовам. Па сутнасці, гэта азначала, што меліся на ўвазе запазычанні з лацінскай мовы, прынятыя для абазначэння большасці тэрмінаў ва ўсіх мовах. А. Смоліч, аналізуючы некаторыя выпускі беларускай тэрміналогіі, канстатаваў, што «нэолёгізмамі часта замяняюцца словы ў поўным значэньні інтэрнацыянальныя, якія ўжываюцца ў навуковай тэрміналёгіі блізка ўсіх культурных народаў» [12, с. 86].

У акадэмічны слоўнік жывой беларускай мовы было вырашана не ўключаць большую частку тэрміналагічнай лексікі з мэтай прадухіліць павелічэнне яго аб'ёма як за кошт, магчыма, нежыццяздольных слоў, так і за кошт паняццяў і тэрмінаў, што маюць (або знойдуць) сваё тлумачэнне ў спецыялізаваных выданнях і пройдуць апрабацыю школай і навучальным працэсам. Такім чынам, камісіі па асобных галінах навукі распрацоўвалі тэрміналогіі і рабілі з іх выбаркі найбольш ужывальных тэрмінаў для будучага слоўніка. Падобная арганізацыя працы была прынята і пры стварэнні Слоўніка Французскай Акадэміі і некаторых акадэмічных рускіх слоўнікаў (напр., «Слоўніка рускай мовы» пад рэд. А. Вастокава).

Важна, што беларускія моваведы не пайшлі памылковым шляхам украінскіх калег, якія штучна стваралі адрозненні паміж рускай і ўкраінскай мовамі, у перакладных слоўніках і тэрміналогіях ігнаравалі агульныя для рускай і ўкраінскай моў словы, выкарыстоўвалі лексіку выключна дакастрычніцкага перыяду [13, с. 71], таму «часта ў слоўніку да рускіх адпаведнікаў даваліся штучна створаныя або незразумелыя дыялектныя словы замест агульнаўжывальных» [14, с. 115]. У выніку «ўсё, зробленае Інстытутам навуковай мовы ў галіне тэрміналогіі, было марным» [15, с. 103], «непрыдатным для выкарыстання» [16, с. 69].

Вузкатэрытарыяльныя дыялектызмы. У будучы слоўнік жывой беларускай мовы натуральна ўваходзіла і большасць рэгіяналізмаў з мэтай узбагаціць беларускую мову: «няхай кожнае слова, што ўжываецца ў вашай мясцовасьці, хаця бы й невядомае ў іншых дыялектах беларускай мовы, знойдзе сабе месца на старонках белорускага слоўніка» [1, с. 49]. Рэгіяналізмы ўяўлялі сабой разнастайны і дакладны лінгвістычны матэрыял, на падставе якога грамадства, шляхам ужывання ў штодзённай практыцы, вырашала б пытанне адносна таго, які з лексічных, словаўтваральных, граматычных, акцэнталагічных варыянтаў аднаго і таго слова павінен стаць літаратурным, а які – застацца дыялектным [2, с. 174–175]. Безумоўна, пры такім падыходзе ўлічана шахматаўскае стаўленне да абласных слоў, вопыт У. Даля і В. Караджыча.

Іншыя пласты лексікі. Да іншых груп лексікі беларускія моваведы прапанавалі такія крытэрыі адбору, як ступень частотнасці, этычны статус, сацыяльная градацыя:

1) мову злодзеяў і жабракоў, або арго, адхіляць [2, с. 176], бо словы адасобленай групы людзей ствараюцца штучна і могуць быць агульнымі з мовай рускіх і іншых славянскіх злодзеяў і жабракоў [2, с. 176–177];

2) багатую народную тэрміналогію «пастухоў, рамесьнікаў, рыбакоў» фіксаваць у першую чаргу, бо яна ўтрымлівае лексемы для распрацоўкі многіх тэрмінасістэм [2, с. 177];

3) лаянкавыя словы ўносіць, бо яны нешматлікія, а іх пропуск выклікаў бы падзел «на панскую й мужыцкую» мову, чаго беларускія лінгвісты хацелі пазбегнуць [2, с. 177]);

4) антрапонімы не ўключаць ў акадэмічны тлумачальны слоўнік, у адрозненне ад практычных і дапаможных слоўнікаў, у якіх можна адлюстраваць побач з афіцыйнай формай усе вытворныя і ласкальныя [2, с. 177–178];

5) тапонімы не рэгістраваць, таму што а) патрабавалася папярэдняя праца па зборы назваў усіх мясцовасцей, селішчаў, рэк і пад., на што бракавала часу; б) такі матэрыял вымагае спецыяльнай геаграфічнай навуковай апрацоўкі; в) вялікая колькасць тапонімаў зрабіла б слоўнік грувасткім; таму задача па апрацоўцы тапанімічнай лексікі, падачы яе па пэўных групах і з адпаведнай лінгвістычнай і геаграфічнай інфармацыяй – задача іншага спецыялізаванага слоўніка [2, с. 178].

Падкрэслім, што беларускія моваведы планавалі ўкласці асобныя слоўнікі антрапонімаў і тапонімаў, на што ўказвае парада асобна фіксаваць «1) уласныя іменьні і прозьвішчы людзей (поўныя і зьмяншальныя, у ласкальным і зневажальным сэнсе); 2) мянушкі людзей і жывёл; назвы паселішча раёну» [14, с. 43] пры ўкладанні слоўніка мовы раёна.

Крытэрыі адбору лексікі ў рэчышчы тагачаснай славянскай лексікаграфіі. З поўнай верагоднасцю можна сцвярджаць, што пры распрацоўцы такога падыходу да ўключэння вышэйназваных груп лексікі беларускія лінгвісты часткова запазычылі, дапасаваўшы да патрабаванняў сваёй канцэпцыі, прыцыпы ўкладання вядомых лексікаграфічных выданняў: 1) «Слоўніка Акадэміі Расійскай», галоўным з якіх быў крытэрый ужывальнасці слова, таму не ўключаліся «словы вузкапрафесійнага ўжытку…, усе ўстарэлыя словы… і абласныя словы», «іншамоўныя словы, уведзеныя без патрэбы і для якіх раўназначныя славянскія ці рускія знаходзяцца», уласныя імёны, лаянкавыя словы і выразы, пакідаліся «абласныя словы, якія сваёй празрыстасцю, сілай і краткасцю могуць паслужыць для ўзбагачэння мовы», [17, с. 106], і 2) «Слоўніка царкоўнаславянскай і рускай мовы», згодна з правіламі якога трэба «змяшчаць у слоўнік усе словы, да якога б слога яны ні належалі, бо слоўнік не ёсць выбар слоў, але поўны збор мовы і біблейскай, і народнай, што захавалася як у старажытных і навейшых пісьменнікаў, у рукапісах і друкаваных кнігах, так і ў вуснах народа; і, акрамя сараматных і самай нізкай чэрню ў лаянцы ўжывальных, нельга вырачыся ні аднаго слова…» [17, с. 168–169], прычым абласныя словы дапускаліся, калі добра апісвалі прадмет і папаўнялі недахоп слоў у мове, іншамоўныя словы адхіляліся, за выключэннем тых, што адносіліся да розных галін мастацтва (для астатніх ёсць спецыяльныя слоўнікі).

Разам з тым лексікаграфічная практыка А. Шахматава па ўключэнні ў слоўнік-тэзаўрус уласных імёнаў, мянушак жывёл, геаграфічных назваў, а таксама назваў усіх буйных зорак і сузор'яў была адхілена, як і ўстаноўкі У. Леніна пра стварэнне «Даведачнага ілюстраванага слоўніка рускай жывой літаратурнай мовы» [18, с. 87], згодна з якім у другую частку слоўніка – чыста энцыклапедычную – планавалася «ўвесці каля 2000 геаграфічных імёнаў, каля 3500 абазначэнняў гістарычных падзей, каля 4000 імён гістарычных дзеячоў і да 500 скарочаных абазначэнняў устаноў і прадметаў (усяго – каля 10 тысяч слоўнікавых артыкулаў)» [18, с. 75]. Безумоўна, беларускімі мовазнаўцамі быў улічаны вопыт слоўніка У. Даля, згодна з якім «складальнік слоўніка не законнік, не статутшчык, а збіральнік» [19, с. XXXII], і тэзаўруса А. Шахматава, у якім быў шырока адкрыты «доступ абласной лексіцы, царкоўнаславянізмам, вузкаспецыяльным тэрмінам, аказіянальным словам і архаізмам» [17, с. 331].

Важна падкрэсліць, што беларускія мовазнаўцы, хоць і хістка, але дастаткова адэкватна, без пурыстычнага ўхілу, як іх украінскія калегі, выпрацавалі падыход да фіксацыі ў будучым слоўніку інтэрнацыяналізмаў, запазычаных слоў і наватвораў. Парадаксальна, але пры наяўнасці 700 тысяч картак, «з якіх украінска-рускіх каля 350000, руска-ўкраінскіх 400000» [20, с. 27], праца не пасунулася ўперад па стварэнні слоўніка жывой украінскай мовы (з агульнай колькасці толькі «12 тысяч картак адлюстроўвалі запісы новых слоў з вуснаў народа» [20, с. 27]), а спынілася на стварэнні перакладнога слоўніка, які сваёй украінскай часткай не задавальняў ніякім

чынам практычных патрэб: «украінская частка слоўніка настолькі не апрацаваная, што пра яе трэба казаць толькі як пра матэрыял, а не як пра завершаную частку слоўніка» [15, с. 100], што вынікала праз «арыентацыю на лексіку мінулага, … ігнараванне лексікі… сучаснасці, перабольшаную ўвагу да лексікі, звязанай з рэлігіяй, адштурханне ад... рэчаіснасці і разам з ёй ад рускай культуры, рускай мовы» [15, с. 101].

Заўважым, што беларускія лінгвісты пры лексічным напаўненні слоўніка жывой беларускай мовы аддавалі перавагу *словам невытворным*, структурна простым і раілі іх ўносіць як мага больш: «лепш увесьці лішняе, можа й малаважнае, чым выкінуць патрэбнае» [2, с. 176]. Айчынныя лексікографы адназначна аддалі перавагу *анамасіялагічнаму падыходу* – фіксацыі намінацыйных сродкаў мовы, а не раскрыццю словаўтваральнага патэнцыялу базавага (каранёвага) складніка лексічнай адзінкі. Так, яны не пайшлі памылковым шляхам укладальнікаў «Слоўніка Акадэміі Расійскай», якія хацелі выявіць усе словаўтваральныя магчымасці слова і пад адным каранёвым словам змясціць усе дэрываты: «пры гэтым прынцып ужывальнасці таго ці іншага вытворнага слова нярэдка адступаў на другі план», а «вядучым было імкненне прадэманстраваць рэгулярнасць ва ўтварэнні словавытворных радоў і запоўніць «пустыя ячэйкі» словамі, якія ўтвараюцца па жывых мадэлях мовы» [17, с. 109]. Значыць, і практыка У. Даля па ўключэнні самастойна створаных слоў, і практыка А. Шахматава па напаўненні слоўніка патэнцыйнымі словамі або штучнымі ўтварэннямі, якія не знаходзілі пацвярджэння ў рэальным моўным жыцці, былі адхілены айчыннымі мовазнаўцамі.

Адметнасці структуры слоўнікавага артыкула. Рэестравыя словы, тлумачальная частка і заўвагі рэдакцыі трэба падаваць згодна з агульнапрынятым літаратурным правапісам [2, с. 178–179], а ілюстрацыйны матэрыял – фанетычным спосабам [2, с. 179]. Уласна кажучы, пры пабудове слоўнікавага артыкула раілася выкарыстоўваць камбінаваныя моўныя сродкі: кадыфікаваныя для адлюстравання рэестравай адзінкі, пры раскрыцці значэння (значэнняў) лексемы, пры наяўнасці дадатковай інфармацыі; ужыванне дыялектных сродкаў абмяжоўвалася прыкладамі. Я. Карскі ў рэцэнзіі на «Праект укладання слоўніка жывой беларускай мовы» заўважае, што пры тлумачэнні трэба ў першую чаргу ў дужках падаваць этымалагічнае напісанне слоў [8, с. 746], г. зн. запісваць так, як слова было зафіксавана ў першакрыніцы, і толькі потым прыводзіць сінонімы і апісанні. Высвятляецца гэта задачамі акадэмічнага слоўніка, які не толькі задавальняе штодзённыя практычныя патрэбы грамадства, але прызначаны вывучаць мову. Да таго ж, Я. Карскі прапаноўваў перад азначэннем «прыводзіць і дыялекталагічныя паралелі з іншым вымаўленнем» [8, с. 746].

У «Інструкцыі» да беларускага слоўніка не гаворыцца пра выкарыстанне *стылістычных памет*, што зразумела: 1) у народным маўленні, на якое складальнікі арыентаваліся, няма падзелу на кніжнае і гутарковае, спецыяльнае і агульнаўжывальнае; 2) разглядаўся моўны зрэз на сінхронным этапе, дзе не магло быць лексікі ўстарэлай і неалагізмаў. Гэтым адрозніваецца слоўнік жывой беларускай мовы ад большасці рускіх акадэмічных слоўнікаў, якія заўсёды сутыкаліся з размежаваннем царкоўна-славянскіх і рускіх элементаў і былі вымушаны ўводзіць мноства памет: напрыклад, «Слоўнік Акадэміі Расійскай» складаўся згодна з тэорыяй М. Ламаносава пра тры штылі, таму ў ім падаецца лексіка, што не мела абмежавальных памет, а таксама стылістычна маркіраваная лексіка з паметамі «слав.» (словы царкоўна-славянскай мовы), «проста», «прастамоўе» і «простанароднае» (для слоў размоўных, характэрных для нізкага і сярэдняга стыляў) і інш.

Устаноўку на адсутнасць стылістычных памет можна вытлумачыць выкарыстаннем шахматаўскай ідэі слоўніка-тэзаўруса, без размежаванняў паняццяў літаратурнае/абласное, сучаснае/устарэлае, агульнаўжывальнае/спецыяльнае, г. зн. без храналагічнага, нарматыўна-стылістычнага, арэальнага і ўзуальнага абмежавання.

Кожная рэестравая лексема, кожнае яе значэнне павінна было ілюстравацца *прыкладам* «з літаратурнай або народнай мовы» [2, с. 183]. Галоўнымі крытэрыямі адбору пэўнай адзінкі тэксту ў якасці прыкладу былі наступныя: 1) завершаная думка, глыбокая па сваім змесце, 2) дакладнае і выразнае раскрыццё значэння рэестравай адзінкі. Звярталася ўвага, што такім крытэрыям найбольш адпавядаюць прыказкі і прымаўкі, якія «сярод прыкладаў павінны займаць

пачэснае месца» [2, с. 183]. Да таго ж, яны адметныя з пункту погляду беларускага сінтаксісу. Адзначым, што калі прыклады дасылаліся «банальныя, не запісаныя з вуснаў народу, часта прыдуманыя самім запішчыкам і прытым няўмела» [5, с. 62], то яны адхіляліся.

У выпадку, калі прыклад не быў адшуканы на загалоўнае слова ці пэўныя яго значэнні, то трэба было даваць поўны лінгвістычны пашпарт слова (крыніца, з якой лексема ўзята, або мясцовасць, дзе яна ўжываецца), а таксама прыводзіць устойлівыя спалучэнні з гэтым словам: «напр., пры слове *баяць* – баяць казкі; пры слове *спорны* – спорны дождж» [2, с. 183]. Пры размяшчэнні прыкладаў мусіла захоўвацца храналогія: ад найбольш аддаленых па часе фіксацыі да больш сучасных, што дэманстравала б чытачу дынаміку гістарычнага развіцця значэння пэўнай адзінкі, як, напрыклад, у «Слоўніку польскай мовы» С. Ліндэ або ў «Варшаўскім слоўніку».

Важна адзначыць, што беларускія моваведы адмовіліся выкарыстоўваць ананімныя прыклады або прыклады, створаныя самімі складальнікамі (як у «Слоўніку Акадэміі Расійскай»), хоць у лексікаграфічнай практыцы больш зручныя для тлумачальных слоўнікаў адцягненыя ад пэўнай моўнай сітуацыі выразы, з мінімальна кароткім кантэкстам.

Паказальна, што ў якасці асноўнага сродку ілюстрацыі на кожнае зафіксаванае слова адназначна была абрана цытата, завершаны сказ (пар., у дагротаўскай лексікаграфіі выкарыстоўваўся выключна выраз: у Слоўніку 1847 г. цытат было мала праз невялікую колькасць цытуемых твораў; у Слоўніку пад рэд. Я. Грота кожнае слова мае прыклад з мастацкага твора, публіцыстыкі ці фальклора).

Кожны прыклад у слоўніку жывой беларускай мовы павінен быў суправаджацца *лінгвістычным пашпартам:* «без паказаньня вёскі і прозьвішча запішчыка запіс ня мае ніякай вартасьці» [9, с. 36]. Калі прыкладам з'яўляўся выпіс з літаратурнага твора, то пашпарт складаўся з прозвішча аўтара і назвы твора, калі выпіс з народнай мовы – то з указання прозвішча збіральніка, мясцовасці, дзе была зафіксавана лексема, і іншых мясцовасцей, для якіх характэрна ўказаная адзінка [2, с. 183].

Адзначым, што ў «Варшаўскім слоўніку» (1900–1927), які складаўся такімі аўтарытэтнымі вучонымі, як Я. Карловіч, А. Крыньскі і У. Нядзвецкі, і ўключаў, поруч з вялікай колькасцю гістарычнай лексікі, і шырокі фонд дыялектнай лексікі, адсутнічаюць паметы пра тэрытарыяльную лакалізацыю слова, як і спасылкі на крыніцы, з якіх былі выпісаны іншыя адзінкі.

Задачы слоўніка жывой беларускай мовы. Улічваючы асаблівасці канцэпцыі слоўніка жывой беларускай мовы, яе часава-прасторавыя межы, патрабаванні па ўключэнні/адхіленні ў рэестравай частцы пэўных лексічных пластоў, ілюстраванне іх прыкладамі і пад., можна абазначыць тыя задачы, што павінен быў вырашыць акадэмічны слоўнік:

1) выявіць лексічныя набыткі беларускай мовы, сабраць іх, каб потым «аўладаць гэтым вялікім скарбам і карыстацца ім» [2, с. 166];

2) пашырыць лексічны склад беларускай мовы за кошт увядзення значнага пласту спецыяльнай лексікі, а таксама стылістычна распрацаваць народную мову, каб зрабіць яе «прыгоднай ня толькі для пісаньня вершаў і штодзённага ўжытку, але й для выражэньня ёю самых глыбокіх навуковых ісьцін, самых тонкіх адценьняў нашай мысьлі» [2, с. 169];

3) даць нармаваны варыянт мовы, г. зн. уніфікаваць правапіс, вырашыць спрэчныя моманты [10; 11], указаць граматычна правільныя формы для розных часцін мовы, падаць і замацаваць сэнсава дакладныя адпаведнікі многім рускім і польскім словам, вызначыць правільнае кіраванне дзеяслоўных форм і інш.;

4) паказаць своеасаблівасць беларускай мовы ў параўнанні з рускай і польскай мовамі, г. зн. «апрацаваць мову» [2, с. 182], даць беларускія адпаведнікі ўсім русізмам, паланізмам і ўкраінізмам, што ўвайшлі ў народную мову [2, с. 183];

5) адлюстраваць сучасны стан мовы.

Падобныя мэты – «вычарпаць як мага больш глыбока багацці і яшчэ мала даследаваныя лексічныя скарбы ўкраінскай мовы» [21, с. 6] – украінскім лінгвістам не ўдалося вырашыць: «Руска-ўкраінскі слоўнік» аказаўся непрыдатным для карыстання, а Камісія па ўкладанні слоўніка жывой украінскай мовы фактычна не дала ніякіх вынікаў сваёй працы.

Адзначым, што такія задачы ніколі не стаялі перад рускай лексікаграфіяй: лексічныя сродкі збіраліся і апісваліся паступова, стылістычна мова распрацоўвалася ў лепшых творах пісьменнікаў і публіцыстаў, а пытанне пра своеасаблівасць і адметнасць рускай мовы наогул не ўздымалася, у адрозненне ад пытання кадыфікацыі. Напрыклад, яно было вельмі вострым у XVIII ст. (час стварэння «Слоўніка Акадэміі Расійскай»), калі розныя моўныя стыхіі зліваліся ў адзіную літаратурную мову.

Перад рускімі мовазнаўцамі ўвесь час стаяла іншая праблема: апісаць мову на пэўным сінхронным зрэзе, а не ў адзінстве з царкоўнаславянскай і старарускай, што да пачатку 20-х гадоў XX ст. так і не ўдалося ажыццявіць: нават пры ўкладанні слоўніка Я. Гротам «меўся на ўвазе не нарматыўны слоўнік сучаснай літаратурнай мовы, а своеасаблівы даведнік, у якім можна было б знайсці любое незразумелае слова, якое сустрэлася ў царкоўнай кнізе ці старажытным рукапісе, у народнай песні, казцы ці ў сучаснага пісьменніка» [17, с. 174–175]. Складальнікі слоўнікаў імкнуліся «дасягнуць у сваіх слоўніках шчаслівай паўнаты» [22, с. 64].

Адзначым, што задача стварыць слоўнік для шырокіх мас новага чытача, «для карыстання і навучання ўсіх» [23, с. 192], «каб кожны жыхар Расіі меў магчымасць навучыцца вялікай рускай мове» [24, с. 295], г. зн. масавы кароткі нарматыўны слоўнік-даведнік узорнай мовы, была пастаўлена У. Леніным перад групай рускіх мовазнаўцаў у 1921 г., але была вырашана толькі «Тлумачальным слоўнікам рускай мовы» пад рэд. Д. Ушакова (1934–1940).

Беларускія лінгвісты ставілі мэтай занатаваць усе набыткі сучаснай мовы, а не выбраць найбольш характэрныя, распаўсюджаныя адзінкі, якія не зазналі іншаземнага ўплыву, г. зн. апрацаваць народную мову, як і складальнік «Слоўніка жывой велікарускай мовы»: «прыйшоў час пашанаваць народную мову і выпрацаваць з яе мову адукаваную» [19, с. XXI]. Да таго ж айчынныя лексікографы, падобна А. А. Шахматаву, адмовіліся ад падзелу нацыянальнай мовы на літаратурную і мясцовую.

Заключэнне. Беларусаведы 20-х гадоў XX ст. стварылі арыгінальны па сваіх задачах слоўнік, які павінен быў выявіць лексічны склад беларускай народнай мовы і пашырыць яго праз увядзенне абстрактнай і тэрміналагічнай лексікі, пры гэтым падаючы нарматыўныя варыянты найменняў і напісанняў. Такім чынам даказвалася непаўторнасць і самастойнасць беларускай мовы ў параўнанні з рускай і польскай.

Крытэрыі адбору лексікі ў будучы слоўнік поўнасцю адпавядалі пастаўленым задачам: фільтраваны адбор запазычаных слоў і ўнясенне найбольш даўніх і частых з іх у гутарках з абавязковай этымалагічнай пазнакай і беларускім адпаведнікам; уключэнне вузкатэрытарыяльных дыялектызмаў; адхіленне наватвораў, арго, антрапонімаў і тапонімаў і інш. Як бачна, анамасіялагічны падыход быў вядучым: беларусазнаўцы імкнуліся зафіксаваць як мага большую колькасць абазначальных сродкаў адпаведных аб'ектаў рэчаіснасці, а не раскрыць патэнцыйныя словаўтваральныя магчымасці мовы.

Задачы слоўніка вырашаліся нават на ўзроўні пабудовы слоўнікавага артыкула: з мэтай вывучэння мовы выкарыстоўваўся фанетычны запіс ілюстрацый; адсутнасць стылістычных памет сведчыла пра храналагічнае і арэальнае адзінства тагачаснай беларускай мовы; неананімны прыклад на кожнае слова ці яго значэнне даваў звесткі пра функцыянаванне і змяненне слова, што спрыяла выпрацоўцы акцэнталагічных, марфалагічных і сінтаксічных норм; абавязковы лінгвістычны пашпарт даваў звесткі пра пашыранасць лексемы і магчымасць абрання яе нарматыўнай сярод шэрагу дыялектных сінонімаў.

Такім чынам, па сваім тыпе слоўнік жывой беларускай мовы, згодна з класіфікацыяй Л. Шчэрбы, з'яўляўся шматдыялектным поўным філолага-энцыклапедычным тлумачальна-перакладным тэзаўрусам-даведнікам акадэмічнага тыпу [25, с. 153]. Беларускія моваведы імкнуліся спалучыць у адным выданні і гротаўскі нарматыўны слоўнік і шахматаўскі тэзаўрус. Па сутнасці, гэта была спроба стварыць слоўнік мовы нацыі, каб на яго аснове, шляхам практычнага карыстання слоўнікам шырокімі масамі грамадства і інтэлігенцыяй, пазней выпрацаваць нарматыўны слоўнік літаратурнай мовы.

Спіс выкарыстанай літаратуры

1. Інструкцыя для зьбіраньня народнага слоўнікава-тэрмінолёгічнага матар'ялу ў беларускай мове // Наш край. – 1925. – № 1. – С. 49–53.

2. *Некрашэвіч, С.* Да пытаньня аб укладаньні слоўніка жывой беларускай мовы / С. Некрашэвіч // Полымя. – 1925. – № 5. – С. 164–186.

3. *Аглядальнік.* Некаторыя ўвагі на беларускую літаратурную тэрмінолёгію / Аглядальнік // Полымя. – 1923. – № 7–8. – С. 80–85. – Рэц. на кн.: БНТ. – Вып. 2. – Менск: Інбелкульт, 1923. – 74 с.

4. *Байкоў, М.* Аб зьбіраньні народнага слоўнікавага матар'ялу ў беларускай мове ў 1927 г. / М. Байкоў // Наш край. – 1927. – № 3. – С. 55–57.

5. *Байкоў, М.* Ад Камісіі для ўкладаньня слоўніка жывой беларускай мовы / М. Байкоў // Наш край. – 1926. – № 10–11. – С. 61–62.

6. *Байкоў, М.* Слоўнікавая праца на мясцох у БССР за тры гады (1925–1928) / М. Байкоў // Наш край. – 1928. – № 12. – С. 47–56.

7. *Байкоў, М.* Што зроблена ў справе зьбіраньня слоўнікавага матар'ялу на мясцох за 1926 год? / М. Байкоў // Наш край. – 1927. – № 1. – С. 36–39.

8. *Карскі, Я. Ф.* [Рэцэнзія] / Я. Ф. Карскі // Изв. по русскому языку и словесности. – Л.: АН СССР, 1929. – Т. II, кн. 2. – С. 745–746. – Рэц. на праект: Проект укладанья слоўніка жывой беларускай мовы. – Мінск: БАН, 1929. – 16 с.

9. *Касьпяровіч, М.* Як сабраць і ўкласьці слоўнік мовы свайго раёну / М. Касьпяровіч // Наш край. – 1928. – № 1. – С. 32–46.

10. *Лёсік, Я.* Некаторыя ўвагі да беларускае літаратурнае мовы / Я. Лёсік // Полымя. – 1924. – № 2. – С. 192–205.

11. *Лёсік, Я.* Неўстаноўленыя выпадкі нашага правапісу / Я. Лёсік // Полымя. – 1925. – № 2. – С. 129–148.

12. *Смоліч, А.* [Рэцэнзія] / А. Смоліч // Полымя. – 1922. – № 1. – С. 85–86. – Рэц. на кн.: Беларуская навуковая тэрміналёгія // Вестн. Народного комиссариата просвещения. – № 2. – С. 10.

13. *Жовтобрюх, М. А.* Сучасна українська літературна мова: Вступ. Лексика і фразеологія. Фонетика / М. А. Жовтобрюх. – Київ: Радянська школа, 1961. – 132 с.

14. *Івченко, М. П.* Сучасна українська літературна мова / М. П. Івченко. – Київ: Видавництво Київського університету, 1965. – 504 с.

15. *Зайцева, Т. В.* 40 років української радянської лексикографії / Т. В. Зайцева // Дослідження з мовознавства в Українській РСР за сорок років. – К.: Видавництво Академії наук УРСР, 1957. – С. 93–121.

16. *Паламарчук, Л. С.* Українська радянська лексикографія / Л. С. Паламарчук. – К.: Наукова думка, 1978. – 204 с.

17. История русской лексикографии / отв. ред. Ф. П. Сороколетов. – СПб.: Наука – Санкт-Петербургская фирма, 2001. – 611 с.

18. *Левашов, Е. А.* Ленин и словари / Е. А. Левашов, В. П. Петушков. – Ленинград: Наука, 1975. – 109 с.

19. *Даль, В. И.* Толковый словарь живого великорусского языка: в 4 т. / В. И. Даль. – М.: Русский язык – Медиа, 2003. – Т. 1: А–З. – 699 с.

20. *Градова, В. П.* Словарь современного украинского языка. Картотека / В. П. Градова, С. Ф. Левченко // Восточнославянские языки. Источники для их изучения. – М.: Наука. 1973. – С. 27–32.

21. Російсько-український словник: в 4 т. / Укр. АН, Комис. по сост. словаря укр. жив. языка. – Київ: Червоний шлях, 1924. – Т. 1. – 290 с.

22. *Срезневский, И. И.* Мысли об истории русского языка / И. И. Срезневский. – М.: КомКнига, 2007. – Изд. 3. – 136 с.

23. *Ленин, В. И.* Полное собрание сочинений / В. И. Ленин. – М.: Политиздат, 1982. – Изд. 5. – Т. 51. – 574 с.

24. *Ленин, В. И.* Полное собрание сочинений / В. И. Ленин. – М.: Политиздат, 1961. – Изд. 5. – Т. 24. – 567 с.

25. *Щерба, Л. В.* Избранные работы по языкознанию и фонетике / Л. В. Щерба. – СПб.: С.-Петерб. ун-т, 2002. – Т. 1. – 180 с.

Паступіла ў рэдакцыю 06.04.2015

Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **ноябрь–декабрь** **Том 59 № 6**

АГРАРНЫЕ НАУКИ

УДК 636.237.21.034(476.6)

Член-корреспондент В. К. ПЕСТИС, Л. А. ТАНАНА, С. А. КАТАЕВА

МОЛОЧНАЯ ПРОДУКТИВНОСТЬ ЧЕРНО-ПЕСТРЫХ КОРОВ РАЗЛИЧНОЙ СЕЛЕКЦИИ

Гродненский государственный аграрный университет, Гродно, Беларусь
ggau@ggau.by; 5871319@mail.ru

Исследования посвящены изучению и всестороннему анализу хозяйственно полезных качеств дочерей быков-производителей белорусской, канадской, американской, шведской и венгерской селекции. Изучено влияние происхождения быков-производителей на молочную продуктивность их дочерей и экономическую эффективность производства молока.

Ключевые слова: генотип, порода, крупный рогатый скот, телки, коровы, молочная продуктивность, уровень рентабельности.

V. K. PESTIS, L. A. TANANA, S. A. KATAEVA

MILK PRODUCTIVITY OF BLACK-MOTLEY COWS OF DIFFEENT BREEDING

Grodno State Agrarian University, Grodno, Belarus
ggau@ggau.by; 5871319@mail.ru

The work is devoted to the study and a comprehensive analysis of economically useful qualities of daughters of Belarusian, Canadian, American, Swedish, and Hungarian selection sires. The influence of the origin of sires on the milk production of their daughters and the economic efficiency of milk production is examined.

Keywords: genotype, breed, cattle, heifers, cows, milk production, level of profitability.

Введение. Стратегической задачей агропромышленного комплекса Республики Беларусь является обеспечение населения высококачественными продуктами питания, среди которых наиболее ценным и незаменимым является молоко. Молоко и молочные продукты в рационе человека служат основными источниками полноценных белков, незаменимых аминокислот, витаминов и многих других питательных веществ. Кроме того, данные продукты являются наиболее доступными для основной массы населения. Решение проблемы увеличения объемов производства молока и повышения его качества с целью обеспечения продовольственной безопасности страны, сохранения и укрепления здоровья нации невозможно без развития молочного скотоводства.

Одной из задач селекционно-племенной работы в соответствии с Республиканской программой по племенному делу в животноводстве на 2011–2015 гг. является создание голштинской популяции скота молочного направления продуктивности численностью около 60 % от планируемой численности поголовья в молочном скотоводстве [1]. Среди важнейших условий повышения молочной продуктивности коров, наряду с улучшением условий кормления и содержания, является использование в случной сети наиболее высокоценных быков-производителей [2]. В основу выведения создаваемой популяции положено дальнейшее скрещивание коров белорусской черно-пестрой породы с высокоценными голштинскими производителями из Канады, США, Швеции, Венгрии, Германии и других стран [3–5]. Использование в селекционном процессе быков-

© Пестис В. К., Танана Л. А., Катаева С. А., 2015.

улучшателей как импортной, так и отечественной селекции является актуальной проблемой, решение которой обеспечит проведение в республике направленной селекции крупного рогатого скота с целью улучшения молочной продуктивности, формирования стад с лучшим качеством молока, пригодным для получения высококачественных молочных продуктов.

Учитывая вышеизложенное, целью настоящих исследований является изучение влияния быков-производителей импортной селекции на молочную продуктивность их дочерей, выявление новых генотипов, которые в условиях нашей республики по показателям молочной продуктивности более эффективны и их можно будет рекомендовать для дальнейшего разведения.

Материалы и методы исследований. Исследования проводились в 2010–2014 гг. в ГП «Племзавод «Россь» Волковысского района и КСУП «Племзавод «Кореличи» Кореличского района Гродненской области. Хозяйства являются базовыми по совершенствованию белорусской черно-пестрой породы крупного рогатого скота и характеризуются высокой культурой ведения животноводства: налажены племенной и зоотехнический учет, кормление и содержание животных соответствуют их биологическим особенностям. Объектом исследования служили коровы белорусской черно-пестрой породы, полученные от быков-производителей белорусской, канадской, американской, шведской и венгерской селекции следующих линий: Хильтьес Адема 37910, Рутьес Эдуарда 31646, Нико 31652, Рефлекшн Соверинга 198998, Монтвик Чифтейна 95679, Вис Айдиала 933122 и Пабст Говернера 882933. В зависимости от места рождения отцов изучаемых животных были сформированы контрольная и опытные группы. Животные белорусской селекции (I) – контрольная группа, канадской (II), американской (III), шведской (IV) и венгерской (V) селекции – опытные группы.

Кормление животных соответствовало «Нормам и рационам кормления сельскохозяйственных животных» [6]. В период проведения исследований расход кормов в расчете на одну голову колебался от 70,0 до 75,6 ц к. ед. в ГП «Племзавод «Россь» и от 72,9 до 76,5 ц к. ед. в КСУП «Племзавод «Кореличи». В пределах каждого из хозяйств условия кормления и содержания коров были аналогичными.

У подопытных животных по законченным лактациям изучали молочную продуктивность по следующим показателям: удой (кг), содержание жира и белка (%), выход молочного жира и белка за 305 дней лактации (кг). В обработку включали показатели по тем животным, у которых продолжительность лактации была не меньше 240 дней, а возраст при первом отеле составлял 24–30 месяцев. Для экспериментальной проверки эффективности разведения животных различного генеза и углубленной оценки изучаемых признаков проведены исследования по раздою первотелок в ГП «Племзавод «Россь». Исследования продолжались первые 90 дней лактации, в течение которых один раз в месяц определяли молочную продуктивность путем проведения контрольных доений.

Экономическую эффективность производства молока, полученного от дочерей быков-производителей различного происхождения, определяли по стоимости дополнительно полученного молока с пересчетом на базисную жирность и с учетом надбавки за содержание белка выше базисной нормы. При обработке материалов исследований определяли статистические показатели, характеризующие выборочную совокупность по Е. К. Меркурьевой [7].

Результаты и их обсуждение. Изучение молочной продуктивности коров в ГП «Племзавод «Россь» по первой законченной лактации показало, что удой был значительно выше у первотелок – дочерей американских быков-производителей – 8018 кг (табл. 1).

При сравнении с удоем животных других групп разница оказалась значительной и статистически достоверной: превосходство над сверстницами – дочерями быков белорусского, канадского, шведского и венгерского происхождения составило 6,8 % ($P < 0,01$); 3,6 % ($P < 0,05$); 6,3 % ($P < 0,01$) и 7,7 % ($P < 0,01$) соответственно. Существенное превосходство над животными I, II, III и V групп по содержанию жира и белка в молоке наблюдалось у первотелок, полученных от быков-производителей шведской селекции ($P < 0,05–0,001$). По количеству молочного жира превосходство дочерей быков американской селекции над сверстницами I, II, IV и V групп составило 5,2 % ($P < 0,05$); 3,4 % ($P > 0,05$); 2,4 % ($P > 0,05$); 10,2 % ($P < 0,001$); по количеству молочного белка – 9,1 % ($P < 0,001$); 3,5 % ($P < 0,05$); 4,4 % ($P > 0,05$); 11,4 % ($P < 0,001$) соответственно.

Т а б л и ц а 1. **Молочная продуктивность подопытных первотелок**

Показатель	Статистический показатель	I группа	II группа	III группа	IV группа	V группа
ГП «Племзавод «Россь»						
Кол-во гол.	*n*	115	137	138	80	42
Удой, кг	*M* ± *m*	7510 ± 118,5	7736 ± 93,8	8018 ± 105,2**	7544 ± 142,3	7442 ± 176,6
	Cv, %	16,9	14,2	15,4	16,8	15,4
Жир, %	*M* ± *m*	3,80 ± 0,03	3,77 ± 0,02	3,78 ± 0,02	3,91 ± 0,03*	3,69 ± 0,03
	Cv, %	7,8	7,7	5,0	7,4	6,1
Белок, %	*M* ± *m*	3,20 ± 0,01	3,28 ± 0,01***	3,29 ± 0,01***	3,34 ± 0,02***	3,17 ± 0,02
	Cv, %	4,0	3,8	4,4	4,8	3,9
Молочный жир, кг	*M* ± *m*	288 ± 5,9	293 ± 4,7	303 ± 4,2*	296 ± 6,7	275 ± 7,1
	Cv, %	22,0	18,8	16,2	20,2	16,7
Молочный белок, кг	*M* ± *m*	241 ± 3,9	254 ± 3,2**	263 ± 3,6***	252 ± 4,8	236 ± 5,8
	Cv, %	17,2	14,7	15,9	16,9	15,8
КСУП «Племзавод «Кореличи»						
Кол-во гол.	*n*	115	125	85	61	31
Удой, кг	*M* ± *m*	7633 ± 70,7	7720 ± 81,5	8084 ± 77,2***	7840 ± 135,4	7425 ± 166,5
	Cv, %	9,9	11,8	8,8	13,5	12,5
Жир, %	*M* ± *m*	3,96 ± 0,03	3,96 ± 0,02	3,90 ± 0,03	4,02 ± 0,03	3,74 ± 0,05
	Cv, %	7,4	5,9	6,7	6,2	8,1
Белок, %	*M* ± *m*	3,38 ± 0,02	3,40 ± 0,01	3,38 ± 0,02	3,45 ± 0,02**	3,22 ± 0,04
	Cv, %	5,4	3,9	4,1	4,6	6,8
Молочный жир, кг	*M* ± *m*	303 ± 3,6	306 ± 3,8	315 ± 3,8*	315 ± 5,7	278 ± 8,0
	Cv, %	12,6	13,8	11,0	14,1	16,0
Молочный белок, кг	*M* ± *m*	258 ± 2,5	262 ± 2,9	274 ± 2,9***	270 ± 4,4*	239 ± 6,2
	Cv, %	10,4	12,5	9,8	12,8	14,3

П р и м е ч а н и я: * – $P < 0,05$; ** – $P < 0,01$; *** – $P < 0,001$.

В КСУП «Племзавод «Кореличи» отмечалась аналогичная тенденция по показателям продуктивности во всех группах животных. Дочери американских быков превосходили своих сверстниц опытных групп по удою на 3,1–8,9 %, а животных контрольной группы – на 5,9 %, или 451 кг ($P < 0,001$). Потомки быков шведской селекции превосходили всех своих сверстниц по показателям жирномолочности и белковомолочности на 0,06–0,28 и 0,05–0,23 п. п. соответственно. Наихудшие показатели, как по удою, так и по содержанию жира и белка в молоке, имели дочери быков-производителей венгерского происхождения.

Изучение молочной продуктивности животных всех групп в ГП «Племзавод «Россь» по второй лактации показало, что удои изучаемых коров увеличились по сравнению с первой лактацией по I, II, III, IV и V группам на 3,9; 4,0; 3,7; 4,7 и 3,8 % соответственно. Превосходство дочерей быков американского происхождения по данному показателю над сверстницами I, II, IV и V групп по второй лактации составило 6,6 ($P < 0,01$), 3,4, 5,3 и 7,7 % ($P > 0,05$) соответственно. Более высоким содержанием жира и белка в молоке характеризовались дочери быков шведской селекции – на 0,05–0,19 п. п. ($P < 0,001$) и 0,05–0,12 п. п. ($P < 0,05$) соответственно выше по сравнению животными других групп. По количеству молочного жира и белка дочери американских быков-производителей превосходили своих сверстниц на 2,0–10,0 и 3,9–8,9 % соответственно.

В КСУП «Племзавод «Кореличи» сохраняется та же тенденция: потомки быков американской селекции превосходили своих сверстниц по удою на 1,3–6,0 %. Лучшие показатели по содержанию жира и белка в молоке имели дочери быков шведского происхождения. Их превосходство по содержанию жира составило 0,07–0,29 п. п., белка – 0,06–0,17 п. п. По количеству молочного жира и белка лидерами являлись дочери быков шведского и американского происхождения.

Наиболее полно и объективно молочную продуктивность скота можно оценить по показателям полновозрастной лактации, когда животное физиологически сформировалось и способно в полной мере реализовать свой генетический потенциал. Анализ данных о молочной продук-

тивности коров по третьей лактации в ГП «Племзавод «Россь» свидетельствует о том, что дочери американских быков характеризовались более высокими удоями (на 357–560 кг, или 4,4–7,1 %), по сравнению с животными, полученными от быков-производителей других групп. Содержание жира и белка в молоке у животных IV группы было на 0,05–0,13 и 0,02–0,14 п.п. выше, чем у животных остальных групп. В то же время более высоким выходом молочного жира и белка характеризовались животные III группы, у которых было отмечено достоверное превосходство по данным показателям над животными I контрольной группы (на 7,6 % ($P < 0,05$) и 9,6 % ($P < 0,01$) соответственно).

Аналогичная тенденция установлена и у коров, разводимых в КСУП «Племзавод «Кореличи». Так, животные, полученные от быков-производителей американской селекции, имели удои на 216 кг, или 2,6 % выше ($P > 0,05$) по сравнению со сверстницами контрольной группы и на 122–420 кг, или 1,5–5,2 % выше по сравнению со сверстницами остальных опытных групп. Выявлено, что содержание жира и белка в молоке было на 0,04–0,13 и 0,05–0,17 п. п. соответственно выше у потомков быков-производителей шведской селекции. По количеству молочного жира и белка было отмечено превосходство коров, полученных от быков американского происхождения. Наихудшими показателями молочной продуктивности, как и в предыдущие лактации, в обоих хозяйствах характеризовались животные, полученные от быков венгерской селекции (табл. 2).

Т а б л и ц а 2. **Молочная продуктивность коров по третьей лактации**

Показатель	Статистический показатель	I группа	II группа	III группа	IV группа	V группа
ГП «Племзавод «Россь»						
Кол-во гол.	*n*	60	77	62	43	12
Удой, кг	*M* ± *m*	7911 ± 183,5	8050 ± 184,0	8407 ± 175,9*	8018 ± 217,8	7849 ± 654,6
	Cv, %	18,0	20,1	16,5	17,8	28,8
Жир, %	*M* ± *m*	3,67 ± 0,02	3,68 ± 0,01	3,71 ± 0,02*	3,76 ± 0,02**	3,63 ± 0,04
	Cv, %	3,6	2,5	3,2	2,7	3,7
Белок, %	*M* ± *m*	3,15 ± 0,01	3,18 ± 0,02	3,24 ± 0,01***	3,26 ± 0,02***	3,12 ± 0,03
	Cv, %	3,6	4,9	3,5	3,9	2,9
Молочный жир, кг	*M* ± *m*	290 ± 6,8	296 ± 6,7	312 ± 6,8*	302 ± 8,6	285 ± 23,9
	Cv, %	18,2	20,0	17,2	18,8	29,0
Молочный белок, кг	*M* ± *m*	249 ± 5,8	256 ± 6,3	273 ± 6,0**	262 ± 7,6	245 ± 19,7
	Cv, %	18,1	21,4	17,4	19,1	28,0
КСУП «Племзавод «Кореличи»						
Кол-во гол.	*n*	57	61	40	34	8
Удой, кг	*M* ± *m*	8336 ± 141,1	8430 ± 132,5	8552 ± 167,7	8401 ± 169,6	8132 ± 633,7
	Cv, %	12,8	12,3	12,4	11,8	22,0
Жир, %	*M* ± *m*	3,94 ± 0,03	3,97 ± 0,03	3,98 ± 0,05	4,02 ± 0,04	3,89 ± 0,09
	Cv, %	5,7	6,8	7,9	6,1	6,4
Белок, %	*M* ± *m*	3,30 ± 0,02	3,32 ± 0,03	3,38 ± 0,03*	3,43 ± 0,04**	3,26 ± 0,07
	Cv, %	5,6	6,2	5,4	6,2	6,0
Молочный жир, кг	*M* ± *m*	328 ± 5,7	334 ± 5,4	339 ± 6,7	338 ± 8,6	316 ± 25,2
	M ± *m*	13,0	12,7	12,5	14,8	22,6
Молочный белок, кг	*Cv*, %	276 ± 5,4	281 ± 5,1	289 ± 6,3	288 ± 6,5	267 ± 24,2
		14,7	14,2	13,8	13,2	25,7

П р и м е ч а н и я: * – $P < 0,05$; ** – $P < 0,01$; *** – $P < 0,001$.

Коэффициент фенотипической изменчивости удоя коров по 1–3 лактациям колебался по хозяйствам в границах 8,8–28,8 %, массовой доли жира в молоке – 3,5–7,9 %, белка – 3,8–10,7 %. Определенной зависимости между величиной коэффициента вариации и уровнем продуктивности не установлено.

Способность к высокой продуктивности у коров может быть реализована в начале лактации путем организации раздоя. Удои некоторых коров сразу после отела достигают максимального уровня на 2–3 неделе лактации, другие же раздаиваются постепенно (к 8–10 неделе лактационного периода). Для определения потенциальных возможностей животных в начале их продуктивного использования важнейшей предпосылкой является проведения раздоя коров-первотелок.

Исследованиями установлено, что первотелки в ГП «Племзавод «Россь» достигли высших суточных удоев в конце второго и начале третьего месяцев лактации. Характеризуя молочную продуктивность первотелок за первые 90 суток лактации, можно отметить, что лучше раздаивались животные II, III и IV групп, о чем свидетельствуют среднесуточные удои в этих группах – более 26 кг. При этом удой за первые 90 дней лактации первотелок, полученных от быков-производителей американской селекции, по сравнению со сверстницами был больше на 127–215 кг ($P > 0,05$) и составил 2527 кг. Первотелки III группы отличались как более высокой продуктивностью в целом, так и высшим суточным удоем – 28,1 кг, который на 2,4 кг (9,3 %) превышал удой I контрольной группы и на 0,5–3,0 кг (1,8–12,0 %) – удой остальных опытных групп ($P > 0,05$).

Повышенная жирномолочность и белковомолочность в период раздоя были отмечены у первотелок I (3,60 и 3,17 %) и IV (3,59 и 3,16 %) групп соответственно. По выходу молочного жира и белка преимущество оставалось за первотелками III группы, которые превосходили по этим показателям животных контрольной группы на 6,0 кг ($P > 0,05$), что свидетельствует об интенсивном и напряженном синтезе молочного жира и белка у этих животных в течение раздоя и, как следует из представленных выше данных, в течение всех лактаций.

Расчет величины чистого дохода, полученного от реализации молока подопытных животных в ГП «Племзавод «Россь», свидетельствует о том, что от потомков быков канадской, американской и шведской селекции его было получено больше (в расчете на 1 голову) соответственно на 368,6; 1252,7 и 1510,6 тыс. руб. (10,0; 33,9 и 40,9 %), чем от потомков быков белорусской селекции. Превосходство по уровню рентабельности производства молока, полученного от дочерей быков вышеназванных селекций, составило 1,4; 4,5 и 6,7 п. п. соответственно.

В КСУП «Племзавод «Кореличи» наибольший чистый доход на одну голову и уровень рентабельности производства молока был получен от потомков быков шведской селекции – 7722,0 тыс. руб. и 31,5 %, что на 1724,4 тыс. руб. (28,8 %) и 6,9 п.п. соответственно больше, чем от животных контрольной группы. Животные, полученные от быков-производителей канадской и американской селекции, превзошли по данным показателям коров контрольной группы на 452,7 и 1140,2 тыс. руб. (7,6 и 19,0 %) и 1,6; 4,0 п.п. соответственно. Совокупная стоимость дополнительно полученного молока от потомков быков канадской, американской и шведской селекции составила в ГП «Племзавод «Россь» 221243,9 тыс. руб., в КСУП «Племзавод «Кореличи» – 135203,6 тыс. руб. Менее эффективным в обоих хозяйствах было производство молока от дочерей быков венгерской селекции.

Заключение. Установлено, что использование быков голштинской породы американской селекции позволило повысить удои дочерей на 2,6–6,8 %, продукцию молочного жира и молочного белка на 2,8–7,6 и 4,7–9,6 % соответственно ($P < 0,05–0,001$); использование быков голштинской породы шведской селекции – повысить жирномолочность и белковомолочность коров на 0,06–0,11 и 0,07–0,14 п. п. соответственно. Выявлено, что первотелки этих же групп лучше поддаются раздою. У них за первые 90 дней лактации удой увеличился на 3,8–9,3 % по сравнению со сверстницами – дочерями быков белорусской селекции.

Использование в селекционном процессе потомков производителей голштинской породы канадской, американской и шведской селекции обеспечило высокий экономический эффект. Уровень рентабельности производства молока, полученного от дочерей этих быков, в разрезе хозяйств был на 1,4–1,6; 4,0–4,5 и 6,7–6,9 п. п. соответственно выше, чем от сверстниц – дочерей быков белорусской селекции.

Данные проведенных исследований свидетельствуют о наибольшей целесообразности использования быков-производителей американской и шведской селекции при создании селекционных стад крупного рогатого скота с лучшими количественными и качественными характеристиками молока.

Список использованной литературы

1. Республиканская программа по племенному делу в животноводстве на 2011–2015 годы: постановление Совета Министров Респ. Беларусь, 31 дек. 2010 г., № 1917 // Нац. реестр правовых актов Респ. Беларусь. – 2011. – № 4. – 5/33102.

2. Республиканская программа развития молочной отрасли в 2010–2015 годах: постановление Совета Министров Респ. Беларусь, 12 нояб. 2010 г., № 1678 // Нац. реестр правовых актов Респ. Беларусь. – 2010. – № 279. – 5/32869.

3. *Ножинская, З. И.* Особенности роста и развития телок черно-пестрой породы белорусского, европейского и североамериканского происхождения / З. И. Ножинская // Зоотехническая наука Беларуси: сб. науч. тр. / РУП «Науч.-практ. центр Нац. акад. наук Беларуси по животноводству». – Минск, 2009. – Т. 44, ч. 1. – С. 133–140.

4. Подбор при совершенствовании белорусской черно-пестрой породы крупного рогатого скота / Л. А. Танана [и др.]; Гродн. гос. аграр. ун-т. – Гродно, 2006. – 106 с.

5. Использование генофонда белорусской черно-пестрой породы крупного рогатого скота различного генеза в селекционном процессе / Л. А. Танана [и др.]; Гродн. гос. аграр. ун-т. – Гродно, 2008. – 130 с.

6. Нормы и рационы кормления сельскохозяйственных животных: справ. пособие / А. П. Калашников [и др.]. – М.: Россельхозакадемия, 2003. – 456 с.

7. *Меркурьева, Е. К.* Биометрия в селекции и генетике сельскохозяйственных животных / Е. К. Меркурьева. – М.: Колос, 1970. – 423 с.

Поступило в редакцию 15.07.2015